

EN GENERELL METODE TIL PUNKTVIS KONSTRUKSJON AV KJEGLESNITT

HANS GEORG KILLINGBERGTRØ

Ved tekniske skoler og høyskoler og i universitetsutdannelsen av matematikklærere til den høyere skole blir det gitt kurser i deskriptiv geometri der kjeglesnittene kommer til hyppig anvendelse i øvingsoppgavene. På dette trinn blir kurvetegningen gjerne utført ved at man ut fra visse definisjonselementer konstruerer et rimelig antall kurvepunkter og trekker kurven skjønnsmessig gjennom disse. Lærebøkene er da også i regelen godt utstyrt med anvisning av metoder til punktviss konstruksjon av kjeglesnitt. Naturlig nok er disse metodene spesialisert i to retninger, nemlig både for ulike slags kjeglesnitt og for forskjellige definisjonselementer til hvert av disse. Slik er det oppstått en dobbel flerfoldighet av metoder som kandidatene skal skille mellom og lære å anvende.

Dette skulle tilsi et visst behov for en generalisering over de nevnte retninger, med en praktisk verdi som for det ene avhenger av hvor mange spesialmetoder man får slått sammen i en metode, og for det andre av i hvor liten grad generaliteten er oppnådd på bekostning av en praktisk utførelse.

I det følgende beskrives en metode som har fullstendig generalitet i den grad at den er felles for alle kjeglesnitt og anvender definisjonselementer som dels kan utledes av, og dels inneholder som spesialtilfeller, elementene for de ulike spesialmetodene. Metoden er en direkte anvendelse av den projektivgeometriske setning om dannelsen av et kjeglesnitt ved to projektive linjebunter. Denne setning kan igjen oppfattes som et kollar til Pascals setning om en sekskant som er innskrevet i et kjeglesnitt (se f. eks. J. Hjelmslev: Lærebog i geometri, og Grundlag for den projektive geometri). I første omgang kan det derfor vekke en viss undring at lærebokforfattere og lærere vil beholde flerfoldigheten av spesialmetoder, heller enn å trekke denne gamle og velkjente perle inn i undervisningen. Forklaringen kan være at teorien bak disse setningene ville sprengte rammen for et rimelig pensum. En hensikt med denne artikkel er derfor å vise hvordan metoden kan innføres på et elementært grunnlag. Dette grunnlaget omtales i avsnitt 1. I avsnitt 2 innføres metoden med en kort begrunnelse. I avsnitt 3 viser de to første eksemplene

at metoden har et større anvendelsesområde enn spesialmetodene til- sammen. De øvrige eksemplene viser det eiendommelige forhold at den generelle metode gir raskere konstruksjoner enn de fleste spesialmeto- dene. I avsnitt 4 er samlet en del kommentarer.

1. I de nevnte kurser i deskriptiv geometri innføres i forbindelse med sentralprojeksjon en utvidelse av det tredimensjonale rom med såkalte uendelig fjerne elementer. Av teorien for denne utvidelse tar vi med følgende definisjoner og setninger:

- D1. I det utvidede rom ligger et og bare et uendelig fjernt plan. Alle andre plan i rommet er utvidede og kalles egentlige plan.
- D2. I ethvert egentlig plan ligger en og bare en uendelig fjern linje. Den lar seg formelt representere ved planets retning, og er derfor felles for alle plan i denne retning. Alle andre linjer i planet er utvidede og kalles egentlige linjer.
- D3. På enhver egentlig linje ligger et og bare et uendelig fjernt punkt. Det lar seg formelt representere ved linjens retning, og er derfor felles for alle linjer i denne retning. Alle andre punkter på linjen kalles egentlige punkter.
- D2'. Gjennom enhver (uendelig fjern såvel som egentlig) linje går minst et egentlig plan.
- D3'. Gjennom ethvert (uendelig fjernt såvel som egentlig) punkt går minst en egentlig linje.

De to siste definisjonene avslutter det utvidede rom, i det de sier at dette rom ikke inneholder andre uendelig fjerne linjer og punkter enn de som innføres ved D2 og D3. Med en slik avsluttet utvidelse av rommet oppnåes blant annet at følgende setninger gjelder uten unntak:

- S1. Gjennom to forskjellige punkter går en og bare en linje.
- S2. To forskjellige linjer i samme plan har et og bare et skjæringspunkt.
- S3. Gjennom en linje og et punkt som ikke ligger på linjen går et og bare et plan.
- S4. Et plan og en linje som ikke ligger i planet har et og bare et skjæringspunkt.
- S5. To forskjellige plan skjærer hverandre i en linje og har ingen andre punkter felles.

I en nærmere kommentar til S1 betraktes følgende tilfeller, i det punktene kalles A og B og linjen c :

- a) A og B er egentlige. Da er også c egentlig. (Selvskreven restriksjon til S1.)

b) A er egentlig og B er uendelig fjernt. B ligger da på en egentlig linje b (D3'), og c blir en egentlig linje som går gjennom A og er parallell med b .

c) Både A og B er uendelig fjerne punkter, henholdsvis på to egentlige linjer a og b . Da er c den uendelig fjerne linje i et egentlig plan som er parallelt med både a og b . Da a og b ikke kan være parallelle når A og B skal være forskjellige (D3), er planets retning og dermed c entydig bestemt (D2).

Av fire tilfeller under S2 skal bare et nevnes, der linjene kalles a og b , planet π , og skjæringspunktet C : π er rommets uendelig fjerne plan, og a og b er de uendelig fjerne linjer i to egentlige plan α og β . Disse plan er ikke parallelle siden a og b er forskjellige (D2). Da vil α og β skjære hverandre i en egentlig linje c (restriksjon til S5), og C blir det uendelig fjerne punkt på c .

De andre tilfellene under S2 og alle tilfellene under S3, S4 og S5 kan kommenteres på tilsvarende måte.

La α og α' være to forskjellige plan, og $\emptyset$ et punkt som hverken ligger i α eller i α' . Er A et vilkårlig punkt i α , kan skjæringspunktet A' mellom α' og linjen $\emptyset A$ betraktes som et bilde av A . Denne avbildningen av α på α' kalles sentralprojeksjon med α' som billedplan og $\emptyset$ som øyepunkt. Her utelukkes ikke det tilfelle at $\emptyset$ er uendelig fjernt, men da må både α og α' nødvendigvis være egentlige siden $\emptyset$ ikke skal ligge i noe av dem. I dette tilfelle blir avbildningen affin.

Av S1 og S4, henholdsvis av S3 og S5, følger at en sentralprojeksjon avbilder en-entydig punkt i punkt og linje i linje.

Med motiv i rommets utvidelse og egenskaper ved sentralprojeksjonen tilføyes følgende definisjoner:

En hyperbel har to uendelig fjerne punkter, representert ved de to asymptoteretninger. Asymptotene er tangenter i disse punktene.

En parabel har et uendelig fjernt punkt, representert ved parabelens akseretning. Den uendelig fjerne linje i parabelens plan er tangent i dette punktet.

Et punkt O i samme plan som et kjeglesnitt κ sies å ligge innenfor κ dersom enhver linje som ligger i dette plan og går gjennom O , skjærer κ i to forskjellige punkter som begge er forskjellige fra O .

Etter dette vil sentralprojeksjonen avbilde kjeglesnitt i kjeglesnitt, tangent i tangent, tangeringspunkt i tangeringspunkt og et punkt innenfor kjeglesnittet i et punkt innenfor dets bilde. Her og i det følgende er underforstått at α og α' er egentlige plan.

I neste avsnitt benyttes følgende hjelpesetning:

Til et vilkårlig kjeglesnitt κ i planet α , og et vilkårlig punkt O innenfor κ , kan en finne et billedplan α' og et øyepunkt $\emptyset$ slik at O avbildes i et punkt O' og κ i en sirkel med O' som sentrum.

Setningen begrunnes slik: Gjennom O går en diameterlinje som skjærer κ i to punkter, hvorav minst et, la oss si P , er egentlig. La P_0 være det uendelig fjerne punkt på tangenten i P . OP_0 skjærer κ i to punkter, hvorav det ene kalles Q . Tangenten i Q skjærer PP_0 i et egentlig punkt R , og den skjærer OP i et punkt S . La α' være et vilkårlig plan som er forskjellig fra α og skjærer α langs PP_0 . Da er R og P egentlige punkter i α' , og en kan finne et punkt O' i α' slik at linjestykkene RP og PO' blir sider i et kvadrat. La S' være det uendelig fjerne punkt på PO' . OO' og SS' ligger i samme plan og skjærer hverandre i et punkt $\emptyset$. Det overlates leseren å verifisere at dette valg av α' og $\emptyset$ gir den påståtte avbildning.

2. Konstruksjonen bygger på følgende definisjonselementer: Gitt tre punkter på et kjeglesnitt, og tangentene i to av dem.

La A og B være de to punktene med kjente tangenter, C det tredje punktet og S tangentenes skjæringspunkt. Konstruksjonen utføres som en serieproduksjon av kurvepunkter C_i på følgende måte (fig. 1).

Trekk linjene AC og BC . Overskjær disse med en skare linjer gjennom S . En slik linje vil skjære AC i et punkt A_i og BC i et punkt B_i . Skjæringspunktet C_i mellom AB_i og BA_i ligger da på kjeglesnittet.

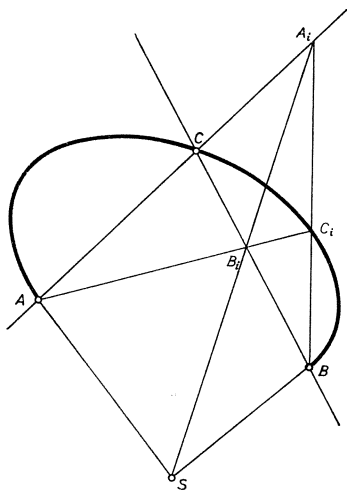


Fig. 1

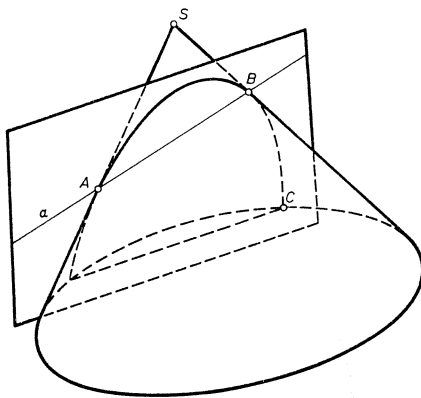


Fig. 2

Dette kan bevises slik: I det spesielle tilfellet hvor kurven er en sirkel med AB som diameter, står BC normalt på AC , og A_iB_i normalt på AB , hvorved B_i er skjæringspunktet mellom høydene i trekanten AA_iB . Altså er AC_i høyden på BA_i , hvorved C_i ligger på sirkelen. Det generelle tilfelle tilbakeføres på dette spesialtilfellet ved at man på AB velger et punkt O innenfor kjeglesnittet og anvender hjelpesetningen i foregående avsnitt.

3. Med noen eksempler vil vi nå vise hvordan metoden egner seg i praksis, og begynner med å illustrere det utvidede anvendelsesområde som kommer av at man ikke behøver å kjenne hva slags keglesnitt som foreligger.

Eksempel 1. Projeksjon av skjæringen mellom andregradsflate og plan.

Er andregradsflaten en kjegleflate (fig. 2), blir konturgeneratrisenes projeksjoner tangenter til den søkte kurve. Planet gjennom konturen skjærer det gitte plan i en linje hvis projeksjon a bestemmer tangeringspunktene A og B . Et tredje punkt C finnes enten som skjæring mellom planet og en vilkårlig generatrise, eller mer spesielt, som på fig. 2. Ut fra dette kan kurven konstrueres.

På lignende måte finnes projeksjonen av et plans skjæring med ellipsoide, paraboloider eller hyperboloide, i det disse har plan kontur. Tangentene i A og B må da bestemmes som tangenter til konturens projeksjon. I avsnitt 4 er beskrevet hvordan tangentene kan konstrueres. Skal man tegne to projeksjoner, kan et konturpunkt i den ene overføres og tjene som C i den andre.

Eksempel 2. Projeksjon av skjæringen mellom to andregradsflater i et spesialtilfelle.

Dersom to andregradsflater har et felles symmetriplan som er parallelt med projeksjonsplanet, vil skjæringskurvens ortogonalprojeksjon ligge på et kjeglesnitt. Fig. 3 viser en paraboloid og en sylinder i en slik stilling. Her er de nødvendige elementer funnet, og skjæringskurvens projeksjon viser seg å ligge på en hyperbel.

Kjenner man bestemte elementer på et spesielt kjeglesnitt, vil en heldig fordeling av rollene som A , B og C føre til forbausende enkle konstruksjoner, slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 3. Konstruksjon av ellipse.

Gitt en diameter, retningen av dens konjugerte, og et punkt. A og B velges i endepunktene av den gitte diameter, og S blir et uendelig fjernt

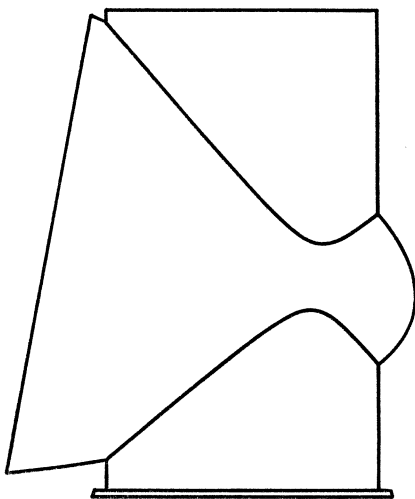


Fig. 3

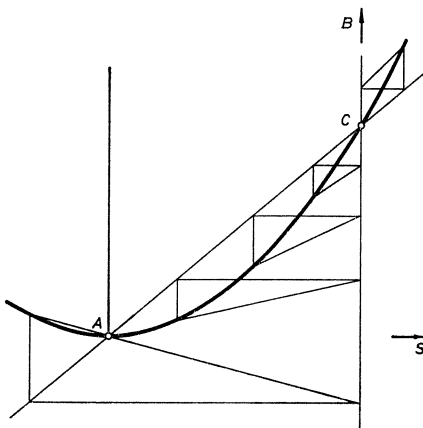


Fig. 4

punkt, representert ved retningen på den konjugerte diameter. Med en skare linjer gjennom S menes da en skare paralleller til den konjugerte diameter.

Eksempel 4. Konstruksjon av parabel.

Gitt akseretningen, toppunktet og enda et punkt på parabelen. Det sistnevnte punktet velges som C , toppunktet som A , og parabelens uendelig fjerne punkt som B . Alle linjer gjennom B blir da linjer parallelle med aksens. S blir toppunktstangentens skjæringspunkt med planets uendelig fjerne linje, som må være tangentens uendelig fjerne punkt, slik at alle linjer gjennom S blir linjer parallelle med tangenten. Konstruksjonen er gjennomført på fig. 4. Den minner mye om en spesialmetode som mange lærebøker angir, men er langt raskere enn denne ved at trekking av linjen AC overflødiggjør en nitid oppdeling av to linjestykker i jevnstore deler.

I stedet for toppunktet kan man kjenne et annet punkt med tangent og utføre konstruksjonen analogt.

Eksempel 5. Konstruksjon av hyperbel.

Gitt asymptotene og et punkt C på hyperbelen. Asymptotene skjærer hverandre i S og er tangenter til hyperbelen i de uendelig fjerne punktene A og B , fig. 5.

Gitt toppunktene A og B og et tredje punkt C . Normalen på AB angir tangentretningen i A og B , som er retningen til S , fig. 6. Denne situasjonen forekommer ofte ved opptegning av en hyperboloides kontur.

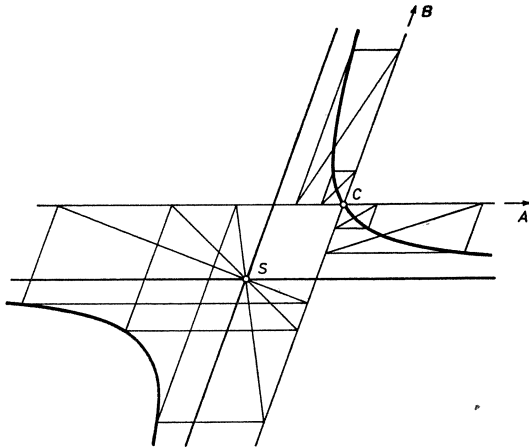


Fig. 5

4. Den nøyaktighet i opptegningen som et visst antall punkter C_i vil gi, kan man oppnå med et mindre antall punkter dersom man kjenner tangenten i hvert av dem. Har man tangenten i C , kan man ved hjelp av denne finne tangentene til C_i , i det følgende setning, som er opplagt for parabelen (fig. 4), generaliseres ved sentralprojeksjon:

La tangenten i C skjære A_iB_i i et punkt D_i . Da blir C_iD_i tangent i C_i .

Det kan være en vurderingssak om det lønner seg å bestemme tangenten i C til dette formål, men er C et egentlig punkt, kan man finne den slik (fig. 7):

Overskjær AC og BC med en parallell til CS . Denne gir punktene A' på AC og B' på BC . Diagonalen CC' i parallelogrammet $CA'C'B'$ er da tangent i C .

Dette begrunnes slik: La $\{C_i\}$ være en følge av kurvepunkter som konvergerer mot C . De tilhørende trekanter $A_iB_iC_i$ har en form og

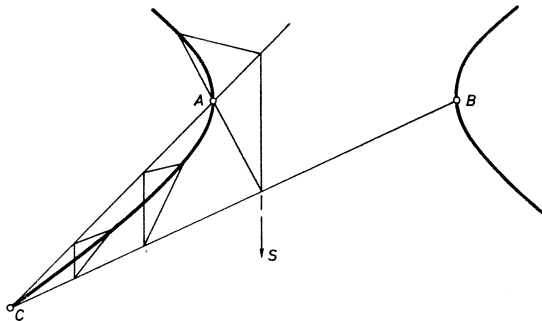


Fig. 6

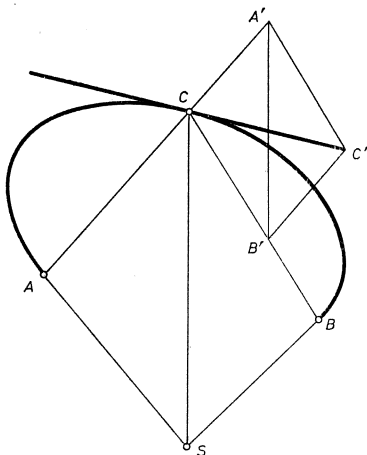


Fig. 7

stilling som nærmer seg formen og stillingen til trekanten $A'B'C'$ når C_i nærmer seg C .

Med konstruksjonen som er beskrevet i avsnitt 2, kan man i prinsippet skaffe punkter hvor som helst på kurven. Men i praksis oppstår gjerne den ulempen at konstruksjonen sveller ut i størrelse. For å unngå noe av dette kan man la et funnet punkt C_i eller et annet kjent kurvepunkt overta funksjonen som C . Ofte kan man med hell benytte de uendelig fjerne punkter på AC og BC som A_i og B_j . Eller man kan ha interesse av å finne diameteren fra A . Da begynner man med å trekke BA_i parallelt med AS , fortsetter med A_iS , som gir B_i , og AB_i gir C_i . På diameteren fra A kjenner man nå midtpunktet på BC_i og B_j . SB_j gir A_j , og BA_j gir C_j . AC_j er den søkte diameter.

Elementene som den beskrevne konstruksjon bygger på, har sin naturlige plass i denne rekke av elementer som bestemmer et kjeglesnitt:

Fem kurvepunkter.

Fire kurvepunkter og tangenten i et av dem.

Tre kurvepunkter og tangentene i to av dem.

Tre tangenter og kurvepunktene på to av dem.

Fire tangenter og kurvepunktet på en av dem.

Fem tangenter.

Et hvilket som helst av disse tilfellene kan (ved anvendelse av Pascals eller Brianchons setning) frembringes av et hvilket som helst av de andre. Derfor kan den beskrevne konstruksjon anvendes direkte eller indirekte i alle ovenstående tilfeller.

Hittil har A , B , C og S vært betraktet som fire punkter bestemt av et på forhånd eksisterende kjeglesnitt. Omvendt kan man velge de fire punktene vilkårlig og studere resultatet av konstruksjonen anvendt på disse. Her gjelder:

Dersom A , B og C ligger på linje (i utvidet betydning), kan konstruksjonen ikke utføres.

Dersom kun tre av punktene, hvorav det ene er S , ligger på linje, gir konstruksjonen punkter på en linje gjennom S og det fjerde punktet.

Dersom det blant A , B , C og S ikke forekommer tre punkter på linje, gir konstruksjonen punkter på et entydig kjeglesnitt.

OM EN METOD ATT DEFINIERA TRIGONOMETRISKA OCH HYPERBOLISKA FUNKTIONER INOM DEN LINEÄRA ALGEBRAN

JERRY SEGERCRANTZ

Inledning. De trigonometriska funktionerna införs vanligtvis i skolundervisningen i anslutning till läran om likformiga trianglar. Härvid tillordnar man varje vinkel två reella tal, »cosinus» och »sinus» för ifrågasvarande vinkel.

Genom att kombinera den sedvanliga avbildningen från den reella talaxeln till klassen av vinklar med den nyssnämnda avbildningen från klassen av vinklar till de trigonometriska storheterna, erhåller man de trigonometriska funktionerna.

Syftet med den föreliggande uppsatsen är att visa, att motsvarande procedur kan utföras helt formellt inom den 2-dimensionella lineära algebran med hjälp av en metod, som samtidigt på ett intressant sätt belyser sambandet mellan de trigonometriska och de hyperboliska funktionerna.

2-dimensionell lineär algebra. Låt E beteckna en 2-dimensionell vektorrymd med den reella talkroppen R som koefficientkropp. Vi antar alltså existensen av en additionsoperation, som tillordnar varje vektorpar x, y (vi använder här och i fortsättningen symbolerna $x, y, \dots, a, b, \dots$ för vektorer och symbolerna $\alpha, \beta, \dots$ för reella tal) en vektor $x + y \in E$, och en »skalär multiplikation», som tillordnar varje par α, x en vektor $\alpha x \in E$, varvid följande regler bör gälla för alla α, β, x, y, z :

$$\begin{aligned} x + y &= y + x, & (x + y) + z &= x + (y + z), & (\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x, \\ \alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y, & (\alpha\beta)x &= \alpha(\beta x), & 1x &= x. \end{aligned}$$

Vidare antas existensen av en (entydigt bestämd) nollvektor 0 , för vilken gäller $0 + x = x$ för alla $x \in E$, samt att mot varje vektor x svarar en (entydigt bestämd) vektor $-x$, som adderad till vektorn x ger vektorn 0 . Vi definierar $x - y \equiv x + (-y)$.

Vektorerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ säges vara *lineärt oberoende* om ekvationen $\sum_{v=1}^n \alpha^v x_v = 0$ gäller endast för $\alpha^1 = \alpha^2 = \dots = \alpha^n = 0$. Att E är 2-dimensionell innebär att det maximala antalet lineärt oberoende vektorer i E

är 2. Det existerar alltså i E (åtminstone) ett par lineärt oberoende vektorer.

Två lineärt oberoende vektorer i E säges utgöra en *bas* i E . Om $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ utgör en bas, kan varje vektor $\mathbf{x}$ uttryckas i formen $\mathbf{x} = \xi^1 \mathbf{a}_1 + \xi^2 \mathbf{a}_2$, där koefficienterna ξ^1 och ξ^2 är entydigt bestämda av $\mathbf{x}$.

Låt oss med $A\mathbf{x}$ beteckna vektorn $\mathbf{x}$:s bildvektor i avbildningen $A: E \rightarrow E$. Avbildningen A säges vara *linjär*, om för alla $\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ gäller

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}, \quad A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}.$$

Vi inför symbolen L för mängden av alla dylika linjära avbildningar och betecknar i fortsättningen L :s element med $A, B, \dots$

Vi definierar i L en additionsoperation, en multiplikationsoperation och en skalär multiplikation med hjälp av ekvationerna

$$(A+B)\mathbf{x} \equiv A\mathbf{x} + B\mathbf{x}, \quad (AB)\mathbf{x} \equiv A(B\mathbf{x}), \quad (\alpha A)\mathbf{x} \equiv \alpha(A\mathbf{x}).$$

Man verifierar lätt reglerna

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA, \\ \alpha AB = A\alpha B,$$

samt att additionsoperationen och den skalära multiplikationen gör L till en vektorrymd över R .

En avbildning $\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x}) \in R$ kallas *linjär*, om för alla $\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ gäller

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}).$$

En avbildning, som tillordnar varje (ordnat) vektorpar $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ett reellt tal $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, kallas *bilineär*, om $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ beror lineärt av såväl $\mathbf{x}$ som $\mathbf{y}$, *symmetrisk*, om för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ gäller $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, och *alternerande*, om $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Med en *determinantfunktion* $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R$ menar vi i det följande en bilineär, alternerande funktion i E . Om vi antar existensen av en determinantfunktion $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ i E får vi för $\mathbf{x} = \xi^1 \mathbf{a}_1 + \xi^2 \mathbf{a}_2$ och $\mathbf{y} = \eta^1 \mathbf{a}_1 + \eta^2 \mathbf{a}_2$, där $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ betecknar en godtycklig fast bas,

$$(1) \quad \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1) \Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2),$$

eftersom $\Delta(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = -\Delta(\mathbf{z}, \mathbf{z})$, d. v. s. $\Delta(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0$ för alla $\mathbf{z} \in E$.

Ifall $\Delta'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ är en annan determinantfunktion, gäller givetvis analogt med (1) $\Delta'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1) \Delta'(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ d. v. s. $\Delta'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \frac{\Delta'(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{\Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}$, förutsatt, att $\Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0$. Man konstaterar lätt, att högra medlemmen i (1) definierar en determinantfunktion, som inte är identiskt lika med 0

(beteckning: $\Delta \neq 0$), ifall vi åt $\Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ger ett godtyckligt fast värde olika 0. Vi summerar våra resultat i följande

TEOREM 1: *Det existerar i E determinantfunktioner $\Delta \neq 0$. Om vi utväljer en determinantfunktion $\Delta \neq 0$, får vi varje annan determinantfunktion genom att multiplicera den förstnämnda med en lämplig reell faktor. En determinantfunktion $\Delta \neq 0$ antar värdet 0 om och endast om argumentvektorerna är lineärt beroende (d. v. s. icke lineärt oberoende).*

Varje linjär transformation $A \in L$ kan tillordnas två s. k. skalära invarianter, A :s »spår» och »determinant», som vi skall beteckna med $\text{tr}(A)$ resp. $\det(A)$. De definierande likheterna är följande (Δ betecknar en godtycklig determinantfunktion $\neq 0$):

$$(2) \quad \Delta(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Delta(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \text{tr}(A) \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$(3) \quad \Delta(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \det(A) \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Man inser lätt, att vänstra membra i (2) och (3) representerar determinantfunktioner i E , varför vi p. g. a. teorem 1 kan sluta oss till existensen av reella tal $\text{tr}(A)$ och $\det(A)$ så beskaffade, att (2) och (3) gäller för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Storheten $\text{tr}(A)$ beror lineärt av A . Ur (3) följer att $\Delta(AB\mathbf{x}, AB\mathbf{y}) = \det(A) \Delta(B\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = \det(A) \det(B) \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, varur vi utläser regeln

$$(4) \quad \det(AB) = \det(A) \det(B).$$

En bilinear, symmetrisk funktion $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in R$ kallas en *inre produkt* i E , om ingen vektor fränsett vektorn $\mathbf{0}$ är ortogonal mot alla vektorer (två vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ säges vara *ortogonala*, om $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$).

Beträffande inre produkter gäller följande

TEOREM 2: *En inre produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ i E är antingen definit, d. v. s. den motsvarande kvadratiske funktionen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ antar enbart positiva eller enbart negativa värden för $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, eller indefinit, d. v. s. den motsvarande kvadratiske funktionen antar både positiva och negativa värden.*

BEVIS: Vi för beviset indirekt och antar alltså existensen av en inre produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, vars kvadratiske funktion $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ antar enbart ej-negativa eller enbart ej-positiva värden och värdet 0 för (åtminstone) en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. P. g. a. en inre produkts egenskaper existerar en vektor $\mathbf{u}$, för vilken $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \neq 0$. Uttrycket $(\tau\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\tau\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \tau^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + 2\tau\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 2\tau(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, där τ är en reell parameter ($-\infty < \tau < \infty$), antar härvid uppenbarligen såväl positiva som negativa värden, vilket innebär en motsägelse, varav vi sluter oss till riktigheten av teorem 2, v. s. b.

Låt oss anta att en inre produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ definierats i E . Vi betraktar "Grams determinant" $\det(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_j)$, d. v. s. uttrycket

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_2 \end{vmatrix} \equiv (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1)(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_2).$$

Man övertygar sig lätt om att $\det(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_j)$ representerar en determinantfunktion såväl betraktad som funktion av vektorerna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ som av vektorerna $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$. På basen av teorem 1 kan vi därför sluta oss till existensen av ett tal λ så beskaffat, att följande identitet gäller (vi antar att en determinantfunktion $\Delta \neq 0$ definierats i E):

$$(5) \quad \det(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_j) = \lambda \cdot \Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Delta(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2).$$

TEOREM 3: Om den inre produkten $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ är definit, är konstanten λ i identiteten (5) positiv, medan däremot λ är negativ, ifall den inre produkten är indefinit.

BEVIS: Vi betraktar först det definitiva fallet. Låt $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vara en bas och $\mathbf{a}'_2 \equiv \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} \mathbf{a}_1$. Härvid gäller $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}'_2 = 0$. Vektorerna $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}'_2$ är lineärt oberoende, eftersom $\Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}'_2) = \Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0$, och bildar följaktligen en ortogonal bas.

Vi insätter $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 = \mathbf{a}_1$ och $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{a}'_2$ i (5), varvid vi får $(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}'_2) = \lambda \cdot \Delta^2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}'_2)$, d. v. s. $\lambda = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1) \frac{(\mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}'_2)}{\Delta^2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}'_2)} > 0$ p. g. a. vårt antagande beträffande den inre produkten.

I det indefinita fallet kan beviset utföras fullkomligt analogt utgående från två lineärt oberoende vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ valda t. ex. så, att $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 > 0$ och $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 < 0$. För en godtycklig vektor $\mathbf{x} = \xi^1 \mathbf{a}_1 + \xi^2 \mathbf{a}'_2$ gäller $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (\xi^1)^2 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1) + (\xi^2)^2 (\mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}'_2)$. Följaktligen är i föreliggande fall $\mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}'_2 < 0$, eftersom den inre produkten uppenbarligen annars vore (positivt) definit. Samma uttryck som i det definitiva fallet visar därför, att $\lambda < 0$, v. s. b.

Av identiteten (5) framgår att vi genom att vid behov övergå till en ny determinantfunktion $\Delta' \equiv \alpha \Delta$, där $\alpha \neq 0$ är en lämplig reell faktor, kan åstadkomma, att $\lambda = 1$ eller -1 om den inre produkten är definit resp. indefinit. Determinantfunktionen kallas härvid *normerad*.

Vi bevisar härnäst ett för våra syften anpassat specialfall av det s. k. Fréchet–Riesz'ska teoremet:

TEOREM 4: Ifall en inre produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ definierats i E , motsvaras varje lineär funktion $f(\mathbf{x}) \in R$ i E av en entydigt bestämd vektor $\mathbf{a} \in E$ så beskaffad, att för alla $\mathbf{x} \in E$ gäller $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$.

BEVIS: Vi utväljer två ortogonala basvektorer $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ och definierar $\mathbf{a} \equiv \frac{f(\mathbf{a}_1)}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} \mathbf{a}_1 + \frac{f(\mathbf{a}_2)}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2} \mathbf{a}_2$. För en godtycklig vektor $\mathbf{x} = \xi^1 \mathbf{a}_1 + \xi^2 \mathbf{a}_2$ fås $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \xi^1 f(\mathbf{a}_1) + \xi^2 f(\mathbf{a}_2) = f(\mathbf{x})$. Härmed har vi påvisat existensen av en mot $f(\mathbf{x})$ på ovannämnt sätt svarande vektor. Entydigheten följer omedelbart ur egenskaperna hos en inre produkt. Om nämligen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$ för alla $\mathbf{x}$ gäller $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$ för alla $\mathbf{x}$, d. v. s. $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$ eller m. a. o. $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ v. s. b.

Låt oss anta, att vi definierat en inre produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ i E . Uttrycket $\mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, där $\mathbf{A} \in L$ betecknar en godtycklig fast linjär transformation och $\mathbf{y}$ en godtycklig fast vektor, representerar en linjär funktion av $\mathbf{x}$. Följaktligen existerar en entydigt bestämd vektor $\mathbf{a}$, som satisfierar ekvationen $\mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$ för alla $\mathbf{x}$. Avbildningen $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{a}$ är linjär, vilket man lätt verifierar, d. v. s. förmedlas av en linjär transformation. Vi betecknar ifrågakavande transformation med $\bar{\mathbf{A}}$ och erhåller alltså följande identitet:

$$(6) \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{A}}\mathbf{y}.$$

Man säger, att $\bar{\mathbf{A}}$ erhållits genom »transponering» eller »adjungering» av $\mathbf{A}$. Ur (6) följer omedelbart reglerna

$$(7) \quad \overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}, \quad \overline{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}, \quad \bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I}$$

(där $\mathbf{I}$ betecknar den identiska transformationen i E), samt att $\bar{\mathbf{A}}$ beror linjärt av $\mathbf{A}$.

De ovan definierade skalära invarianterna påverkas inte vid transponeringen, ett faktum, som följer av identiteten (5). Vi har t. ex.

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \det(\bar{\mathbf{A}}) \Delta^2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= \lambda \cdot \Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \Delta(\bar{\mathbf{A}}\mathbf{a}_1, \bar{\mathbf{A}}\mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_i \cdot \bar{\mathbf{A}}\mathbf{a}_j) \\ &= \det(\mathbf{A}\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \lambda \cdot \Delta(\mathbf{A}\mathbf{a}_1, \mathbf{A}\mathbf{a}_2) \Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \lambda \cdot \det(\mathbf{A}) \Delta^2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \end{aligned}$$

varav vi sluter att $\det(\bar{\mathbf{A}}) = \det(\mathbf{A})$.

En linjär transformation $\mathbf{A} \in L$ kallas en *rotation*, om för alla vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ gäller $\mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Av (6) följer, att $\mathbf{A}$ är en rotation om och endast om

$$(8) \quad \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Formlerna (4) och (8) ger oss $\det(\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}) = \det^2(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{I}) = 1$. Determinanten för en rotation är alltså 1 eller -1 . I det förra fallet säges rotationen vara *egentlig*, i det senare fallet *oegentlig*.

Transformationen $\mathbf{A}$. Låt oss anta, att i E fastslagits en inre produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ och en determinantfunktion $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$. Ett resonemang liknande

det, som kom till användning ovan vid definitionen av $\bar{A}$, visar, att man med hjälp av ekvationen

$$(9) \quad \Delta(x, y) = \Lambda x \cdot y$$

kan definiera en linjär transformation $\Lambda \in L$. Vi noterar, att $\Lambda x \cdot x = 0$ för alla x . Eftersom $\Delta(x, y)$ är alternerande, gäller $\Lambda x \cdot y = -\Lambda y \cdot x$, d. v. s.

$$(10) \quad \bar{\Lambda} = -\Lambda.$$

Ur (10) följer bl. a. ekvationen $\text{tr}(\bar{\Lambda}) = \text{tr}(-\Lambda)$. Men $\text{tr}(\Lambda)$ beror linjärt av A , varför $\text{tr}(-\Lambda) = -\text{tr}(\Lambda)$. Vidare gäller $\text{tr}(\bar{\Lambda}) = \text{tr}(\Lambda)$. Alltså är $\text{tr}(\Lambda) = -\text{tr}(\Lambda)$, d. v. s.

$$(11) \quad \text{tr}(\Lambda) = 0.$$

Låt oss substituera $y_1 = \Lambda x_2$ och $y_2 = \Lambda x_1$ i (5). P. g. a. (3) och transformationen Λ 's egenskaper erhåller vi härvid ekvationen $-(\Lambda x_2 \cdot x_1)^2 = -\lambda \cdot \det(\Lambda)(\Lambda x_2 \cdot x_1)^2$. Då $\Lambda x_2 \cdot x_1 \neq 0$ för linjärt oberoende x_1 och x_2 har vi följaktligen

$$(12) \quad \det(\Lambda) = \lambda^{-1}.$$

P. g. a. sambandet (9) kan definitionerna (2) och (3) skrivas i formen $\Lambda \Lambda x \cdot y + \Lambda x \cdot \Lambda y = \text{tr}(\Lambda) \Lambda x \cdot y$ resp. $\Lambda \Lambda x \cdot \Lambda y = \det(\Lambda) \Lambda x \cdot y$. Med stöd av (6) och den inre produktens egenskaper kan vi ur dessa härleda följande två ekvationer, som gäller för alla $A \in L$:

$$(13) \quad \Lambda A + \bar{\Lambda} A = \text{tr}(A) \Lambda$$

$$(14) \quad \bar{\Lambda} \Lambda A = \det(A) \Lambda.$$

Genom att speciellt sätta $A = \Lambda$ i (14) och beakta (12) får vi

$$(15) \quad -\Lambda^3 = \lambda^{-1} \Lambda.$$

I (15) kan man »förkorta med Λ », vilket ger oss ekvationen

$$(16) \quad \Lambda^2 = -\lambda^{-1} I.$$

Ekvationen (12) visar nämligen, att $\det(\Lambda) \neq 0$, vilket åter p. g. a. (3) innebär, att $\Delta(\Lambda a_1, \Lambda a_2)$, där a_1, a_2 utgör en bas i E , är olika 0, d. v. s. Λa_1 och Λa_2 linjärt oberoende. Varje vektor x kan alltså skrivas i formen $x = \xi^1 \Lambda a_1 + \xi^2 \Lambda a_2 = \Lambda x'$, där $x' \equiv \xi^1 a_1 + \xi^2 a_2$. Vi har alltså $\Lambda^2 x = \Lambda^3 x' = -\lambda^{-1} \Lambda x' = -\lambda^{-1} x$, v. s. b.

Substitution av ΛA för A i (13) ger med beaktande av (7) och (10):

$$(17) \quad \Lambda^2 A - \bar{\Lambda} \Lambda^2 = \text{tr}(\Lambda A) \Lambda.$$

Genom att multiplicera vardera membrum i (13) med Λ (från höger) fås

$$(18) \quad \Lambda A \Lambda + \bar{A} \Lambda^2 = \text{tr}(A) \Lambda^2.$$

Addition av (17) och (18) samt »förkortning med Λ » ger slutligen

$$(19) \quad A \Lambda + \Lambda A = \text{tr}(A) \Lambda + \text{tr}(\Lambda A) I,$$

vilken ekvation alltså gäller för alla $A \in L$.

Om A speciellt kommuterar med Λ , d. v. s. $A \Lambda = \Lambda A$, kan vänstra membrum i (19) skrivas i formen $2A \Lambda$. Enligt (16) kan I ersättas med $-\lambda \Lambda^2$. »Förkortning med Λ » och multiplikation med $\frac{1}{2}$ ger oss framställningen

$$(20) \quad A = \frac{1}{2} [\text{tr}(A) I - \lambda \cdot \text{tr}(\Lambda A) \Lambda].$$

Egentliga rotationer vid en definit inre produkt. Trigonometriska funktioner. Vi betraktar nu det fall att den inre produkten är definit och förutsätter, att Λ definierats med hjälp av en normerad determinantfunktion $\Delta(x, y)$. Konstanten λ i (5) är alltså 1 och vi har enligt (16)

$$(21) \quad \Lambda^2 = -I.$$

Låt A vara en godtycklig egentlig rotation. Genom att multiplicera (14) med A (från vänster) och beakta vårt antagande (8) erhåller vi ekvationen $\Lambda A = A \Lambda$. Transformationen A kommuterar alltså med Λ och kan följaktligen framställas i formen (20), vilket ger oss rätt att uppställa följande

DEFINITION: Vi definierar $\cos(A)$ och $\sin(A)$, där $A \in L$ betecknar en egentlig rotation, som koefficienten för I resp. Λ i framställningen (20).

Vi har således följande formler:

$$(22) \quad A = \cos(A) I + \sin(A) \Lambda$$

$$(23) \quad \cos(A) = \frac{1}{2} \text{tr}(A), \quad \sin(A) = -\frac{1}{2} \text{tr}(\Lambda A).$$

Vid transposition av (22) framgår likheten $\bar{A} = \cos(A) I - \sin(A) \Lambda$, vilken multiplicerad med (22) ger $\bar{A} A = [\cos^2(A) + \sin^2(A)] I$. Vi har alltså (p. g. a. (8)) sambandet $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$.

Med hjälp av (22) kan additionsteoremen för de trigonometriska funktionerna enkelt härledas. Produkten av två godtyckliga egentliga rotationer A och B är likaså en egentlig rotation, eftersom enl. (7) och (8) $\bar{A} B A B = \bar{B} A A B = \bar{B} B = I$. Genom att tillämpa (22) på A och B samt multiplicera de erhållna ekvationerna får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & [\cos(\mathbf{A}) \cos(\mathbf{B}) - \sin(\mathbf{A}) \sin(\mathbf{B})] \mathbf{I} \\ & + [\cos(\mathbf{A}) \sin(\mathbf{B}) + \sin(\mathbf{A}) \cos(\mathbf{B})] \mathbf{A}, \end{aligned}$$

vilket innebär, att

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{AB}) &= \cos(\mathbf{A}) \cos(\mathbf{B}) - \sin(\mathbf{A}) \sin(\mathbf{B}) \\ \sin(\mathbf{AB}) &= \cos(\mathbf{A}) \sin(\mathbf{B}) + \sin(\mathbf{A}) \cos(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Koefficienterna i (22) är nämligen entydigt bestämda, eftersom $\mathbf{A}$ och $\mathbf{I}$ är linjärt oberoende (i annat fall skulle $\mathbf{A}$ vara en multipel av $\mathbf{I}$, vilket strider bl. a. mot (10)).

Vi observerar, att de egentliga rotationerna upptagit den roll, som innehas av vinklarna vid den elementärt-åskådliga definitionen av de trigonometriska funktionerna.

Egentliga rotationer vid en indefinit inre produkt. Hyperboliska funktioner. Framställningen i föregående avsnitt kan direkt överföras till det fall, att den inre produkten är indefinit. P. g. a. att konstanten λ i föreliggande fall är -1 , uppstår vissa teckenändringar. Koefficienterna i framställningen (20) för en godtycklig egentlig rotation $\mathbf{A}$ kallar vi i detta fall $\cosh(\mathbf{A})$ och $\sinh(\mathbf{A})$. Analogt med formlerna (21), (22) och (23) fås nu

$$(24) \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$$

$$(25) \quad \mathbf{A} = \cosh(\mathbf{A}) \mathbf{I} + \sinh(\mathbf{A}) \mathbf{A}$$

$$(26) \quad \cosh(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{A}), \quad \sinh(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}).$$

Formeln $\cosh^2(\mathbf{A}) - \sinh^2(\mathbf{A}) = 1$ samt additionsreglerna för de hyperboliska funktionerna härleds på samma sätt som motsvarande formler för de trigonometriska funktionerna.

Det bör påpekas, att funktionen $\cosh(\mathbf{A})$ antar även negativa värden. De egentliga rotationerna sönderfaller i två undermängder: rotationer $\mathbf{A}$ för vilka $\cosh(\mathbf{A}) \geq 1$ och rotationer $\mathbf{A}$ för vilka $\cosh(\mathbf{A}) \leq -1$. Låt oss kalla de ifrågavarande undermängderna U^+ resp. U^- . Avbildningen $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in U^+$, definierar en omvänt entydig avbildning från U^+ till U^- .

Avbildningarna $\mathbf{A}(\tau)$. Vi har tillsvidare betraktat de trigonometriska och hyperboliska funktionerna enbart som funktioner av egentliga rotationer. För att nå fram till de ordinära trigonometriska och hyperboliska funktionerna konstruerar vi en avbildning från den reella talaxeln till mängden av egentliga rotationer, varvid alltså varje reellt tal $\tau \in R$

kommer att motsvaras av en bestämd egentlig rotation $A(\tau)$. Vi pålägger den sökta avbildningen två villkor. För det första bör den vara en homomorfism, d. v. s. för alla $\tau_1, \tau_2 \in R$ bör gälla

$$(27) \quad A(\tau_1 + \tau_2) = A(\tau_1)A(\tau_2).$$

För det andra kräver vi att avbildningen skall vara differentierbar, d. v. s. för varje $\tau \in R$ bör gränsvärdet $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} [A(\tau + \Delta\tau) - A(\tau)]/\Delta\tau$ existera.

Låt oss anta att vi funnit en dylik avbildning $A(\tau)$. Substitutionen $\tau_1 = 0$ i (27) samt »förkortning med $A(\tau_2)$ » ger oss ekvationen

$$(28) \quad A(0) = I.$$

Genom att derivera (27) i avseende å τ_1 och ge åt τ_1 värdet 0 erhåller vi för alla $\tau_2 \in R$ ekvationen

$$(29) \quad \dot{A}(\tau_2) = \dot{A}(0)A(\tau_2).$$

P. g. a. (8) gäller för alla $\tau \in R$ att $\bar{A}(\tau)A(\tau) = I$, varur genom derivering framgår att $\dot{\bar{A}}(\tau)A(\tau) + \bar{A}(\tau)\dot{A}(\tau) = 0$. P. g. a. (29) kan vi i den senaste ekvationen ersätta $\dot{A}(\tau)$ med $\dot{A}(0)A(\tau)$ och $\dot{\bar{A}} = \dot{\bar{A}}$ med $\bar{A}(\tau)\dot{\bar{A}}(0)$, varvid vi i betraktande av (8) erhåller $\dot{A}(0) + \bar{A}(0)\dot{A}(0) = 0$. Denna ekvation tillsammans med (16) och (17) visar att $\dot{A}(0)$ kan skrivas i formen κA , $\kappa \in R$. Genom att insätta detta uttryck för $\dot{A}(0)$ i (29) fås

$$(30) \quad \dot{A}(\tau) = \kappa A A(\tau).$$

I läroboken »Linear algebra» (2. uppl.) av W. Greub visas hur man med hjälp av Picards iterationsmetod kan konstruera en differentierbar avbildning $A(\tau)$ som lösning till differentialekvationen (30) med »utgångsvillkoret» (28). Lösningen är entydigt bestämd och uppfyller villkoret (27).

Om vi speciellt väljer $\kappa = 1$ resulterar iterationsprocessen i följande uttryck:

$$(31) \quad A(\tau) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\tau A)^v}{v!},$$

d. v. s. symboliskt $A(\tau) = e^{\tau A}$. Eftersom lineära transformationer kan betraktas som vektorer i L , bereder oändliga serier av typen (31) inga principiella svårigheter.

Genom att substituera serien (31) i uttrycken (23) och (26) erhåller vi de sedvanliga serieutvecklingarna för de trigonometriska och hyperboliska funktionerna. Vi har t. ex. i det indefinita fallet

och $\Lambda^2 = I$, $\text{tr}(\Lambda^{2n}) = \text{tr}(I) = 2$, $\text{tr}(\Lambda^{2n+1}) = \text{tr}(A) = 0$

$$\sinh(A(\tau)) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[\Lambda \sum_{\nu} \frac{(\tau \Lambda)^{\nu}}{\nu!} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \sum_{\nu} \frac{\tau^{\nu} \Lambda^{\nu+1}}{\nu!} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,\dots} \frac{\tau^{\nu}}{\nu!} \cdot 2 = \sum_{\nu=1,3,\dots} \frac{\tau^{\nu}}{\nu!}.$$

Frågan, huruvida alla egentliga rotationer antas som funktionsvärden vid avbildningen $\tau \rightarrow A(\tau)$, kräver en särskild undersökning. Med kännedom om egenskaperna hos de trigonometriska och hyperboliska funktionernas serieutvecklingar inser man utan svårighet att i det definita fallet varje egentlig rotation antas (t. o. m. för oändligt många värden τ), medan vi däremot i det indefinita fallet erhåller en omvänt entydig avbildning från R till U^+ .

Exempel. Låt oss t. ex. anta, att den inre produkten $x \cdot y$ är indefinit. Vektorparet e_1, e_2 må utgöra en i avseende å den betraktade inre produkten ortonormerad bas d. v. s. vi har $e_1 \cdot e_1 = -e_2 \cdot e_2 = 1$ (vid lämplig numrering av basvektorerna) samt $e_1 \cdot e_2 = 0$. För godtyckliga vektorer $x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ och $y = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2$ fås härvid $x \cdot y = \xi^1 \eta^1 - \xi^2 \eta^2$. Funktionen $\Delta(x, y) \equiv \xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1$ utgör en normerad determinantfunktion.

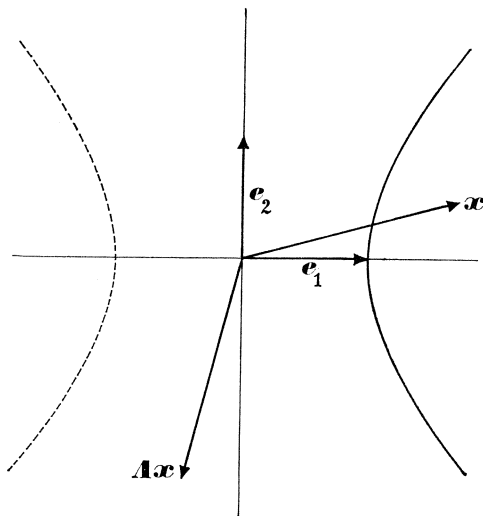


Fig. 1.

Vi betecknar koordinaterna för vektorn Λx med $\xi^{1'}$ och $\xi^{2'}$. Uttryckt med hjälp av koordinater antar definitionen (9) härvid formen $\xi^{1'} \eta^2 - \xi^{2'} \eta^1 = \xi^{1'} \eta^1 - \xi^{2'} \eta^2$, varav vi ser att $\xi^{1'} = -\xi^2$ och $\xi^{2'} = -\xi^1$ d. v. s. $\Lambda x = -\xi^2 e_1 - \xi^1 e_2$. Transformationen Λ innebär m. a. o. en spegling (fig. 1) i avseende å den räta linjen $\xi^1 = -\xi^2$.

Den utritade heldragna och streckade grenen av hyperbeln $(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 = 1$ utgör orten för ändpunkterna av de vektorer till vilka e_1 överförs vid transformationer tillhörande U^+ resp. U^- .

Även funktionen $\Delta'(x, y) \equiv -\Delta(x, y)$ utgör en normerad determinantfunktion. Ifall vi använder oss av Δ' vid definitionen (9) kommer Λ att motsvaras av en spegling i avseende å linjen $\xi^1 = \xi^2$.

Vid en motsvarande behandling av det definita fallet motsvaras transformationen Λ av en »90°:s vridning» av det 2-dimensionella planet.

Slutanmärkning. Den ovanstående framställningen kan utan nämnvärda förändringar tillämpas i det fall att koefficientkroppen utgörs av de komplexa eller rationella talen. Vid en rationell koefficientkropp måste vi dock undanta det avsnitt, där avbildningen $A(\tau)$ behandlades. Vid en komplex koefficientkropp bortfaller distinktionen mellan definita och indefinita inre produkter.

Också de oegentliga rotationerna kan representeras med hjälp av de trigonometriska eller hyperboliska funktionerna, något, som vi dock inte närmare går in på i detta sammanhang.

LITTERATUR

- [1] G. BIRKHOFF — S. MAC LANE: *A survey of modern algebra*. New York 1948.
- [2] W. GREUB: *Linear algebra*. 2. uppl., Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963.
- [3] R. LEHTI: *On the introduction of dyadics into elementary vector algebra*. Soc. Sci. Fenn. Comm. Phys. Math. XXVI 2, 1962.
- [4] F. NEVANLINNA — R. NEVANLINNA: *Absolute Analysis*. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959.
- [5] G. PICKERT: *Analytische Geometrie*. Leipzig 1953.
- [6] P. K. RASCHEWSKI: *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis*. Berlin 1959.

A SIMPLE CHI-SQUARE TEST

OVE DITLEVSEN

1. Statistics based upon the distributions of extreme values. The distribution functions for the largest and smallest value, respectively, in a sample of m members drawn independently from a population with the distribution function $F(x)$ are

$$G_{\max}\left(x; \frac{1}{m}\right) = F(x)^m, \quad G_{\min}\left(x; \frac{1}{m}\right) = 1 - [1 - F(x)]^m,$$

where m is a positive integer.

If, more generally, the distribution functions

$$(1.1) \quad G_{\max}(x; \alpha) = F(x)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$(1.2) \quad G_{\min}(x; \alpha) = 1 - [1 - F(x)]^{\frac{1}{\alpha}},$$

where α is any positive number, are considered, a first exercise would be to calculate the maximum likelihood estimates of α , when a sample $x_1, x_2, \dots, x_n$ of n independent members from the relevant populations is given. In the following, only distributions of the continuous type will be considered. For (1.1) the likelihood equation becomes

$$(1.3) \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln \left[\frac{1}{\alpha} F(x_i)^{\frac{1}{\alpha}-1} f(x_i) \right]}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\ln \alpha + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln F(x_i) \right] \\ = -\frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \ln F(x_i) = 0,$$

where $f(x) = dF(x)/dx$, assuming this derivative to exist and be continuous piece by piece. The unique solutions of (1.3), and of a similar equation corresponding to (1.2), are

$$(1.4) \quad \alpha^* = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln F(x_i)$$

$$(1.5) \quad \alpha^* = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln [1 - F(x_i)].$$

The next step is to find the distribution of these statistics.

2. The distribution of the estimates α^* . It is easy to obtain the distribution of α^* by use of characteristic functions [1, p. 185]. Corresponding to the variable $-\frac{1}{n} \ln F(\xi)$, the characteristic function is defined by

$$(2.1) \quad \varphi(t) = m \left\{ e^{it \left(-\frac{1}{n} \ln F(\xi) \right)} \right\},$$

where ξ has the distribution function $F(x)^{\frac{1}{\alpha}}$, and where i is the imaginary unit. Using (1.1) and the substitution $u = F(x)$, the formula (2.1) becomes

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it \frac{1}{n} \ln F(x)} dF(x)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 u^{-\frac{it}{n} + \frac{1}{\alpha} - 1} du = \frac{n}{n - it\alpha}.$$

In virtue of the independence of the terms in (1.4), the characteristic function of α^* is then [1, p. 188]:

$$\varphi_1(t) = \varphi(t)^n = \left(1 - \frac{it\alpha}{n} \right)^{-n}.$$

Introducing the variable $2n \frac{\alpha^*}{\alpha}$, the characteristic function will be

$$\varphi_2(t) = m \left\{ e^{it 2n \frac{\alpha^*}{\alpha}} \right\} = \varphi_1 \left(\frac{2nt}{\alpha} \right) = (1 - 2it)^{-\frac{2n}{2}},$$

which is the characteristic function corresponding to the χ^2 -distribution with $2n$ degrees of freedom [1, p. 233].

This interesting and useful result, which, by a similar calculation, also appears to be valid for (1.5), can, with $1/\alpha = m$, be stated as follows:

The random variables

$$(2.2) \quad -2m \sum_{i=1}^n \ln F(x_i)$$

$$(2.3) \quad -2m \sum_{i=1}^n \ln [1 - F(x_i)],$$

corresponding to samples from populations with the distribution functions $F(x)^m$ and $1 - [1 - F(x)]^m$, respectively, are distributed like χ^2 with $2n$ degrees of freedom, if $F(x)$ is of the continuous type.

Naturally this is only an elementary generalization of the fact that $\eta = F(\xi)$ is uniformly distributed on the interval $[0, 1]$ when $P(\xi \leq x) =$

$F(x)$ (the probability integral transformation). It is then clear that $-2 \ln \eta$ has the frequency function 0 for $x < 0$ and

$$\frac{d}{dx} P(-2 \ln \eta \leq x) = \frac{d}{dx} P(\eta \geq e^{-\frac{1}{2}x}) = \frac{d}{dx} (1 - e^{-\frac{1}{2}x}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$$

for $x \geq 0$, which is the frequency function for χ^2 with 2 degrees of freedom.

For $m = 1$, the two populations become identical with the distribution function $F(x)$. This suggests that (2.2) and (2.3) may be used as test statistics for the hypothesis that the population has the distribution function $F(x)$. The disadvantages of the usual χ^2 -test, which demands a grouping of the sample (see [2]), and which is only asymptotically correct, is not present in this test, although naturally its usefulness depends upon the power of the test. This question will be elucidated in a number of examples in the following.

For $m > 1$, there are also some cases where (2.2) and (2.3) may be used as test statistics. In a number of physical measurements, it is only the largest or smallest value among m values that is registered. An obvious case is the measurement of the strength of a chain with m links. The strength of the weakest link determines the strength of the chain as a whole. A hypothesis about the distribution of the strength of a link selected at random may then be tested by the statistic (2.3).

3. The joint asymptotic distribution for the two statistics corresponding to $m = 1$. Let

$$(3.1) \quad \tau_1 = -2 \sum_{i=1}^n \ln F(x_i)$$

$$(3.2) \quad \tau_2 = -2 \sum_{i=1}^n \ln [1 - F(x_i)] .$$

The first and second order moments are

$$m\{\tau_1\} = m\{\tau_2\} = 2n, \quad v\{\tau_1\} = v\{\tau_2\} = 4n$$

$$m\{\tau_1 \tau_2\} = 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m\{\ln F(x_i) \ln [1 - F(x_j)]\}$$

$$= 4nm\{\ln F(\xi) \ln [1 - F(\xi)]\} + m\{-2 \ln F(\xi)\} m\{-2 \ln [1 - F(\xi)]\}(n^2 - n) ,$$

where [3, formula 440 p. 283]:

$$\begin{aligned}
m\{\ln F(\xi) \ln [1 - F(\xi)]\} &= \int_0^1 \ln u \ln (1-u) du \\
&= \lim_{(c_1, c_2) \rightarrow (0, 1)} [2u + u \ln u \ln (1-u) + (1-u) \ln (1-u) - u \ln u]_{c_1}^{c_2} \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du = 2 - \frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}$$

such that the coefficient of correlation becomes

$$\rho\{\tau_1, \tau_2\} = \frac{m\{\tau_1 \tau_2\} - m\{\tau_1\}^2}{v\{\tau_1\}} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \approx -0.645.$$

From the *central limit theorem* [1, p. 286] it now follows that the distribution of

$$(3.3) \quad (\xi, \eta) = \left(\frac{\tau_1 - 2n}{2\sqrt{n}}, \frac{\tau_2 - 2n}{2\sqrt{n}} \right)$$

tends to the bivariate normal distribution given by the frequency function

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} \right)} \\
(3.4) \quad &= \frac{3}{\pi^2\sqrt{12-\pi^2}} e^{-6 \frac{3x^2 + (\pi^2-6)xy + 3y^2}{\pi^2(12-\pi^2)}}
\end{aligned}$$

as $n \rightarrow \infty$. Some important fractiles of this asymptotic distribution are tabulated below.

(1)	$P(\xi > x, \eta \leq -x)$	%	20.0	10.0	5.0	2.5	1.0	0.5	0.1	0.05
(2)	$P(\xi > x, \eta > x)$	%								
(1)	x		0.46	0.89	1.20	1.50	1.84	2.07	2.55	2.73
(2)	x		—	0.10	0.30	0.46	0.65	0.76	1.01	1.11

Table 1. Some fractiles of the bivariate normal distribution with means (0, 0), standard deviations (1, 1), and coefficient of correlation $1 - \pi^2/6$.

(The table has been made by Klaus Illum, M. Sc., with the aid of an electronic computer.)

As

$$m\{a\xi + b\eta\} = 0, \quad v\{a\xi + b\eta\} = a^2 + b^2 + 2 \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \right) ab,$$

we further have the asymptotic probability

$$(3.5) \quad P(a\xi + b\eta \leq x) = \Phi \left(\sqrt{\frac{3}{3(a^2 + b^2) + (6 - \pi^2)ab}} x \right),$$

where Φ is the normal distribution function

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

4. Example. The exponential distribution. Consider the exponential distribution

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } u < -1 \\ 1 - e^{-(u+1)} & \text{for } u \geq -1, \end{cases}$$

where u is the standardized variable $u = \frac{x-m}{\sigma}$.

From a given sample $x_1, x_2, \dots, x_n$ it is desired to test the hypothesis $H_0: m=m_0, \sigma=\sigma_0$ against the hypothesis $H_1: m=m_1, \sigma=\sigma_1$.

First it may be remarked that if some $u_i = (x_i - m_0)/\sigma_0$ in the sample are less than -1 , the hypothesis H_0 is false with probability 1. Assuming all u_i greater than -1 , formula (3.2) gives

$$(4.1) \quad \tau_2 = -2 \sum_{i=1}^n \ln[1 - F(x_i)] = 2 \sum_{i=1}^n (u_i + 1) = 2n \left(\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma_0} + 1 \right),$$

where $n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$. If H_0 is true, τ_2 is distributed as χ^2 with $2n$ degrees of freedom.

Following Cramér [1, p. 529], we will try to find a *uniformly most powerful test* corresponding to a given probability level ε of rejecting H_0 when it is true.

Writing the joint frequency function of the sample as $f(\mathbf{x}; \alpha)$, where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ and $\alpha = (m, \sigma)$, we have

$$f(\mathbf{x}; \alpha) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma} - 1 \right)} = \frac{1}{\sigma^n} e^{n \left(\frac{m}{\sigma} - 1 \right)} e^{-\frac{n\bar{x}}{\sigma}}$$

for all $x_i > m - \sigma$, and $f(\mathbf{x}; \alpha) = 0$ elsewhere.

The searched critical set for $\mathbf{x}$ in the sample space R^n is determined by the condition

$$(4.2) \quad f(\mathbf{x}; \alpha_1) \geq c \cdot f(\mathbf{x}; \alpha_0),$$

where c is some positive constant. Only if $m_1 - \sigma_1 \leq m_0 - \sigma_0$ is a simple critical set obtained, namely the set that follows from

$$(4.3) \quad e^{\left(\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma_1}\right)n\bar{x}} \geq \text{constant} > 0,$$

in addition to the set

$$(4.4) \quad \{x \mid \text{at least one } x_i < m_0 - \sigma_0\}.$$

For $\sigma_1 > \sigma_0$, (4.3) is fulfilled with the probability ε , see (4.1), when

$$\tau_2 = 2n \left(\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma_0} + 1 \right) \geq \chi_{2n, (1-\varepsilon)}^2,$$

or

$$n\bar{x} \geq n(m_0 - \sigma_0) + \frac{\sigma_0}{2} \chi_{2n, (1-\varepsilon)}^2.$$

The critical set found is independent of $\alpha_1 = (m_1, \sigma_1)$ and is thus the uniformly most powerful test of H_0 relative to all admissible H_1 . Obviously, the test is *biased* as it is required that $m_1 - \sigma_1 \leq m_0 - \sigma_0$ and $\sigma_1 > \sigma_0$. For $m_1 - \sigma_1 \leq m_0 - \sigma_0$ and $\sigma_0 > \sigma_1$ we get the test (4.4) and

$$2n \left(\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma_0} + 1 \right) \leq \chi_{2n, \varepsilon}^2.$$

The probability measure of the set (4.4) is zero as long as the hypothesis H_0 is true but not if H_1 is true. Due to this, it becomes complicated to work out the power of the test unless we further assume that $m_1 - \sigma_1 = m_0 - \sigma_0$. This last situation is the usual one in most applications of the exponential distribution, for instance in traffic theory. We then normally have

$$m_1 - \sigma_1 = m_0 - \sigma_0 = 0.$$

It is then easy to obtain the power function for the test, as the random variable

$$2n \left(\frac{\bar{x} - m_1}{\sigma_1} + 1 \right) = \tau_2 \frac{m_0}{m_1}$$

is distributed as χ^2 with $2n$ degrees of freedom under the hypothesis H_1 . The power function becomes

$$(4.5) \quad P(\tau_2 \geq \chi_{2n, (1-\varepsilon)}^2) = P\left(\chi_{2n}^2 \geq \chi_{2n, (1-\varepsilon)}^2 \frac{m_0}{m_1}\right)$$

for the test of H_0 against H_1 . Requiring that

$$(4.6) \quad P(\tau_2 \geq \chi_{2n, (1-\varepsilon)}^2) = \begin{cases} \varepsilon & \text{when } H_0 \text{ is true} \\ 1 - \varepsilon & \text{when } H_1 \text{ is true,} \end{cases}$$

we get the formula

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_1} = \frac{m_0}{m_1} = \frac{\chi_{2n, \varepsilon}^2}{\chi_{2n, (1-\varepsilon)}^2}$$

for a significance bound of m_0/m_1 on level ε for errors of the first and second kind, when a sample of n members is given, see fig. 1.

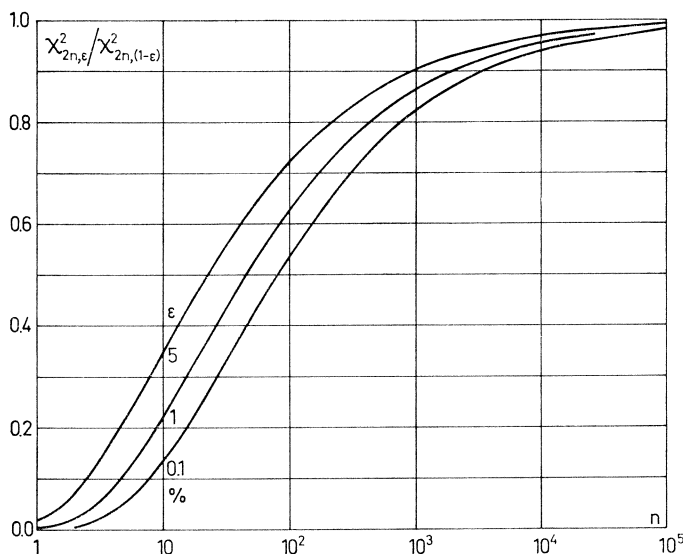


Fig. 1

5. Example. Pseudo-random numbers. The uniform distribution. If a stochastic experiment has to be simulated on a computer, a simple method to generate random numbers that are uniformly distributed on the interval $[0, 1]$ must be at hand.

Random numbers may be generated from a stochastic physical process, but this matter is often difficult to handle. Normally, so-called pseudo-random numbers are used. They are, curiously enough, generated in a purely deterministic way, namely by a simple recursive mathematical formula, for instance by the additive or the multiplicative congruential method. For references, see [4], [5] and [6].

A method of the additive type is the Fibonacci sequence [4]. Starting with two random integers r_0 and r_1 , we get a sequence of "random" integers by the formula

$$(5.1) \quad r_n \equiv r_{n-1} + r_{n-2} \pmod{M}.$$

After division by $M - 1$, we get a sequence of "random" numbers that are uniformly distributed on the interval $[0, 1]$.

Naturally, the applicability of such a sequence of numbers as representative for the outcome of a sequence of independent stochastic experiments must be tested with a great variety of tests. Such investigations have been published by various authors. They show that pseudo-random numbers generated by multiplicative and certain additive congruential methods follow the laws of probability in a satisfactory way for practical purposes, provided the period of the sequences is not surpassed.

The Fibonacci sequence (5.1) has the advantage of being very fast, but it has been asserted that it is unsatisfactory with respect to "randomness".

The object of this example is to test the Fibonacci sequence for uniformity, that is, we set up the hypothesis H_0 that the distribution functions is

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } 1 \leq x \end{cases}.$$

As alternative hypothesis H_1 , it is simple to consider the beta distribution with the density function

$$\beta(x; p, q) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ and } x > 1, \end{cases}$$

where $p > 0$ and $q > 0$ are parameters, and Γ is the gamma function. The two hypotheses coincide for $p=q=1$.

The condition (4.2) for the best test becomes

$$\begin{aligned} (p-1) \left(-2 \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) + (q-1) \left(-2 \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i) \right) &\leq -2 \ln \left[c \left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \right)^n \right] \\ (5.2) \qquad \qquad \qquad &= 2\sqrt{n}C + 2n(p-1) + 2n(q-1), \end{aligned}$$

or with (3.1), (3.2) and (3.3):

$$(p-1)\xi + (q-1)\eta \leq C.$$

The probability of this event is determined by (3.5) if n is large. As this probability depends on p and q , a *uniformly* most powerful test of H_0 with respect to all H_1 does not exist.

The most powerful critical set on level ε is, for n large,

$$(5.3) \qquad a\xi + b\eta \leq \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{3(a^2 + b^2) + (6 - \pi^2)ab},$$

where $a=p-1$, $b=q-1$, and u_ε is the ε -fractile of the standardized normal distribution.

The power function is only obtainable in a simple way if p or q are equal to 1. If, for example, $q=1$, the distribution function of the beta distribution is

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x^p & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } 1 \leq x, \end{cases}$$

and if H_1 is true,

$$p\tau_1 = -2 \sum_{i=1}^n \ln x_i^p$$

is distributed like χ_{2n}^2 . If $p > 1$, (5.2) shows that $\tau_1 \leq \chi_{2n,\varepsilon}^2$ is the best critical set, such that the power function becomes

$$P(\tau_1 \leq \chi_{2n,\varepsilon}^2) = P(\chi_{2n}^2 \leq p\chi_{2n,\varepsilon}^2).$$

If $p < 1$, the power function becomes

$$P(\tau_1 \geq \chi_{2n,(1-\varepsilon)}^2) = P(\chi_{2n}^2 \geq p\chi_{2n,(1-\varepsilon)}^2),$$

which is the same as (4.5). With the requirement (4.6), we get the same curves as in fig. 1.

The Fibonacci sequence (5.1) has been tested on the Danish computer GIER, with $r_0 = 394852741$, $r_1 = 263822912$, $M = 2^{29} - 1 = 536870911$, and $n = 10000$. As M is the largest (single word length) integer that can be stored in GIER, a small rounding off error will occur. This is, however, only an insignificant "random" contribution to r .

For every 100 experiments, (ξ, η) was calculated from (3.3) and plotted in the coordinate system shown in fig. 2. Some frequencies obtained from the 100 points are given in table 2, together with theoretical probabilities taken from the table 1. Significance lines corresponding to (5.3), with $a=b$ and $\varepsilon = 5, 1$ and 0.1% , are drawn in fig. 2. No significant departure from the hypothesis H_0 is observed.

Probability %	1	5	10	13	20	36
1. quadrant	0	2	5	6	—	—
2. quadrant	2	3	8	—	22	35
3. quadrant	2	11	17	24	—	—
4. quadrant	1	3	10	—	21	35

Table 2. Observed distribution of 100 points (ξ, η) (see fig. 2).

From all 10000 experiments, (ξ, η) was calculated to be

$$(\xi, \eta) = (-0.1948, -0.4921),$$

which is a very probable result under the hypothesis H_0 .

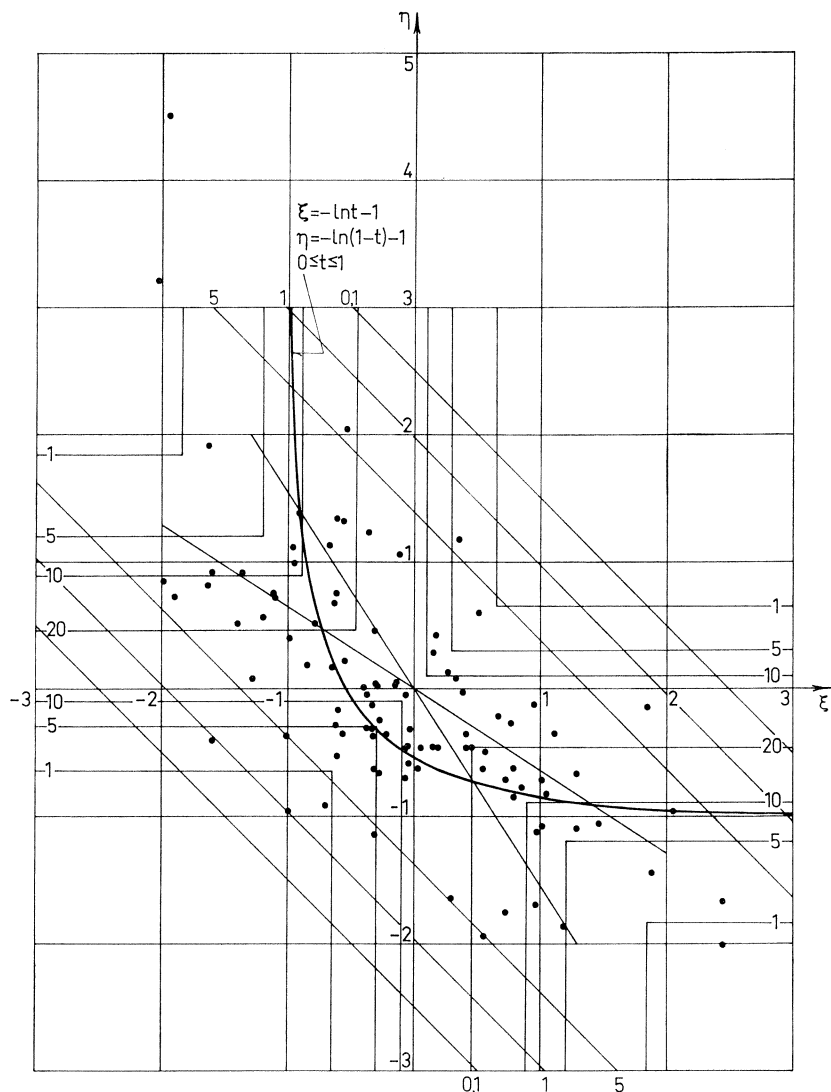


Fig. 2. 100 points each generated after (3.3) for $n=100$. Thus every term in this sum may be interpreted as a point distributed at "random" on the curve $\xi = -\ln t - 1$, $\eta = -\ln(1-t) - 1$, where $0 \leq t \leq 1$. The parameter was drawn as $t=r$ by the reduced Fibonacci sequence. Domains with given probabilities (in %) corresponding to the asymptotic normal distribution (3.4) are indicated. Further, the lines of regression are drawn.

Further, estimates were calculated for the standard deviations of $\tau_1/2$ and $\tau_2/2$ and the coefficient of correlation between τ_1 and τ_2 by the usual formulae. The results were

$$\sigma\{\tau_1/2\} \approx 1.0041, \quad \sigma\{\tau_2/2\} \approx 0.9916, \quad \rho\{\tau_1, \tau_2\} \approx -0.6398,$$

which are in good agreement with the theoretical quantities, see p. 160.

The distribution of the 10000 numbers in 10 equal intervals was

948, 1049, 1032, 953, 1004, 991, 1041, 1019, 982, 981 .

The usual estimate of the variance of these uniformly distributed numbers r was (using the notation of standard errors)

$$\sigma^2\{r\} \approx 0.0827 \pm 7 \cdot 10^{-4} .$$

The theoretical value is $\frac{1}{12} \approx 0.0833$. To get an impression of the dependence between numbers following each other in the sequence, the following coefficients of correlation were estimated:

$$\varrho\{r_n, r_{n+i}\} \approx \sum_{n=1}^{9996} (r_n - \tfrac{1}{2})(r_{n+i} - \tfrac{1}{2}) \bigg/ \sum_{n=1}^{9996} (r_n - \tfrac{1}{2})^2 ,$$

for $i = 1, 2, 3, 4$. The respective results were

$$-0.0033, \quad -0.0108, \quad -0.0006, \quad -0.0048 .$$

Added in the proof:

The author has recently become aware of the fact that the use of (2.2) and (2.3) as test statistics is classical. The method was first considered by R. A. Fisher (1932), K. Pearson (1933, 1934), J. Neyman (1937) and E. S. Pearson (1938), see for example *Biometrika* 30 (1938), p. 134.

REFERENCES

- [1] H. CRAMÉR: *Mathematical methods of statistics*. Princeton 1945.
- [2] E. J. GUMBEL: *On the reliability of the classical Chi-square test*. *Annals of Math. Stat.* 14 (1945), pp. 253–263.
- [3] *Mathematical tables from the Handbook of chemistry and physics*. Eleventh edition. Chemical Rubber Publishing Co., 1959.
- [4] O. TAUSKY — J. TODD: *Generation and testing of pseudo-random numbers*. Symposium on Monte Carlo Methods, pp. 15–28. John Wiley & Sons, New York 1956.
- [5] AIMO TÖRN: *Tillämpning av Monte Carlo-metoden på beräkning av flerdimensionella integraler*. *Nordisk Matematisk Tidskrift* 11 (1963), pp. 97–102.
- [6] K. T. TOCHER: *The art of simulation*. The English Universities Press, London 1963.

BOKMELDINGER

IRVING ADLER: *Tænkende maskiner*. Overs. fra engelsk af Gunhild Lundbak. Fremad, København 1964. 119 s. D. kr. 14.75.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 122.)

Det är förvånansvärt hur få försök till populärvetenskaplig presentation av datamaskiner som har gjorts. Man tycker annars att detta är ett område som skulle vara väl ägnat åt sådana. Här saknas varken möjligheter till konkret teknisk beskrivning, intellektuellt stimulerande diskussion eller fantasieggande framtidsperspektiv. Att det är angeläget att god populärvetenskap i ämnet finns tillgänglig inses av de ständiga missuppfattningar och förvrängningar om datamaskiner som möter i massmedia.

Den föreliggande boken vänder sig till en bred publik med elementära kunskaper i matematik i avsikt att underlätta förståelsen av datamaskiners arbetssätt.

Efter en inledning med exempel på datamaskinernas användningsområden beskrives kort en Turingmaskin. Det binära talsystemet introduceras och de principiella skillnaderna mellan analogi- och siffermaskiner diskuteras. Den Booleska algebran illustreras först med exempel från dess tillämpningsområden inom logikkalkyl och mängdlära och införes sedan som en abstrakt algebra. Resultaten från den algebraiska teorin överföres sedan med hjälp av den kända Shannonska tolkningen till elektriska kopplingar. Med utgångspunkt från en existerande maskin (NORC) demonstreras hur de aritmetiska operationerna utföres elektroniskt.

Bokens huvudvikt ligger vid avsnitten om Boolesk algebra som upptar hälften av texten. Det är en utmärkt grundläggande beskrivning av den Booleska algebran som tillgodoser högt ställda pedagogiska och teoretiska krav. Det torde vara anmärkningsvärt att i en populär beskrivning finna en korrekt axiomatik, kompletterad med bevisexempel, och boken visar här att populära framställningar inte behöver vara teoretiskt underförsörjda.

Som beskrivning av datamaskiners funktionssätt är emellertid boken ofullständig. Ytterst lite säges om den tekniska uppbyggnaden av mo-

derna maskiner och grundläggande begrepp såsom program och instruktioner berörs mycket kortfattat. Läsaren ges ingen möjlighet att fylla ut luckan mellan den matematiska logiken och de avancerade tillämpningarna av datamaskinteknik. Boken har definitiva förtjänster, men är klart otillräcklig som en mera generell introduktion till datamaskiner.

Sten Henriksson

D. BUSHAW: *Elements of general topology*. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 166 pp. sh. 53/—.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 73.)

Boka er beregnet til å gi en første innføring i generell topologi for studenter som har gjennomgått »three years of sound undergraduate mathematics». Teoretisk forutsetter den ingen forkunnskaper, i det en del nødvendig mengdelære er gitt i et tillegg.

De emner som behandles er stort sett dem man ventet å finne i en elementær innføring i generell topologi. Selve begrepet »topologisk rom» blir grundig studert ut fra forskjellige synspunkter, og standardmetodene for konstruksjon av nye rom ut fra gitte (underrom, produktrom, kvotientrom) er behandlet på vanlig måte.

Separasjonsaksiomene er utførlig diskutert. Kompakthetsbegrepene har naturligvis fått bred omtale, men da en adekvat konvergensteori først blir gitt i siste kapittel, gir fremstillingen ikke den fulle oversikt.

Behandlingen av uniforme strukturer fører fram til karakterisering av uniforme rom ved komplett-regularitet. Til slutt følger en konvergensteori for filtre, og Hausdorff-kompletteringen for uniforme Hausdorff-rom konstrueres ved minimale Cauchy-filtre.

Teknikken med »innebygging» av topologiske rom i forskjellige standard-rom er ikke behandlet. Derfor savnes viktige emner som f. eks. metriserings-satsene og Stone-Čech-kompaktifiseringen.

Fremstillingen er overalt meget utførlig og stort sett klar. En instruktiv historisk oversikt innleder boka, og teksten inneholder hele veien rikelig av motiverende kommentarer. I det hele vil boka sikkert gi god innsikt i de emner den behandler. Men forståelsen av den generelle topologis betydning ville kanskje blitt en annen dersom de innførte begreper ble anvendt på noen flere ikke-trivielle problemstillinger.

Forfatteren har — etter eget sigende — i stor utstrekning brukt Bourbaki som modell. Terminologien følger da stort sett denne, men ikke konsekvent. Således er f. eks. komplett-regulære rom forutsatt Hausdorff, kompakte derimot ikke.

Olav Njåstad

BENT CHRISTIANSEN: *Elementær kombinatorik og sandsynlighedsregning*. Munksgaard, København 1964. 135 s. D. kr. 14.75.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 123.)

Den samnordiska diskussionen av gymnasiets matematikkurs har glädjande nog lagt stor vikt vid sannolikhetskalkylen och statistiken. Den svenska gymnasieutredningen kodifierar detta intresse; i Danmarks »blå betænkning« medges bl. a. att kombinatorik och enkla sannolikhets-teoretiska uppgifter behandlas i 3. realklassen om läraren så önskar.

Med den möjligheten för ögonen har Bent Christiansen skrivit sin lärobok. Han ger först en grundlig gnuggning i konsten att räkna med permutationer och kombinationer, utmynnande i binomialformeln. Tempot är lugnt och exemplen (såväl lösta som olösta) många, vilket alltså samverkar för ett säkert tillgodogörande av stoffet. Det skulle dock förmodligen vara svårt att hinna gå igenom hela boken noggrant i skolan. Dessbättre innehåller förordet också några förslag till förkortningar av kursen.

Avsnittet om sannolikhets-teori grundas på en god framställning av mängdlärans elementa i bokens första del. Fullt stringent och utomordentligt pedagogiskt införes ett diskret sannolikhetsfält. Förhållandet mellan det praktiska experimentet och den matematiska modellen åskådliggöres. Vidare genomgås den klassiska sannolikhetsdefinitionen samt de enklaste lagarna för räkning med sannolikheter (oberoende händelser) och slutligen införes binomialfördelningen.

Bokens framställning av elementär sannolikhets-teori (i det diskreta fallet) utgör en mycket god grundval för studier i matematisk statistik och en värdefull teoretisk förberedelse för studiet av statistiska arbetsmetoder.

Thomas Polfeldt

H. S. M. COXETER: *Unvergängliche Geometrie*. (Wissenschaft und Kultur, Bd. 17.) Ins Deutsche übersetzt von J. J. Burkhardt. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart 1963. 552 S. S. Fr. 55.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 129.)

I de sidste årtier er det blevet sædvane i den vestlige verden at nedskære geometristoffet, når læseplanen har været taget op til revision for at skaffe matematiske nydannelser indpas i undervisningen. Dette motive-res i reglen med, (1) at geometristoffet er forældet — ofte over 2000 år gammelt —, (2) at geometri blot er en del af algebra og matematisk analyse, og (3) at geometriens opbygning ud fra et aksiomsystem som et eksempel på den aksiomatiske metode er for kompliceret for gymnasiet

og den elementære universitetsundervisning; den aksiomatiske metode, som man ønsker at bibeholde i undervisningen, illustreres langt lettere ved f. eks. gruppeteori eller topologiske rum.

Det er ikke hensigten her at forsøge at benægte gyldigheden af (1) og (2) — og da slet ikke (3); men at vi nødigt skulle gå så vidt i vores reformiver, at vi praktisk taget afskaffer geometrien, derom vidner denne bog. Enhver læser af Coxeter's bog vil endog være veludrustet til at diskutere gyldigheden af (1) og (2).

Coxeter's bog er en stor bog både i kvantitet og i kvalitet. Såvel originaludgavens beskedne titel »Introduction to geometry« (John Wiley & Sons, 1961) som titelen på den foreliggende tyske oversættelse udtrykker noget væsentligt ved bogens indhold. I form er den elementær og koncis, i emnevalg formodentlig en kommende klassiker.

Bogen falder stort set i fire dele, hvoraf den første omhandler geometri i den euklidiske plan og i rummet, anden del analytisk geometri, herunder også de platoniske legemer, tredje del projektiv geometri og ikke-euklidisk geometri, mens fjerde del væsentlig drejer sig om differentialgeometri.

Af disse afsnit er kun det fjerde traditionelt, og det udmærker sig endda ved et kapitel om firefarveproblemet i forbindelse med fladetopologi. De tre første afsnit er fremstillet med udpræget pædagogisk forståelse for begynderens problemer og æstetisk hensyntagen til den mere erfarne matematiske læser.

Grundtanken igennem hele fremstillingen er den, der blev fremsat af F. Klein i hans Erlanger program: at opbygge geometrien på begrebet transformationsgruppe. Den aksiomatiske metode er klart bragt i anvendelse ved indførelsen af ikke-euklidiske geometrier, men derudover er bogen ikke strengt aksiomatisk opbygget. Forfatterens begejstring for geometrisk intuition og inspiration skinner igennem overalt.

Bogen er svær at indvende noget alvorligt imod; men f. eks. synes keglesnit taget i projektiv forstand (i 3. afsnit) og opfattet som andengrads-kurve (i 2. afsnit) ikke at være i relation til hinanden. Ligeledes kunne man måske have ønsket, at bogen havde indeholdt et afsnit om konvekse figurer, som nok skal vise sig at falde ind under bogens tyske titel.

Til slut skal det nævnes, at teksten indeholder talrige historiske noter og mange henvisninger til uddybende litteratur. Oversættelsen følger ret nøje den engelske original, men flere småfejl er blevet rettede i den tyske udgave. Desuden indeholder bogen flere hundrede øvelsesopgaver, som i den tyske udgave er besvarede i slutningen af bogen.

Alt i alt er det en bog, som man uden tøven kan anbefale til ethvert skole- og universitetsbibliotek.

Flemming P. Pedersen

TORGIL EKMAN — CARL-ERIK FRÖBERG: *Lärobok i ALGOL*. Studentlitteratur, Lund 1964. 4 + 126 s. Genom Lunds studentkårs intressebyrå sv. kr. 16.25. Genom bokhandeln sv. kr. 20.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 125.)

Det algoritmiske sprog ALGOL 60 blev fastlagt af en international komité i 1960. Siden da har det hastigt vundet udbredelse som middel til at beskrive beregningsprocesser både ved undervisning, fra forsker til forsker, og fra forsker til elektronisk datamaskine. Officiel international status opnåede det, da det som det hidtil eneste blev anerkendt af International Federation for Information Processing i august 1962.

Sideløbende med den kraftigt stigende anvendelse af sproget er der vokset en anseelig litteratur af beskrivelser og lærebøger op omkring det, deriblandt adskillige på skandinaviske sprog. Den foreliggende nye bog af Ekman og Fröberg er dog så vidt anmelderen bekendt den første, der udkommer som bog på svensk.

Af bogens 20 kapitler handler et om den historiske og tekniske baggrund for ALGOLs fremkomst, de følgende 13 er det egentlige, systematiske kursus i ALGOL, mens de sidste behandler visse mere sprogtekniske problemer, både i ALGOL selv og i sprogets tillem্পning til de eksisterende datamaskiner. Som helhed prægtes bogen først og fremmest af forfatternes positive og praktiske holdning til ALGOL. Baggrunden herfor er deres flerårige erfaring med anvendelsen af det til brug ved undervisningen og forskningen omkring Lunds universitets elektroniske cifferregnemaskine SMIL. Denne baggrund har dog ikke medført nogen snæver binding til specielle, lokale forhold; tværtimod er bestræbelserne på at eliminere en sådan indflydelse lykkedes så godt, at man med tryghed kan anbefale bogen som grundlag for et ALGOL kursus for en hvilken som helst maskine.

I det egentlige kursus har forfatterne valgt at give en næsten fuldstændig redegørelse for sprogets ejendommeligheder med det samme. Dette har som bekendt den ulempe, at visse læsere kan blive overvældet ved tanken om subtile muligheder og farer, som i praksis let kan undgås. På den anden side er det i overensstemmelse med bogens almindelige holdning, som afspejler et ønske om at vække interesse, ikke alene for sproget som middel, men også for programmeringssproget som fænomen i sig selv. Tillige modvirkes de mulige uheldige virkninger af det righoldige udvalg af gode, praktiske eksempler. I valget af disse har forfatterne med godt held udtænkt problemstillinger, som kun kræver et minimum af speciel forhåndsviden, og som derfor vil kunne bruges ved ALGOL kurser inden for vidt forskellige fag. Kun et mindretal af øvelserne kræ-

ver en speciel viden om numerisk analyse. I det hele kan man komplimentere forfatterne for den måde, det er lykkedes dem at fremstille de mange enkeltheder i ALGOL i en stil, der er fængslende og endda undertiden humoristisk.

Et par kritiske bemærkninger kan dog ikke undgås. Som en mindre ting kan man undre sig over, at de gode råd om at undgå »hoppsetter«, der citeres på side 44, ikke følges op i de efterfølgende eksempler. Både side 56, 73 og 80 finder man kandidater til en behandling af denne art. På side 81 siges det, at fejlleddet ved Simpsons formel er proportionalt med fjerde potens af intervallet. Dette gælder dog kun tilnærmet. En noget mere dybtgående kritik kan rettes mod kapitel 19, der handler om kompilator konstruktion. Nu er tre sider ikke meget til et sådant emne, men selv med denne undskyldning er dette kapitel ikke lykkeligt, idet på den ene side den dybere mening med brugen af de beskrevne stakke næppe vil stå læseren klar efter læsningen, mens på den anden side en hel række lige så vigtige problemer som f. ex. lagerdisposition, adressering og producerkald, end ikke nævnes. Det kan også nævnes, at det sidste eksempel i det iøvrigt udmærkede kapitel 16 ikke er korrekt ALGOL og at problemet derfor ikke eksisterer, og at det andet øvelseseksempel på side 96 er blevet forvansket af noget, der er værre end trykfejl.

Men lad ikke disse bemærkninger overskygge indtrykket af en bog, som vil kunne gøre udmærket fyldest, hvad enten man vil bruge den som lærebog til elementære kurser ved de højere læreanstalter eller til selvstudium.

Peter Naur

A. YA. KHINTCHINE: *Continued fractions*. Translated from the Russian by Peter Wynn. P. Noordhoff, Groningen 1964. 101 pp. D. fl. 16.25.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 127.)

Denna bok är egentligen helt obehövlig. Denna 30 år gamla monografi har nämligen sedan åtta år varit tillgänglig i tysk översättning (A. Khintchine: Kettenbrüche. Math.-naturw. Bibl. 3. Teubner, Leipzig 1956). Det utgivande förlaget ovan syns (el. låtsas) vara ovetande om detta. Skall verkligen tid och krafter läggas ned på översättning av böcker till engelska, som redan finns i tysk version?

Från denna synpunkt sett är alltså en anmälan onödig. Några ord kan ändå sägas. Khintjins [ryska o. a. namn bör transkriberas på det för varje särskilt språk riktiga sättet] glänsande verk har gått ut i många editioner. Den tyska översättningen byggde på 2:a upplagan från 1949, denna engelska följer 3:e upplagan av 1961. Endast några noter har tillkommit

och tryckfel rättats. I förordet säger Gnedenko, att de moderna numeriska metoderna i matematiken har väckt intresse för algoritmer sådana som kedjebråkens. En nyligen utgiven bok (av Khovanskij, NMT 11.4, Mot-tatte bøker, s. 184) är ett belägg för detta. Enligt Gnedenko fyller ändå Khintjins bok alltjämt sin uppgift: att ge en inledning till teorin för regelbundna kedjebråk och samtidigt att beröra djupa och intressanta problem i den metriska talteorin. Denna dikotomi är väl också bokens enda »fel»: del I–II är en pedagogiskt välgjord, lättläst introduktion, medan del III är en krävande framställning av Khintjins älsklingsgebit, metrisk kedjebråksteori. Därigenom blir också titeln vilseledande.

Det är väl förlagets och inte översättarens fel att också den senares namn finns med på titelbladet, där det avgjort inte hör hemma.

Sett i ljuset av senare rön (t. ex. ref:s forskning) blir avsnittet om tals konvergentapproximation omodernt och »skevt». Khintjin talar (s. 30) om »bästa approximationer av 1:a och 2:a ordningen», med $\left| \xi - \frac{a}{b} \right|$ resp. $|b\xi - a|$ som karaktäristika. De uttryck som kunde kallas approximationer av 3:e ordningen, nämligen $b|b\xi - a|$, har emellertid vida intressantare egenskaper.

Bokens framgång i Sovjet och översättningen till engelska bekräftar, att intresset för detta ämne, liksom för teorier åtkomliga med kedjebråksmetoder, i detta nu är stort. Man har insett kedjebråkens väsentliga betydelse. Detta är dessvärre inte fallet överallt hos oss.

P.S. I oktobernumret av Zentralblatt noterar man med häpnad, att denna ansedda tidskrift har upplåtit mer än en sida för en recension av ett franskt arbete (1960), som av recensionen att döma inte är något annat än ett bokstavstroget plagiat (!) av kap. III i Khintjins bok! Man vägrar att fatta att detta kan vara möjligt.

Clas-Olof Selenius

G. D. MOSTOW — J. H. SAMPSON — J. P. MEYER: *Fundamental structures of algebra*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1963. 16 + 585 pp. sh. 69/6.

(Innehållsförteckning i NMT, denne årgang, s. 128–129.)

Jeg vet ikke om vekstraten for utgivelse av lærebøker i matematikk er av eksponentiell karakter eller ikke. Men at det kommer en ustyrtelig mengde er i alle fall sikkert! Og av og til hender det at det i denne flommen av ofte nokså ordinære bøker kommer en hvis kvalitet umiddelbart står fast. Boken *Fundamental structures of algebra* av Mostow, Sampson og Meyer er etter min mening en slik bok. Denne oppfatning er selvsagt

subjektiv og kan bero på så mangt. Dels kan det skyldes at denne boken typografisk, og utstyrmessig forøvrig, er av usedvanlig høy klasse, dels kan årsaken være at man syns den elementære matematikkundervisning ved universitetene har så alt for mye av analyse og at denne boken, anvendt fra første semester av, kunne være et utmerket supplement ved sitt rike innhold av viktig og nyttig algebra.

Boken er i sin oppbygning ikke så ulik den velkjente *Survey of modern algebra* av Birkhoff og MacLane, men den er mer elementær og tilpasset et lavere nivå. Den første del behandler de fundamentale strukturer: Binære operasjoner og grupper i første kapitel, ringer, integritetsområder og de hele tall i annet kapitel. Så i videre rekkefølge kroppar med anvendelse på de rasjonale tall, en rask oversikt over teorien for reelle og komplekse tall med deres aksiomatiske karakterisering, og en innføring i teorien for polynomringer og rasjonale funksjoner. Fremstillingen er ganske bred og elementær, den er rikt illustrert og der er omfattende oppgaveavsnitt. Alt i alt gir denne del av boken en god innføring i matematikken av i dag, og kunne med fordel kreves av enhver student innen de naturvitenskapelige fag, ja, også av mange fra sosialvitenskapene.

Etter mitt skjønn har mengdelæren fått den rimelige plass den bør ha i en innføringsbok. Den kommer inn etterhvert som det er hensiktsmessig å bruke dens terminologi. De mengdeteoretiske konstruksjoner (ekvivalensklasseinndelinger, kvotientstrukturer osv.) kommer først inn der de naturlig kan benyttes til å belyse de strukturelle egenskaper ved de algebraiske systemer en studerer. En slipper dette lange innledningskapitlet med mengdeteoretiske trivialiteter som en rekke forfattere nå utstyres sine lærebøker med, øyensynlig i den tro at man dermed har gitt studentene en forståelse av hva »moderne matematikk« egentlig er.

Bokens neste og største del er en solid innføring i lineær algebra. Etter den »moderne tradisjon« er oppbygningen aksiomatisk. Men snart blir vel den elementære vektoralgebra obligatorisk gymnaspensum, så en direkte aksiomatisk innføring på universitetsnivå skulle være fullt forsvarlig. Dessuten er denne fremstilling godt konkretisert gjennom eksempler, og dertil er den første del av boken en utmerket forberedelse til vektorromteorien. Og når behandlingen har vært brukt med stor suksess på »virtually all entering freshmen who contemplated more than one term of mathematics in college«, så skulle man formode at også våre begynnende studenter med letthet ville følge med!

Videre gir boken det tradisjonelle stoff som lineærtransformasjoner og matriser, determinanter (elegant behandlet), Jordans normalform, samt kvadratiske og hermitiske former. Noe uventet er et fyldig kapitel om grupper og permutasjoner, og en morsom overraskelse i en slik bok er et

pent kapitel om ringer av operatorer og differensialligninger (dvs. den systematiske teori for lineære ligninger med konstante koeffisienter).

Det nest siste kapitel er av mer metodologisk art. Det er en systematisk fremstilling av konstruksjon av kvotientstrukturer, rikt eksemplifisert ved den tidligere teori. Et vesentlig kapitel fra mengdelæren, godt plassert i den samlede fremstilling.

Boken avsluttes med et omfattende kapitel multilineær algebra. Ved en rask gjennomlesning virker fremstillingen godt ordnet. Indekser i hopetall — både oppe og nede, foran og bak — forekommer selvfølgelig. Inntrykket er dog at forfatterne makter å gi en ganske koordinatfri fremstilling uten å gi inntrykk av den goldhet som Chevalley gir i sin *Fundamental concepts of algebra*. Jeg tror at fysikerne ville ha stor glede av denne del — noe som er nok et argument for å anvende boken i den innledende universitetsundervisning.

Denne bok er preget av tidens aksiomatiske fremstilling av matematikken. Men til forskjell fra Halmos' kjente *Finite-dimensional vector spaces*, som er en glimrende bok for matematikeren («Så elegant kan det altså gjøres!»), så tror jeg at denne boken er en glimrende bok for studenten! En av de få sammenlignbare bøker er Godements nylig utkomne *Algèbre*, men den er på fransk og langt fra så tiltrekkende utstyrmessig, så jeg tror våre studenter vil like Mostow etc. bedre.

En bok som denne, gjerne forelest grundig over tre semestre (her i Oslo tilsvarende sekvensen Fo 4, Ma 3, Ma 6), ville bidra meget til å heve det matematiske nivå, uten derfor utelukkende å ta sikte på dem som skal spesialisere seg i matematikk. En slik undervisning, fornuftig samordnet med en analyseundervisning à la Rudins *Principles of mathematical analysis*, ville være en rimelig modernisering av det alt for tradisjonelle stoff som nå ofte tilbys begynnerstudenten.

Og skulle noen ennå ikke være overbevist, så les bokens forord!

Jens Erik Fenstad

LENNART RÅDE: *Sannolikhetslära och statistik*. Biblioteksförlaget, Stockholm 1963. 232 s. Sv. kr. 28.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 187.)

Forfatteren sier i innledningen at denne »lärobok är avsedd att vara en första introduktion till sannolikhetsläran och statistiken ...». Den krever bare beskjedne matematiske forkunnskaper. I de fire første kapitler behandles således utelukkende sannsynlighetsteoretiske modeller for forsøk med et endelig eller nummererbart antall utfall. Femte og sjette

kapitel forutsetter imidlertid noe kjennskap til begrepene bestemt integral, dobbeltintegral og partiell derivasjon.

Bokens innhold faller naturlig i to deler: kap. 1, 2, 3 og 5 som omhandler sannsynlighetsregning, og kap. 4, 6 og 7 som behandler utvalgte emner fra den statistiske metodelære. Selv om en forstår forfatterens motiv for å ville illustrere kap. 1, 2 og 3 ved eksempler fra statistisk hypoteseprøving (kap. 4) før han fortsetter med sannsynlighetsregningen i kap. 5, ville det vel vært lettere for nybegynneren å få oversikt over stoffet, dersom kap. 4 og 5 hadde byttet plass.

I første kapittel innføres elementene for mengdelæren, og den klassiske sannsynlighetsdefinisjon er omtalt. Annet kapittel omhandler endelige utfallsrom (finite sample spaces), og sannsynlighetsregningen bygges opp aksiomatisk. Så tar forfatteren i tredje kapittel for seg diskrete stokastiske variable og begrepene forventning og varians defineres, og i femte kapittel behandles kontinuerlige stokastiske variable. I disse fire kapitlene presenteres leseren for de alminneligste begrepene på en grei og oversiktig måte. Litt uheldig synes jeg det er at begrepet frekvensfunksjon nyttes såvel i forbindelse med diskrete som kontinuerlige fordelinger. Forøvrig er det vel upedagogisk at begrepet »stickprov« er definert på tre måter og nyttes i tre forskjellige sammenheng. (Se f. eks. s. 42, s. 157 og s. 198.) I annet avsnitt side 153 er også en uheldig formulering som bare er egnet til å lede leseren på villspor.

Men om kap. 1, 2, 3 og 5 gir en meget god førsteinnføring i sannsynlighetsregningen, kan dessverre det samme ikke sies om innføringen i den statistiske metodelære gitt i kap. 4, 6 og 7. Min første hovedinnvending gjelder disponeringen av de enkelte emner. For nybegynneren er det viktig å få plassert de forskjellige områder av metodelæren i forhold til hverandre. Kapittel 6 har som hovedoverskrift Statistisk skattning, men i underavsnittet 6.1 finner en et generelt avsnitt om statistisk inferens, i 6.2 deskriptiv statistikk og i 6.9 statistisk forsøksplanlegging. Hypoteseprøving behandles som nevnt først i kapittel 4, der forfatteren illustrerer begrepene ved å ta for seg følgende eksempel: Et forsøk går ut på å prøve personers smaksevne ved å presentere dem for to standardløsninger av hvilke den ene er litt søtere enn den andre og be dem smake og peke ut den søteste. Anta at en bestemt forsøksperson prøves i alt n ganger og gir η riktige svar. Ved å betegne sannsynligheten for at denne person ved et enkelt forsøk skal svare riktig med p , og gjøre de vanlige forutsetninger, kommer en frem til at η er binomisk fordelt (n, p) . p karakteriserer nå kandidatens smaksevne, og på grunnlag av en observert η skal kandidaten godkjennes eller vrakes som prøvesmaker ved bedriften. Her heter det blant annet (s. 100): »Det ter sig alltså rimligt att godkänna prov-

smakare med stort antal korrekte bedømminger og underkänna de andra. Vi bestämmer då ett tal c och fattar beslutet så, att vi accepterar en person om $\eta \geq c$ och underkänner personen om $\eta < c$.«

Forfatteren definerer nå en funksjon S , »sådan att $S(p)$ är sannolikheten att vi skall godkänna en provsmakare, som har sannolikheten p att göra korrekt bedömning.« Han velger så $n = 12$ og $c = 8$, og kaller uten videre

$$S(p) = P(\eta \geq 8 \mid p) = \sum_{x=8}^{12} b_{12,p}(x)$$

for styrkefunksjonen. Noen hypotese og eventuelle alternativer er ikke stilt opp, og leseren må uvilkårlig spørre seg selv: Kan ikke styrkefunksjonen like gjerne være definert ved $P(\eta < 8 \mid p)$? En passant påpeker forfatteren, uten å komme nærmere inn på forholdet, at en må være oppmerksom på at styrkefunksjonen her gir »betingede sannlikheter« og sier videre at en, når en diskuterer vekten av forskjellige feilslutninger, bør ta sannsynlighetsfordelingen fra de foreliggende verdiene med i betraktningene, »... en sådan sannlikhetsfordeling för möjliga p -värden brukar kallas en a priori-fördelning. Vi skall emellertid ej här diskutera utnyttjande av a priori-fördelningar«. Har ikke nybegynneren forlenget falt av lasset, gjør han det i alle fall her.

Forfatteren peker så på at styrkefunksjonen avhenger av n , p og c og antar at han kan »ange två tal p_1 och p_2 , $p_1 < p_2$, sådana att det är önskvärt att underkänna provsmakare med $p < p_1$ och samtidigt önskvärt att godkänna sådana med $p > p_2$ «. Han »fixerar vidare sannolikheten för felbeslut i fallen $p = p_1$ och $p = p_2$ till α och β « og peker på at n og c kan bestemmes ut fra

$$S_{n,c}(p_1) = \alpha, \quad S_{n,c}(p_2) = 1 - \beta.$$

Fremdeles er imidlertid hverken begrepene signifikansnivå eller teststyrke nevnt. I et etterfølgende avsnitt karakteriseres testene etter om akseptanseområdet er én-, respektive to-sidig. Fremdeles er det ikke oppstilt noen hypotese, enn si alternativer. Senere gis en generell formulering av statistisk hypoteseprøving, der to hypoteser H_0 og H_1 , begge sammen satte, omtales, men en gis inntrykk av at problemet er symmetrisk i H_0 og H_1 .

En må bare beklage at en bok som gir en så god innføring i elementene av sannsynlighetsregningen, samtidig er så vidt utilfredsstillende når det gjelder den statistiske metodelære. Det er å håpe at forfatteren i forbindelse med neste utgave av boken er villig til å omarbeide kapitlene 4, 6 og 7. Samtidig bør de hyppig anvendte ikke-parametriske metoder (tegn-testen, Wilcoxon's tester) tas med. Da kan resultatet bli en riktig god og anbefalelsesverdig lærebok.

Arnlfjot Høyland

MOTTATTE BØKER

P. O. Andersen — S. Bülow — H. J. Helms: *Opgaver til matematik for realgymnasiet, II B*. Gyldendal, København 1964. 60 s. D. kr. 7.50.

Talmængder 7–10 * Kontinuitet og grænseværdi 11–17 * Differentiable funktioner 18–26 * Integrable funktioner 27–28 * Stamfunktioner 29–31 * Anvendelser af infinitesimalregningen 32–44 * Logaritmefunktioner 45–49 * Eksponentialfunktioner 50–53 * Potensfunktioner 54–56 * Differentialligninger 57–60.

R. Baldus — F. Löbell: *Nichteuklidische Geometrie*. Vierte Auflage. (Sammlung Götschen 970/970a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1964. 158 S., 75 Fig. DM 5.80.

Literatur 6 * Der geschichtliche Weg zu Nichteuklidischen Geometrie 7–20 * Axiomatik der absoluten Geometrie 20–50 * Die Euklidische Geometrie 50–54 * Axiomatik der hyperbolischen Geometrie im Einheitskreise 54–71 * Die hyperbolische Geometrie als selbständige Disziplin 71–144 * Schlussbetrachtungen 144–155 * Register 156–158.

Heinz Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Mass-theorie*. (Sammlung Götschen 1216/1216a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1964. 154 S. DM 5.80.

Literaturverzeichnis 5–6 * Einleitung 7–9 * Bezeichnungen 10–11 * Masstheorie 12–42 * Integrationstheorie 42–70 * Produktmasse 71–85 * Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie 86–106 * Unabhängigkeit 106–126 * Gesetz der grossen Zahlen 127–151 * Namen- und Sachregister 152–154.

Lipman Bers — Fritz John — Martin Schechter: *Partial differential equations, III*. (Proceedings of the Summer seminar, Boulder, Colorado, 1957.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London, Sydney 1964. 13 + 343 pp. sh. 81/–.

Equations of hyperbolic and parabolic types 1–3 * The wave operator 4–37 * Cauchy's problem, characteristic surfaces, and propagation of discontinuities 38–61 * Linear hyperbolic differential equations 62–93 * A parabolic equation: The equation of heat conduction 94–107 * Approximation of solutions of partial differential equations by the method of finite differences 108–132 * Elliptic equations and their solutions 133–149 * The maximum principle 150–163 * Hilbert space approach. Periodic solutions 164–189 * Hilbert space approach. Dirichlet problem 190–210 * Potential theoretical approach 211–253 * Function theoretical approach

254–281 * Quasi-linear equations 282–300 * Supplement I. Eigenvalue expansions, by Lars Gårding 301–326 * Supplement II. Parabolic equations, by A. N. Milgram 327–340 * Index 341–343.

V. C. Boltyanskii: *Envelopes*. (Popular lectures in mathematics, 12.) Translated from the Russian by Robert Brown. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1964. 76 pp. sh. 15/–.

The parabola of safety 1–14 * The hyperbola: Boundary of the zone of audibility 15–31 * The astroid and the cycloid 32–39 * Envelopes 40–76.

F. J. Budden — C. P. Wormell: *Mathematics through geometry*. (The Commonwealth and International Library, Mathematics Division, Vol. 17.) Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, Paris, Frankfurt; Macmillan Book Co., New York 1964. 9 + 230 pp. sh. 25/–.

A new mathematics syllabus: Without geometry? 3–25 * School mathematics: An introduction to what? 26–30 * Royaumont and Southampton 31–43 * The value of school geometry 44–55 * What is the value of abstract algebra in the context of school mathematics? 56–69 * What is the value of utilitarian mathematics in the context of the school syllabus? 70–78 * What are the factors which ought to determine the composition of the school syllabus? 79–85 * Mathematicians in a liberal education 86–89 * The crisis in school mathematics 90–96 * The difficulty of geometry 99–115 * The role of geometry in unifying school mathematics 116–146 * O-level topics 147–167 * A-level topics 168–187 * Projective geometry 188–194 * Conclusion 195–198 * Appendices 199–226 * Index 227–230.

D. K. Faddeyev: *Tables of the principal unitary representations of Fedorov groups*. (Mathematical tables series, 34.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1964. 26 + 155 pp. sh. 70/–.

Preface ix * Introduction xi–xxvi * Tables of unitary representations of Fedorov groups 1–155.

Dieter Gaier: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. (Springer Tracts in Natural Philosophy, 3. Ergebnisse der angewandten Mathematik.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964. 13 + 294 S. Ganzleinen DM 68.00.

Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete durch Lösung von Integralgleichungen mit Neumannschem Kern 1–60 * Das Verfahren von Theodoresen zur konformen Abbildung von $|z| < 1$ auf ein Gebiet 61–115 * Approximation konformer Abbildungen durch Polynome mit Extremaleigenschaften 116–154 * Weitere Methoden zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete 154–180 * Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete 181–257 * Anhänge 257–265 * Literatur 265–290 * Nachträge 291–292 * Sachverzeichnis 292–294.

G. B. Gurevich: *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Translated from the Russian by J. R. M. Radok and A. J. M. Spencer. P. Noordhoff, Groningen 1964. 8 + 429 pp. D. fl. 58.50; U.S. \$ 16.25.

Geometric introduction 1–98 * The foundations of tensor algebra 99–138 * Invariants and concomitants of tensors and their simplest properties 139–169 * The fundamental theorem of the theory of invariants and its consequences 170–245 * Binary forms 246–307 * Ternary forms. Second order tensors 308–352 * Polyvectors 353–395 * Answers and hints to exercises 396–417 * Literature 418 * Index 419–429.

A. Hurwitz — R. Courant: *Funktionentheorie*. Vierte Auflage. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 3.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964. 14 + 706 S. Ganzleinen DM 49.00.

Die komplexen Zahlen 1–22 * Die Potenzreihen 22–41 * Der Begriff der analytischen Funktion 42–67 * Untersuchung einiger spezieller analytischer Funktionen 67–80 * Die Integration analytischer Funktionen 80–107 * Die meromorphen Funktionen 108–135 * Die Umkehrung der analytischen Funktionen 135–145 * Die doppeltperiodischen meromorphen Funktionen 147–188 * Die Theta-Funktionen 188–212 * Die elliptischen Funktionen Jacobis 212–219 * Die elliptischen Modulfunktionen 219–229 * Elliptische Gebilde 229–237 * Elliptische Integrale 237–245 * Die Transformation der elliptischen Funktionen 245–256 * Geometrische Funktionentheorie. Vorbereitende Betrachtungen 257–279 * Die Grundlagen der Theorie der meromorphen Funktionen 279–303 * Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel 304–346 * Spezielle Funktionen und ihre Singularitäten 346–376 * Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen 376–397 * Die konforme Abbildung einfach zusammenhängender schlichter Gebiete 397–430 * Spezielle Abbildungsfunktionen 431–453 * Die Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes. Das Dirichletsche Prinzip 454–496 * Weitere Existenztheoreme der Funktionentheorie 497–550 * Anhang 551–558 * Weitere Abbildungstheoreme der Funktionentheorie 558–637 * Holomorphe und meromorphe Funktionen auf Riemannschen Flächen 637–696 * Namen- und Sachverzeichnis 697–706.

Erik Kristensen — Ole Rindung: *Matematik 2, naturfaglig gren.* 195 s. D. kr. 34.25.

Opgaver til matematik 2, naturfaglig gren. 115 s. D. kr. 19.50. G. E. C. Gads forlag, København 1964.

Kvantorer 1–8 * Reelle tal 9–20 * Numerabilitet 21–27 * Kontinuitet og grænseværdi 28–61 * Differentialregning 62–121 * Integralregning 122–157 * Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner 158–167 * Rentesregning 168–174 * Algebra 175–190 * Sagregister 191–194 * Symbolliste 195.

Opgavesamlingen: Kvantorer 7–9 * Reelle tal 10–13 * Numerabilitet 13–15 * Kontinuitet og grænseværdi 16–31 * Differentialregning 31–56 * Integralregning 56–71 * Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner 72–76 * Taylors formel 76–78 * Afbildninger af planen ind i planen 78–93 * Ellipse, hyperbel, parabel 93–102 * Blandede opgaver 102–115.

Jerome H. Manheim: *The genesis of point set topology*. (The Commonwealth and International Library, Mathematics Division, Vol. 16.) Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, Paris, Frankfurt; Macmillan Book Co., New York 1964. 7 + 166 pp. sh. 25/-.

The difficulties associated with the appearance of calculus 1-12 * Early attempts to make analysis rigorous 13-34 * Fourier series and the beginning of researches into point sets 35-65 * Arithmetization of analysis 66-96 * Development of point set theory 97-111 * The emergence of point set topology 112-132 * From Newton to Hausdorff 133-143 * Appendices 144-150 * Bibliography 151-160 * Subject index 161-164 * Name index 165-166.

Günter Meinardus: *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*. (Springer Tracts in Natural Philosophy, 4. Ergebnisse der angewandten Mathematik.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964. 8 + 180 S. Ganzleinen DM 49.00.

Das allgemeine lineare Approximationsproblem 1-5 * Dichte Systeme 5-13 * Allgemeine Theorie linearer Tschebyscheff-Approximationen 13-27 * Spezielle Tschebyscheff-Approximationen 27-43 * Abschätzungen der Größenordnung des Fehlers bei trigonometrischer und bei polynomialer Approximation 43-70 * Polynomapproximationen 70-98 * Numerische Verfahren bei linearen Tschebyscheff-Approximationen 98-124 * Allgemeine Theorie nicht-linearer Tschebyscheff-Approximation 125-147 * Rationale Approximationen 147-166 * Exponentialapproximationen 166-171 * Literaturverzeichnis 172-178 * Sachverzeichnis 179-180.

S. G. Mikhlin: *Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology*. Second edition. (International series of monographs on pure and applied mathematics, 4.) Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Paris, Frankfurt 1964. 14 + 341 pp. sh. 80/-.

Equations of Fredholm type 3-67 * Symmetric equations (theory of Hilbert-Schmidt) 67-112 * Singular integral equations 113-134 * Dirichlet's problem and its application 137-175 * The biharmonic equation (application of Green's function) 176-219 * The generalized method of Schwarz 220-242 * Certain applications of integrals analogous to potentials 243-274 * Application of the theory of symmetric integral equations 275-297 * Certain applications of the theory of singular integral equations 298-334 * Bibliography 335-338 * Index 339-341.

D. S. Mitrinović: *Elementary inequalities*. Translated from the Serbian by Barnes, Marsh and Radok in cooperation with the author. P. Noordhoff, Groningen 1964. 9 + 159 pp. D. fl. 20.75; U.S. \$ 5.75.

Inequalities involving mean values 9-15 * Inequalities of Bernoulli, Chebychev, Abel, Cauchy-Schwarz-Buniakowski, Young, Jensen, Fejér-Jackson, Jordan 15-30 * Some integral inequalities 31-32 * Some inequalities for symmetric functions

32–36 * Elementary inequalities 36–53 * Inequalities obtainable from functional considerations 53–77 * Inequalities involving powers and factorials 77–91 * Inequalities involving finite sums and products 91–100 * Inequalities involving trigonometric functions 101–111 * Geometric inequalities 111–119 * Inequalities involving mean values and symmetric functions 120–128 * The inequalities of Cauchy–Schwarz–Buniakowski, Hölder, Minkowski and Chebychev 129–131 * Inequalities involving integrals 131–138 * Inequalities in the complex domain 138–143 * Miscellaneous inequalities 144–159.

L. S. Pontryagin — V. G. Bol'tanskii — R. S. Gamkrelidze — E. F. Mischenko: *The mathematical theory of optimal processes*. (International series of monographs on pure and applied mathematics, 55.) Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Paris, Frankfurt 1964. 7 + 338 pp. sh. 80/-.

Introduction 1–7 * The maximum principle 8–71 * Proof of the maximum principle 72–110 * Linear time-optimal processes 111–177 * Miscellaneous problems 178–224 * The maximum principle and the variational calculus 225–242 * Optimal processes with restricted phase coordinates 243–297 * A statistical optimal control problem 298–333 * References 334–336 * Index 337–338.

T. L. Saaty: *Lectures on modern mathematics, II*. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney 1964. 9 + 183 pp. sh. 44/-.

Partial differential equations with applications in geometry 1–41 * Generators and relations in groups — The Burnside problem 42–92 * Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture 93–128 * Partial differential equations: Problems and uniformization in Cauchy's problem 129–150 * Quasi-conformal mappings and their applications 151–164 * Differential topology 165–182 * References 182–183.

V. K. Saul'yev: *Integration of equations of parabolic type by the method of nets*. (International series of monographs on pure and applied mathematics, 54.) Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Paris, Frankfurt 1964. 17 + 343 pp. sh. 80/-.

Construction of net equations 3–200 * Solution of net equations 203–313 * On the application of Chebyshev polynomials to parabolic net equations 315–320 * References 321–338 * Index 339–343.

Waclaw Sierpiński: *A selection of problems in the theory of numbers*. (Popular lectures in mathematics, 11.) Translated from the Polish by A. Sharma. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1964. 126 pp. sh. 15/-.

On the borders of geometry and arithmetic 7–24 * What we know and what we do not know about prime numbers 25–97 * One hundred elementary but difficult problems in arithmetic 98–122 * References 123–126.

Roman Sikorski: *Boolean algebras*. Second edition. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, 25.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964. 10+237 pp. Cloth DM 38.00.

Terminology and notation 1-2 * Finite joins and meets 3-54 * Infinite joins and meets 54-190 * Appendix 191-212 * Bibliography 212-231 * List of symbols 231 * Author index 232-234 * Subject index 235-237.

V. I. Smirnov: *A course of higher mathematics, I-V*. (International series of monographs on pure and applied mathematics, 57-61.) Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Paris, Frankfurt 1964. Vol. I: 13+543 pp. sh. 90/-. Vol. II: 14+630 pp. sh. 90/-. Vol. III¹: 9+324 pp. sh. 63/-. Vol. III²: 10+700 pp. sh. 110/-. Vol. IV: 13+811 pp. sh. 126/-. Vol. V: 14+635 pp. sh. 126/-.

Volume I: Variables 1-43 * The theory of limits. Continuous functions 43-93 * Exercises 94-100 * Derivatives and differentials of the first order 101-121 * Derivatives and differentials of higher orders 121-128 * Application of derivatives to the study of functions 128-158 * Functions of two variables 158-164 * Some geometrical applications of the differential calculus 164-201 * Exercises 201-212 * Basic problems of the integral calculus. The indefinite integral 213-237 * Properties of the definite integral 237-255 * Applications of definite integrals 255-291 * Further remarks on definite integrals 291-305 * Exercises 305-314 * Basic theory of infinite series 315-332 * Taylor's formula and its applications 332-359 * Further remarks on the theory of series 359-391 * Exercises 392-397 * Derivatives and differentials 398-419 * Taylor's formula. Maxima and minima of functions of several variables 419-440 * Exercises 440-443 * Complex numbers 444-480 * Basic properties and evaluation of the zeros of integral polynomials 480-506 * Integration of various functions 506-519 * Answers 520-538 * Index 539-543.

Volume II: Differential equations of the first order 1-40 * Differential equations of higher orders; systems of equations 40-76 * General theory; equations with constant coefficients 77-128 * Integration with the aid of power series 128-141 * Supplementary notes on the theory of differential equations 141-163 * Multiple integrals 164-205 * Line integrals 205-242 * Improper integrals and integrals that depend on a parameter 242-279 * Supplementary remarks on the theory of multiple integrals 279-297 * Basic vector algebra 298-310 * Field theory 310-348 * Curves on a plane and in space 349-367 * Elementary theory of surfaces 367-396 * Harmonic analysis 397-429 * Supplementary remarks on the theory of Fourier series 429-464 * Fourier integrals and multiple Fourier series 464-475 * The wave equation 476-536 * The equation of telegraphy 536-559 * The vibrations of rods 559-568 * Laplace's equation 568-603 * The equation of thermal conduction 603-624 * Index 625-630.

Volume III¹: Properties of determinants 1-30 * The solution of systems of equations 30-69 * Linear transformations and quadratic forms 70-187 * The basic theory of groups and linear representations of groups 188-321 * Index 323-324.

Volume III²: The basis of the theory of functions of a complex variable 1-119 * Conformal transformation and the two-dimensional field 120-222 * The application of the theory of residues, integral and fractional functions 223-312 * Functions

of several variables and matrix functions 313–356 * Linear differential equations 357–492 * Spherical functions 493–537 * Bessel functions 537–583 * The Hermitian and Laguerre polynomials 584–604 * Elliptic integrals and elliptic functions 604–669 * The conversion of matrices into the canonical form 670–696 * Index 697–700.

Volume IV: Integral equations 1–190 * The calculus of variations 191–301 * First order equations 302–382 * Equations of higher orders 382–480 * Systems of equations 480–511 * Boundary value problems for an ordinary differential equation 512–568 * Equations of the elliptic type 568–726 * Equations of the parabolic and hyperbolic type 726–806 * Index 807–811.

Volume V: The Stieltjes integral 1–80 * Set functions and the Lebesgue integral 81–208 * Set functions. Absolute continuity. Generalization of the integral 209–256 * Metric and normed spaces 257–366 * Hilbert space 367–631 * Index 633–635.

J. F. Traub: *Iterative methods for the solution of equations.* (Prentice–Hall series in automatic computation.) Prentice–Hall, Engelwood Cliffs, N. J. 1964. 18+310 pp. \$ 12.50.

General preliminaries 1–13 * General theorems on iteration functions 14–37 * The mathematics of difference relations 38–59 * Interpolatory iteration functions 60–77 * One-point iteration functions 78–104 * One-point iteration functions with memory 105–125 * Multiple roots 126–157 * Multipoint iteration functions 158–187 * Multipoint iteration functions: continuation 188–208 * Iteration functions which require no evaluation of derivatives 209–214 * Systems of equations 215–230 * A compilation of iteration functions 231–238 * Appendices: A. Interpolation 239–257 * B. On the j 'th derivative of the inverse function 258–259 * C. Significant figures and computational efficiency 260–264 * D. Acceleration of convergence 265–269 * E. Numerical examples 270–287 * F. Areas for future research 288–290 * Bibliography 291–303 * Index 304–310.

Wolfgang Walter: *Differential- und Integral-Ungleichungen.* (Springer Tracts in Natural Philosophy, 2. Ergebnisse der angewandten Mathematik.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964. 13+269 S. Ganzleinen DM 59.00.

Einleitung 1–11 * Volterra-Integralgleichungen 11–54 * Gewöhnliche Differentialgleichungen 54–108 * Volterra-Integralgleichungen in mehreren Veränderlichen. Hyperbolische Differentialgleichungen 108–158 * Parabolische Differentialgleichungen 158–250 * Literaturverzeichnis 251–264 * Namenverzeichnis 265–266 * Sachverzeichnis 267–269.

R. Zurmühl: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen.* Vierte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964. 12+452 S. Ganzleinen DM 36.00.

Der Matrizenkalkül 1–57 * Lineare Gleichungen 58–124 * Quadratische Formen nebst Anwendungen 125–145 * Die Eigenwertaufgabe 146–233 * Struktur der Matrix 234–278 * Numerisches Verfahren 279–356 * Anwendungen 357–446 * Namen- und Sachverzeichnis 447–452.

PRISOPGAVE FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier udskriver herved nedenstående prisopgave for elever i gymnasier og ved studenterkurser. Opgaven ønskes besvaret så fuldstændigt som muligt, og der lægges vægt på en omhyggelig og overskuelig fremstilling. For den bedste blandt de tilfredsstillende besvarelser udsættes en præmie på 250 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstra-præmier.

Besvareelserne indsendes senest 31. marts 1965 til lektor Henrik Meyer, Bakkedraget 15, Birkerød. På besvarelsen skal anføres navn, adresse, skole og klassetrin. Indsenderen skal samtidig med besvarelsen indsende en erklæring om, at opgaveløsningen er selvstændigt arbejde. (Benyttelse af litteratur er dog tilladt.)

Lad f betegne en funktion, der er defineret i et interval I , og lad K være dens grafiske billede i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem.

Funktionen f kaldes *konveks* i I , dersom det for vilkårlige punkter A og B på K gælder, at ethvert punkt på kurvestykket AB ligger under eller på korden AB .

1. Vis, at f er konveks, når og kun når det for vilkårlige tal x_1 og x_2 i I gælder, at

$$f(qx_1 + (1-q)x_2) \leq qf(x_1) + (1-q)f(x_2),$$

hvor q er et vilkårligt tal mellem 0 og 1.

2. Vis, at hvis f er en kontinuert funktion i intervallet I , og dersom det om enhver korde til det grafiske billede gælder, at der findes et punkt af det grafiske billede, som ligger på eller under denne korde, så er f konveks i I . (Vis eventuelt først, at hvis en funktion φ er kontinuert i et lukket begrænset interval, og hvis ligningen $\varphi(x)=0$ har løsninger i dette interval, så findes der en største og en mindste løsning.)

3. Vis, at hvis funktionen f er to gange differentiabel i intervallet I , og hvis $f''(x) \geq 0$ for alle x i I , så er f konveks i I .

4. Vis, at funktionerne f_1, f_2 og f_3 , som for positive tal x er bestemt ved

$$f_1(x) = -\ln x, \quad f_2(x) = x^r, \quad r \geq 1, \quad f_3(x) = x^{-p}, \quad p > 0,$$

alle er konvekse.

5. Vis, at hvis f er konveks i intervallet I , og hvis tallene $x_1, x_2, \dots, x_n$ tilhører I , så er

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

6. Vis gyldigheten af følgende uligheder, hvori $x_1, x_2, \dots, x_n$ betegner vilkårlige positive tal:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$\sqrt[p]{\frac{n}{\frac{1}{x_1^p} + \frac{1}{x_2^p} + \dots + \frac{1}{x_n^p}}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad p > 0,$$

$$\sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n}} \leq \sqrt[s]{\frac{x_1^s + x_2^s + \dots + x_n^s}{n}}, \quad 0 < r < s.$$

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

Oppgavekonkurranse for 1965, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Den beste samling besvarelser vil bli tildelt H.K.H. Kronprins Haralds premie på 200 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med. Oppgavene faller inn under reallinjens pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som mulig. Det er ikke nødvendig å ha svart på alle 6 oppgavene. Ingen kan vinne hovedpremien mer enn én gang.

En sender løsninger til lektor Ragnar J. Solvang, Ris skole, Vinderen, Oslo, innen 1. 8. 1965, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

Oppgavene er også publisert i *Den Høgre Skolen* for 1. febr. 1965.

Vi henstiller til matematikklærerne på reallinjen om å gjøre flinke elever oppmerksom på konkurransen.

1. Vis at

$$\sum_{r=0}^{n-1} r x^r = \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2}.$$

Finn et forenklet uttrykk for

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^n (n-r)x^r,$$

når $x \neq 1$ og n er et helt positivt tall. Finn spesielt $s_n(1)$.

Vis at $s_n(-1) \geq \frac{1}{2}$ for alle n . Finn et positivt helt tall N slik at

$$s_n(-1) - \frac{1}{2} < \frac{1}{1000}$$

for alle $n \geq N$.

Hvordan må x velges for at $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ skal eksistere?

2. Gitt funksjonene

$$f(x) = x^2 + 2ax + \frac{1}{16} \quad \text{og} \quad h(x) = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}.$$

Hva blir definisjonsområde og verdimengde for de to funksjoner?

Vis at $f(x)$ og $h(x)$ er omvendte (inverse) funksjoner når definisjonsområdet begrenses på passende måte. Bruk dette til å løse likningen

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}.$$

3. Bevis, uten bruk av tabeller, at

$$\text{a) } \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2 \quad (\pi^2 < 10); \quad \text{b) } \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2.$$

4. I den likebente trekanten ABC er $AC = BC$, og $\angle C = 20^\circ$. Punktene M og N ligger på henholdsvis AC og BC slik at $\angle ABM = 60^\circ$ og $\angle BAN = 50^\circ$. Vis at $\angle BMN = 30^\circ$.

5. Bestem summen

$$n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \dots + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n.$$

6. I likningen $ax^2 + bx + c = 0$ er koeffisientene og konstantleddet ulike (odde) tall. Bevis at likningens røtter ikke kan være rasjonale.

Forsøk å angi analoge resultater for en likning av vilkårlig grad n .

RESULTAT AV PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASSELEVER

(Oppgavene i NMT 11 (1963), s. 193–194.)

I konkurransen var det 8 deltakere. H.K.H. Kronprinsens premie kr. 200 for beste besvarelse ble tildelt Bernt Øksendal, Flekkefjord komm. h. allmennskole (realartium 1964).

PROBLEMTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Också i 1964 har Svenska Matematikersamfundet i samarbete med Svenska Dagbladet arrangerat en stort upplagd tävling med försöksomgång vid de olika läroverken följt av final i Stockholm. Med vederbörlig tillåtelse publicerar vi härmed uppgifterna i finalomgången.

1. Av en triangel är ytan T och en vinkel v givna. Bestäm triangelns sidor så att den sida som står mot v blir så kort som möjligt.

2. Summan av ett visst antal på varandra följande naturliga tal $n, n+1, \dots, n+m$, är 1000. Bestäm alla möjliga sådana talföljder.

3. Bestäm ett polynom med heltalskoefficienter som har

(a) talet $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ bland sina nollställen;

(b) både talet $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ och $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ bland sina nollställen.

4. n personer har sina bostäder $B_1, B_2, \dots, B_n$ så belägna att avståndet från B_i till B_j för alla i och j är högst 1 km. De söker en mötesplats M så att det längsta avståndet från B_i till M blir så kort som möjligt. Oberoende av läget på bostäderna B_i kan man uppskatta detta kortaste längsta avstånd L .

(a) Angiv den bästa uppskattningen av L om $n=3$.

(b) Giv uppskattningar av L (ej nödvändigtvis den bästa, men uppgiften bedöms med hänsyn till hur god uppskattningen är) för $n=4$.

5. En funktion

$$f(x) = 1 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx,$$

där $a_1, a_2, \dots, a_n$ är konstanter, är ≥ 0 för alla x . Vi söker uppskattningar av koefficienten a_1 .

(a) Om $n=2$, bestäm de största och minsta värden som a_1 kan ha för sådana funktioner $f(x)$.

(b) Behandla motsvarande uppgift för andra värden på n . Den tävlande lämnas här frihet att behandla uppgiften efter eget val, t. ex. att ge uppskattningar på a_1 för $n=3$ eller 4, att ge uppskattningar som gäller för alla n , att konstruera exempel, som visar värden som kan antas.

Första pris tilldelades Johannes Sjöstrand, Lundby samläroverk, Göteborg, andra pris Bengt Fornberg, Lundellska läroverk, Uppsala, och tredje pris tilldelades Ingemar Ragnarsson, Ängelholms läroverk.

SUMMARY IN ENGLISH

HANS GEORG KILLINGBERGTRO: *A general method for pointwise construction of conic sections.* (Norwegian.)

Given 3 points A, B, C on a conic section, and the tangents at A and B (fig. 1 p. 140), new points C_i on the curve can be found by using the well known projective generation of conic sections. The author first gives a simple proof of this construction, by projecting the conic section onto a circle. It is then shown, by means of examples, that this general method can be used effectively for pointwise construction of conic sections.

JERRY SEGERCRANTZ: *On a method to define trigonometric and hyperbolic functions within linear algebra.* (Swedish.)

We consider a 2-dimensional vector space E with real coefficients. Let $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$) be an inner product in E and $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a determinant function not identically equal to 0. A linear mapping $\mathbf{A}$ is defined by means of the identity $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. It is shown that every proper rotation $\mathbf{A}$ is a linear combination of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{I}$ (the identity mapping). The appropriate coefficients of $\mathbf{I}$ and $\mathbf{A}$ are called $\cos(\mathbf{A})$ and $\sin(\mathbf{A})$, respectively, if the inner product is definite, and $\cosh(\mathbf{A})$ and $\sinh(\mathbf{A})$, respectively, if the inner product is indefinite. The addition theorems for the trigonometric and hyperbolic functions are derived in a straightforward manner. By constructing a suitable mapping from the real axis to the group of proper rotations, we arrive at the usual trigonometric and hyperbolic functions of a real variable.

The analogous process may be applied in the case of a complex coefficient field.

OVE DITLEVSEN: *A simple chi-square test.* (English.)

Consider distributions of the continuous type with piece by piece continuous density functions. Corresponding to a sample $x_1, x_2, \dots, x_n$ taken from populations with distribution functions $F(x)^m$ or $1 - [1 - F(x)]^m$, the random variables

$$-2m \sum_{i=1}^n \ln F(x_i) \quad \text{or} \quad -2m \sum_{i=1}^n \ln [1 - F(x_i)]$$

are distributed like χ^2 with $2n$ degrees of freedom.

These random variables are proposed as test statistics. The power of the test is investigated on a family of exponential distributions and on the uniform distribution against the beta distribution.

INNHOLDSFORTEGNELSE

OVE DITLEVSEN: A simple chi-square test.....	157-167
JENS ERIK FENSTAD: Algoritmer i matematikken: En innføring i den rekursive matematikk og dens anvendelser, I-II.....	17-35, 99-111
GUNNAR AF HÄLLSTRÖM: Om värdefördelningslärans huvudsatser.....	53- 67
MATTS HÅSTAD: Om verksamheten inom Nordiska kommittén för moder- nisering av matematikundervisningen.....	8- 16
HANS GEORG KILLINGBERGTRØ: En generell metode til punktvis kon- struksjon av kjeglesnitt.....	137-145
KJELL KOLDEN: Om bruken av vektorer og matriser i den projektive plangeometri.....	89- 96
FINN METHLING: Afbildning af udsagn på buer af koncentriske cirkler..	97- 98
LENNART RÅDE: Den första siffran och Poincarés rouletteproblem.....	45- 52
JERRY SEGERCRANTZ: Om en metod att definiera trigonometriska och hyperboliska funktioner inom den lineära algebran.....	146-156
ERNST S. SELMER: Personnummerering i Norge: Litt anvendt tallteori og psykologi.....	36- 44
R. TAMBS LYCHE: Axel Thue 1863-1922.....	5- 7

Bokmeldinger

IRVING ADLER: Tænkende maskiner (STEN HENRIKSSON)	168
GUNNAR BERGENDAL — INGE BRINCK: Lineär algebra och geometri (POUL EINER HANSEN).....	112
D. BUSHAW: Elements of general topology (OLAV NJÅSTAD).....	169
BENT CHRISTIANSEN: Elementær kombinatorik og sandsynlighedsregning (THOMAS POLFELDT).....	170
H. S. M. COXETER: Unvergängliche Geometrie (FLEMMING P. PEDERSEN)	170
ÁKOS CSÁSZÁR: Foundations of general topology (OLAV NJÅSTAD).....	113
TORGIL EKMAN — CARL-ERIK FRÖBERG: Lärobok i ALGOL (PETER NAUR).....	172
WOLFGANG GILOI — RUDOLF LAUBER: Analogrechnen (FLEMMING SVENSSON).....	115
CARL HYLÉN-CAVALLIUS — LENNART SANDGREN: Matematisk analys II	68
A. YA. KHINTCHINE: Continued fractions (CLAS-OLOF SELENIUS).....	173
KLAUS KRICKEBERG: Wahrscheinlichkeitstheorie (ERIK N. TORGENSEN)	118
JAN ŁUKASIEWICZ: Elements of mathematical logic (JENS ERIK FENSTAD)	120
HARRY MALMHEDEN: Matematisk statistik (ARNLJOT HØYLAND).....	121
G. D. MOSTOW — J. H. SAMPSON — J. P. MEYER: Fundamental struc- tures of algebra (JENS ERIK FENSTAD).....	174

IVAN NIVEN: Diophantine approximations (CLAS-OLOF SELENIUS).....	68
STURE NYDELL: Hur man konstruerar ett nomogram (JOHS. ØSTVOLD).	69
LENNART RÅDE: Sannolikhetslära och statistik (ARNLJOT HØYLAND)...	176
NILS SJÖBERG: Funktionslära och analytisk geometri, I (BO KJELLBERG)	70
GÖSTA WAHDE: Ett-betygskurs i matematik, geometri och lineär algebra (N.-O. WALLIN).....	71
Mottatte böker.....	72, 122, 179
Oppgaver	
Eksamensoppgaver.....	131
Prisoppgaver for gymnasiaster	186
Kronikk.....	80
Summary in English.....	87, 136, 190