

LEIBNIZ' FORMULA FOR π DEDUCED BY A "MAPPING" OF THE CIRCULAR DISC*

VIGGO BRUN

In this journal I have published an article [1] in 1955: "On the problem of partitioning the circle so as to visualize Leibniz' formula for π ." I began with quoting an interesting remark by Lionardo da Vinci [4]. In his opinion the art of painting—the art of the eye—is superior to poetry—the art of the ear—because the eye is a much finer organ than the ear. He says: "If you, historians, or poets, or mathematicians had not seen things with your eyes you could not report them in writing."

I had got the idea to my research by reading an article of lord Brouncker [2] from 1668, where he gave a "squaring of the hyperbola, by an infinite series of rational numbers", namely the area A under the hyper-

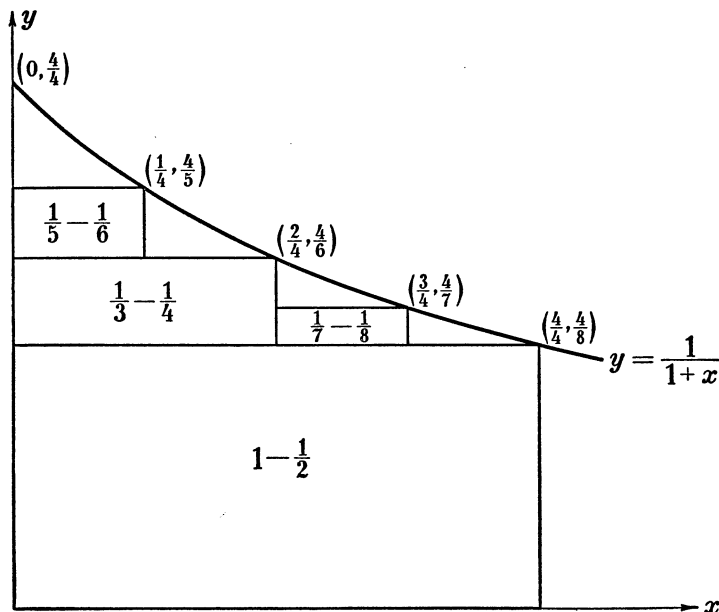


Fig. 1

* Lecture in the Norwegian Mathematical Society, Oct. 21, 1969.

bola $y=1/(1+x)$, when x goes from 0 to 1. Lord Brouncker used the same bisecting-summation as Archimedes did when he determined the area of the segment of a parabola. As seen from fig. 1, lord Brouncker obtained in this way the formula

$$A = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

In my article, I tried to divide in a corresponding manner the circular disc so that the formula of Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

could be "seen with the eyes", to use the words of Lionardo. I concluded my article in this way: "Obviously I have not succeeded in finding an equally "visible" formula for π as lord Brouncker found for $\ln 2$. It would surely be of great interest if someone could find a better "charting" of the area of the circle to illustrate this "arithmetical formula" for π , which certainly is one of the most glorious conquests in mathematics."

One of the reasons for not succeeding was that I did not know a simple deduction of the area under the curve $y=x^n$ when x goes from 0 to 1. A closer study of Fermat's method to calculate this area recently gave me the idea to use a similar procedure for the circular disc. Fermat [3] used a section of the interval from 0 to 1 following the terms of a geometric series, with quotient < 1 .

Let us circumscribe a circle quadrant with radius 1 by a square and divide the right squareside by the points with ordinates $1, k, k^2, \dots$,

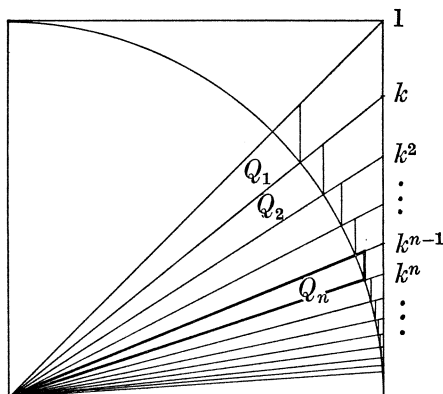


Fig. 2

where $k < 1$ (see fig. 2). The calculation of the areas Q_n in the eighth part of the circle gives

$$Q_n = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{k^{n-1}}{1+k^{2n}} = \frac{1-k}{2} k^{n-1} (1 - k^{2n} + k^{4n} - k^{6n} + \dots),$$

valid for $k < 1$ and $n \geq 1$, and consequently

$$Q_1 = \frac{1-k}{2} (1 - k^2 + k^4 - k^6 + \dots)$$

$$Q_2 = \frac{1-k}{2} (k - k^5 + k^9 - k^{13} + \dots)$$

$$Q_3 = \frac{1-k}{2} (k^2 - k^8 + k^{14} - k^{20} + \dots)$$

.....

A vertical summation gives

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n &= \frac{1-k}{2} \left(\frac{1}{1-k} - \frac{k^2}{1-k^3} + \frac{k^4}{1-k^5} - \frac{k^6}{1-k^7} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2}{1+k+k^2} + \frac{k^4}{1+k+\dots+k^4} - \frac{k^6}{1+k+\dots+k^6} + \dots \right). \end{aligned}$$

Let us also inscribe a "circular saw" in the eighth part of the circle (see fig. 3). A calculation of the areas P_n gives

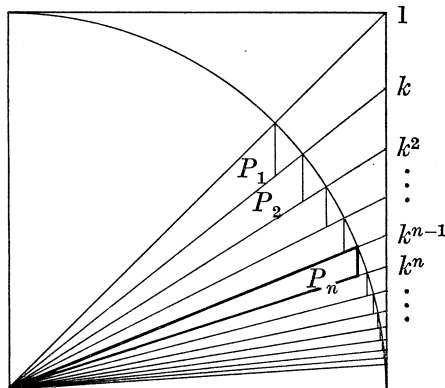


Fig. 3

$$P_n = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{k^{n-1}}{1+k^{2n-2}} = \frac{1-k}{2} k^{n-1} (1 - k^{2n-2} + k^{4n-4} - k^{6n-6} + \dots),$$

valid for $k < 1$ and $n \geq 2$. For $n=1$ we have

$$P_1 = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

A similar vertical summation as above gives

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \frac{1-k}{4} + \frac{1}{2} k \left(1 - \frac{k^2}{1+k+k^2} + \frac{k^4}{1+k+\dots+k^4} - \dots \right).$$

Clearly

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} P_n < \frac{\pi}{4} < 2 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n,$$

where the difference between the upper and the lower bound is

$$(1-k) \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{1+k+k^2} + \frac{k^4}{1+k+\dots+k^4} - \dots \right) < \frac{1-k}{2}.$$

Using the upper bound, we conclude that

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{k \rightarrow 1} \left(1 - \frac{k^2}{1+k+k^2} + \frac{k^4}{1+k+\dots+k^4} - \frac{k^6}{1+k+\dots+k^6} + \dots \right),$$

and therefore

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

If we compare with lord Brouncker's "mapping" of his hyperbolic area, we must admit that our procedure has not led to a division of our area in parts $1 - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, etc. It was necessary to apply a calculation with a limiting process.

Let us try to give a geometrical meaning to the terms

$$A_1 = \frac{1-k}{2} (1-k^2), \quad A_2 = \frac{1-k}{2} (k-k^5), \text{ etc.}$$

in our vertical summation of Q_n , which are producing the term $1 - \frac{1}{3}$ in $\pi/4$. It is possible to interpret $A_1, A_2, \dots$ as trapezoids inside $Q_1, Q_2, \dots$

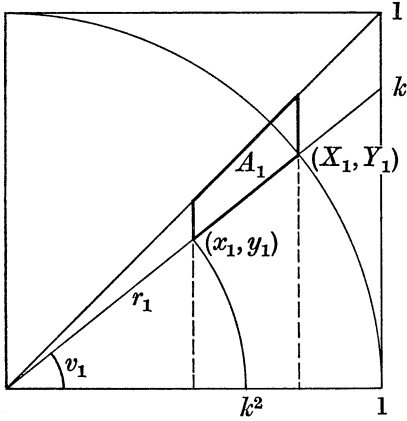


Fig. 4

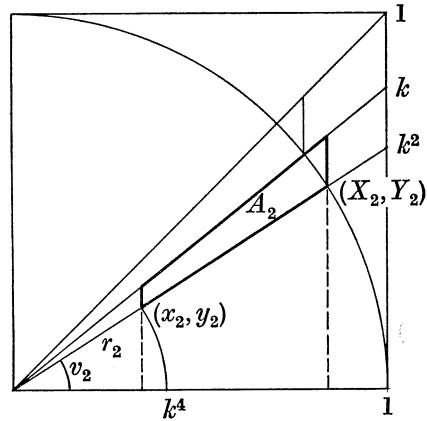


Fig. 5

In figs. 4 and 5, we have drawn circular arcs with radii k^2 and k^4 respectively. For the next trapezoid with area A_3 , we must draw a circular arc with radius k^6 , etc. From fig. 4 we see that

$$A_1 = \frac{1-k}{2} (X_1^2 - x_1^2) = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{1-k^4}{1+k^2} = \frac{1-k}{2} (1-k^2),$$

as wanted. We also see that

$$x_1^2 + y_1^2 = k^4 = \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^4, \quad \text{or} \quad r_1 = \operatorname{tg}^2 v_1.$$

Likewise we get from fig. 5 that

$$A_2 = \frac{1-k}{2} (k - k^5),$$

and

$$x_2^2 + y_2^2 = k^8 = \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^4, \quad \text{or} \quad r_2 = \operatorname{tg}^2 v_2.$$

Generally we get

$$x_n^2 + y_n^2 = \left(\frac{y_n}{x_n}\right)^4, \quad \text{or} \quad r_n = \operatorname{tg}^2 v_n.$$

These equations are independent of k . We can therefore interpret geometrically the formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2}{1+k+k^2} \right)$$

as a sum of trapezoids, all of them having their lower left corner on the curve (fig. 6)

$$r = \operatorname{tg}^2 v.$$

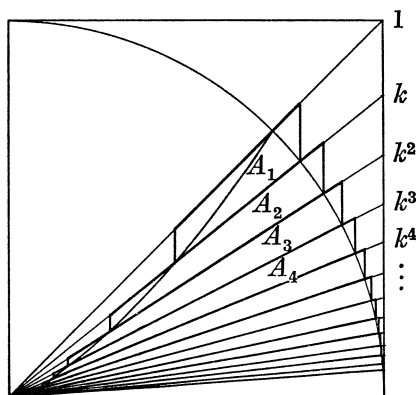


Fig. 6

Let us also study the terms giving rise to $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ in $\pi/4$:

$$B_1 = \frac{1-k}{2} (1-k^2) k^4, \quad B_2 = \frac{1-k}{2} (1-k^4) k^9, \text{ etc.}$$

We can give these terms in our vertical summation a geometrical interpretation as trapezoids situated between A_1 and the origin, between A_2

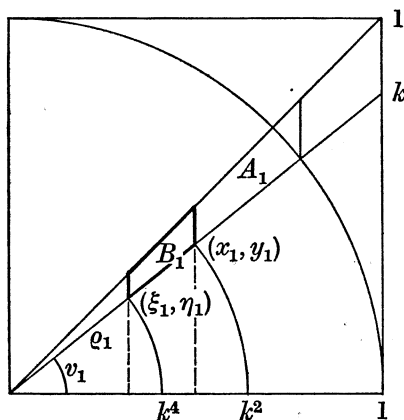


Fig. 7

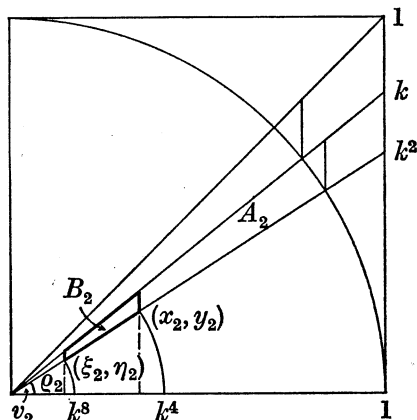


Fig. 8

and the origin, etc. A study of figs. 7 and 8 shows that the trapezoids B_1 and B_2 have the areas we want. Further

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = k^8 = \left(\frac{\eta_1}{\xi_1}\right)^8, \quad \varrho_1 = \operatorname{tg}^4 v_1$$

$$\xi_2^2 + \eta_2^2 = k^{16} = \left(\frac{\eta_2}{\xi_2}\right)^8, \quad \varrho_2 = \operatorname{tg}^4 v_2.$$

In general we can deduce that the lower left corner of B_n is situated on the curve

$$r = \operatorname{tg}^4 v.$$

This leads to the conjecture that it is possible to construct a "map" of the eighthpart of the circular disc by means of the boundary curves

$$r = \operatorname{tg}^2 v, \quad r = \operatorname{tg}^4 v, \quad r = \operatorname{tg}^6 v, \dots$$

or in cartesian coordinates:

$$x^6 + x^4 y^2 = y^4, \quad x^{10} + x^8 y^2 = y^8, \quad x^{14} + x^{12} y^2 = y^{12}, \text{ etc.}$$

between parts with areas

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right), \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right), \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right), \quad \dots$$

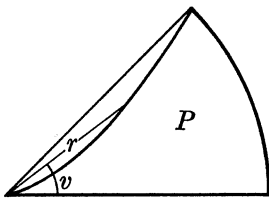


Fig. 9

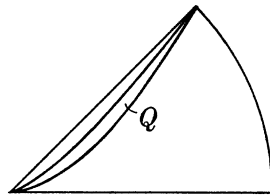


Fig. 10

It is necessary to verify this conjecture. (See figs. 9 and 10.) For the area P between the axis and the curves $r=1$ and $r=\operatorname{tg}^2 v$ we obtain

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} dv - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tg}^4 v dv = \frac{1}{2} (I_0 - I_4),$$

where we have introduced the notation

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}^n v \, dv.$$

For the area Q between the curves $r = \operatorname{tg}^2 v$ and $r = \operatorname{tg}^4 v$ we obtain

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}^4 v \, dv - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}^8 v \, dv = \frac{1}{2} (I_4 - I_8), \text{ etc.}$$

It is obvious that $I_{n+1} < I_n$ because $\operatorname{tg}^{n+1} v < \operatorname{tg}^n v$ in the interval from 0 to $\pi/4$. Since

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}^{n-1} v (1 + \operatorname{tg}^2 v) \, dv = \frac{1}{n} \left[\operatorname{tg}^n v \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{n},$$

we obtain the recursive formula

$$I_{n-1} + I_{n+1} = \frac{1}{n}.$$

From this and $I_n > 0$ we conclude that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

Further

$$I_{n-1} - I_{n+3} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

and therefore

$$I_0 - I_4 = 1 - \frac{1}{3}, \quad I_4 - I_8 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \quad I_8 - I_{12} = \frac{1}{9} - \frac{1}{11}, \dots,$$

which verifies our conjecture.

We are now able to draw a "map" of the circular disc (see fig. 11). Here the four fan-shaped parts together have the area $4(1 - \frac{1}{3})$, the eight greatest sickle-formed parts the area $4(\frac{1}{5} - \frac{1}{7})$, the next-greatest sickle-formed parts the area $4(\frac{1}{9} - \frac{1}{11})$, and so on. The equations for one set of limiting curves, in a suitable polar coordinate system, have the very simple form $r = \operatorname{tg}^{2n} v$, $n = 1, 2, 3, \dots$

I suppose that Lionardo da Vinci would have been glad to see this figure "with his eyes"!

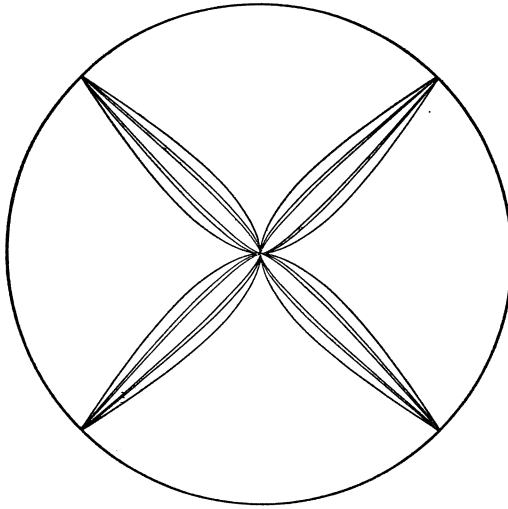


Fig. 11

REFERENCES

- [1] VIGGO BRUN: *On the problem of partitioning the circle so as to visualize Leibniz' formula for π* . Nordisk Mat. Tidsskrift 3 (1955), pp. 159–166. Compare V. BRUN: *Alt er tall* (p. 67), Universitetsforlaget, Oslo 1964.
- [2] LORD BROUNCKER: *The squaring of the Hyperbola, by an infinite series of rational numbers together with its demonstration by that Eminent Mathematician the Right Honorable the Lord Viscount Brouncker*. Phil. Trans. 4 (1668).
- [3] FERMAT: *Œuvres* I, pp. 255–288 and III, pp. 216–240. Compare C. B. BOYER: *A history of mathematics* (p. 399), Brooklyn, New York 1968.
- [4] LIONARDO DA VINCI: *Trattato della pittura*. An English translation by J. F. Rigaud, London 1877.

NIELS MARTIN HANSEN

Vi antager nu, at funktionerne f , g og h er to gange kontinuert diffe-

rentiable i intervallet $[0, T]$, samt (idet G betegner tyngdeaccelerationen) at der findes et positivt tal b , så at vi for alle $t \in [0, T]$ har:

$$(1) \quad -m\ddot{h}(t) - mG < -2b < 0.$$

Sagt med andre ord: Stangen vil stedse mærke et tyngdefelt, hvis lodrette komponent er nedadrettet og større end et fast tal. Vi kan da vise:

SÆTNING 1. *Til den foreskrevne bevægelse af O svarer en position, hvorfra vi kan lade stangen starte i hvile, således at $\vec{OQ}$'s z -koordinat er positiv under hele bevægelsen, og stangen er lodret for $t = T$.*

I [1] er et tilsvarende problem behandlet på en temmelig intuitiv måde. I [2] behandles helt udførligt det mindre generelle tilfælde, at kugleleddet bevæges langs en vandret linie, og stangen er bundet til en lodret plan.

Vi skal i det følgende bevise sætning 1. Vi simplificerer først problemet. I stedet for den tynde stang med længden a og massen m , betragter vi det ækvivalente matematiske pendul med masse m og pendullængde $\frac{2}{3}a$. For at få simple betegnelser tænker vi os $m=1$, $\frac{2}{3}a=1$ og $mG=1$. Det er klart, at disse antagelser ikke ændrer noget fundamentalt. Bettingelsen (1) lyder nu:

$$(1') \quad -\ddot{h}(t) - 1 < -2b < 0.$$

Vores system er nu reduceret til en partikel med massen 1, som er bundet gnidningsfrit til enhedskuglen i xyz -systemet. Hvis vi på fig. 1 opfatter halvkugleoverfladen som den halve enhedskugle, er der på denne indtegnet partiklens bevægelse, som den tager sig ud i xyz -systemet, når partiklen er startet i hvile til $t=0$ i P . Q angiver partiklen til tiden t . Udover tyngden $(0, 0, -1)$ vil partiklen også mærke en ydre kraft $\mathbf{K}' = (-\ddot{f}(t), -\ddot{g}(t), -\ddot{h}(t))$, som hidrører fra kugleleddets acceleration. Den totale ydre kraft $\mathbf{K}$ er da $(-\ddot{f}, -\ddot{g}, -\ddot{h} - 1)$, og $\mathbf{K}(t)$ er kontinuert ifølge forudsætningerne om f , g og h . Foruden kraften $\mathbf{K}$ er partiklen også påvirket af en reaktion fra kugleoverfladen. Denne må være vinkelret på kugleoverfladen; thi partiklen er bundet gnidningsfrit. Reaktionskraften har derfor formen $N(t)\mathbf{r}$, hvor $\mathbf{r}$ er partiklens stedvektor i xyz -systemet.

Vi kan nu opskrive en differentiaalligning, som beskriver partiklens bevægelser:

$$(2) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + N\mathbf{r}; \text{ bibetingelse: } \mathbf{r}^2 = 1.$$

Ved differentiation af bibetingelsen fås $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ og $\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}^2 = 0$. Vi har derfor:

$$N = N\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = -\dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}.$$

Enhver løsning til (2) må derfor opfylde

$$(3) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}^2) \mathbf{r}.$$

2. Egenskaber ved differentialligningen (3). Det er klart, at enhver løsning til (3), som yderligere opfylder $\mathbf{r}^2 = 1$, er en løsning til (2). Ligning (3) har imidlertid for passende $\mathbf{K}$ løsninger, som ikke har denne egenskab. Tag for eksempel en vilkårlig to gange differentiabel kurve $\mathbf{u}(t)$ udenfor kugleoverfladen $\mathbf{r}^2 = 1$. Ligningen (3) bestemmer da med $\mathbf{r} = \mathbf{u}$ en funktion $\mathbf{K}(t)$, og den differentialligning, man derefter kan danne med dette $\mathbf{K}$, har blandt andet løsningen $\mathbf{u}(t)$. Iøvrigt har man, at enhver to gange kontinuert differentiabel kurve $\mathbf{v}(t)$ på kugleoverfladen $\mathbf{r}^2 = R^2$ er en løsning, hvis $\mathbf{K}(t)$ vælges lig med $\ddot{\mathbf{v}}(t)$.

Vi har imidlertid, at *hvis det for en løsningskurve gælder, at den tangerer enhedskugleoverfladen, altså at der findes et tidspunkt t_0 med $\mathbf{r}^2(t_0) = 1$ og $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \cdot \mathbf{r}(t_0) = 0$, da vil den forblive på enhedskuglefladen.* Dette indses således:

Antag $\mathbf{v}(t)$ er en løsning til (3) i intervallet $[t_0, t_1]$ med $\mathbf{v}^2(t_0) = 1$ og $\dot{\mathbf{v}}(t_0) \cdot \mathbf{v}(t_0) = 0$. Af (3) fås $\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{r}^2 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r}^2$, som let omskrives til

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}^2 = 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}^2)(1 - \mathbf{r}^2).$$

$\mathbf{v}^2(t)$ skal altså opfylde differentialligningen

$$y'' = w(t)(1 - y), \quad \text{hvor } w(t) = 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}^2).$$

Eksistens- og entydighedssætningen kan anvendes på denne ligning i intervallet $[t_0, t_1]$. Den konstante funktion $y = 1$ er en løsning, som naturligvis er 1 for $t = t_0$, og som har $y'(t_0) = 0$. For $\mathbf{v}^2(t)$ gælder $\mathbf{v}^2(t_0) = 1$ og $\frac{d}{dt} \mathbf{v}^2 = 2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0$ for $t = t_0$. Entydighedssætningen giver da $\mathbf{v}^2 = 1$ i intervallet $[t_0, t_1]$.

Vi vil nu vise, at *enhver løsningskurve, der forløber på kuglen, kan fortsættes hen over hele intervallet $[0, T]$.* (Dette er selvfølgelig klart ud fra den fysiske situation, men det er dog meget rart at vise det direkte ud fra differentialligningen.)

Lad $\mathbf{v}(t)$ være en løsning til (2) i intervallet $[0, \tau]$. Lad $|\dot{\mathbf{v}}|$ antage sin størsteværdi i $[0, \tau]$ for $t = t_0$. Idet vi udnytter at $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0$, får vi af (2):

$$\ddot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{v}}, \quad \text{hvoraf } \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{v}}^2 = 2\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{v}}. \quad \text{Derfor har vi}$$

$$\dot{\mathbf{v}}^2(t_0) = \int_0^{t_0} 2\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt + \dot{\mathbf{v}}^2(0).$$

Idet vi sætter $\sup \{|\mathbf{K}(t)| \mid t \in [0, T]\} = A$, har vi

$$|\dot{\mathbf{v}}^2(t_0)| = \left| \int_0^{t_0} 2\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt + \dot{\mathbf{v}}^2(0) \right| \leq 2t_0 \cdot A \cdot |\dot{\mathbf{v}}(t_0)| + \dot{\mathbf{v}}^2(0).$$

Derfor gælder:

$$|\dot{\mathbf{v}}(t_0)| \leq 2T \cdot A + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2(0)}{|\dot{\mathbf{v}}(t_0)|}.$$

Svarende til løsningen $\mathbf{v}$ kan vi derfor finde et positivt tal P , så $|\dot{\mathbf{v}}(t)| < P$ er opfyldt i ethvert interval, hvor $\mathbf{v}$ er defineret.

Lad D være mængden

$$\{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \in \dot{R}^7 \mid \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \dot{R}^3 \wedge |\mathbf{r}_1| \leq 2 \wedge |\mathbf{r}_2| \leq P \wedge 0 \leq t \leq T\}.$$

Ligning (3) kan også skrives

$$(4) \quad \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_2, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{K} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1 + r_2^2) \mathbf{r}_1.$$

For funktionen $\mathbf{F} = (\mathbf{r}_2, \mathbf{K} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1 + r_2^2) \mathbf{r}_1)$ gælder, at $\mathbf{F}$ og denne funktions partielle afledede efter koordinaterne af $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ er kontinuerte og begrænsede på D . Heraf følger, at $\mathbf{v}(t)$ kan fortsættes til randen af D . Da $\mathbf{v}(t)$ åbenbart må forblive i D , kan $\mathbf{v}(t)$ derfor fortsættes henover hele intervallet $[0, T]$. (Se f. eks. [3] eller [4].)

På (4) kan vi anvende sætningen om løsningernes kontinuerte afhængighed af begyndelsesbetingelserne (se [3] eller [4]): Lad $\mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{v}(t)$ være løsninger på kuglen i intervallet $[0, T]$. Antag yderligere at $\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{v}}(0) = 0$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da findes $\delta > 0$ således at

$$(5) \quad |\mathbf{u}(0) - \mathbf{v}(0)| < \delta \Rightarrow |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)| < \varepsilon \text{ for alle } t \in [0, T].$$

3. Bevis for sætning 1. I det følgende identificerer vi, som vi også har gjort hist og her i det foregående, uden videre punkter og vektorer med deres koordinatsæt, og symbolet ' $\mathbf{r}$ ' kan da både betyde en vektor $\mathbf{r}$ og det punkt, hvis stedvektor er $\mathbf{r}$. Med r_z betegner vi z -koordinaten for punktet $\mathbf{r}$. Halvkuglefladen $\{\mathbf{r} \in \dot{R}^3 \mid r^2 = 1 \wedge r_z \geq 0\}$ kalder vi S . Randkurven $\{\mathbf{r} \in S \mid r_z = 0\}$ for denne flade kaldes C (se fig. 1).

Vi kan nu gå i gang med at bevise sætning 1. Hertil konstruerer vi først en afbildning $\Phi: S \rightarrow S$. Det sker på følgende måde: Lad $P \in S$. Med $\mathbf{u}_p$ betegner vi den løsning, som starter i P til $t=0$ med $\dot{\mathbf{u}}_p(0) = 0$.

Vi skelner imellem tre tilfælde:

- (a) u_p skærer aldrig C .
- (b) u_p skærer C for $t < T$. Lad t_0 være det mindste $t \in [0, T]$, for hvilket punktet $u_p(t)$ ligger på C .
- (c) u_p skærer ikke C for $t < T$, men endepunktet $u_p(T)$ ligger på C .

Vi definerer nu:

$$\Phi(P) = \begin{cases} u_p(T) & \text{i tilfælde (a)} \\ u_p(t_0) & \text{i tilfælde (b)} \\ u_p(T) & \text{i tilfælde (c)} \end{cases}.$$

Afbildningen Φ er, som vi skal se om lidt, surjektiv. Det betyder, at vi til ethvert punkt $P_1 \in S \setminus C$ kan finde et punkt $P \in S$, således at løsningen u_p , som starter i P med $\dot{u}_p(0) = 0$, helt forløber i mængden $S \setminus C$ og ender i P_1 for $t = T$. Men heraf får vi åbenbart sætning 1, idet vi vælger $P_1 = (0, 0, 1)$. Vi kan endda få et lidt kraftigere sætning:

SÆTNING 1'. *Til den foreskrevne bevægelse af O og et punkt $P_1 \in S \setminus C$ svarer en position, hvorfra vi kan lade stangen starte i hvile, således at $\vec{OQ}$'s z -koordinat er positiv under hele bevægelsen, og stanger peger i retningen $\vec{OP}_1$ for $t = T$.*

Vi skal altså blot se at få bevist, at Φ er surjektiv. Hertil skal vi bruge følgende hjælpesætning:

LEMMA. *Lad Φ være en kontinuert afbildning af S ind i S , således at punkterne i C er fixpunkter. Da er Φ surjektiv.*

BEVIS: Beviset forløber indirekte. Antag at Φ ikke er surjektiv. Da findes et punkt $P \in S$, som ikke er billede ved Φ . Åbenbart gælder at $P \notin C$. Vi kan da definere en afbildning $p: S \setminus \{P\} \rightarrow C$, som er en slags centralprojektion med centrum P af $S \setminus \{P\}$ langs storcirkler gennem P ned på C (se fig. 2).

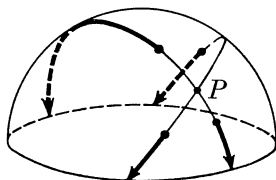


Fig. 2

Afbildningen p er kontinuert og punkterne i C er fixpunkter. Vi betragter nu den sammensatte afbildning $p \circ \Phi: S \rightarrow C$. Punkterne i C er fixpunkter for denne afbildning. Nu er S homeomorf med en cirkelskive, som derfor må kunne afbildes kontinuert på sin rand ved en afbildning T , så randpunkterne er fixpunkter. Men det er umuligt, idet vi da let kan definere en kontinuert afbildning uden fixpunkter af cirkelskiven ind i sig selv, (efter at have anvendt afbildningen T roterer vi cirkelskiven f. eks. 90°). Vi er dermed kommet i modstrid med *Brouwers fixpunkt-sætning*, som siger, at enhver kontinuert afbildning af en cirkelskive ind i sig selv har et fixpunkt. (Se f. eks. [5] p. 194.)

Vi er nu færdige med beviset for lemmaet og kan så tage fat på at vise, at funktionen Φ er surjektiv. For Φ gælder åbenbart, at $\Phi(P) = P$, hvis P tilhører C . Punkterne i C er altså fixpunkter. Vi er derfor færdige, når vi viser, at Φ er kontinuert, idet dette sammen med lemmaet sikrer, at Φ er surjektiv. Beviset for kontinuiteten kunne vi have gennemført forlængst, men vi har gemt det indtil nu, da det er en smule teknisk. For et vilkårligt udgangspunkt P for kurven har vi tre tilfælde at undersøge, eftersom vi er i tilfælde (a), (b) eller (c).

Tilfælde (a): Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Mængderne

$$C = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r}^2 = 1 \wedge r_z = 0\} \quad \text{og} \quad \{\mathbf{u}_p(t) \mid t \in [0, T]\}$$

er kompakte, og da vi er i tilfælde (a), er de disjunkte. Deres afstand d er derfor positiv. Vi sætter $\varepsilon' = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, d\}$, og ifølge (5) kan vi vælge $\delta > 0$, således at vi for alle $t \in [0, T]$ og enhver løsningskurve $\mathbf{v}(t)$, hvor $\dot{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{0}$, har

$$(6) \quad |\mathbf{u}_p(0) - \mathbf{v}(0)| < \delta \Rightarrow |\mathbf{u}_p(t) - \mathbf{v}(t)| < \varepsilon'.$$

Specielt gælder $|\mathbf{u}_p(T) - \mathbf{v}(T)| < \varepsilon' < \varepsilon$. Vi har da dels vist, at løsninger $\mathbf{v}$, hvor $|\mathbf{u}_p(0) - \mathbf{v}(0)| < \delta$, falder i tilfælde (a), og vi har vist, at Φ er kontinuert i tilfælde (a).

Tilfælde (b): Lad t_0 være det mindste t , for hvilket $\mathbf{u}_p(t) \in C$. Der gælder at $t_0 < T$. Differentialligningen (3) giver, når vi kun betragter z -komponenterne: $\ddot{z} = -\ddot{h} - 1 - (\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})z$. Ifølge uligheden (1') gælder $-\ddot{h}(t) - 1 < -2b < 0$ for alle $t \in [0, T]$. Heraf følger, at vi kan vælge $k > 0$, således at $|z| < k \Rightarrow \ddot{z} < -b < 0$. Det betyder, at $z(t)$ er nedad konveks i omegnen af t_0 . På fig. 3 er funktionen $z(t)$ skitseret, og vi ser, at z er negativ i et interval $[t_0, t_1]$.

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Vi vælger t_1 således, at z -koordinaten af $\mathbf{u}_p(t)$ er negativ i intervallet $[t_0, t_1]$. Mængderne

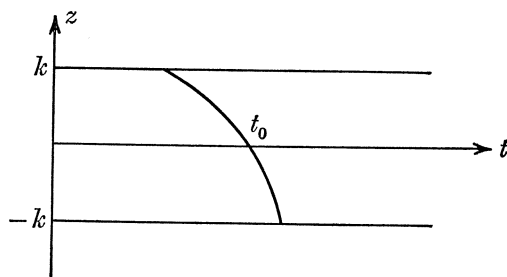


Fig. 3

$$\{r \in C \mid |r - u_p(t_0)| \geq \varepsilon\} \quad \text{og} \quad \{u_p(t) \mid t \in [0, t_1]\}$$

er kompakte, og da vi er i tilfælde (b), er de disjunkte. Deres afstand d er derfor et positivt tal. Ganske tilsvarende har vi, at mængderne $\{u_p(t_1)\}$ og C er disjunkte og kompakte. Deres afstand e er derfor positiv. Vi sætter $\varepsilon' = \frac{1}{2} \min\{d, e\}$ (se fig. 4).

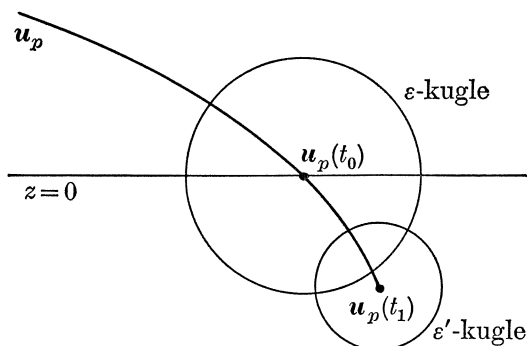


Fig. 4

Vi vælger nu $\delta > 0$, således at for alle $t \in [0, T]$ og alle løsninger $v(t)$, hvor $\dot{v}(0) = 0$, er (6) opfyldt. Til tidspunktet t_1 er z -koordinaten for v negativ. Derfor må $v(t)$ skære C til et tidspunkt t før t_1 , og dette må ske indenfor ε -kuglen. Thi $u_p(t)$ har jo for $t \in [0, t_1]$ stedse en afstand til punkter i $\{r \in C \mid |u_p(t_0) - r| \geq \varepsilon\}$, som er større end ε' , og v skal holde sig i en afstand ε' fra u_p . Derfor er Φ kontinuert i punkter, der hører under (b).

Tilfælde (c): Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Tilfælde (c) er som før nævnt karakteriseret ved, at u_p ikke skærer C for $t < T$, men endepunktet $u_p(T)$ ligger på C . Vi vælger nu $t_1 < T$ så $|u_p(t) - u_p(T)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ for $t \in [t_1, T]$. Mængderne C og $\{u_p(t) \mid t \in [0, t_1]\}$ er kompakte og disjunkte. Deres afstand d er derfor et positivt tal. Vi sætter $\varepsilon' = \frac{1}{2} \min\{d, \varepsilon\}$ (se fig. 5).

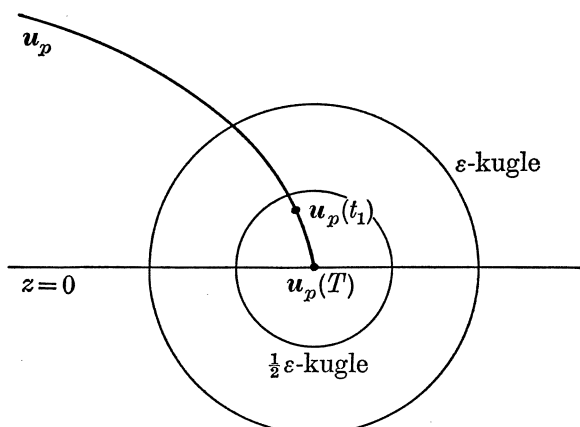


Fig. 5

Vi vælger $\delta > 0$, således at for alle $t \in [0, T]$ og enhver løsning v , hvor $\dot{v}(0) = \mathbf{0}$, er (6) opfyldt. Indtil tidspunktet t_1 er z -koordinaten af v ikke 0, og for $t \in [t_1, T]$ gælder $|u_p(t) - v(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, så $v(t)$ derfor tilhører $\{r \in S \mid |r - u_p(T)| < \varepsilon\}$ for $t \in [t_1, T]$. Men så har vi vist kontinuitet i tilfælde (c). Vi er dermed færdige med beviset for, at afbildningen Φ er kontinuert.

4. Bemærkninger. Vi har indskrænket os til at betragte et endeligt interval $[0, T]$. Antag nu, at det hele er defineret for $t \in [0, \infty[$. Da findes en startstilling, så stangen altid bevæger sig i $\{r \in \mathbb{R}^3 \mid r_z > 0\}$. (Dette er også bemærket i [1].) Vi vælger nemlig en følge (t_n) hvor $t_n \rightarrow \infty$, og hertil startstillinger (P_n) , således at for $t = t_n$ vil stangen stå lodret, hvis den er startet i P_n . Mængden $\{r \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 = 1 \wedge r_z \geq 0\}$ er kompakt. Følgen (P_n) har derfor et fortætningspunkt P_0 . Man indser let, at hvis stangen startes i dette punkt, vil den altid bevæge sig i mængden $\{r \in \mathbb{R}^3 \mid r_z > 0\}$.

Man viser let, at hvis $(\ddot{f}(t), \ddot{g}(t), \ddot{h}(t)) = \mathbf{0}$ for $t \geq T$, da kan vi vælge en startstilling, så stangen enten står lodret i hvile for $t = T$ eller nærmer sig asymptotisk til lodret for $t \rightarrow \infty$. (Dette er også bemærket i [2].)

Lad os endelig nævne, at det er let at give eksempler på, at sætning 1 er forkert, hvis betingelsen (1) ikke er opfyldt.

I det foregående har vi undersøgt differentialligningen (3). Ingen steder har vi på væsentlig måde udnyttet, at $r \in \mathbb{R}^3$. Derfor kan det hele generaliseres til $\mathbb{R}^n$. Vi betragter da igen ligning (3), men antager nu, at $r \in \mathbb{R}^n$. Lad for eksempel koordinaten r_1 svare til z -koordinaten fra før. Vores kugle er nu den n -dimensionale enhedskugle, og alle resultaterne

gælder for en vilkårlig dimension. Selvfølgelig må vi for de højere dimensioner opgive en mekanisk interpretation af resultaterne, som blot bliver udsagn om differentiaalligningen (3).

LITTERATUR

- [1] R. COURANT — H. ROBBINS: *What is mathematics?* Oxford University Press, New York 1941 (3. impr. 1946); pp. 319–321.
- [2] A. BROMAN: *A mechanical problem by H. Whitney*. NMT 6 (1958), pp. 78–82.
- [3] E. A. CODDINGTON — N. LEVINSON: *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, New York 1955; Chap. 1.
- [4] F. BRAUER — J. A. NOHEL: *The qualitative theory of ordinary differential equations*. W. A. Benjamin, New York 1969; Chap. 3, section 4,5.
- [5] E. H. SPANIER: *Algebraic topology*. McGraw-Hill, New York 1966.

EN ENKEL BEREGNING AV $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

FINN HOLME

Summen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ beregnes i analysebøkene gjerne ved å benytte teorien om Fourier-rekker, eller ved betraktninger over rekkeutvikling av visse trigonometriske funksjoner, f.eks. av $\pi \cot g^2 \pi x$. At ovenstående sum lar seg beregne ved hjelp av godt utviklede teorier er vel ikke overraskende, men det viser seg at summen lar seg beregne av en god gymnasiast med kunnskap om Moivres formel.

Denne formel sier jo at

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

som sammen med Newtons binomialformel gir

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \sin \varphi \cos^{n-1} \varphi - \binom{n}{3} \sin^3 \varphi \cos^{n-3} \varphi + \dots$$

Erstattes her n med $2n+1$, får vi

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)\varphi &= \binom{2n+1}{1} \sin \varphi \cos^{2n} \varphi - \binom{2n+1}{3} \sin^3 \varphi \cos^{2n-2} \varphi + \dots \\ &= \left[\binom{2n+1}{1} (\cot g^2 \varphi)^n - \binom{2n+1}{3} (\cot g^2 \varphi)^{n-1} + \dots \right] \sin^{2n+1} \varphi. \end{aligned}$$

Setter vi nå $\varphi = \varphi_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ ($k=1, 2, \dots, n$), så viser dette at $x_k = \cot g^2 \varphi_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) er røttene i ligningen

$$\binom{2n+1}{1} x^n - \binom{2n+1}{3} x^{n-1} + \dots = 0.$$

Betrakter vi spesielt summen av røttene, blir derfor

$$\begin{aligned} (1) \quad \cot g^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot g^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \cot g^2 \frac{n\pi}{2n+1} \\ = \binom{2n+1}{3} : \binom{2n+1}{1} = \frac{n(2n-1)}{3}. \end{aligned}$$

Nå ser vi at alle vinklene φ_k er spisse, og dermed gjelder som kjent ulikheten $\operatorname{tg} \varphi_k > \varphi_k > \sin \varphi_k$, eller

$$\cot g^2 \varphi_k < \varphi_k^{-2} < (\sin \varphi_k)^{-2} = 1 + \cot g^2 \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Summasjon av ulikhetene gir

$$\sum_{k=1}^n \cot g^2 \varphi_k < \sum_{k=1}^n \varphi_k^{-2} < n + \sum_{k=1}^n \cot g^2 \varphi_k,$$

eller av (1):

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{2n(n+1)}{3},$$

som da gir

$$(2) \quad \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

Og dermed følger straks det velkjente resultat at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Samtidig kan vi approksimere den *endelige* sum ved middelveiden av ytterleddene i (2):

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \approx \frac{n(4n+1)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6},$$

med en feil som er mindre enn den halve differens mellom ytterleddene:

$$\frac{n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{2} < \frac{\pi^2}{8n}.$$

Av (2) følger for øvrig også den enklere men unøyaktigere tilnærmelse

$$0 < \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4n}.$$

ET APROPOS TIL FINN HOLMES ARTIKKEL

ERNST S. SELMER

I den foregående artikkel gir Finn Holme et elegant og overraskende enkelt bevis for den kjente formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Holme utnytter Moivres formel, kombinert med sammenhengen mellom koeffisienter og røtter i en algebraisk ligning. Det samme prinsipp har jeg tidligere brukt i mine forelesninger »Algebra, tallteori og gruppeteori« (stensillert, Bergen 1965) for å bevise en annen kjent formel:

$$(1) \quad \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\varphi + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}.$$

Personlig har jeg ihvertfall ikke sett mitt bevis noe annet sted.

Realdelen i Moivres formel

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{2n} = \cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi$$

gir ved hjelp av binomialformelen umiddelbart

$$\begin{aligned} \cos 2n\varphi &= \cos^{2n}\varphi - \binom{2n}{2} \cos^{2n-2}\varphi \sin^2\varphi + \dots + (-1)^n \sin^{2n}\varphi \\ &= (1 - \sin^2\varphi)^n - \binom{2n}{2} (1 - \sin^2\varphi)^{n-1} \sin^2\varphi + \dots + (-1)^n \sin^{2n}\varphi. \end{aligned}$$

For gitt $\cos 2n\varphi$ kan vi oppfatte dette som en ligning for $x = \sin \varphi$ av grad $2n$:

$$(2) \quad a_0 x^{2n} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_{2n} = 0,$$

som tydeligvis har røttene

$$x_k = \sin \left(\varphi + \frac{2k\pi}{2n} \right) = \sin \left(\varphi + \frac{k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Ved å gi k et tillegg på n , altså vinkelen et tillegg på π , ser vi at røttene

forekommer i par med motsatt fortegn (ligningen (2) inneholder bare jevne potenser av x). Røttenes produkt er derfor lik

$$(-1)^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\varphi + \frac{k\pi}{n} \right) \right)^2.$$

På den annen side er dette produkt lik

$$\frac{a_{2n}}{a_0} = \frac{1 - \cos 2n\varphi}{(-1)^n \left[1 + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \dots \right]} = \frac{2 \sin^2 n\varphi}{(-1)^n 2^{2n-1}} = (-1)^n \frac{\sin^2 n\varphi}{2^{2n-2}}.$$

Ved å sette de to uttrykk for produktet lik hverandre og ta kvadratroten, får vi nettopp formelen (1). — At vi har valgt riktig fortegn for kvadratroten, ser vi ved å innsette for φ en vinkel mellom 0 og π/n . Alle de opptredende sinuser blir da positive.

Første faktor i (1) er $\sin \varphi$. Vi dividerer med denne faktor og lar $\varphi \rightarrow 0$, idet vi bemerker at

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(n \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} : \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) = n.$$

Ved grensen får vi derfor formelen

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

som også er velkjent. Formelen er mindre komplisert enn (1), og det finnes andre og enklere bevis. Man kan f.eks. spalte opp $(x^n - 1)/(x - 1)$ i reelle annengradsfaktorer (samt i tillegg faktoren $x + 1$ når n er jevn), og sette $x = 1$ i det fremkomne.

MOTTATTE BØKER

Leif Appelgren — Daniel Sundström — Lars Erik Zachrisson: *Optimeringsmetoder*. Studentlitteratur, Lund 1970. 150 s. Sv. kr. 25.75. (Studentpris 21.60.)

Förord och litteraturförteckning 5–8 * Allmänt om optimeringsproblem 9–11 * Matematiska grunder 12–26 * Kuhn–Tucker-teoremen 27–47 * Linjär programmering 48–70 * Spelteori 71–86 * Dynamisk programmering 87–102 * Styrda Markovprocesser 103–109 * Maximumprincipen 110–127 * Iterativa metoder att söka extrempunkter 128–150.

Leif Bengtson — Olof Eriksson — Sven-Erik Wallin: *Logiska kretsar*. Studentlitteratur, Lund 1970. 134 s. Sv. kr. 22.90. (Studentpris 19.20.)

Symbolisk logik. Logisk algebra 11–37 * Byggelement och grindelement för logiska kretsar 38–52 * Analys och syntes av kombinatoriska kretsar 53–68 * Minimeringsmetoder 69–88 * Syntes av flerpoliga nät 89–92 * Sekvenskretsar av nivå-typ 93–121 * Pulsade sekvenskretsar 122–127 * Blocksymboler för byggelement 128–130 * Postulat och teorem 130–131 * Litteraturförteckning 132 * Sakregister 133–134.

A. Borel — R. Carter — C. W. Curtis — N. Iwahori — T. A. Springer — R. Steinberg: *Seminar on algebraic groups and related finite groups*. (Lecture notes in mathematics, 131.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 8 + 321 S. DM 22.00; \$ 6.10.

Properties and linear representations of Chevalley groups A1–A55 * Modular representations of finite groups with split (B, N) -pairs B1–B39 * Cusp forms for finite groups C1–C24 * Characters of special groups D1–D46 * Conjugacy classes E1–E100 * Centralizers of involutions in finite Chevalley groups F1–F29 * Conjugacy classes in the Weyl group G1–G21 * Index of definitions 1–3.

Tomas Claesson — Lars Hörmander: *Integrationsteori*. Studentlitteratur, Lund 1970. 103 s. Sv. kr. 20.00. (Studentpris 16.80.)

Riemannintegralen 7–24 * Lebesgueintegralen 25–67 * Radon–Stieltjesintegralen 68–89 * Appendix 90–93 * Blandade övningar 94–99 * Anvisningar till de blandade övningarna 100–103.

Leon Ehrenpreis: *Fourier analysis in several complex variables* (Pure and applied mathematics, 17.) Wiley — Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1970. 13 + 506 pp. sh. 190/–.

Introduction, analytically uniform spaces, and multiplicity varieties 1–28 * The geometric structure of local ideals and modules 29–71 * Semilocal theory 72–94 * Passage from local to global 95–120 * Examples 121–174 * Inhomogeneous equations 175–187 * Integral representation of solutions of homogeneous equations 188–197 * Extension and comparison theorem. Elliptic and hyperbolic systems 198–213 * General theory of Cauchy's problem 214–281 * Balayage and general boundary value problems 282–315 * Miscellanea 316–393 * Lacunary series. Refined comparison theorems 394–445 * General theory of quasianalytic functions 446–489 * Bibliography 490–496 * Index of special notation 497–500 * Index 501–506.

Martin Eisen: *Elementary combinatorial analysis*. (Notes on mathematics and its applications.) Gordon and Breach, New York, London, Paris 1970. 10 + 233 pp. Cloth sh. 145/–; \$ 17.40. Paperback sh. 75/–; \$ 9.00.

Permutations and combinations 1–41 * The multinomial theorem 42–68 * Generating functions 69–99 * The principle of inclusion and exclusion 100–125 * Application of combinatorial analysis to probability theory 126–156 * Möbius function and Polya's theorem 157–215 * Bibliography 217 * Answers to problems 219–228 * Index 229–233.

Essays on topology and related topics. Mémoires dédiés à Georges de Rham. Publiés sous la direction de André Haefliger et Raghavan Narasimhan. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 12 + 252 S. DM 60.00; \$ 16.50.

Papers by H. Cartan, J. Milnor — O. Burlet, M. Atiyah — F. Hirzebruch, P. F. Baum — R. Bott, R. Bott — S. S. Chern, K. Kodaira, A. Borel, A. Andreotti — G. Tomassini, J.-L. Koszul, E. Vesentini, N. H. Kuiper — B. Terpstra-Keppler, M. W. Hirsch, W. Browder — T. Petrie, S. P. Novikov, J. Boéchat — A. Haefliger, C. Weber, B. Eckmann — S. Maumary, J. Tits, M. A. Kervaire, R. Thom.

G. Feichtinger: *Lernprozesse in stochastischen Automaten*. (Lecture notes in operations research and mathematical systems, 24.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 5 + 66 S. DM 6.00; \$ 1.70.

Endliche stochastische Automaten 2–16 * Zufällige Verteilungen und Verteilungsautomaten 17–27 * Grenzwertsätze für endliche reguläre stochastische Automaten 28–35 * Anwendung stochastischer Automaten in der Lerntheorie 36–47 * Automatenmodelle sequentieller Spiele 48–54 * Ein Stimulus-Sampling-Modell mit adaptiven Transitionswahrscheinlichkeiten 55–63 * Literaturverzeichnis 64–65 * Zustandsgraph des $(N, 2)$ -Inputautomaten 66.

M. Gross — A. Lentin: *Introduction to formal grammars*. Translated from the French by M. Salkoff. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 11 + 229 S. DM 38.00; \$ 10.50.

Logical and algebraic preliminaries 1–80 * Some important classes of languages

81–155 * The algebraic point of view 157–215 * Appendix: Transformational grammars 217–228 * Bibliography 229.

K. H. Hofmann: *The duality of compact semigroups and C^* -bigebras*. (Lecture notes in mathematics, 129.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 12 + 142 S. DM 14.00; \$ 3.90.

Duality 1–2 * Multiplicative categories 3–10 * Algebras over a multiplicative category 11–18 * Cogebras over a multiplicative category 18–22 * Bigebras 23–27 * C^* -algebras 28–34 * A multiplication for C^* 34–44 * The cofunctor Spec for commutative C^* -algebras 44–46 * Coproducts in C^* 46–47 * C^* -cogebras 48–67 * Duality of compact semigroups 67–78 * Involutive bigebras 79–112 * Dualities for compact groups 112–122 * Dualities for totally disconnected compact semigroups 122–126 * Discrete involutive semigroups and duality 126–139 * A chart 140–141 * References 142.

J. P. Kahane: *Séries de Fourier absolument convergentes*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 50.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 8 + 169 S. DM 44.00; \$ 12.10.

Séries de Fourier des fonctions continues 3–8 * Théorie descriptive 9–26 * Pseudomesures et classes $A(E)$ 27–43 * Pseudomesures et classes $A(E)$ (suite). Condition de Krein. Ensembles de Helson 44–55 * Idéaux fermés. Rôle des $\|e^{\text{inf}}\|_{PM}$ 56–73 * Fonctions composées. Rôle des $\|e^{\text{inf}}\|_A$ 74–87 * Ensembles minces et méthodes de Baire 88–101 * Algèbres tensorielles et applications 102–115 * Isomorphisme des algèbres $A(E)$ 116–126 * Séries lacunaires 127–140 * Séries de Taylor absolument convergentes 141–151 * Notes et compléments 153–155 * Bibliographie 157–163 * Index des noms cités 165 * Index terminologique 167–168 * Index des notations 169.

E. G. Kogbetliantz: *Fundamentals of mathematics from an advanced viewpoint*, 3 + 4. Gordon and Breach, New York, London, Paris 1970. 10 + 587 pp. sh. 295/-; \$ 35.40.

Euclid's axioms 549–593 * Triangle. Duality 594–665 * Metric geometry 666–732 * Metric geometry (continuation). Surface measurements 733–782 * Some facts about non-euclidean geometry 783–823 * Principle of parity. Trigonometric and hyperbolic functions 824–878 * Solid geometry. Point, straight line and plane in space. Restricted duality in solid geometry 879–919 * Tetrahedron 920–947 * Pythagorean theorem in space. Spherical trigonometry 948–991 * Area and volume of a sphere. Solution of spherical triangles 992–1039 * Regular polyhedrons 1040–1084 * Linear transformations and matrices 1085–1126 * Appendices lxi–lxix.

Gregers Krabbe: *Operational calculus*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 16 + 349 S. DM 54.00; \$ 14.90.

Operators 1–10 * Perfect operators 10–25 * The basic facts 26–45 * Elementary applications 45–56 * Partial fraction decomposition 56–83 * Further applications 84–106 * Calculus of operators 107–143 * Vectors 144–158 * Non-integrable func-

tions 158–181 * Partial differential equations 182–212 * Diffusion problems 213–241 * Series of operators 243–268 * A functional calculus for D 269–282 * Non-linear equations 282–292 * Differential equations with polynomial coefficients 292–307 * Theorems 308–326 * Glossary of terminology and notations 327–330 * Summary of results and table of formulas 331–344 * Bibliography 345–346 * Subject and author index 347–349.

Robert L. Kruse — David T. Price: *Nilpotent rings*. (Notes on mathematics and its applications.) Gordon and Breach, New York, London, Paris 1970. 8+127 pp. Cloth sh. 125/-; \$ 15.00. Paperback sh. 50/-; \$ 6.00.

Elementary results 1–16 * Examples of nilpotent rings 17–26 * Families and capability 27–50 * The subring structure of nilpotent rings 51–79 * Counting finite nilpotent rings 80–94 * Appendix: The construction of some special rings 95–108 * Bibliography 109–121 * List of special notation 123–124 * Index 125–127.

Falko Lorenz: *Quadratische Formen über Körpern*. (Lecture notes in mathematics, 130.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 2+77 S. DM 8.00; \$ 2.20.

Präliminarien 5–18 * Ein Satz von Cassels 18–22 * Runde und multiplikative Formen 22–27 * Quadratsummen und die Stufe eines Körpers 27–33 * Torsions-elemente, Nullteiler und nilpotente Elemente im Wittschen Ring 33–38 * Ein »Hasseprinzip« für quadratische Formen über reellen Körpern 39–40 * Der »Satz 7« von Witt 41–42 * Quadratische Formen über lokalen Körpern 43–45 * Quadratische Formen über nicht-reellen Körpern 45–50 * Quadratische Formen über reellen Körpern 50–52 * Bemerkungen über Erweiterung des Grundkörpers 52–56 * Die Primideale in $\mathfrak{B}(k)$ 57–64 * Quadratische Formen über Funktionenkörpern mit reell abgeschlossenem Grundkörper 65–74 * Literatur 74 * Index 75–76 * Liste der Zeichen 77.

J. S. Maritz: *Empirical Bayes methods*. (Methuen's monographs on applied probability and statistics.) Methuen and Co., London 1970. 8+159 pp. sh. 50/-.

Introduction to Bayes and empirical Bayes methods 1–19 * Estimation of the prior distribution 20–45 * Empirical Bayes point estimation 46–90 * Testing of hypotheses 91–111 * Two-parameter problems 112–136 * The compound decision problem and EB methods 137–151 * Bibliography 153–155 * Subject index 157–158 * Author index 159.

Mathematics applied to physics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 19+610 S. DM 58.00; \$ 16.00.

F. Sommer: Functions of complex variables 1–51 * E. M. de Jager: Theory of distributions 52–110 * G. A. Deschamps: Exterior differential form 111–161 * A. N. Tihonov — A. B. Vasil'eva — V. M. Volosov: Ordinary differential equa-

tions 162–228 * F. John: Partial differential equations 229–315 * F. John: Integral equations 316–347 * J. L. Lions: Approximation numérique de la solution des problèmes d'équations aux dérivées partielles 348–401 * N. Moisseev — V. Tikhomirov: Optimation 402–464 * D. J. A. Welsh: Probability theory and its applications 465–561 * T. Yamanouchi: Quantum mechanics 562–601 * Subject index 603–610.

Carlo Miranda: *Partial differential equations of elliptic type*. Translated from the Italian by Zane C. Motteler. (Ergebnisse der Mathematik under ihrer Grenzgebiete, 2.) Second, revised edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 12 + 370 S. DM 58.00; \$ 16.00.

Boundary value problems for linear equations 1–22 * Functions represented by integrals 23–48 * Transformation of the boundary value problems into integral equations 49–96 * Generalized solutions of the boundary value problems 97–145 * A priori majorization of the solutions of the boundary value problems 146–179 * Nonlinear equations 180–222 * Other research on equations of second order. Equations of higher order. Systems of equations 223–288 * Bibliography 289–357 * Author index 358–364 * Subject index 365–370.

Rolf Nevanlinna: *Analytic functions*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 162.) Translated from the second German edition by Phillip Emig. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 8 + 373 S. DM 76.00; \$ 20.90.

Conformal mapping of simply and multiply connected regions 4–21 * Solution of the Dirichlet problem for a schlicht region 22–36 * Function theoretic majorant principles 37–66 * Relations between noneuclidean and euclidean metrics 67–113 * Point sets of harmonic measure zero 114–161 * The first main theorem in the theory of meromorphic functions 162–182 * Functions of bounded type 183–213 * Meromorphic functions of finite order 214–233 * The second main theorem in the theory of meromorphic functions 234–260 * Application of the second main theorem 261–281 * The Riemann surface of a univalent function 282–307 * The type of a Riemann surface 308–320 * The Ahlfors theory of covering surfaces 321–354 * Bibliography 355–365 * Index 366–373.

Mats Neymark: *Analysens grunder, 1*. Studentlitteratur, Lund 1970. 256 s. Sv. kr. 35.25. (Studentpris 30.00.)

Reella tal och euklidiska rum 7–26 * Några topologiska grundbegrepp 27–91 * Några viktiga satser i analysen 92–132 * Serier och generaliserade integraler 133–185 * Funktionsföljder och funktionsserier 186–248 * Svar och anvisningar till vissa övningar 249–256.

Mats Neymark: *Analysens grunder, 2*. Studentlitteratur, Lund 1970. 232 s. Sv. kr. 35.75. (Studentpris 30.00.)

Differentierbarhet, differentialer och derivator 5–109 * Integration i R^n 110–193 * Svar och anvisningar till vissa övningar 194–199 * Appendix: Talsystemen 200–232.

Alexander Peyerimhoff: *Gewöhnliche Differentialgleichungen, I, II.* (Studien-text.) Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1970. Teil I: 11 + 163 S. DM 9.80. Teil II: 7 + 172 S. DM 9.80.

Teil I: Einleitung 1–9 * Der Existenzsatz von Picard–Lindelöf und die Eigenschaften von Lösungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung 10–18 * Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung 19–63 * Der Existenzsatz von Peano 64–87 * Differentialgleichungen von höherer als erster Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung 88–160 * Literatur 161–163.

Teil II: Reihenentwicklungen 165–220 * Rand- und Eigenwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung 221–248 * Differenzierbarkeit nach Anfangswerten. Die quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung 249–270 * Die Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ 271–295 * Die Theorie von Hamilton–Jacobi 296–313 * Die Laplacetransformation 314–325 * Literatur 326–328 * Register 329–336.

L. Sario — M. Nakai: *Classification theory of Riemann surfaces.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 164.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 20 + 446 S. DM 98.00; \$ 27.00.

Introduction 1–9 * Dirichlet finite analytic functions 10–25 * Plane regions 25–58 * Covering surfaces of the sphere 58–70 * Covering surfaces of Riemann surfaces 70–78 * Inclusion relations 79–101 * Plane regions and conformal invariants 101–131 * K -functions 131–144 * Royden's compactification 145–171 * Dirichlet's problem 171–209 * Invariance and deformation 209–221 * Wiener's compactification 222–244 * Dirichlet's problem 244–269 * Lindelöfian meromorphic functions 269–280 * Invariance under deformation 281–285 * Capacity functions 286–303 * Parabolic and hyperbolic surfaces 303–339 * Existence of kernels 339–363 * Classes $O_{A \cup B}$ and $O_{A \cap B}$ 364–382 * Boundary points of positive measure 382–390 * Higher dimensions 391–411 * Bibliography 412–436 * Author index 437–438 * Subject and notation index 439–446.

Pierre Schapira: *Théorie des hyperfonctions.* (Lecture notes in mathematics, 126.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 11 + 157 S. DM 14.00; \$ 3.90.

Rappels 1–7 * Cohomologie des faisceaux 8–43 * Hyperfonctions 44–76 * Opérateurs elliptiques 77–97 * Résultats divers 98–117 * Valeurs au bord des fonctions holomorphes 118–152 * Bibliographie 153–157.

Séminaire de probabilités, IV. Université de Strasbourg. (Lecture notes in mathematics, 124.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 4 + 282 S. DM 20.00; \$ 5.50.

Papers by R. Cairoli, P. Cartier, F. Chersi, D. Dacunha-Castelle, C. Dellacherie, C. Doleans-Dade — P. A. Meyer, A. Fuchs — G. Letta, J. de Sam Lazaro, P. A. Meyer, B. Maisonneuve — Ph. Morando, G. Mokobodzki, D. Revuz, M. Weil.

Th. Skolem: *Selected works in logic*. Edited by Jens Erik Fenstad. Universitetsforlaget, Bergen, Oslo, Tromsø 1970. 732 s. N. kr. 168.00.

Thoralf Albert Skolem in memoriam 9–15 * A survey of Skolem's work in logic 17–52 * On the structure of groups in the identity calculus 53–65 * Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen 67–101 * Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen 103–136 * Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre 137–152 * Begründung der elementären Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich 153–188 * Über die mathematische Logik 189–206 * Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik 207–225 * Über einige Grundlagenfragen der Mathematik 227–273 * Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo: »Über die Defintheit in der Axiomatik« 275–279 * Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik 281–307 * Über die symmetrisch allgemeinen Lösungen im identischen Kalkül 307–336 * Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem 337–344 * Über die Unmöglichkeit einer Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems 345–354 * Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen 355–366 * Ein Satz über Zähl ausdrücke 367–373 * Ein Satz über die Erfüllbarkeit von einigen Zähl ausdrücke der Form $(x)(Ey_1, \dots, y_n)K_1(x, y_1, \dots, y_n) \& (x_1, x_2, x_3)K_2(x_1, x_2, x_3)$ 375–382 * Über die Erfüllbarkeit gewisser Zähl ausdrücke 383–394 * Einige Reduktionen des Entscheidungsproblems 395–409 * Über gewisse »Verbände« oder »Lattices« 411–424 * Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf »arithmetische« 425–440 * Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie 441–449 * Einfacher Beweis der Unmöglichkeit eines allgemeinen Lösungsverfahrens für arithmetische Probleme 451–454 * Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem 455–482 * Remarks on recursive functions and relations 483–486 * Some remarks on recursive arithmetic 487–490 * A note on recursive arithmetic 491–493 * Some remarks on the comparison between recursive functions 495–498 * The development of recursive arithmetic 499–514 * A remark on the induction scheme 515–518 * Some remarks on the foundation of set theory 519–528 * On the proof of independence of the axioms of the classical sentential calculus 529–534 * A remark on a set theory based on positive logic 535–539 * The logical background of arithmetic 541–552 * Some considerations concerning recursive functions 553–561 * Some considerations concerning recursive arithmetic 563–574 * Remarks on »elementary« arithmetic functions 575–580 * A critical remark on foundational research 581–586 * Peano's axioms and models of arithmetic 587–600 * A version of the proof of equivalence between complete induction and the uniqueness of primitive recursions 601–606 * Two remarks on set theory 607–613 * Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom 615–631 * Une relativisation des notions mathématiques fondamentales 633–638 * Remarks on the connection between intuitionistic logic and a certain class of lattices 639–644 * Reduction of axiom systems with axiom schemes to systems with only simple axioms 645–652 * A set theory based on a certain 3-valued logic 653–662 * Investigations on a comprehension axiom without negation in the defining propositional

functions 663–672 * Interpretation of mathematical theories in the first order predicate calculus 673–680 * Recursive enumeration of some classes of primitive recursive functions and a majorisation theorem 681–687 * Proof of some theorems on recursively enumerable sets 689–698 * Addendum to “Proof of some theorems on recursively enumerable sets” 699–702 * Studies on the axiom of comprehension 703–711 * Scientific bibliography 713–732.

M. Takesaki: *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*. (Lecture notes in mathematics, 128.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 2 + 123 S. DM 10.00; \$ 2.80.

Modular Hilbert algebras 5–8 * Generalized Hilbert algebras 8–19 * The commutation theorem for modular Hilbert algebras 20–23 * Self-adjoint subalgebras for generalized Hilbert algebras 23–25 * The spectral algebra 25–31 * The modular operator Δ 31–35 * The resolvent of the modular operator Δ 35–44 * The one-parameter automorphisms defined by the modular operator Δ 44–52 * Formulation of the modular Hilbert algebra 52–57 * Tensor product and direct sum of modular Hilbert algebras 57–60 * The standard representation of von Neumann algebras 60–63 * The modular automorphism group and the Kubo–Martin–Schwinger boundary condition 63–72 * Semi-finiteness and the modular automorphism group 73–100 * The Radon–Nikodym theorem and the modular automorphism group 101–120 * References 121–123.

Rudolf Wille: *Kongruenzklassengeometrien*. (Lecture notes in mathematics, 113.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 3 + 99 S. DM 8.00; \$ 2.20.

Algebraische Grundbegriffe 5–11 * Geometrische Grundbegriffe 12–25 * Affine Koordinatisierung 26–35 * Geometrien mit eindeutigen Verbindungsgeraden 36–53 * Pseudoaffine Geometrien 54–62 * Rahmenaussagen und primitive Klassen 63–80 * Schliessungsaussagen und starke primitive Klassen 81–95 * Literatur 96–97 * Register 98–99.

H. Zieschang — E. Vogt — H.-D. Coldewey: *Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen*. (Lecture notes in mathematics, 122.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970. 8 + 203 S. DM 16.00; \$ 4.40.

Freie Gruppen und Graphen 1–17 * Kombinatorische Beschreibung von Gruppen und Flächenkomplexe 18–40 * Flächen 41–54 * Ebene diskontinuierliche Gruppen 55–90 * Automorphismen ebener Gruppen 91–136 * Zur komplex-analytischen Theorie der Riemannschen Flächen und ebenen diskontinuierlichen Gruppen 137–166 * Der Raum der markierten Riemannschen Flächen 167–190 * Literaturverzeichnis 191–200 * Index und Bezeichnungen 201–203.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1970 på de matematiske gymnaslinjer i de nordiske land, samt tilvalgsfag matematikk ved Højere forberedelseseksamen i Danmark.

DANMARK

I alle sæt må kun én af opgaverne 3a og 3b afleveres til bedømmelse.

Matematisk-fysisk gren.

I.

1. I en orienteret plan er givet to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, for hvilket det gælder, at

$$|\mathbf{a}| = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{a}.$$

I det følgende betegner R mængden af reelle tal og N mængden af hele positive tal.

Bestem mængden M_1 af tal $t \in R$, for hvilke det gælder, at

$$|t\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 6.$$

Bestem mængden M_2 af talsæt $(s, t) \in R \times R$, hvor $(s, t) \neq (0, 0)$, for hvilke det gælder, at

$$s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \perp \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Bestem mængden M_3 af talsæt $(s, t) \in R \times R$, for hvilke det gælder, at

$$(s+1)\mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{a} + (t+1)\mathbf{b}.$$

Bestem mængden M_4 , hvor

$$M_4 = M_2 \cap M_3.$$

Bestem mængden M_5 af talsæt $(s, t) \in N \times N$, for hvilke det gælder, at

$$(s, t) \in M_2 \wedge 0 < |s\mathbf{a} + t\mathbf{b}| < 10.$$

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 6|}{x}.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsområde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter. Tegn grafen.

Linjen l har ligningen

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Bestem koordinatsættene til de punkter, der er fælles for l og grafen for f .

Beregn arealet af den punktmængde i første kvadrant, der er bestemt ved

$$\{(x, y) \mid f(x) \leq y \leq \tfrac{1}{2}x + 1\}.$$

3a. I planen er valgt et koordinatsystem. Desuden er der givet følgende afbildninger af planen på sig selv:

f er den rette affinitet med forvandlingstallet $\frac{1}{2}$ og linjen med ligningen $x - 4 = 0$ som affinitetsakse,

g er spejlingen i linjen med ligningen $x - y = 0$,

h er parallelforskydningen bestemt ved vektoren $\mathbf{a}(-3, -1)$.

Bestem koordinatsættet til punktet P , således at $h(g(P)) = f(P)$.

Bestem en ligning for punktmængden $h(g(f(L)))$, hvor L er linjen med ligningen

$$x - y - 2 = 0.$$

Bestem en ligning for den punktmængde M , for hvilken det gælder, at $h(g(f(M))) = C$, hvor C er punktmængden med ligningen

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0.$$

3b. På en virksomhed med 100 medarbejdere skal 2 udtages til en særlig opgave. Udtagelsen foregår ved lodtrækning, hvor alle har samme chance for at blive valgt.

Netop 3 af de 100 medarbejdere er værkførere. 1) Find sandsynligheden for, at ingen værkfører udtages. 2) Find sandsynligheden for, at mindst én værkfører udtages.

Netop n af de 100 medarbejdere er kvinder. 3) Bestem, udtrykt ved n , sandsynligheden for, at mindst én af kvinderne udtages. 4) Bestem det mindste antal n , for hvilket denne sandsynlighed er større end $\frac{1}{2}$.

II.

1. Løs inden for mængden af komplekse tal ligningen

$$\frac{x^3 + 2x^2 - (3 + 2i)x + 4i}{2x^2 - (3 + 2i)x + 3i} = 1.$$

Løs inden for mængden af komplekse tal ligningen

$$\frac{x^3 + (6 - i)x^2 - 2ix - 8 + 4i}{2x^2 - (3 + 2i)x + 3i} = 1,$$

idet det oplyses, at denne ligning har en reel løsning.

2. I et koordinatsystem i rummet er en linje l bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x, y, z) = \left(-\frac{11}{2} + 4t, \frac{7}{2}, -7 + 3t\right).$$

Den retvinklede projektion på linjen l af punktet $A(4, 1, -3)$ kaldes S . Bestem koordinatsættet til S .

Bestem koordinatsættet til punktet C , således at S er midtpunktet af linjestykket AC .

Linjestykket AC er diagonal i et kvadrat $ABCD$, der ligger i en normalplan π til l . Bestem koordinatsættene til punkterne B og D .

Bestem koordinatsættet til den retvinklede projektion på π af punktet $T(-8, 1, -12)$.

Beregn topplansvinklerne langs kanterne i grundfladen $ABCD$ i pyramiden $T-ABCD$.

3a. Lad f være en i et interval $[a; b]$ defineret og differentiabel funktion, og lad den afledede funktion f' være kontinuert i det samme interval. Længden s af grafen for f er da bestemt ved formlen

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

En funktion g er bestemt ved

$$g(x) = \ln \sin x, \quad x \in [\tfrac{1}{3}\pi; \tfrac{1}{2}\pi].$$

Beregn længden af grafen for g .

For ethvert reelt tal a større end $\frac{4}{3}$ er en funktion h bestemt ved

$$h(x) = x^{3/2}, \quad x \in [\tfrac{4}{3}; a].$$

Beregn tallet a , således at længden af grafen for h er $\frac{61}{27}$.

3b. I et koordinatsystem i planen er givet cirklen C_1 med ligningen

$$x^2 + y^2 + 8x - 8y + 31 = 0.$$

Ved en multiplikation med 2 ud fra et punkt Q på førsteaksen efterfulgt af en drejning om Q afbildes C_1 på en cirkel C_2 , der har centrum i punktet $P(9, 0)$.

Bestem en ligning for C_2 .

Bestem koordinatsættene til de punkter Q , der har den angivne egenskab.

Bestem for ethvert sådant punkt Q gradstørrelsen af drejningsvinklen.

Samfundsfaglig og naturfaglig gren.

1. Bestem de reelle tal x , der tilfredsstiller uligheden

$$\frac{x^2 - 7x + 21}{x} \leq 3.$$

Bestem de reelle tal x , der tilfredsstiller uligheden

$$\frac{1 + \log x}{\log x} \leq 3.$$

Bestem de reelle tal x , der tilfredsstiller mindst én af de nævnte uligheder.

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Undersøg f med henblik på definitions­mængde, nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Bevis, at grafen for f har tre asymptoter. Tegn grafen.

Bestem arealet af den punktmængde i første kvadrant, der begrænses af grafen og linjen med ligningen $5x - 3y = 0$.

3a. Tre krukker I, II og III indeholder henholdsvis 4, 5 og 4 kugler: I indeholder 2 røde og 2 blå kugler, II indeholder 1 rød og 4 blå kugler, III indeholder 4 røde kugler.

1) Fra en tilfældigt valgt krukke tages tilfældigt en kugle. Find sandsynligheden for, at kuglen er rød.

2) Fra en tilfældigt valgt krukke tages tilfældigt to kugler. Find sandsynligheden for, at begge kugler er røde.

3) Fra en tilfældigt valgt krukke tages tilfældigt to kugler, som viser sig at være røde. Find sandsynligheden for, at kuglerne blev taget fra krukke III.

4) Fem gange udføres følgende: Fra en tilfældigt valgt krukke tages tilfældigt en kugle. Kuglens farve noteres. Kuglen lægges tilbage i den krukke, hvorfra den blev taget. Find sandsynligheden for, at der skiftevis tages en kugle af den ene farve og en kugle af den anden farve.

3b. I planen er valgt et koordinatsystem med begyndelsespunkt O . For ethvert reelt tal a , hvor $a \neq 0$, fremstiller ligningen

$$y = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a - 1$$

en parabel P_a . Tegn i det valgte koordinatsystem parablerne P_1 , P_3 og P_{-2} .

Angiv, udtrykt ved a , koordinatsættet til toppunktet T_a for parabeln P_a , og tegn i det valgte koordinatsystem mængden af toppunkter.

Find en ligning for den parabel P_a , hvis toppunkt har mindst afstand fra O .

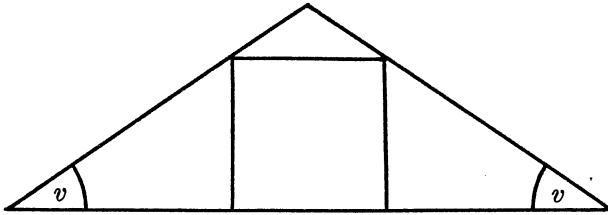
Bestem mængden af de tal a , for hvilke det gælder, at afstanden fra punktet $E(0, 1)$ til T_a er mindre end $\sqrt{10}$.

Højere forberedelseseksamen.

Tilvalgsfag matematik.

1. Nedenstående figur viser en lige­benet trekant, hvori der er indskrevet et kvadrat med sidelængden 2. Vinklerne ved grundlinjen er v .

Bevis, at arealet af trekanten er $\frac{(2 + \operatorname{tg} v)^2}{\operatorname{tg} v}$. Beregn arealet, når $v = 72,1^\circ$. Beregn v , når arealet er 10,86.



2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{x}(3-x).$$

Undersøg funktionen med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Tegn det grafiske billede af funktionen. Vis, at det grafiske billede har en tangent (halvtangent) i koordinatsystemets begyndelsespunkt.

Løs uligheden

$$-\frac{1}{2}x \leq f(x).$$

Beregn arealet af den punktmængde, der er bestemt ved

$$\{(x, y) \mid -\frac{1}{2}x \leq y \leq f(x)\}.$$

3a. Løs for ethvert reelt tal a ligningssystemet

$$ax^2 + 2y = a + 2$$

$$8x^2 + ay = 4$$

med hensyn til (x, y) .

3b. I mængden af positive reelle tal $\mathbb{R}_+$ er en komposition $*$ bestemt ved

$$x*y = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Beregn $3*4$, $(3*4)*5$ og $3*(4*5)$.

Bevis, at funktionen f fastlagt ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

er en isomorfi fra $(\mathbb{R}_+, *)$ til $(\mathbb{R}_+, +)$.

Bevis, at den associative lov gælder for $(\mathbb{R}_+, *)$.

Bevis, at $(\mathbb{R}_+, *)$ ikke har noget neutralt element.

FINLAND

Längre kursen.

1. Bestäm a och b så, att $f(x) = ax^4 + bx^3$ uppfyller villkoren $f(1) = 4$ och $f'(2) = 28$.

2. Bestäm de polynom av tredje graden med heltaliga koefficienter vilkas nollställen är $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} + 2i$ och $\frac{1}{2} - 2i$.

3. Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}}.$$

4. Lös den ena av följande uppgifter:

a) En cirkel går genom två hörn i en kvadrat och tangerar en av dess sidor. Beräkna förhållandet mellan cirkelns radie och kvadratens sida.

b) Vektorena $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ uppfyller villkoren $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = a$ och $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$. Bestäm konstanten k så, att vektorn $\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - (1-k)\mathbf{a}_2$ har längden ka .

5. Man vet att $f'(x) = \frac{1}{3x-2}$ och $f(1) = 1$. Beräkna $f''(2)$ och $f(2)$.

6. Bestäm orten för de punkter vilka har samma avstånd till x -axeln och cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Rita figur.

7. Talen i räkkan $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ bildar en konvergent geometrisk serie med summan 10. Beräkna (exakt) summan av de hundra första talen i räkkan

$$\log a_1, \log a_2, \log a_3, \dots, \log a_n, \dots \quad (\text{basen} = 10).$$

8. Undersök vilka värden funktionen

$$y = +\sqrt{2x+1+x^{-2}}$$

antar då $-1 \leq x \leq 3$.

9. Visa, att för $0 < x < \pi/3$ gäller $\tan x < 2x$.

10. I tetraedern $ABCD$ är $AC = BC = AD = BD = s$. Vilken är tetraederns största möjliga volym?

11. Betrakta alla funktioner $y = f(x)$ med följande egenskaper: $f(0) = 1$; $f(2) = 4$; i intervallet $0 \leq x \leq 2$ gäller $0 \leq f'(x) \leq 2$. Bestäm med stöd härav möjligast trånga gränser för värdena $f(1)$. Ange en funktion av det nämnda slaget för vilken $f(1)$ sammanfaller med den ovan erhållna undre gränsen.

12. Må E vara ett ändligt utfallsrum med en given sannolikhetsfunktion P , och må A och $\bar{A}$ vara två komplementära händelser i detta rum. Bevisa att $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Vilken är sannolikheten för att tippa åtminstone en match rätt vid slumpmässig tippning av en kolumn med tolv matcher (alternativ 1, x och 2)?

Endast tio uppgifter får behandlas. Uppgifterna 11 och 12 fordrar kunskaper utöver den egentliga skolkursen.

ÍSLAND

(Mentaskólinn við Hamrahlíð.)

I.

1. Bestem for følgende talmængder øvre og nedre grænse, hvis sådanne findes:

$$A = \left\{ a_n \mid a_n = \frac{2n}{n+1}, n \in N \right\}, \quad B = \left\{ x \mid \frac{5-x}{x^2-1} > 1, x \in R \right\}.$$

2. Bestem nulpunkterne for polynomiet

$$P(z) = 2iz^2 + (2-5i)z - 1 + 2i,$$

og dan et tredje grads polynomium $Q(z)$ med reelle koefficienter, således at P 's nulpunkter også er nulpunkter for Q .

3. Bestem alle løsninger til ligningen

$$z^7 + z^6 + z^4 + z^3 + z + 1 = 0.$$

Skriv rødderne på formen $a + ib$ (a og b reelle tal) og tegn deres graf.

4. a) For hvilke hele tal a findes der en løsning til

$$x^2 \equiv a \pmod{9}?$$

- b) Bestem løsningerne til

$$x^2 + 4x + 3 \equiv 0 \pmod{9}$$

og

$$x^2 - x - 8 \equiv 0 \pmod{9}.$$

c) Vis, at restklasserne 1, 2, 4, 5, 7 og 8 (mod 9) danner en gruppe G overfor multiplikation (den associative lov behøver ikke at eftervises).

d) Vis, at G er cyklisk og bestem dens frembringere.

e) Bestem en undergruppe i G med 3 elementer.

5. Givet funktionen

$$f(x) = \cos^3 x - \sin^2 x \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Beregn værdierne af $f'(x)$ og $\int_0^x f(t) dt$ (for det nulpunkt x i f , som ligger nærmest 2π).

6. Ligningerne for linierne l og m er

$$\begin{aligned} l: 3x - y &= 0 \\ m: x + 2y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Lad m_1 betegne m 's spejlbillede i l . Bestem ligningen for m_1 .

II.

1. Givet linierne

$$l = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 0\}, \quad m = \{(x, y) \mid x = 3 + t, y = 2 + at\}.$$

For hvilke værdier af a er m vinkelret på l ?

Bestem ligningen for en linie n , som går gennem punktet $(3, 2)$ og danner en vinkel på 45° med l . (Hvor mange løsninger?)

2. I et koordinatsystem i planen er der givet punktet $A(4, -3)$.

a) Bestem koordinaterne for punktet B , således at $\vec{OB} = 3\vec{OA}$.

b) Bestem koordinaterne for punktet D , således at $\vec{DB} = \frac{1}{2}\vec{AD}$.

c) Beregn $\vec{AB} \cdot \vec{OB}$.

d) Beregn $\vec{AB} \cdot \vec{OD}$, samt den spidse vinkel mellem $\vec{OD}$ og $\vec{AB}$.

e) Bestem skæringspunktet mellem liniestykkerne AB og OD .

3. En ellipse har sine brændpunkter i $(\pm 4, 0)$ og toppunkter i $(\pm 5, 0)$. Bestem ellipsens ligning samt ligningen for dens tangent i punktet $P(4, \frac{9}{5})$.

Vis dernæst, at ligningen

$$15^2x^2 - 20^2y^2 = 48^2$$

er ligning for en hyperbel, som skærer ellipsen i punktet P . Bestem vinklen mellem tangenterne for ellipsen og hyperbelen i P . Tyder din tegning (med brændstråler) på nogen regel angående skæringen mellem ellipse og hyperbel med fælles brændpunkter?

4. Bestem maxima, minima og asymptoter for kurven

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \right\},$$

og tegn den i hovedtræk.

Find ligningen for kurvens tangent i $(2, 5)$.

I hvilket forhold deler røringspunktet liniestykket, som asymptoterne skærer af tangenten?

Beregn arealet af det område, som begrænses af F , den skæve asymptote samt linierne $x = 2$ og $x = 4$.

5. Tegn graferne for funktionerne

$$f(x) = \frac{1}{2}|x^2 - 4| - \frac{1}{2}(x^3 - 2), \quad g(x) = [1 - \frac{1}{2}x]$$

indenfor intervallet $-4 \leq x \leq 4$.

Beregn $f \circ g(2)$ og $g \circ f(2)$.

Hvor indenfor intervallet er f og g a) kontinuerte, b) differentiable?

Beregn $f'(x)$ og $\int_{-4}^4 g(x) dx$.

6. (Vælg enten a) eller b), ikke begge dele.)

a) Bevis, at

$$\cos 2t + \cos 4t + \cos 6t + \dots + \cos 2nt = \frac{\sin (2n+1)t - \sin t}{2 \sin t},$$

og fremsæt en tilsvarende sætning om

$$\sin 2t + \sin 4t + \sin 6t + \dots + \sin 2nt.$$

b) Angiv definitionen af $[x]$ samt dens definitionsmengde og værdimængde.

Vis at hver af de to funktioner, $[x] + [-x]$ og $[x] - 2[\frac{1}{2}x]$, kun kan tage to forskellige værdier.

NORGE

Reallinjen.

1. a) Likningen

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

har røttene x_1 , x_2 og x_3 . Finn koeffisientene p , q og r uttrykt ved x_1 , x_2 og x_3 .

b) I likningen

$$x^3 - 16x^2 + (2a + 3)x + 3a = 0$$

er den ene roten tre ganger summen av de to andre røttene. Finn a og røttene i likningen.

c) Skriv regelen for å opphøye en potens i en potens.

Finn t av likningen

$$e^{3t} - 16e^{2t} + 43e^t + 60 = 0,$$

der e er grunntallet i det naturlige logaritmesystemet.

2. Vis at

$$\sin 3v = 3 \sin v - 4 \sin^3 v.$$

I trapeset $ABCD$, der CD er parallell med AB , er $AB = 5a$, $BC = 3a$, $CD = 2a$, $\angle BAC = v$ og $\angle BCD = 4v$. Vis at $\sin v = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Konstruer trapeset ved først å konstruere vinkelen v . Bruk $a = 2$ cm ved konstruksjonen.

Regn ut AC og AD uttrykt ved a .

Vi trekker en linje gjennom punktene A og D og en linje gjennom punktene B og C . De skjærer hverandre i E . Vis at $AE = \frac{10}{3}a$.

En sirkel går gjennom C og E og tangerer AB i G . Denne sirkelen skjærer siden AD i et punkt F . Finn AG og AF uttrykt ved a .

3. Parabellen $x^2 - 4y = 0$ er gitt. Finn likningen for tangenten i punktet $P(x_1, y_1)$ på parabellen. Trekk en rett linje p fra origo vinkelrett på denne tangenten, og en rett linje q gjennom P parallell med x -aksen. Kall skjæringspunktet mellom p og q for S . Når P flytter seg på parabellen, tegner S en kurve K . Vis at K har likningen

$$y = x^{2/3}.$$

Er denne kurven symmetrisk om noen av koordinataksene?

Sett $f(x) = x^{2/3}$. Regn ut $f'(x)$ og $f''(x)$. Drøft fortegnet for disse tre funksjonene når x varierer. Hvordan går det med $f'(x)$ når $x \rightarrow 0$, når $x \rightarrow \infty$ og når $x \rightarrow -\infty$?

Tegn den gitte parablen og kurven K på millimeterpapiret med 2 cm som enhet på begge aksene.

Regn ut det arealet i 1. kvadrant som er avgrenset av parablen og kurven K .

PRØVEPENSUM.

For eksaminander med prøvepensum i differensiallikninger var oppgave 3 erstattet av følgende:

3. Vi har gitt differensiallikningen

$$(x-3)y' - y = 2(x-3)^2(x+1), \quad x < 3.$$

Bestem den fullstendige løsningen til differensiallikningen.

Vis at likningen for den løsningskurven som har maksimalpunkt på x -aksen, kan skrives

$$y = (x+1)^2(x-3).$$

Bestem eventuelle nullpunkter, maksimalpunkter og minimalpunkter til denne funksjonen.

Framstill funksjonen grafisk.

Bestem ved hjelp av grafen det tallområdet k tilhører når to av røttene i likningen

$$(x+1)^2(x-3) = k$$

er a) positive, b) negative.

Bestem k slik at likningen får to forskjellige reelle røtter, og finn disse røttene.

For eksaminander med prøvepensum i vektorregning var oppgave 2 erstattet av følgende:

2. a) Bruk vektorregning til å bevise følgende setninger:

1) Summen av kvadratene på diagonalene i et parallelogram er lik summen av kvadratene på sidene.

2) Firkanten $ABCD$ er en rombe $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BD} + \vec{AD}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

b) I et ortonormert koordinatsystem er det gitt en rombe $ABCD$. Punktet A har koordinatene $(1,0)$, punktet B har koordinatene $(6,5)$, og

$$\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -20.$$

Finn koordinatene til punktene C og D og vinklene i romben.

c) Det er gitt en rombe $ABCD$. Merk av et punkt P på BC slik at $\vec{BP} = f \cdot \vec{PC}$, og et punkt Q på linjen gjennom D og C slik at $\vec{DC} = f \cdot \vec{CQ}$. Vis ved vektorregning at punktene A , P og Q ligger på en rett linje.

For eksaminander med prøvepensum i geometri var oppgave 2 erstattet av følgende:

2. To plan α og β er gitt ved likningene

$$\begin{aligned}\alpha: 5x + y - 6z + 6 &= 0 \\ \beta: 3x - y - 2z + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Planene α og β skjærer hverandre i en rett linje s . Bestem en parameterframstilling for s .

Vi har gitt et punkt $P(5, 3, 2)$. Bestem likningen for et plan γ gjennom linjen s og punktet P . Hvilken avstand har dette planet fra origo?

Likningen

$$(2k-1)x + y - 2kz + 2k = 0$$

framstiller et plan for hvert reelt tall k . Vis at alle planene går gjennom linjen s .

For eksaminander med fullstendig prøvepensum i matematikk var det gitt egne oppgavesett:

1. Geometri-oppgaven ovenfor.
2. Finn løsningsmengden til likningssettet

$$\begin{aligned}ax + y &= c \\ 2x + y &= a.\end{aligned}$$

Alternativ 1:

3. Vis ved induksjon at for alle naturlige tall n gjelder

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1.$$

4. En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2x - x^2}{4(|x| - 2)}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \neq 2\}.$$

Undersøk om $f(x)$ har noen grenseverdi når a) x går mot -2 , b) x går mot 2 . Bestem asymptotene. Bestem nullpunkter og ekstremalpunkter til f . Tegn grafen til f .

Bestem ved regning løsningsmengden til likningen

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + t.$$

Regn ut

$$\int_3^9 \frac{1}{f(x)} dx.$$

Alternativ 2:

3. a) Skriv opp definisjonen av kontinuitet av en funksjon f i et gitt punkt ved hjelp av kvantorer. Bruk definisjonen til å vise at funksjonene f og g gitt ved

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{og} \quad g(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

er kontinuerlige i $x=2$.

b) Bestem

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x - \sqrt{20-x}}.$$

4. En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \int_1^x (t^2 - 2t - 8) \ln t \, dt.$$

Forklar hvorfor

$$f'(x) = (x^2 - 2x - 8) \ln x.$$

Bestem den største definisjonsmengden for funksjonen f .

Bruk $f'(x)$ til å bestemme mulige maksimal- og minimalpunkter for funksjonen f .

Skisser grafen til f .

Bruk partiell (delvis) integrasjon til å bestemme et uttrykk for $f(x)$ som ikke inneholder integraltegn.

SVERIGE

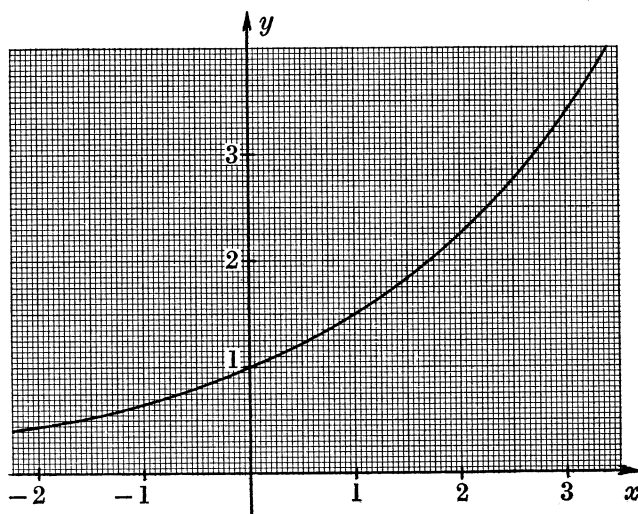
Naturvetenskaplig och teknisk linje.

Årskurs 2.

Del A. Uppgifter till vilka endast svar skall lämnas.

1. F är en primitiv funktion till funktionen f , där $f(x) = 6x^2 - 4x + 2$. Man vet att $F(1) = 3$. Bestäm $F(x)$.

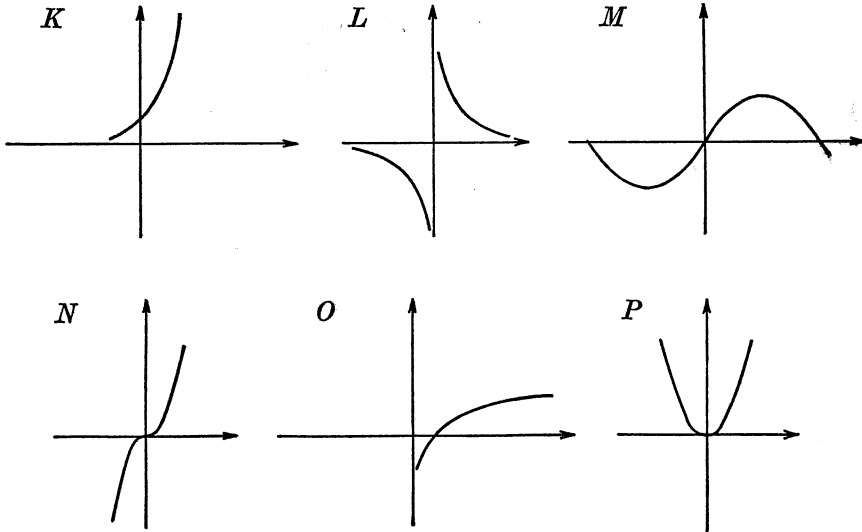
2. Figuren visar kurvan $y = a^x$. Bestäm a .



3. Kurvorna K, L, M, N, O, P nedan är graferna till funktionerna

- a) $x \mapsto x^2$; b) $x \mapsto \sin x$; c) $x \mapsto e^x$; d) $x \mapsto \frac{1}{x}$;
 e) $x \mapsto x^3$; f) $x \mapsto \ln x$.

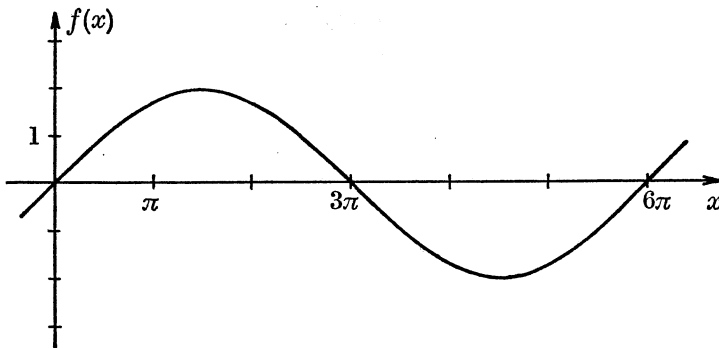
Ange vilken kurva som hör till respektive funktion.



4. En funktion $x \mapsto f(x)$ är deriverbar för alla reella x . Ange i vilket av nedanstående fall funktionen antar ett lokalt maximivärde för $x=1$.

- a) $f'(x) = 1 - x$; b) $f'(x) = |x - 1|$;
 c) $f'(x) = (x + 1)(x - 3)$; d) $f'(x) = (x - 1)^2(x - 4)$.

5. Vilken av nedanstående funktioner f har följande graf?



- a) $f(x) = 2 \sin 3x$; b) $f(x) = \frac{3}{2} \cos x$; c) $f(x) = 2 \sin \frac{x}{3}$;
 d) $f(x) = 3 \sin 2x$; e) $f(x) = 2 \cos(x + \pi)$.

6. I vilka av följande fall gäller $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$?

- a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; b) $f(x) = \ln(1+x)$; c) $f(x) = \cos x$.
 d) $f(x) = e^x$; e) $f(x) = x \cdot e^x$; f) $f(x) = \tan x$.

7. Lös ekvationen $\sin x = -0,80$, $0 \leq x < 360^\circ$. Svara i hela grader.

8. Vilken av följande funktioner är invers till funktionen $x \mapsto e^{2x}$?

- a) $x \mapsto \ln 2x$; b) $x \mapsto e^{x/2}$; c) $x \mapsto \frac{1}{2} \ln x$; d) $x \mapsto \ln \frac{x}{2}$.

9. Bestäm $f'(e)$, då $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

10. Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-1}^1 x^{2n} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Del B. Uppgifter till vilka fullständig lösning skall lämnas.

11. Rita kurvan $y = 4x^3 - 3x$ samt ange koordinaterna för kurvans maxi- och minimipunkter.

12. Rita kurvan $y = 3 + 2x - x^2$. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan och de positiva koordinataxlarna.

13. $ABCD$ är en rektangel. $|\overline{AB}| = 2$ och $|\overline{AD}| = 1$. M är mittpunkt på DC . Beräkna skalärprodukten $\overline{AM} \cdot \overline{AC}$.

14. Vid tidpunkten t sekunder är den elektriska spänningen mellan två punkter $U(t)$ volt, och $U(t) = 200(1 - e^{-0,03t})$. Strömstyrkan mellan punkterna är $I(t)$ ampere, och $I(t) = U'(t)$. Bestäm strömstyrkan för $t = 20$.

15. Funktionen Φ har följande egenskaper:

1) $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5x^2}$ för alla x .

2) Några av Φ :s funktionsvärden framgår av följande tabell:

x :	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00
$\Phi(x)$:	0,5000	0,5987	0,6915	0,7734	0,8413	0,9332	0,9772

Bestäm med hjälp av ovanstående uppgifter ett närmevärde till

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-0,5x^2} dx.$$

Årskurs 3.

Del L. Uppgifter till vilka endast svar skall lämnas.

VEKTORER MED KOMPLEXA KOMPONENTER.

För sådana vektorer $\vec{v} = (x, y)$ som behandlats i gymnasiekursen gäller att x och y är reella tal. Men man kan generalisera begreppet vektor och definiera en vektor

$$\vec{V} = (z, w), \text{ där } z \text{ och } w \text{ är komplexa tal.}$$

För två sådana vektorer kan man definiera en motsvarighet till den skalära produkten av två reella vektorer.

Definition: Den skalära produkten av vektorn $\vec{V}_1 = (z_1, w_1)$ och vektorn $\vec{V}_2 = (z_2, w_2)$ är ett komplext tal $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = z_1 \bar{z}_2 + w_1 \bar{w}_2$, där $\bar{z}$ som vanligt betecknar det konjugerat komplexa talet till z , alltså $\bar{z} = a - bi$, om $z = a + bi$ ($a, b \in R$).

Exempel 1: Om $\vec{V}_1 = (1 + i, 2)$ och $\vec{V}_2 = (2 - i, 10 + 4i)$, får man eftersom $i^2 = -1$:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (1 + i)(2 + i) + 2(10 - 4i) = 2 + 2i + i + i^2 + 20 - 8i = 21 - 5i.$$

1. Bestäm $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ då $\vec{V}_1 = (1 + i, 2)$ och $\vec{V}_2 = (3 - i, 1 + i)$.

2. För reella vektorer gäller $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$. Den här definierade skalära produkten är emellertid inte kommutativ, dvs. i allmänhet är $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \neq \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$. Däremot kan man visa att

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 = \overline{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}$$

där $\overline{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}$ är det konjugerat komplexa talet till $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$.

I exempel 1 ovan beräknades $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ för två givna vektorer. Ange $\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$, där $\vec{V}_1$ och $\vec{V}_2$ är samma vektorer som i exempel 1.

3. Vid definition av en vektors längd behöver man den skalära produkten av en vektor $\vec{V}$ med sig själv, $\vec{V} \cdot \vec{V}$.

Bestäm $\vec{V} \cdot \vec{V}$, då $\vec{V} = (a + bi, c + di)$.

4. Man definierar en vektors längd, $|\vec{V}|$, liksom vid reella vektorer:

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}.$$

Beräkna längden av vektorn $\vec{V}_1$ i uppgift 1 ovan.

Även begreppet ortogonala vektorer kan generaliseras.

Definition: $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{V}_1$ och $\vec{V}_2$ är ortogonala.

Exempel 2: Vektorerna $\vec{V}_1 = (1 - 2i, 2)$ och $\vec{V}_2 = (i, 1 - \frac{1}{2}i)$ är ortogonala, ty

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (1 - 2i)(-i) + 2(1 + \frac{1}{2}i) \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -i - 2 + 2 + i \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0.$$

5. Bestäm de reella tal t , för vilka vektorerna $\vec{V}_1 = (t, i)$ och $\vec{V}_2 = (t + i, t - i)$ är ortogonala.

Del A. Uppgifter till vilka endast svar skall lämnas.

6. Vilka av nedanstående vektorer (givna i ett ortonormerat koordinatsystem) är ortogonala mot vektorn $(1, 2, 3)$?

- a) $(1, 2, 3)$; b) $(3, 0, 0)$; c) $(-4, 5, -2)$;
d) $(0, 3, -2)$; e) $(3, 2, 1)$.

7. I en klass på 25 elever är 10 flickor. Två klassrepresentanter, en flicka och en pojke, skall utses. På hur många sätt kan detta ske?

8. Linjerna $y = 2x$ och $x = 3$ roterar kring x -axeln. Beräkna volymen av den begränsade kropp som bildas vid rotationen.

9. Vilka av följande talföljder är geometriska?

- a) $0, -1, -2, -3, \dots$; b) $3, -6, 12, -24, 48, \dots$;
c) $e^0, e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \dots$; d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$; e) $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \dots$.

10. Vilken av nedanstående differentialekvationer har en lösning $y = -\sin x - \cos x$?

- a) $y'' - y = e^x$; b) $3y' + y = x + \sin x$;
c) $y'' + y' = 2 \sin x$; d) $y'' - 2y' - 3y = x$.

11. Vilka av nedanstående komplexa tal har ett argument $\frac{\pi}{4}$?

a) $\frac{1}{i}$; b) $-\frac{1}{i}$; c) $3+3i$; d) $\frac{1}{1-i}$; e) $\frac{1+i}{i}$.

12. Genom variabelsubstitutionen $x = 1+t^2$ övergår integralen $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} dx$ i en av nedanstående integraler. Ange vilken.

a) $\int_0^1 e^t dt$; b) $\int_0^1 2te^t dt$; c) $\int_1^2 e^t dt$;
 d) $\int_0^1 \frac{e^t}{2t} dt$; e) $\int_1^2 2te^{\sqrt{t-1}} dt$; f) $\int_1^2 2te^t dt$.

13. Planen $x+2y+z=0$ och $2x+3y-z+5=0$ skär varandra längs en rät linje. Bestäm var denna linje skär xy -planet.

Del B. Uppgifter till vilka fullständiga lösningar skall lämnas.

14. Bestäm konstanten a så att vektorn $(2, -3, 1)$ blir parallell med planet $ax+5y-3z+2=0$.

15. Bestäm den lösning till ekvationen $y'+3y=0$ för vilken gäller $y(0)=2$.

16. En rät linje L går genom punkten $(5, 3, 4)$ och är parallell med linjen $(x, y, z) = (1+t, 2t, -t)$. Bestäm skärningspunkten mellan L och planet $x+y-z+4=0$.

17. Hur många termer måste man minst ta med i den oändliga geometriska serien $125+100+80+\dots$ för att summan av dessa termer skall överstiga 624?

SUMMARY IN ENGLISH

VIGGO BRUN: *Leibniz' formula for π deduced by a mapping of the circular disc.* (English.)

In the eighth part of a circle with radius 1 (figs. 9 and 10 p. 79), we draw the curves C_n whose equations in polar coordinates are $r = \operatorname{tg}^{2n} v$, $0 \leq v \leq \pi/4$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Then the area enclosed by the axis, the circle and C_1 is $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3})$, the area between C_1 and C_2 is $\frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{7})$, the area between C_2 and C_3 is $\frac{1}{2}(\frac{1}{7} - \frac{1}{11})$, and so on. Summing these areas, we get the celebrated formula of Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

NIELS MARTIN HANSEN: *An application of the theory of differential equations to a mechanical problem.* (Danish.)

Let O and Q (fig. 1 p. 82) be the endpoints of a rod, which can move without friction around a ball-and-socket joint attached to O . In relation to a fixed co-ordinate system in space, with vertical z -axis, the point O has a prescribed motion expressed by the coordinates $O(f(t), g(t), h(t))$, $t \in [0, T]$.

Is it possible to choose the start position of the rod such that it has a prescribed direction (with positive z -component) at the time $t = T$, and such that Q has been above O all the time?

In one dimension the problem has been solved by A. Broman in a paper in NMT 1958, and it is discussed rather intuitively in R. Courant — H. Robbins: What is mathematics?

If we assume continuous acceleration of O and also $\exists \varepsilon > 0 \forall t \in [0, T]: -\ddot{h}(t) - G < -\varepsilon$, where G denotes the gravity acceleration, the above question is answered affirmatively.

FINN HOLME: *A simple determination of $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.* (Norwegian.)

The sum of the title is determined in an elementary and very simple way. From the imaginary part of Moivre's formula with exponent $2n+1$, it follows that

$$x_k = \cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1} \quad (k=1, 2, \dots, n) \text{ are the roots of an equation}$$

$$\binom{2n+1}{1} x^n - \binom{2n+1}{3} x^{n-1} + \dots = 0.$$

Summing the roots, and using

$$\cotg^2 \varphi < \varphi^{-2} < (\sin \varphi)^{-2} = 1 + \cotg^2 \varphi \quad (0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi),$$

bounds are obtained for $\sum_1^n k^{-2}$, from which

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

follows immediately.

ERNST S. SELMER: *A propos of Finn Holme's paper.* (Norwegian.)

Moivre's formula, and the connection between coefficients and roots of an algebraic equation, are used to give a simple proof of the well known identity

$$[120] \quad \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\varphi + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}.$$