

OM BRUKEN AV VEKTORER OG MATRISER I DEN PROJEKTIVE PLANGEOMETRI

KJELL KOLDEN

Det følgende er intet forsøk på en samlet fremstilling, men en rekke eksempler på hvordan vektor- og matriseregning kan brukes til å beskrive projektivgeometriske egenskaper ved plane figurer.¹

1. Punkt, rett linje, insidens. I den plane projektivgeometri er det vanlig å identifisere et punkt P med mengden av proporsjonale talltripler hvor ikke alle tall er null. Man skriver således

$$P = \lambda(p_1, p_2, p_3),$$

hvor λ er en vilkårlig tallfaktor $\neq 0$.

På samme måte identifiseres en rett linje u med et lignende talltrippel. Man benytter i dette tilfelle ofte en hakeparentes for å antyde at talltrippel skal bety en rett linje:

$$u = \lambda[u_1, u_2, u_3].$$

For å unngå de to typer parenteser, vil vi benytte *rekke-* og *søylevektorer*. Vi skriver altså

$$P = \lambda \mathbf{p} = \lambda \{p_1, p_2, p_3\} \quad \text{og} \quad u = \lambda \mathbf{u}^* = \lambda \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

Asterisken betegner at rekkevektoren $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ er transponert til en søylevektor.

Som vi vet, er punkt og rett linje duale begreper i den projektive plangeometri. Ved denne betegnelsesmåte oppnår vi at det duale begrep dannes ved transponering av en vektor. Videre oppnår vi at punkter og rette linjer kan betegnes direkte ved vektorer. Vi kan altså tale om punktet $\mathbf{p}$ og den rette linje $\mathbf{u}^*$.

¹ Enkelte forbedringer av den opprinnelige fremstilling skyldes professor David Fog og professor Ernst S. Selmer. Jeg vil her gjerne takke dem så meget for dette og for den interesse de har vist.

At punktet p ligger på linjen u^* (*insidens* av punkt og rett linje) kan vi nå uttrykke ved matriseligningen

$$p \cdot u^* = 0.$$

Ser man bort fra vektorenes karakter av henholdsvis rekke- og søylevektor, kan matriseproduktet $p \cdot u^*$ også betraktes som et alminnelig skalarprodukt.

Vektorproduktet $a \times b$ av to rekkevektorer vil vi igjen oppfatte som en rekkevektor (altså et punkt). På samme vis oppfatter vi $a^* \times b^*$ som søylevektoren $(a \times b)^*$ (en rett linje).

Den rette linje u^* gjennom punktene a og b kan vi da fremstille slik:

$$u^* = (a \times b)^*.$$

At a og b ligger på u^* følger nemlig av $a \cdot (a \times b)^* = b \cdot (a \times b)^* = 0$. — Dualt er $p = a \times b$ skjæringspunktet mellom linjene a^* og b^* .

Tre punkter a, b, c vil ligge på rett linje dersom vi har

$$a \cdot (b \times c)^* = [abc] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Det projektive koordinatsystem. La oss betrakte fire vilkårlige punkter a_0, b_0, c_0 og d , av hvilke ikke tre ligger på rett linje. Da kan vektoren d uttrykkes som en lineærkombinasjon av a_0, b_0 og c_0 :

$$d = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0 + \lambda_3 c_0,$$

hvor λ_1, λ_2 og λ_3 alle er $\neq 0$. Benytter vi vektorene $a = \lambda_1 a_0, b = \lambda_2 b_0, c = \lambda_3 c_0$ til å representere de tre førstnevnte punkter, får vi

$$d = a + b + c.$$

Et vilkårlig punkt x i planet kan fremstilles ved

$$x = x_1 a + x_2 b + x_3 c.$$

Vi kan her oppfatte talltriplet (x_1, x_2, x_3) som *koordinater* for x i et koordinatsystem med »grunnpunktene» a, b og c . Punktet d får da koordinatene $(1, 1, 1)$ og kalles derfor »enhetspunktet». Det sees at man kan velge fire vilkårlige punkter i planet som grunnpunkter og enhetspunkt, bare ikke tre av dem ligger på rett linje.

3. Punktrekker, linjebunter, duale figurer. Dersom et punkt x skal ligge på rett linje med to punkter a og b , må vi som nevnt under 1 ha

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^* = [\mathbf{xab}] = 0.$$

Dette medfører at vektoren $\mathbf{x}$ må være en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$:

$$(1) \quad \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b}.$$

Vi kaller α_1 og α_2 de *binære* koordinater til punktet $\mathbf{x}$ med $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ som grunnpunkter. Dersom $\alpha_1 \neq 0$, dvs. $\mathbf{x} \neq \mathbf{b}$, kan punktet også uttrykkes ved

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b},$$

hvor $\alpha = \alpha_2/\alpha_1$ kalles parameteren til $\mathbf{x}$.

Transponerer vi (1), får vi

$$\mathbf{x}^* = \alpha_1 \mathbf{a}^* + \alpha_2 \mathbf{b}^*.$$

Dette representerer det duale begrep til en punktrekke, nemlig en linjebunt. $\mathbf{x}^*$ er en rett linje som går gjennom skjæringspunktet for de rette linjer $\mathbf{a}^*$ og $\mathbf{b}^*$.

Vi betrakter nå (fig. 1) skjæringspunktet $\mathbf{s}$ mellom en rett linje $\mathbf{c}^*$ og

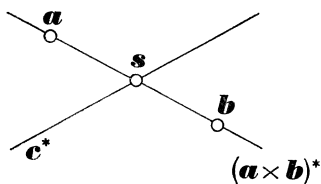


Fig. 1

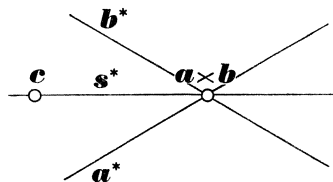


Fig. 2

den rette linje gjennom punktene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Vi får da for $\mathbf{s}$, idet vi bruker formelen for trevektorproduktet¹:

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^*) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}^*) \mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b}.$$

$\mathbf{s}$ får de binære koordinater $\alpha_1 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^*$, $\alpha_2 = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}^*$, når $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er grunnpunkter.

Transponerer vi relasjonen ovenfor, får vi analogt (fig. 2)

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{c}^* \times (\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^*) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}^*) \mathbf{a}^* - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}^*) \mathbf{b}^* = \alpha_1 \mathbf{a}^* + \alpha_2 \mathbf{b}^*.$$

Dette kan vi lese slik: $\mathbf{s}^*$ er forbindelseslinjen mellom punktet $\mathbf{c}$ og skjæringspunktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mellom linjene $\mathbf{a}^*$ og $\mathbf{b}^*$. Linjen $\mathbf{s}^*$ tilhører linjebunten $\alpha_1 \mathbf{a}^* + \alpha_2 \mathbf{b}^*$.

¹ De i denne formel inngående skalarprodukter skrives så de også kan oppfattes som matriseprodukter.

4. **Firkant, firside.** En firkant er bestemt ved sine fire hjørner a, b, c, d (fig. 3), av hvilke ikke tre ligger på rett linje. Vi kan da velge a, b, c som grunnpunkter og $d = a + b + c$ som enhetspunkt.

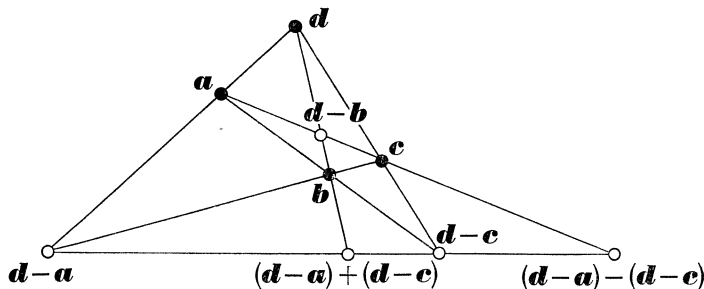


Fig. 3

Firkantens seks sider er gitt ved vektorproduktene

$$(a \times b)^*, (a \times c)^*, (a \times d)^*, (b \times c)^*, (b \times d)^*, (c \times d)^*.$$

Av relasjonen $d - a = b + c = x$ ser vi at x er et punkt som både ligger på $(a \times d)^*$ og $(b \times c)^*$, altså et skjæringspunkt mellom to motstående sider i firkanten. x kalles derfor et diagonalpunkt. De to andre diagonalpunkter er gitt ved

$$y = d - b = a + c, \quad z = d - c = a + b.$$

De tre forbindelseslinjer mellom to og to av diagonalpunktene betegnes som firkantens diagonaler.

Av relasjonen $d + b = (d - a) + (d - c)$ ser vi at punktet $(d - a) + (d - c)$ er skjæringspunktet mellom diagonalen $(d - a)^* \times (d - c)^*$ og den ene side som går gjennom det tredje diagonalpunkt $d - b$. På samme måte ser vi at den andre side gjennom dette diagonalpunkt må skjære diagonalen i punktet $(d - a) - (d - c)$. Sammen med de to diagonalpunkter gir dette punktgruppen

$$(2) \quad (d - a), (d - c); (d - a) + (d - c), (d - a) - (d - c).$$

Dersom $x, y; x + \alpha y, x + \beta y$ er fire punkter på en rett linje, sier vi at *dobbeltforholdet* mellom disse fire punkter er

$$(x, y; x + \alpha y, x + \beta y) = \alpha : \beta.$$

Dersom dobbeltforholdet er lik -1 , sier vi at punktparene x, y og $x + \alpha y, x + \beta y$ er *harmonisk konjugerte*. Av (2) følger derfor setningen: *På enhver diagonal i en firkant vil de to sideskjæringspunkter og de to diagonalpunkter være harmonisk konjugerte.*

Transponerer vi nå alle uttrykk og relasjoner ovenfor, fremkommer de tilsvarende størrelser ved den duale figur, firsiden (fig. 4).

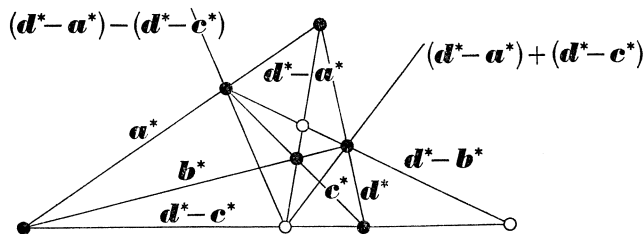


Fig. 4

Vi får:

Sider: a^* , b^* , c^* , d^* .

Hjørner: $a \times b$, $a \times c$, $a \times d$, $b \times c$, $b \times d$, $c \times d$.

Diagonaler: $d^* - a^*$, $d^* - b^*$, $d^* - c^*$.

Diagonalpunkter: $(d - a) \times (d - b)$, $(d - a) \times (d - c)$, $(d - b) \times (d - c)$.

Harmoniske linjepar: $(d^* - a^*)$, $(d^* - c^*)$; $(d^* - a^*) + (d^* - c^*)$, $(d^* - a^*) - (d^* - c^*)$ etc.

5. Korrelasjoner, polariteter. Dersom vi transponerer vektoren til et punkt x , får vi en rett linje x^* . Dette kalles en korrelasjon, det er en tilordning av en rett linje til ethvert punkt x . I dette tilfelle blir den tilordnede rette linje ganske spesiell, idet linjens linjekoordinater blir lik punktets punktkoordinater. Vi skal nå oppstille den generelle korrelasjon. La A være en ikke-singulær 3×3 matrise og x et vilkårlig punkt. La transformasjonen T føre punktet x over i linjen Ax^* :

$$T: x \rightarrow Ax^*.$$

Dette kan også uttrykkes slik: Et punkt x og dets tilsvarende linje u^* er knyttet sammen ved ligningen

$$u^* = Ax^*.$$

Omvendt kan vi uttrykke x^* ved u^* , idet $|A| \neq 0$:

$$x^* = A^{-1}u^*.$$

En rett linje k^* med ligningen $k \cdot x^* = 0$ i punktkoordinater føres da over i en linjebunt med ligningen $k \cdot A^{-1}u^* = 0$ i linjekoordinater, altså i punktet kA^{-1} . Vi har derfor (med litt endrede betegnelser):

$$T: u^* \rightarrow uA^{-1}.$$

Vi vil bruke betegnelsen » A -linjen til punktet x » for den rette linje Ax^* som tilordnes punktet x ved transformasjonen T . Da gjelder følgende setning:

Dersom A -linjen til et punkt x går gjennom et punkt y , så vil A^ -linjen til y gå gjennom x .*

Bevis: Da y ligger på Ax^* , har vi $y \cdot Ax^* = 0$. Ved transponering fåes $x \cdot A^*y^* = 0$, som viser at x ligger på A^*y^* , hv. sk. bev.

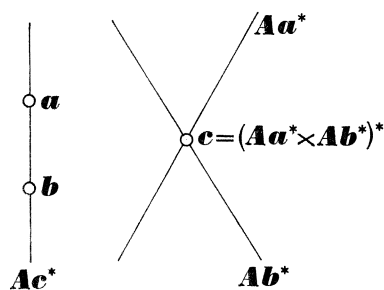


Fig. 5

Vi betrakter nå (fig. 5) to punkter a og b og deres A -linjer Aa^* og Ab^* . Skjæringspunktet c mellom de to A -linjer blir da

$$c = (Aa^* \times Ab^*)^*.$$

Da må A^* -linjen til c gå gjennom a og b slik at vi kan skrive

$$A^*(Aa^* \times Ab^*) = \lambda(a^* \times b^*),$$

hvor λ er en proporsjonalitetsfaktor. For å finne denne utregner

vi $Aa^* \times Ab^*$. Resultatet viser seg å kunne skrives som

$$Aa^* \times Ab^* = K(a^* \times b^*),$$

hvor K er den matrise, hvis elementer er komplementar til elementene i A , altså $K = |A|(A^*)^{-1}$. Herav følger at $\lambda = |A|$. Erstatte vi dernest i den betraktete relasjon a^* og b^* med $A^{-1}a^*$ og $A^{-1}b^*$, blir den

$$A^*(a^* \times b^*) = |A|(A^{-1}a^* \times A^{-1}b^*).$$

Dette gir en regel for å multiplisere et vektorprodukt med en ikke-singulær matrise.

Dersom A er en *symmetrisk* matrise (ikke-singulær), får vi korrelasjoner av særlig enkel karakter, de såkalte *polariteter*. I dette tilfelle betegner vi linjen Ax^* som A -polaren til punktet x . For slike polarer gjelder da setningen: *Dersom y ligger på A -polaren til x , så ligger x på A -polaren til y .* Dette følger av setningen om A -linjer, idet vi har $A = A^*$.

6. Kjeglesnitt. Ved hjelp av polariteter kan vi oppstille følgende enkle definisjon: Et kjeglesnitt er mengden av de punkter ved en polaritet som ligger på sine polarer.

Er polariteten bestemt ved den ikke-singulære, symmetriske matrise A , får det tilsvarende kjeglesnitt K_A ligningen

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x}^* = 0.$$

Skriver vi kjeglesnittsligningen som $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}^* = 0$ og innfører $\mathbf{u}^* = \mathbf{A} \mathbf{x}^*$, $\mathbf{u} = \mathbf{x} \mathbf{A}$, antar den formen

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}^* = 0.$$

Dette er kjeglesnittets ligning i linjekoordinater, idet $\mathbf{u}^*$ har linjekoordinatene til $\mathbf{A}$ -polarene $\mathbf{A} \mathbf{x}^*$.

Skriver vi kjeglesnittsligningen som $\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{x}^* = 0$, hvor $\mathbf{B}$ er en ikke-singulær, symmetrisk matrise, og innfører $\mathbf{y}^* = \mathbf{B} \mathbf{x}^*$, $\mathbf{y} = \mathbf{x} \mathbf{B}$, får vi

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y}^* = 0.$$

Dette er ligningen i punktkoordinater¹ for et nytt kjeglesnitt $K_{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}}$. Vi ser at $K_{\mathbf{A}}$ avbildes i $K_{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}}$ ved den lineære transformasjon $T: \mathbf{y} = \mathbf{x} \mathbf{B}$.

Dersom matrisen $\mathbf{A}$ er singulær vil ligningen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x}^* = 0$ likevel representere en punktsamling i planet. Vi sier at $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x}^* = 0$ i dette tilfelle er ligningen for et degenerert kjeglesnitt. Da $\mathbf{A}$ er singulær, vil et degenerert kjeglesnitt ikke ha noen ligning i linjekoordinater, idet matrisen $\mathbf{A}^{-1}$ ikke eksisterer. Det er velkjent (og lett å vise) at et degenerert kjeglesnitt består av to rette linjer som eventuelt kan falle sammen.

Vi kan vise at polaren $\mathbf{A} \mathbf{x}^*$ bare har punktet $\mathbf{x}$ felles med et ikke-degenerert kjeglesnitt. Sett at punktet $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ på kjeglesnittet også lå på polaren $\mathbf{A} \mathbf{x}^*$. Da ville $\mathbf{x}$ også ligge på polaren $\mathbf{A} \mathbf{y}^*$ slik at begge polarer $\mathbf{A} \mathbf{x}^*$ og $\mathbf{A} \mathbf{y}^*$ ville gå gjennom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$. Dette ville medføre $\mathbf{A} \mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{A} \mathbf{y}^*$ eller $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y})^* = 0$, hvilket er umulig når $|\mathbf{A}| \neq 0$. Polarene $\mathbf{A} \mathbf{x}^*$ er derfor tangenter til kjeglesnittet $K_{\mathbf{A}}$.

7. Kjeglesnittsbunter. Gjennom fire punkter $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, hvorav ikke tre ligger på rett linje, kan der legges uendelig mange kjeglesnitt. Kjeglesnittets symmetriske 3×3 matrise $\mathbf{C}$ er nemlig bestemt ved de 6 elementer på og over diagonalen. Skål $\mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \mathbf{x}^* = 0$ for $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$, gir dette 4 lineære homogene ligninger til bestemmelse av elementene i $\mathbf{C}$. Den alminnelige løsning vil derfor avhenge av to lineære homogene parametre, f. eks. $\mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B}$, hvor $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er matrisene for to av kjeglesnittene i bunten. For $\mathbf{C} \neq \mathbf{B}$ kan vi også sette

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B},$$

hvor λ er en inhomogen parameter.

¹ Ligningen kan også opfattes som ligningen i linjekoordinater for kjeglesnittet $K_{\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}}$ ved polariteten $\mathbf{y}^* = \mathbf{B} \mathbf{x}^*$.

La v^* være en vilkårlig rett linje. Vi vil bestemme de kjeglesnitt i bunten $A + \lambda B$ som har v^* til tangent. Vi skriver da opp ligningen i linjekoordinater for et vilkårlig kjeglesnitt i bunten. Den blir

$$u \cdot (A + \lambda B)^{-1} u^* = 0.$$

Skal v^* være tangent til dette kjeglesnitt, må vi ha

$$(3) \quad v \cdot (A + \lambda B)^{-1} v^* = 0.$$

Dette blir en 2. gradsligning i λ . Matriseelementene i $(A + \lambda B)^{-1}$ blir nemlig proporsjonale med komplementene til matriseelementene i $A + \lambda B$, og da $A + \lambda B$ er en 3×3 matrise, blir disse komplementene 2. grads-polynomer i λ . Ligningen (3) har derfor vanligvis to røtter λ_1, λ_2 . Hertil svarer to kjeglesnitt K_P, K_Q som har v^* til tangent. Matrisene P og Q er da gitt ved $P = A + \lambda_1 B$ og $Q = A + \lambda_2 B$.

Vi kaller kjeglesnittenes berøringspunkter med v^* for p og q . Punktene p og q ligger henholdsvis på K_P og K_Q , og de ligger begge på linjen v^* som er identisk med linjene Pp^* og Qq^* . Dette kan vi uttrykke ved

$$(4) \quad pPp^* = 0, qQq^* = 0, qPp^* = 0, pQq^* = 0.$$

La C være matrisen for et vilkårlig kjeglesnitt i bunten. Da kan C også uttrykkes lineært ved matrisene P og Q , slik at vi kan skrive

$$(5) \quad C = \alpha P + \beta Q,$$

hvor α og β er passende konstanter.

La x være skjæringspunkt mellom kjeglesnittet K_C og v^* . Da har vi

$$x \cdot Cx^* = 0.$$

Skriver vi $x = p + tq$, idet p og q tas som grunnpunkter på v^* , og benytter vi (5), får vi

$$(p + tq)(\alpha P + \beta Q)(p^* + tq^*) = 0.$$

Utføres her alle multiplikasjoner av matriser og vektorer, vil en rekke ledd forsvinne på grunn av relasjonene (4) og de tilsvarende transponerte relasjoner. Ligningen forenkles derved til

$$\beta pQp^* + \alpha t^2 qPq^* = 0.$$

Herav fåes

$$t = \pm \sqrt{-\beta pQp^* / \alpha qPq^*} = \pm t_0.$$

Dette viser at K_C skjærer v^* i to punkter $p + t_0 q, p - t_0 q$. Men

$$(p, q; p + t_0 q, p - t_0 q) = -1.$$

Altså vil de to skjæringspunkter være harmonisk forbundne med de to berøringspunkter p og q . Skjæringspunktene utgjør følgelig et punktpar i en involusjon som har p og q til dobbeltpunkter.

AFBILDNING AF UDSAGN PÅ BUER AF KONCENTRISKE CIRKLER

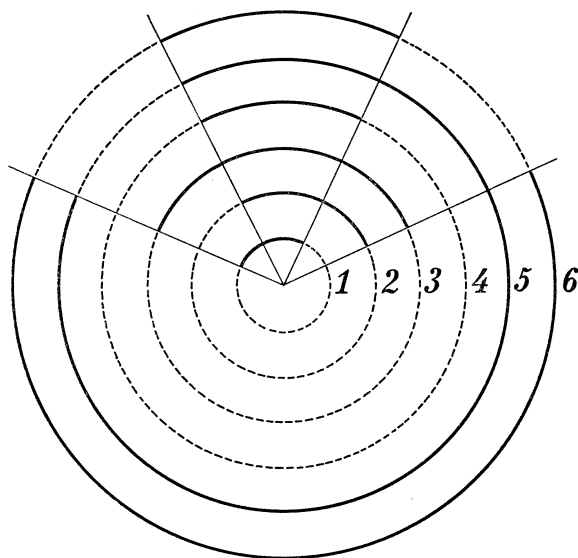
FINN METHLING

Som Alf Nyman¹ har vist, har rumanalogierne spillet en væsentlig rolle for udformningen af logikkens begrebsverden og de forhold, der gør sig gældende her. Selv de ivrigste talsmænd for den rent symbolsk-algebraiske fremstillingsmåde har ofte støttet sig til de fundamentale geometriske anskuelser, når det drejer sig om forklaringen af de elementære kompositionsformers definitioner. Er symbolerne først skabt og de gensidige forhold mellem dem udredet, løsriver det symbolske system sig fra sin elementært anskuelige basis og bliver et nyttigt apparat, der har vist sig at være logikken en uvurderlig tjener, fordi den befrier den fra dagligtalens usikre begrænsninger. Det følgende må derfor ikke opfattes som en apologi for en tilbagevenden til mere primitive udtryksmåder. Det må kun ses som et nyt eksempel på en geometrisk fortolkning af de elementære former.

De mest kendte geometriske afbildninger (Euler, Bolzano, Venn og Maass) anvender todimensionale områder til fremstilling af de givne forhold. Det skulle fremgå af den omstående figur, hvorledes den matematiske logiks udsagn samt en vigtig del af dens elementære definitioner og tautologier vil kunne afbildes på buer af koncentriske cirkler. Begrænsningen ligger i, at der kun kan indgå 1 eller 2 udsagn i afbildningen. Hvis der indgår 3 eller flere udsagn, vil det på denne måde ikke kunne lade sig gøre at fremstille det mulige antal kombinationer af sandhedsværdier.

Hvert udsagn med den dertil svarende benægtelse er afbildet på hver sin cirkel. De to primære udsagns størrelser og indbyrdes beliggenhed er vilkårligt valgt og lader sig bestemme ved tre vinkler. De binære former indretter sig derefter. De enkelte logiske universers størrelser (diametre) har ingen betydning. De koncentriske cirkler bør betragtes som én cirkel, ét fælles univers, man af overskuelighedsgrunde har spaltet i flere.

¹ ALF NYMAN: *Rumanalogierna inom logiken*. Lunds Univ. Årsskr. N. F., Avd. 1, Bd. 22, Nr. 4.



	<u>Udsagn:</u>	<u>Benægtelser:</u>
1) <i>Udsagn</i>	A	$\sim A$
2) <i>Udsagn</i>	B	$\sim B$
3) <i>Incl. alternation</i> (»eller – eller begge«)	$A \vee B$	$\sim (A \vee B)$
4) <i>Konjunktion</i> (»og«)	$A \cdot B$	$\sim (A \cdot B)$
5) <i>Konditional</i> (»hvis – så«)	$A \supset B$	$\sim (A \supset B)$
6) <i>Bikonditional</i> (»hvis og kun hvis«)	$A \equiv B$	$\sim (A \equiv B)$

$\sim (A \vee B)$ er ækvivalent med $A \downarrow B$, som er *forbundet benægtelse*, hvilket svarer til »hverken – eller«.

$\sim (A \cdot B)$ er ækvivalent med $A \mid B$, som er *alternativ benægtelse*, hvilket svarer til »eller – eller ingen, men ikke begge«.

$A \supset B$ er ækvivalent med $(\sim A \vee B)$ eller $\sim (A \cdot (\sim B))$.

$A \equiv B$ er ækvivalent med $(A \supset B) \cdot (B \supset A)$.

$\sim (A \equiv B)$ er ækvivalent med *exclusiv alternation* (»eller – men ikke begge«). Ved *alternation* forstår man sædvanligvis *inclusiv alternation* som 3).

ALGORITMER I MATEMATIKKEN: EN INNFØRING I DEN REKURSIVE MATEMATIKK OG DENS ANVENDELSER, II¹

JENS ERIK FENSTAD

Formaliserte teorier og Gödels teorem. En *aksiomatisk* teori T vil være bygget opp over visse grunnbegreper. En påstand Φ innen T vil være et utsagn formulert ved hjelp av disse grunnbegreper, samt variable og logiske symboler. I »spissen« for teorien vil det stå en rekke påstander som kalles aksiomer. Et *bevis* innenfor T av et utsagn Φ skal være en endelig sekvens av påstander $\Phi_1, \dots, \Phi_k$, slik at Φ er det samme som Φ_k , og for hver $i = 1, 2, \dots, k$ er Φ_i enten et av aksiomene i T eller følger fra forangående påstander i bevisfølgen ved bruk av de spesifiserte slutningsregler for T .

For en aksiomatisk teori T vil en kreve at en effektivt kan avgjøre om en gitt sekvens $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ er et bevis for en gitt påstand Φ . At Φ er *bevisbar* innen T vil si at det fins et bevis for Φ innen T . Denne relasjon er vanligvis ikke effektivt avgjørbar, idet det her forekommer en eksistenskvantor i definisjonen. Men vet vi om en Φ at den er bevisbar, så kan vi finne et bevis for dette utsagn ved suksessivt å skrive opp bevisfølgene innen T , og så avgjøre, oppskrevet en bevisfølge, om den er et bevis for Φ . Vi har her forutsatt at det er høyst et *tellbart* uendelig antall bevisfølger innen T , en antagelse som vanligvis vil være oppfylt. Spesielt gjelder dette om man tillater kun et tellbart antall av variable, logiske symboler og grunnbegreper innen T .

Vi har forutsatt at T er *konsistent*, dvs. at ikke alle utsagn formulerbare innen T er bevisbare ut fra de gitte aksiomer og slutningsregler. En ekvivalent formulering av konsistenskravet er at ikke både en påstand og dens negasjon skal være bevisbare. Et annet viktig begrep er *kompletthet* (eller fullstendighet). T kalles komplett hvis for enhver Φ enten Φ eller dens negasjon er bevisbar. Vi skal vise at *en konsistent teori som er komplett, er avgjørbar* (dvs. at det for en slik teori fins en effektiv

¹ Første del sto i NMT, denne årgang, s. 17–35.

metode til å avgjøre om en gitt påstand Φ er bevisbar). Påvisningen er uformell idet effektivitetsbegrepet er intuitivt. Avgjørbarhetsmetoden er som følger: For en vilkårlig Φ er den eller dens negasjon bevisbar innen T . Vi antar at bevisene kan effektivt skrives opp, ett etter ett. Da bevisrelasjonen er effektiv innen T , vil vi effektivt kunne finne et bevis $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ slik at enten er Φ_k lik Φ eller så er Φ_k lik negasjonen av Φ . Og av konsistensen av T følger at bevisbarheten av negasjonen av Φ vil medføre at Φ selv ikke er bevisbar. Således har vi for komplette, konsistente teorier en metode til effektivt å avgjøre om et gitt utsagn er bevisbart eller ikke.

Diskusjonen er foreløpig heuristisk. Ett av formålene med denne paragraf er å gjøre den presis, samt å gi interessante eksempler på teorier som hverken er komplette eller avgjørbare. Vårt eksempel skal være den elementære aritmetikk, og resultatet skal bli Gödels teorem. Men før vi går over til en nøyere beskrivelse av deduktive teorier, kan det kanskje være på sin plass å gi noen antydninger om hvordan det intuitive effektivitetsbegrep på dette området blir omformet til begreper hentet fra den rekursive matematikkens teori. Klassen av alle påstander er tellbar, og det fins da en en-entydig avbildning av den på N . Benytter vi Church's tese, går det frem av de innledende betraktninger at den tallmengde som tilsvarende de bevisbare påstander, må være rekursivt generert. Kan vi finne en teori hvis bevisbare påstander (under en en-entydig avbildning på N) svarer til en rekursivt generert mengde som ikke er rekursiv, vil vi ha et eksempel på en teori som er uavgjørbar og dermed heller ikke komplett.

Byggestenene eller alfabetet for en formalisert teori vil gjerne være et tellbart uendelig antall symboler som deles inn i to klasser, variable og konstanter. Konstantene deles videre inn i to grupper, de logiske og de ikke-logiske. Som et eksempel vil vi beskrive oppbygningen av den elementære aritmetikk som en formal teori. Vi kaller denne teori for P .

Variablene er en tellbar uendelig klasse: $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$. De *logiske konstanter* består dels av de utsagnslogiske symboler, dels av kvantorene. Da man må skille mellom de logiske tegn brukt uformelt i den ikke-formaliserte aritmetikk (slik som i tidligere paragrafer av denne artikkel) og de tilsvarende tegn innen den formaliserte versjon, velger vi her for den aksiomatiske teori følgende symbolikk:

$\wedge$	konjunksjon
$\vee$	disjunksjon
$\sim$	negasjon
$\rightarrow$	implikasjon

$\leftrightarrow$	ekvivalens
$\wedge$	all-kvantor
$\vee$	eksistenskvantor.

De *ikke-logiske konstanter* utgjøres av predikatsymboler, operasjonstegn og individkonstanter. For den aksiomatiske aritmetikk velges:

$\equiv$	likhetstegn
A	addisjon
M	multiplikasjon
S	etterfølgeroperasjon
0	»null«.

I tillegg til disse symboler vil man bruke parentestegn og kommategn til konstruksjon av formler innen teorien. Enhver formel innen P er en endelig sekvens i disse symboler, men ikke enhver symbolsekvens er en »meningsfylt« formel innen P . Det neste trinn, etter angivelsen av alfabet for P , er å beskrive klassen av tillatte tegnkombinasjoner innen teorien. Først defineres begrepet *term*:

1° 0 er en term. 2° Enhver variabel er en term. 3° Hvis s og t er termer, så er $A(s, t)$, $M(s, t)$ og $S(t)$ termer.

Her er s og t symboler som benyttes til å benevne termer, de er ikke symboler innen den formaliserte teori P , men symboler vi anvender til å beskrive P . Det skal være underforstått i en induktiv definisjon av denne art at termer, det definerte begrep, kun kan dannes ved de regler som eksplisitt er formulert, dvs. at klassen av termer er den minste klasse av symbolsekvenser som inneholder 0 og variablene, og som er lukket under operasjonene beskrevet i 3°.

Den neste tegnkategori er *formler*:

1° Hvis s og t er termer, så er $s \equiv t$ en formel. 2° Hvis Φ og Ψ er formler, så er $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\sim \Phi$, $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Phi \leftrightarrow \Psi$ formler. 3° Hvis Φ er en formel og v en variabel, så er $\wedge v \Phi$ og $\vee v \Phi$ formler.

Her forutsettes, med forakt for detaljer, at leseren vet å sette parenteser på en slik måte at man får en entydig lesning av de fremkomne formler. En variabel kan enten forekomme fri eller bundet av en kvantor i en formel. Et eksempel for å indikere forskjellen:

$$\wedge v_1 \sim (A(v_1, S(v_2)) \equiv 0).$$

Her er begge forekomster av v_1 bundet av all-kvantoren, mens v_2 opptrer fri.

Det deduktive apparat vil utgjøres av *aksiomer* og *slutningsregler*. For alle teorier T av den type som vi her beskriver gjennom eksemplet P ,

vil man ha et felles system av logiske aksiomer og slutningsregler. Kun de ikke-logiske aksiomer varierer fra teori til teori (samt selvsagt også de ikke-logiske konstanter). De logiske aksiomer deles gjerne i to grupper, aksiomer for utsagnslogikken og kvantorlogiske aksiomer. De utsagnslogiske aksiomer er valgt slik at en utsagnslogisk formel er bevisbar, hvis og bare hvis den er en tautologi ifølge den vanlige sannhetsverdimetode. Det er muligheter for forskjellige valg, og eksempler på denne type aksiomer kan være formler som

$$\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi), \sim \sim \Phi \rightarrow \Phi, (\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Phi.$$

Et eksempel på et kvantorlogisk aksiom kan være

$$\wedge v \Phi(v) \rightarrow \Phi(t),$$

der $\Phi(t)$ fremkommer fra $\Phi(v)$ ved å substituere t for alle fri forekomster av v i $\Phi(v)$ (her må t være pålagt visse restriksjoner).

Av logiske slutningsregler kan nevnes *modus ponens*: Fra Φ og $\Phi \rightarrow \Psi$ å slutte Ψ , og den kvantorlogiske slutningsregel: Fra $\Psi \rightarrow \Phi(v)$ å slutte $\Psi \rightarrow \wedge v \Phi(v)$, der Ψ er en formel som ikke inneholder v fri. Man har gjerne også en substitusjonsregel som tillater, under visse restriksjoner, å substituere termer for fri variable i en formel.

De ikke-logiske aksiomer vil for P være de følgende formler:

1. $v_1 \equiv v_2 \rightarrow S(v_1) \equiv S(v_2)$.
2. $v_1 \equiv v_2 \rightarrow (v_1 \equiv v_3 \rightarrow v_2 \equiv v_3)$.
3. $\sim S(v_1) \equiv 0$.
4. $S(v_1) \equiv S(v_2) \rightarrow v_1 \equiv v_2$.
5. $\Phi(0) \wedge \wedge v (\Phi(v) \rightarrow \Phi(S(v))) \rightarrow \Phi(v)$.
6. $A(v_1, 0) \equiv v_1$.
7. $A(v_1, S(v_2)) \equiv S(A(v_1, v_2))$.
8. $M(v_1, 0) \equiv 0$.
9. $M(v_1, S(v_2)) \equiv A(M(v_1, v_2), v_1)$.

Her er 5 et aksiomskjema, idet man for Φ kan innsette en vilkårlig formel fra P . Man legger også merke til at de to første Peanoaksiomer er forsvunnet; de gjenfinnes i definisjonen av termer.

Generelt defineres et bevis innen en formal teori T som en endelig sekvens av formler $\Phi_1, \dots, \Phi_k$, slik at for hver i er Φ_i enten et aksiom eller følger fra formler $\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_p}$ ($i_1, \dots, i_p < i$) ved en av de spesifiserte slutningsregler for T . Et eksempel på et bevis innen P er følgende formelsekvens:

- (i) $v_1 \equiv v_2 \rightarrow (v_1 \equiv v_3 \rightarrow v_2 \equiv v_3)$
- (ii) $A(v_1, \mathbf{0}) \equiv v_1 \rightarrow (A(v_1, \mathbf{0}) \equiv v_1 \rightarrow v_1 \equiv v_1)$
- (iii) $A(v_1, \mathbf{0}) \equiv v_1$
- (iv) $A(v_1, \mathbf{0}) \equiv v_1 \rightarrow v_1 \equiv v_1$
- (v) $v_1 \equiv v_1$.

Her er (i) et aksiom, og (ii) er fremkommet fra (i) ved substitusjon. (iii) er igjen et aksiom, og (iv) følger fra (iii) og (ii) ved modus ponens; lignende for (v). Vi ser at den refleksive lov for likhet er bevisbar innen $\mathbf{P}$.

En formel Φ innen en teori $\mathbf{T}$ kalles bevisbar hvis det innen $\mathbf{T}$ fins et bevis $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ slik at Φ er lik Φ_k . At Φ er bevisbar skrives $\vdash_{\mathbf{T}} \Phi$. For $\mathbf{P}$ skrives kortere $\vdash \Phi$.

La Δ være en variabel for endelige sekvenser av formler. Man kan da definere et (meta-teoretisk) predikat, $\text{Bev}_{\mathbf{T}}(\Phi, \Delta)$, som betyr at Δ er en bevis-sekvens for Φ innen $\mathbf{T}$. Predikatet $\text{Bev}_{\mathbf{T}}(\Phi, \Delta)$ er effektivt avgjørbart ut fra definisjonen på at Δ er et bevis for Φ . Videre er klassen av formler tellbar; det fins derfor en avbildning $\Phi \rightarrow \Phi^*$ av klassen av formler inn i N . En slik tilordning kalles gjerne en *Gödelnummerering*. Vi forutsetter at tilordningen er en-entydig effektiv, dvs. gitt Φ så kan vi effektivt finne Φ^* , og gitt en $n \in N$ så kan vi effektivt avgjøre om $n = \Phi^*$ for en formel Φ , i hvilket tilfelle Φ skal effektivt kunne skrives opp.

Et vanlig forekommende eksempel på en Gödelnummerering er den følgende tilordning for $\mathbf{P}$: Vi nummererer de gitte grunnsymboler i den rekkefølge de er gitt i denne paragraf, slik at $\wedge, \vee, \sim, \dots$ blir det første, andre, tredje symbol osv.; $\equiv, A, \dots$ blir det åttende, niende symbol osv.; $(,)$ og $,$ blir det trettende, fjortende og femtende symbol; $v_1, v_2, \dots$ blir det sekstende, syttende symbol osv. Til det n 'te symbol tilordner vi det odde tall $2n+1$. La formelen Φ være symbolrekken $\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_k$; Φ^* defineres da ved

$$\Phi^* = p_0^{\gamma_0^*} p_1^{\gamma_1^*} \dots p_k^{\gamma_k^*},$$

hvor γ_i^* er tallet tilordnet symbolet γ_i . Hvis Φ er formelen $\sim S(v_1) \equiv \mathbf{0}$ så blir $\Phi^* = 2^7 \cdot 3^{23} \cdot 5^{27} \cdot 7^{33} \cdot 11^{29} \cdot 13^{17} \cdot 17^{25}$. Det er lett å innse at tilordningen $\Phi \rightarrow \Phi^*$ oppfyller kravet til en Gödelnummerering; det følger av den entydige primtaloppspaltningen av naturlige tall.

Et fundamentalt resultat for $\mathbf{P}$ er følgende sats:

Det fins et rekursivt predikat $B_{\mathbf{P}}(x, y)$, slik at $\vdash \Phi$ hvis og bare hvis $\exists y B_{\mathbf{P}}(\Phi^, y)$.*

Beviset for denne påstand skal vi ikke gå nærmere inn på her. Detaljene fins utskrevet i Kleenes lærebok (hvor riktignok den valgte Gödelnummerering er noe anderledes).

Derimot reformulerer vi resultatet ovenfor som en definisjon. La $\mathbf{T}$ være en aksiomatisk teori av typen beskrevet i denne paragraf. Vi sier at $\mathbf{T}$ er *rekursivt aksiomatiserbar* hvis det fins en Gödelnummerering $\Phi \rightarrow \Phi^*$ av formlene i $\mathbf{T}$ og et rekursivt predikat $B_{\mathbf{T}}(x, y)$, slik at $\vdash_{\mathbf{T}} \Phi$ hvis og bare hvis $\exists y B_{\mathbf{T}}(\Phi^*, y)$.

I $\mathbf{P}$ kan vi uttrykke de naturlige tall gjennom termene $0, S(0), S(S(0))$ osv. En vilkårlig rekursivt aksiomatiserbar teori $\mathbf{T}$ kalles *aritmetisk* hvis det fins distinkte termer til å uttrykke de naturlige tall; disse termer blir symbolisert ved $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Videre krever vi at for enhver formel $\Phi(v)$ skal avbildningen $n \rightarrow \Phi(n)^*$ være rekursiv; dette viser man lett gjelder for $\mathbf{P}$.

La $\mathbf{T}$ være en aritmetisk teori og $R(x_1, \dots, x_k)$ et tallteoretisk predikat. Vi sier at R er *definerbar* innen $\mathbf{T}$ hvis det fins en formel $\Phi(v_1, \dots, v_k)$ innen $\mathbf{T}$ slik at

$$\begin{aligned} R(n_1, \dots, n_k) &\Rightarrow \vdash_{\mathbf{T}} \Phi(n_1, \dots, n_k) \\ \neg R(n_1, \dots, n_k) &\Rightarrow \vdash_{\mathbf{T}} \sim \Phi(n_1, \dots, n_k). \end{aligned}$$

$\mathbf{T}$ kalles en *aritmetisk adekvat* teori hvis $\mathbf{T}$ er en aritmetisk teori i hvilken alle rekursive predikater er definerbare. Et viktig resultat er at $\mathbf{P}$ er en aritmetisk adekvat teori.

Vi kan nå vise følgende teorem som er en generalisert versjon av Gödels sats for Peanoaritmetikken.

La D_0 og D_1 være to disjunkte, rekursivt genererte mengder som er rekursivt inseparable. Anta at $\mathbf{T}$ er en konsistent aritmetisk teori og at $\Phi_0(v)$ er et predikat i $\mathbf{T}$ slik at

$$(1) \quad n \in D_0 \Rightarrow \vdash_{\mathbf{T}} \Phi_0(n)$$

$$(2) \quad n \in D_1 \Rightarrow \vdash_{\mathbf{T}} \sim \Phi_0(n).$$

Da er $\mathbf{T}$ hverken komplett eller avgjørbar.

Beviset er meget enkelt ut fra forutsetningene. La $B_{\mathbf{T}}(x, y)$ være det rekursive predikat slik at

$$\vdash_{\mathbf{T}} \Phi \Leftrightarrow \exists y B_{\mathbf{T}}(\Phi^*, y).$$

Etter forutsetningen for en Gödelnummerering vil funksjonene $f(n) = (\Phi_0(n))^*$ og $g(n) = (\sim \Phi_0(n))^*$ være rekursive. Definer tallteoretiske predikater B_1 og B_2 ved $B_1(n, y) \Leftrightarrow B_{\mathbf{T}}(f(n), y)$ og $B_2(n, y) \Leftrightarrow B_{\mathbf{T}}(g(n), y)$. Disse definisjoner gir umiddelbart ekvivalensene

$$(3) \quad \vdash_{\mathbf{T}} \Phi_0(n) \Leftrightarrow \exists y B_1(n, y)$$

$$(4) \quad \vdash_{\mathbf{T}} \sim \Phi_0(n) \Leftrightarrow \exists y B_2(n, y).$$

Av (1)–(4) kan vi slutte at $A_0 = \{n \mid \vdash_T \Phi_0(n)\}$ og $A_1 = \{n \mid \vdash_T \sim \Phi_0(n)\}$ er to rekursivt genererte mengder slik at $D_0 \subseteq A_0$ og $D_1 \subseteq A_1$. Av konsistensen av T følger at $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Fra definisjonen på rekursivt inseparable mengder kan man konkludere at det fins et tall $m \in N - (A_0 \cup A_1)$, dvs. slik at hverken $\Phi_0(m)$ eller $\sim \Phi_0(m)$ er bevisbare i T . Denne teori er derfor ikke komplett. Var T avgjørbar, dvs. var $A = \{\Phi^* \mid \vdash_T \Phi\}$ rekursiv, så ville også A_0 være rekursiv, idet $n \in A_0 \Leftrightarrow f(n) \in A$ og f er rekursiv. Dette er en motsigelse som viser at T ikke er avgjørbar.

Den følgende utledning er kanskje noe mer teknisk enn det forangående. Man kan godt hoppe over den, men for dem som ønsker å se den opprinnelige versjon av Gödels teorem, la oss skissere konstruksjonen av et predikat Φ_0 som oppfyller betingelsen i det nettopp beviste teorem, hvor vi for D_0 og D_1 velger de rekursivt inseparable mengder fra Kleenes sats (del I, s. 34).

P er en aritmetisk adekvat teori, og det fins derfor predikater Φ_1 og Φ_2 som definerer henholdsvis de rekursive predikater $F((x)_1, y) = x$ og $F((x)_0, y) = x$. La $\Phi_0(v)$ være predikatet

$$\forall u (\Phi_1(v, u) \wedge \wedge w (w < u \rightarrow \sim \Phi_2(v, w))) .$$

Her er $w < u$ predikatet $\forall w_1 (A(w, w_1) \equiv u)$, dvs. at w er mindre eller lik u . Det er lett å vise innen P at

$$n \in D_0 \Rightarrow \vdash \Phi_0(n) .$$

Beviset for $n \in D_1 \Rightarrow \vdash \sim \Phi_0(n)$ er noe mer komplisert. Anta at $n \in D_1$, dvs. at det fins en m slik at $F((n)_0, m) = n$ og $F((n)_1, k) \neq n$ for alle $k \leq m$. Idet Φ_2 definerer $F((x)_0, y) = x$, får vi $\vdash \Phi_2(n, m)$. Innen P kan man vise at dette medfører

$$(5) \quad \vdash \wedge u (m < u \rightarrow \forall w (w < u \wedge \Phi_2(n, w))) .$$

Av $F((n)_1, k) \neq n$ for $k \leq m$ følger, idet Φ_1 definerer $F((x)_1, y) = x$, at

$$\vdash \sim \Phi_1(n, 0), \vdash \sim \Phi_1(n, 1), \dots, \vdash \sim \Phi_1(n, m) .$$

Innen P gir dette følgende bevisbare formel:

$$(6) \quad \vdash \wedge u (u < m \rightarrow \sim \Phi_1(n, u)) .$$

Nå vil alltid $u < m$ eller $m < u$, og av (5) og (6) kan man derfor innen P bevise

$$(7) \quad \vdash \wedge u (\sim \Phi_1(n, u) \vee \forall w (w < u \wedge \Phi_2(n, w))) .$$

Men (7) er opplagt ekvivalent med $\sim \Phi_0(n)$. Dermed har vi vist at Φ_0 oppfyller betingelsene i teoremet.

Kall T en utvidelse av P hvis den er fremkommet fra P ved tilføyelse av nye ikke-logiske aksiomer. Hvis predikatet R er definerbart i P , vil det også være definerbart i T . Vi kan formulere Gödels teorem på denne måte:

GÖDELS TEOREM. *Anta at den formaliserte Peanoaritmetikk P er konsistent. Det fins da ingen komplett og konsistent rekursivt aksiomatiserbar utvidelse av P . Spesielt er P hverken avgjørbar eller komplett.*

At P ikke er avgjørbar ble først påpekt av Church, som også har vist at den elementære logikk, dvs. en teori T uten ikke-logiske aksiomer, er uavgjørbar.

Algoritmiske problemer i algebra. Innen algebra og algebraisk topologi er det ikke så uvanlig at en gruppe er gitt ved *generatorer og relasjoner*. Homologi- og homotopigrupper er svært ofte »gitt« på denne måte. Generatorene og relasjonene bestemmer entydig en gruppe og dens egenskaper, f. eks. om den er kommutativ, endelig, fri osv. Men kan vi effektivt fra generatorene og relasjonene avgjøre hvilke egenskaper gruppen har, hvor informativ er denne måte å presentere gruppen på? Før vi svarer nærmere på disse spørsmål, la oss forklare hva det vil si at en gruppe er gitt ved generatorer og relasjoner.

En *gruppepresentasjon* er en endelig sekvens

$$\Pi = (x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_k),$$

der $x_1, \dots, x_n$ er n distinkte symboler. Et *ord* i disse symboler er en symbolsekvens

$$x_{i_1}^{m_1} x_{i_2}^{m_2} \dots x_{i_l}^{m_l},$$

der hvert x_{i_j} er et av symbolene $x_1, \dots, x_n$, og $m_1, \dots, m_l$ er hele tall. Hvis $m_j = 0$, betyr det at x_{i_j} ikke forekommer i ordet. Vi innfører også det tomme ord, betegnet med 1. Hvis alle $m_i = 0$, så er ordet lik det tomme ord. To ord u og v kan kombineres ved å skrive dem etter hverandre, uv . Vi innfører en reduksjonsprosess på ord: hvis $x_i^{m_1}$ og $x_i^{m_2}$ forekommer umiddelbart etterfølgende hverandre i et ord u , kan vi danne oss ordet u' som fremkommer fra u ved at $x_i^{m_1} x_i^{m_2}$ erstattes med $x_i^{m_1+m_2}$. Likeledes tillater vi at $x_i^{m_1} x_i^{-m_1}$ innskytes på vilkårlige steder i et ord u . La ordet u' kalles et *inverst ord* til u hvis uu' kan reduseres til det tomme ord.

Det gjenstår å forklare hva symbolene $r_1, \dots, r_k$ i gruppepresentasjonen Π står for. Hver r_i er en likning $u_i = u'_i$ der u_i og u'_i er to vilkårlige ord i symbolene $x_1, \dots, x_n$. r_i kalles en *relasjon*, x_i kalles en *generator*. Et eksempel er følgende presentasjon:

$$\Pi_1 = (x_1, x_2; x_1^4 = 1, x_2^2 = 1, x_1x_2 = x_2x_1^3).$$

Vi skal beskrive overgangen fra en presentasjon Π til en gruppe G_Π , spesielt skal vi bestemme G_{Π_1} . — To ord w_1 og w_2 kalles umiddelbart ekvivalente hvis de enten er fremkommet fra hverandre ved en reduksjon eller en innskytning, eller det fins ord u og v samt en relasjon $r_i: u_i = u'_i$ slik at $w_1 = uu_i v$ og $w_2 = uu'_i v$, eller $w_1 = uu'_i v$ og $w_2 = uu_i v$. To ord w_1 og w_2 kalles *ekvivalente* hvis det fins en følge $u_1, \dots, u_k$ slik at $w_1 = u_1$ og $w_2 = u_k$, og slik at u_i er umiddelbart ekvivalent med u_{i+1} for $i = 1, 2, \dots, k-1$.

La ekvivalensklassen til ordet w være betegnet med σ_w . I mengden av alle σ_w innføres en operasjon ved

$$\sigma_{w_1} \sigma_{w_2} = \sigma_{w_1 w_2}.$$

Det er ikke vanskelig å innse at den innførte operasjon er en gruppeoperasjon i mengden av ekvivalensklasser. Enhetselementet blir σ_1 , og det inverse element til σ_w blir $\sigma_{w'}$, der w' er et inverst ord til w . Den fremkomne gruppe skrives G_Π .

I eksemplet Π_1 finner man at det blir nøyaktig 8 ekvivalensklasser av ord som kan representeres ved

$$1, x_1, x_1^2, x_1^3, x_2, x_2x_1, x_2x_1^2, x_2x_1^3.$$

F. eks. vil sekvensen

$$x_1x_2^3x_1^3x_1, x_1x_2^3x_1^4, x_1x_2^3, x_1x_2^3x_2^{-2}x_2^2, x_1x_2x_2^2, x_1x_2, x_2x_1^3$$

vise at $x_1x_2^3x_1^3x_1$ tilhører ekvivalensklassen bestemt av $x_2x_1^3$. Her er den første omformningen en reduksjon, den andre bruk av en relasjon, den tredje en innskytning, den fjerde en reduksjon, den femte og sjette bruk av relasjoner. Gruppen G_{Π_1} er en endelig gruppe av orden 8. Den kan oppfattes som symmetrigruppen til et kvadrat, der x_1 representerer en rotasjon på 90° i klokkeretningen og x_2 representerer en speiling om horisontalaksen gjennom sentret. Symmetrigruppen til kvadratet er altså »gitt« ved gruppepresentasjonen Π_1 .

Vi vender tilbake til problemet antydnet i innledningen: Hvilke informasjon gir Π om G_Π ? Det første, og ganske naturlige problem som reiser seg fra dette noe vage utgangspunkt, er å avgjøre når to ord er ekvivalente. Dette kalles *ordproblemet* for grupper; løsningen av det vil være preliminært til en eksplisitt bestemmelse av de forskjellige ekvivalensklasser og av gruppeoperasjonen. Vi ønsker en effektiv løsning av ordproblemet. Klassen av alle ord er tellbar, og det kan derfor anordnes en Gödelnummerering av alle ord, $w \rightarrow w^*$, slik at w^* er effektivt beregnbar

ut fra w , og omvendt. Spesielt vil vi velge følgende avbildning: La symbolene $x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}$ være ordnet i den angitte rekkefølge. Et vilkårlig ord kan da skrives som en symbolsekvens $y_1 y_2 \dots y_k$, der hvert av symbolene y_i er et av symbolene $x_1, x_1^{-1}, \dots$. Definer $x_i^* = 4i - 1$ og $(x_1^{-1})^* = 4i + 1$. Vi setter Gödeltallet til $w = y_1 y_2 \dots y_k$ lik $w^* = p_1^{y_1^*} p_2^{y_2^*} \dots p_k^{y_k^*}$. Gödeltallet til det tomme ord settes lik 1.

Dermed har vi vår tilordning $w \rightarrow w^*$, og at ordproblemet er effektivt løsbart vil nå si at for alle ord u er tallmengden $\{w^* \mid \sigma_w = \sigma_u\}$ rekursiv. Ovenfor løste vi ordproblemet for Π_1 (uten å gjennomføre beviset formelt — vi kan referere til Church' tese). I sin alminnelighet er det *ikke* effektivt løsbart, og det i følgende skarpe form (husk at $\sigma_w = \sigma_u$ betyr at w og u er ekvivalente):

NOVIKOV'S THEOREM. *Man kan eksplisitt skrive opp en gruppepresentasjon Π_N slik at tallmengden $\{w^* \mid \sigma_w = \sigma_1\}$ ikke er rekursiv.*

Novikovs bevis (fra begynnelsen av 1950-årene) var umåtelig komplisert; senere (se litteraturlisten) er beviset blitt vesentlig forenklet og forkortet. Vi avstår imidlertid fra enhver bevisantydning, men tar heller opp en sats av M. Rabin om uavgjørbarhet av egenskaper hos grupper G_Π gitt ved presentasjoner Π . Denne sats er til en viss grad et svar på problemene antydnet i innledningen til denne paragraf.

La Q være klassen av alle presentasjoner

$$\Pi = (x_1, \dots, x_n; u_1 = 1, \dots, u_k = 1).$$

Vi forutsetter at $x_1, \dots, x_n$ er de n første symboler i en tellbar uendelig liste $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ av distinkte symboler. Videre antar vi at alle ord u_i er fullt redusert, dvs. inneholder ingen delsekvenser av formen $x_j x_j^{-1}$ eller $x_j^{-1} x_j$. Det er lett å se at klassen Q er effektivt tellbar, og vi kan innføre en Gödelnummerering av Q , $\Pi \rightarrow \Pi^*$, ved å definere

$$\Pi^* = p_0^n p_1^{u_1^*} \dots p_k^{u_k^*},$$

hvor $u \rightarrow u^*$ er Gödelnummereringen definert ovenfor for ord.

En egenskap P ved en endelig presentert gruppe G_Π kalles *algebraisk* hvis den bevares under gruppeisomorfismer. G og H er isomorfe hvis det fins en en-entydig avbildning φ av G på H slik at $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$ for alle elementer $g_1, g_2 \in G$. Vi lar $G_\Pi \in P$ bety at G_Π har egenskapen P . Kommutativitet er et typisk eksempel på en algebraisk egenskap. For er H isomorf med G under avbildningen φ , vet vi at for gitte $h_1, h_2 \in H$ fins det elementer $g_1, g_2 \in G$ slik at $h_1 = \varphi(g_1)$ og $h_2 = \varphi(g_2)$, og da gir følgende regning kommutativiteten av H :

$$h_1 h_2 = \varphi(g_1) \varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2) \varphi(g_1) = h_2 h_1.$$

Her er det midterste identitetstegnet begrunnet ut fra kommutativiteten av G .

Et eksempel på en ikke-algebraisk egenskap ved en gruppe G_Π er som følger: Π har to generatorer. La Π_1 være presentasjonen fremkommet fra Π ved å føye til en ny generator x_3 og en ny relasjon $x_3 = 1$. Da er G_{Π_1} isomorf med G_Π (vi skriver det $G_{\Pi_1} \cong G_\Pi$), men G_{Π_1} har ikke den angitte egenskap. Vi legger også merke til at egenskapen er effektivt avgjørbar, gitt presentasjonen for gruppen.

RABINS TEOREM. *La P være en algebraisk egenskap ved endelig presenterte grupper G_Π . Anta at det fins en $\Pi_1 \in Q$ slik at $G_{\Pi_1} \in P$, og at det fins en $\Pi_2 \in Q$ slik at $G_{\Pi_2} \notin P$ og heller ikke er isomorf med noen undergruppe av en G_Π som har egenskapen P . Da er tallmengden*

$$S(P) = \{\Pi^* \mid G_\Pi \in P\}$$

ikke rekursiv.

Sagt intuitivt betyr dette at gitt Π så kan vi ikke effektivt avgjøre om G_Π har egenskapen P . Algebraiske egenskaper gis det mange eksempler på. Vi nevner i fleng: å være kommutativ, å være endelig, å være triviell (dvs. å bestå av enhetselementet alene), å være fri, osv. osv. Den praktiske konklusjon synes å være at fra Π alene har man svært lite informasjon om G_Π — vi kan ikke engang effektivt avgjøre om $G_\Pi \cong 1$ (1 lik den trivielle gruppe) eller om G_Π inneholder minst ett element $\neq 1$ (1 lik enhetselementet i gruppen).

Satsen må leses korrekt. Den sier at det ikke fins noen algoritme, brukbar for alle Π , til å avgjøre om $G_\Pi \in P$. Gitt en bestemt Π kan det godt inntreffe at spesielle overveielser, gyldig kun for den gitte Π , tillater oss effektivt å konkludere at $G_\Pi \in P$ — men det er ingen generell algoritme for klassen Q .

Det kan være av interesse å antyde noe av beviset for Rabins teorem. Beviset bygger på Novikovs sats samt på følgende lemma som er lett å formulere, men ganske komplisert å bevise: La $\Pi \in Q$, og la w være et ord i Π . Man kan da effektivt skrive opp en presentasjon Π_w (dvs. avbildningen $\Pi^* \rightarrow \Pi_w^*$ er rekursiv), slik at hvis w er ekvivalent med 1 i Π , så er $G_{\Pi_w} \cong 1$, og hvis w ikke er ekvivalent med 1 i Π , så er G_Π isomorf med en undergruppe av G_{Π_w} .

La G_{Π_1} og G_{Π_2} være gitt ved presentasjonene

$$\Pi_1 = (x_1, \dots, x_n; u_1 = 1, \dots, u_k = 1)$$

$$\Pi_2 = (x_1, \dots, x_m; u'_1 = 1, \dots, u'_l = 1).$$

Vi definerer en ny gruppe $G = G_{\Pi_1} * G_{\Pi_2}$ ved en presentasjon

$$\Pi = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}; u_1 = 1, \dots, u_k = 1, u'_1 = 1, \dots, u'_l = 1),$$

der u'_i er fremkommet fra u'_i ved at hver generator x_j fra Π_2 blir erstattet med generatoren x_{n+j} fra Π . Det er lett å se at G_{Π_1} og G_{Π_2} er isomorfe med undergrupper av G_{Π} .

Anta nå at Π_1 og Π_2 er presentasjoner som oppfyller betingelsene i Rabins teorem, og at Π_N er en presentasjon som tilfredsstiller Novikovs teorem. La $G_{\Pi} = G_{\Pi_2} * G_{\Pi_N}$. Idet G_{Π_N} er isomorf med en undergruppe av G_{Π} , og ordproblemet er uløsbart for G_{Π_N} , så er også ordproblemet uløsbart for G_{Π} .

La w være et ord i Π , og G_{Π_w} være gruppen gitt ved Rabins lemma ut fra w og Π . Definer $G_w = G_{\Pi_1} * G_{\Pi_w}$. Vi vil vise at w er ekvivalent med 1 i Π , hvis og bare hvis G_w har egenskapen P . For hvis w er ekvivalent med 1, så vil $G_{\Pi_w} \cong 1$, og dermed $G_w \cong G_{\Pi_1}$, altså $G_w \in P$. Og hvis w ikke er ekvivalent med 1 i Π , er G_{Π} isomorf med en undergruppe av G_{Π_w} og dermed av G_w . Og da G_{Π_2} er isomorf med en undergruppe av G_{Π} , og følgelig også av G_w , så er $G_w \notin P$ etter betingelsen i Rabins teorem. Tilordningen $w \rightarrow \Pi(w)$, der $\Pi(w)$ er en presentasjon for G_w , er effektiv, dvs. funksjonen $w^* \rightarrow \Pi(w)^*$ er rekursiv. Vi har vist at hvis $A = \{w^* \mid \sigma_w = \sigma_1\}$, så er

$$w^* \in A \Leftrightarrow \Pi(w)^* \in S(P).$$

Konklusjonen blir at $S(P)$ ikke er rekursiv, da A , etter Novikovs teorem, ikke er rekursiv. Dermed er beviset for Rabins teorem fullført.

Vi avslutter vår fremstilling her. Vi skal ikke kreve at leseren godtar Church's tese og fra nå av identifiserer algoritmebegrepet med rekursivitet. Noen vil finne det intuitivt rimelig at teknikken med Gödelnummerering tillater en å omforme algoritmiske problemer til problemer innen den rekursive teori. Og hvordan man enn stiller seg til Church's tese, må man medgi at den leder til en ganske omfattende samling av interessante og slående resultater som ingen, som tar sin matematikk alvorlig, kan stille seg likegyldig til.

BIBLIOGRAFISKE KOMMENTARER

Denne artikkel er ment som en innledende oversikt over den rekursive matematikks teori og anvendelser. Det er derfor ikke tatt med noen litteraturhenvisninger underveis. I dette bibliografiske avsnitt vil det bli gitt noen referanser til en del standardverker innen området.

Den rekursive matematikk kan kanskje dateres fra følgende fundamentale avhandling av Skolem:

TH. SKOLEM: *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrerende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich*. Skrifter, Vid.selsk. i Kristiania, 1923.

Gödels epokegjørende resultater fins i følgende avhandling:

K. GÖDEL: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*. Monatsheft für Math. und Physik 38 (1931), pp. 173–198.

To meget viktige avhandlinger fra den rekursive teoris første tid, i hvilke de fleste egenskaper for rekursive funksjoner og rekursivt genererte tallmengder som er anført i denne artikkel ble etablert, er

S. C. KLEENE: *Recursive predicates and quantifiers*. Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943), pp. 41–73.

E. POST: *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems*. Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), pp. 284–316.

I stedet for videre referanser til originallitteraturen gir vi en liste over bøker som den interesserte leser anbefales til nærmere studium:

S. C. KLEENE: *Introduction to metamathematics*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1952 (samt diverse senere opptrykk).

M. DAVIS: *Computability & unsolvability*. McGraw-Hill, New York 1958.

R. PÉTER: *Rekursive Funktionen*. Akademie-Verlag, Berlin 1957.

R. SMULLYAN: *Theory of formal systems*. Annals of Math. Studies 47, Princeton University Press, Princeton 1961.

A. GRZEGORCZYK: *Fonctions recursives*. Gauthier-Villars, Paris 1961.

Her er Kleenes bok det anerkjente standardverk, spesielt gir det en utførlig diskusjon av Gödels teorem og av Church's tese (foruten en omfattende innføring i den matematiske logikk). Den generaliserte form for Gödels sats som vi ga i avsnittet om formaliserte teorier, er stort sett den samme som den versjon Kleene gir. Davis' bok bygger på Turing-maskiner. Péters bok gir en utførlig behandling av forskjellige former for rekursjon. Boken til Smullyan presenterer en meget velpolert versjon av den rekursive teori, men kanskje i en form som er noe langt fjernet fra det aritmetiske grunnlag. Grzegorzcyks lille bok er en meget velskrevet innføring. — Alle disse bøker inneholder omfattende litteraturhenvisninger.

En god oversiktsartikkel, som gjerne kan leses i tilknytning til Kleenes bok, er

S. C. KLEENE: *Hierarchies of number-theoretic predicates*. Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), pp. 193–213.

Det enkleste bevis for ordproblemet finnes hos

J. L. BRITTON: *The word problem*. Annals of Math. 77 (1963), pp. 16–32.

M. O. RABIN: *Recursive unsolvability of group theoretic problems*. Annals of Math. 67 (1958), pp. 172–194.

En anelse av hva som foregår innen rekursiv teori idag kan man få ved å slå etter i følgende bøker:

Infinistic methods, Proceeding of the Symposium on foundation of mathematics, Warsaw 2–9 Sept. 1959. Pergamon Press, London 1961.

Proceedings of Symposium in pure mathematics V, Recursive function theory. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1962.

Logic, methodology and philosophy of sciences, Proceedings of the 1960 International Congress. Stanford University Press, Stanford 1962.

BOKMELDINGER

GUNNAR BERGENDAL — INGE BRINCK: *Lineär algebra och geometri*. Lunds Studentkårs Intressebyrå, Lund 1963. 217 s. Sv. kr. 30.00.

(Inneholdsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 182.)

I den almindelige modernisering af matematikundervisningen, som i disse år foregår i Norden, kan man ofte notere en forskydning fra »ren« geometri mod mere algebraiske synspunkter. I den foreliggende bog fra Lund, en første lærebog for universitets- og ingeniørstuderende, bemærkes denne vægtforskydning, idet bl. a. undersøgelsen af keglesnit og keglesnitsflader er udeladt (måske til senere behandling?) og vægten lagt på lineær algebra med vektorregning og afbildningslære som afgørende faktorer. Også m. h. t. formulering og generalisationer er der sket fornyelser, selv om disse synes lidet radikale, hvorom senere.

Gennem indledningen, der handler om samspillet mellem teori og virkelighedserkendelse, bliver det klart, at forfatterne vil betone den intuitive matematiske erkendelse og stort set afstå fra en abstrakt-aksiomatisk opbygning af deres bog. Dette, mener de, vil specielt for geometriens vedkommende tage for megen plads op og tilsløre det væsentlige i den lineære algebra.

Vi vil kort gennemgå bogens indhold. I kap. 1 indføres vektorer i rummet som ækvivalensklasser af orienterede liniestykker, og det vises, hvorledes en vektor kan repræsentere en translation eller en kraft. Om simpel vektorregning vises de egenskaber, der i reglen tages som *aksiomsystem* for et lineært vektorrum ((i)–(iii), s. 18–19). Koordinater, basis og basis-skifte omtales, og så nævnes det (s. 42–48), hvordan »lineært rum« abstrakt kan indføres v. hj. a. de nævnte aksiomer. Da behandlingen er kort, teori-smagsprøverne sat med små typer og opgaverne få og lette, får læseren nok let det indtryk, at afsnittet ikke skal »tages så tungt«.

I kap. 2, der indleder den affine plan- og rumgeometri, er vi da også på fast grund igen, og i kap. 3 om matricer og determinanter refererer næsten alt bortset fra matricers definition og allersimpleste egenskaber til det 2- og det 3-dimensionale tilfælde. Regneregler for matricer opstilles for resten smukt som det nævnte aksiomsystem — hvorfor da så selvudslættende kun gøre opmærksom herpå i en let overset »anmärkning«?

Den affine rumgeometri fortsættes i kap. 4, der virker meget velskrevet; det gælder også kap. 5, hvor man for alvor tør nyde frugterne af

den algebraiske udsæd — se blot, hvor smukt skalarprodukt, ortogonal matrix og især vektorprodukt behandles. Kap. 6 indfører afbildning helt alment; næsten alle eksempler handler dog om plan og rum, og lineær afbildning indføres også kun her. Det var dog fristende at generalisere — men nej, forfatterne modstår fristelsen. I en værdifuld, men kort paragraf kommer man ind på den euklidiske, ligedannetheds- og den affine geometri og derfra naturligt til sidste kapitel »Litet elementär geometri«, hvor bl. a. keglesnit kort behandles (som det, deres navn udsiger).

Bogens mange eksempler er for det meste fortrinlige; der er også et stort udvalg af opgaver; men langt de fleste er helt simple anvendelser af teksten. Dette finder anmelderen særdeles beklageligt. Som opgaverne nu en gang er, er facitlisten bag i bogen en god idé.

I et forsøg på at sammenfatte må jeg vedgå, at jeg næppe er upåvirket af den modernisering af tilsvarende stof, som jeg har kunnet følge ved Københavns Universitet. Med dette forbehold vil jeg mene, at den foreliggende bog er noget for forsigtig i sine moderniseringsbestræbelser, først og fremmest fordi den klynger sig til det 2- og det 3-dimensionale rum og kun i få og korte afsnit tøvende bevæger sig herudover.

For ingeniørstuderende og andre, der mest er interesserede i de direkte anvendelser af dette stof, er bogen fortræffelig. Den vedligeholder hele tiden en geometrisk fornemmelse af, »hvad der sker«, eksemplerne er ofte meget illustrative, opgaverne giver et vist håndlag. Men for fremtidens studerende i matematik og teoretisk fysik er det min opfattelse, at bogen er for let og for overfladisk (i emnevalg, absolut ikke i behandling). Disse studerende skal alligevel snart beskæftige sig med generelle vektorrum på en langt mere omfattende måde — hvorfor så ikke »gå til biddet« med det samme? Det tør man i hvert fald i København.

Poul Einer Hansen

ÁKOS CSÁSZÁR: *Foundations of general topology*. (International series of monographs on pure and applied mathematics, 35.) Translated from the French by Mrs. K. Császár. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 19 + 380 pp. sh. 105/—.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 74–75.)

Emnet for denne boka er i egentlig forstand »Foundations of general topology«. Dens siktepunkt er å gi en struktur-teori som omfatter elementene av teorien for topologiske rom, nærhets-rom og uniforme rom. Egenskaper ved en spesiell av disse strukturer behandles bare i den utstrekning de har en naturlig generalisering til det almene tilfellet. Formelt sett er boka praktisk talt selvforsynende, men for at den skal kunne

leses med utbytte er fortrolighet med grunnbegrepene i topologien nødvendig.

Fremstillingen bygger på begrepet *topogen ordning*. En topogen ordning på mengden E er en relasjon $<$ i klassen av delmengder av E , med følgende egenskaper:

- (1) $\emptyset < \emptyset$, $E < E$.
- (2) $A < B$ impliserer $A \subset B$.
- (3) $A \subset A' < B' \subset B$ impliserer $A < B$.
- (4) $A < B$ & $A' < B'$ impliserer
 $A \cap A' < B \cap B'$ & $A \cup A' < B \cup B'$.

En *syntopogen struktur* på E er en klasse $\mathcal{S}$ av topogene ordninger som oppfyller

- (5) Hvis $<'$ og $<''$ er elementer i $\mathcal{S}$ fins et element $<$ i $\mathcal{S}$ slik at $A < B$ hvis $A <' B$ eller $A <'' B$.
- (6) Til hvert element $<$ i $\mathcal{S}$ fins et element $<'$ i $\mathcal{S}$ slik at $A < B$ impliserer $A <' C <' B$ for en passende mengde C .

De syntopogene strukturer er det nå fremstillingen samler seg om. Dersom en slik struktur består av en eneste relasjon, kalles den *enkel*. Den kalles *symmetrisk* dersom $A < B$ impliserer $E - B < E - A$ for alle $<$ i $\mathcal{S}$, *perfekt* dersom $A_i < B_i$, $i \in I$, impliserer $\bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i$ for alle $<$ i $\mathcal{S}$ og vilkårlig indeksmengde I .

Topologiske strukturer korresponderer med *enkle*, *perfekte* syntopogene strukturer ved overgangen

$$A < B \Leftrightarrow B \text{ er omegn om } A.$$

Likeens korresponderer *nærhets*-strukturer med *enkle*, *symmetriske* syntopogene strukturer ved overgangen

$$A < B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

(» $A \subseteq B$ « står for » A ikke nær $E - B$ «).

Endelig korresponderer *uniforme* strukturer med *perfekte*, *symmetriske* syntopogene strukturer på følgende måte: Klassen av relasjoner $<_U$ definert ved

$$A <_U B \Leftrightarrow U(A) \subset B$$

danner en perfekt, symmetrisk struktur når U gjennomløper alle symmetriske entourager i en uniform struktur $\mathcal{U}$. Omvendt danner klassen av mengder

$$U_{<} = \{(x, y) : \{x\} \prec E - \{y\}\}$$

en basis for en uniform struktur når $<$ gjennomløper en perfekt, symmetrisk syntopogen struktur $\mathcal{S}$.

Studiet av de generelle syntopogene strukturer gjennomføres meget detaljert. Blant de begreper som behandles kan nevnes filterkonvergens i syntopogene rom, produkt-rom, komplette og kompakte syntopogene rom, osv., med eksplisitt formulering av anvendelser på de spesielle strukturene nevnt ovenfor. For eksempel er alle topologiske rom og alle nærhets-rom komplette ifølge disse begrepsdannelsene, mens kompaktifiserings-teorien reduserer seg til den vanlige for denne type rom.

Boka inneholder altså ikke det en vanligvis finner i en standard-innføring i generell topologi. Men den er av stor verdi dersom en ønsker å få innpasset de vanlige grunnleggende begrepsdannelser i en slik større sammenheng.

Olav Njåstad

WOLFGANG GILOI — RUDOLF LAUBER: *Analogrechnen*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 16 + 423 S., 336 Fig. Ganzl. DM 68.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 129–130.)

Den udbredelse og interesse, der inden for de sidste 10–15 år er blevet cifferregnemaskinerne til del, har henvist en anden type regnemaskiner, analogregnemaskinerne, til en slags skyggetilværelse. Fra flere sider spåede man endog analogregnemaskinerne en snarlig død, en spådom, som indtil nu ikke er gået i opfyldelse, og der er for øjeblikket heller ingen tegn på, at dette vil ske.

Som et udtryk for analogregnemaskinernes levedygtighed står den mængde litteratur, der til stadighed udkommer om emnet, sidst den bog, der er genstanden for denne anmeldelse: W. Giloi og R. Lauber's »Analogrechnen«, med undertitlen »Programmierung, Arbeitsweise und Anwendung des elektronischen Analogrechners«. De to forfattere har begge årelang erfaring i at bringe deres viden på dette område videre til andre, idet W. Giloi i en årrække har afholdt programmeringskurser ved Telefunkens analogregnecenter, og R. Lauber har undervist ved Recheninstitut der Technischen Hochschule Stuttgart, og det er lykkedes dem i denne bog at fremlægge deres store viden og erfaring. Resultatet er blevet en fortræffelig bog, som har det fortrin fremfor mange andre bøger om dette emne, at den henvender sig til brugeren af analogregnemaskinen. Dette medfører, at analogregnemaskinen betragtes som et matematisk hjælpemiddel og ikke som målet i sig selv. Det skal bemærkes, at bogens fremstilling ikke er bundet af noget bestemt analogregnemaskinefabrikat, men at den kan læses med stort udbytte, uanset hvilken analogregnemaskine man har adgang til.

Bogen er opdelt i 5 hovedafsnit, hvoraf det første (55 sider) giver en kortfattet gennemgang af de vigtigste regneelementer samt principperne for programmering af en analogregnemaskine. Afsnittet indledes med en definition af en analogregnemaskine som en regnemaskine, hvor de størrelser, som man ønsker at regne med, er tilknyttet fysiske størrelser, som lader sig ændre kontinuert. En regnestok, hvor de variable som bekendt er repræsenteret ved en bestemt længde, er således en analogregnemaskine. Ved den egentlige analogregnemaskine bevirker den kendsgerning, at det fysiske forløb lader sig beskrive matematisk, omvendt, at matematiske sammenhænge lader sig afbilde ved fysiske forløb. Ved analogregnemaskinen opbygger man således en fysisk model, i hvilken de samme matematiske udtryk gælder som i det aktuelle problem. De første analogregnemaskiner var mekaniske i deres funktion, og de foreliggende ligninger blev således undersøgt ved hjælp af en mekanisk model. Elektroteknikkens voldsomme fremskridt har medført, at de elektroniske analogregnemaskiner, hvor den fysiske model realiseres ad elektrisk vej, er de mekaniske langt overlegne i hurtighed, nøjagtighed og fleksibilitet.

Afsnit I slutter med et fortræffeligt eksempel, hvor hele arbejdsgangen ved løsningen af et problem på en analogregnemaskine er illustreret (10 sider), lige fra skalering af de variable (det må erindres, at en analogregnemaskine er at betragte som en »fast-komma maskine«) til afprøvningen af det færdige program. En enkelt kritisk bemærkning skal dog fremsættes til det nævnte eksempel. Forfatterne viser, hvorledes små koefficientværdier kan realiseres ved i opkoblingen at forbinde to potentiometre efter hinanden, en kobling, der reducerer indstillingsfejlen. Til gengæld bliver den resulterende koefficientværdi på grund af belastningsforhold forskellig fra produktet af de to potentiometres »pålydende« værdi, et forhold, som forfatterne overhovedet ikke nævner på dette sted. — Med dette første afsnit af bogen som ballast vil det være muligt straks at gå i gang med programmering af relativt simple problemer for en analogregnemaskine.

I afsnit II (60 sider) gennemgås den tekniske baggrund for analogregnemaskinens regneelementer, en gennemgang, som er set bedre og fyldigere andre steder. Forfatterne har imidlertid som nævnt haft til hensigt at skrive en bog for brugerne af analogregnemaskiner. Set i lys heraf må afsnit II anses for fyldestgørende i indhold og omfang.

Afsnit III har som titel »Anwendung des Analogrechners zur Lösung von Differentialgleichungen« og er i sin længde (168 sider af bogens ialt 423 sider) en kraftig understregning af, hvor analogregnemaskinernes hovedanvendelsesområde ligger. I dette afsnit gennemgås programmeringsteknikken for et stort antal typer af såvel lineære som ulineære differentiaalligninger, og der opstilles generelle koblingsdiagrammer for de

forskellige typer. En kobling, som f. eks. den, der er vist i kapitlet om løsning af n sammenhørende differentiaalligninger af 1. orden, er imidlertid ikke umiddelbart praktisk anvendelig, idet den medfører, at en regneforstærker belastes med $n - 1$ potentiometre, hvilket er en teknisk umulighed for n større end ca. 4. Det skal retfærdigvis indrømmes, at forfatterne bemærker, at den omtalte figur viser den principielle opkobling af problemet, men en fyldigere redegørelse for, hvor vanskelighederne i praksis vil kunne opstå, savnes. I afsnittet omtales forskellige nyttige trick-koblinger, metoder til løsning af randværdiproblemer og partielle differentiaalligninger samt koblinger til fremskaffelse af forskellige analytiske funktioner, og afsnittet slutter med en gennemgang af en metode til løsning af et optimaliseringsproblem (lineær programmering) på analogregnemaskinen.

I bogens afsnit IV (100 sider) gives eksempler på brugen af analogregnemaskinen inden for forskellige tekniske discipliner. Afsnittet indledes med et kapitel omhandlende realisering af lineære overføringsfunktioner på analogregnemaskinen, og der angives et generelt koblingsskema for en lineær overføringsfunktion af n^{te} orden. I kapitlet om analogregnemaskinens anvendelse inden for reguleringsteknikken, velsagtens det område, hvor analogregnemaskinerne har vundet størst udbredelse, savnes en fyldig og systematisk gennemgang af metoden til programmering direkte ud fra det foreliggende systems blokdiagram. Afsnittet slutter med en beskrivelse af metoder til bestemmelse af en funktions middelværdi, spredning og fordelingsfunktion.

I det sidste afsnit V (31 sider) omtales de forskellige typer af fejl, der kan forekomme ved løsning af et problem på analogregnemaskinen, og hvilke muligheder man har for at opsøge disse fejl. Af fejlmuligheder kan nævnes fejl i opkoblingen af det matematiske udtryk (programmeringsfejl), fejl som følge af den begrænsede nøjagtighed af de enkelte komponenter eller fejl, som skyldes direkte maskinfejl. Det tjener forfatterne til ros, at de i deres bog har medtaget dette afsnit om fejlmuligheder og fejlsøgning, et område af analogregnemaskineteknikken som er særdeles vigtigt, og som mange andre forfattere hidtil er sprunget over med samlede ben. Man kunne blot have ønsket, at de to forfattere havde ladet deres erfaring og viden inden for dette område komme til læserens kundskab i større udstrækning, end det her er sket.

Det må opfattes som en ros, at de få kritiske bemærkninger, der har været at fremsætte, kun har angået bagateller. Bogen kan varmt anbefales til alle, til begyndere, der ønsker en lærebog om emnet, såvel som til viderekomne, der har brug for en håndbog inden for dette store og interessante område.

Flemming Svensson

KLAUS KRICKEBERG: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1963. 200 S. Leinen DM 29.40.

(Innholdsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 184.)

Dette er en innføringsbok i sannsynlighetsregning som viser originalitet ved såvel emnevalg som fremstilling. Av spesiell interesse er det at den nødvendige målteori er utledet som en naturlig del av sannsynlighetsregningen.

I kapitel I behandles: Boolske mengderinger, tilfeldige begivenheter, sannsynlighetsmål, sannsynlighetsrom, sannsynlighetsbevarende avbildninger, målbare funksjoner og tilfeldige variable. Et avsnitt om kombinatorikk behandler trekking med eller uten tilbakelegging av ordnet eller uordnet utvalg. Poisson-fordelingen og den hypergeometriske fordeling er definert.

I kapitel II defineres forventningsverdi og Beppo-Levis og Fatou-Lebesgues teorem for forventnings-operatoren blir bevist. Nesten sikker konvergens studeres, og det første Borel-Cantellis lemma utledes. I et avsnitt om forventningsverdi og sannsynlighetsbevarende avbildninger vises hvorledes forventningsverdien til en variabel kan uttrykkes ved dens sannsynlighetsfordeling. Her finnes videre korrespondansen mellom fordelingsfunksjoner og sannsynlighetsmål, Tschebyscheffs ulikhet og Cauchy-Schwarz' ulikhet. Fubinis teorem utledes i avsnittet »Unabhängigkeit«. Her er også endelige Poissonske og Bernoulliske forsøksrekker definert. Lebesgue-integralet innføres ved hjelp av de rektangulære fordelinger. Funksjonaldeterminantens rolle ved transformasjon av absolutt kontinuerlig fordelte variable er utledet. Kapitlet avsluttes med Kolmogorovs konstruksjonssetning for stokastiske prosesser. Spesielle fordelinger som er behandlet i dette kapitel er binomial-, Poisson-, rektangulær-, Cauchy- og multinormalfordelingen.

Kapitel III behandler følger av uavhengige variable. Konvergensbegrepene, konvergens nesten sikkert, stokastisk konvergens, konvergens i middel og i kvadratisk middel studeres. Her finner vi videre Kolmogorovs ulikhet, to av Kolmogorovs store talls sterke lover, det andre Borel-Cantellis lemma, kriterier for svak konvergens for følger av fordelingsfunksjoner og Lindebergs sentralgrenseteorem.

Beviset for Lindebergs teorem føres uten bruk av karakteristiske funksjoner. Isteden benyttes en tilordning mellom de tilfeldige variable og de lineære operatorer over mengden $\mathfrak{S}$ av kontinuerlige og begrensede reelle funksjoner over tallinjen. Er x en tilfeldig variabel så defineres operatoren W_x ved

$$(W_x f)(\lambda) = Ef(x + \lambda); \quad f \in \mathfrak{S}, \quad \lambda \in]-\infty, +\infty[.$$

Er x og y uavhengige så er $W_{x+y} = W_x W_y$. Disse operatorene benyttes senere i avsnittet om Brownske bevegelser.

Kapitel IV gir en meget god og grundig innføring i betingede forventninger. Betinget forventning gitt en sigmaring $\mathfrak{S}$ defineres og det vises at den for kvadratisk integrable variable faller sammen med projeksjonen inn i mengden av $\mathfrak{S}$ -målbare kvadratisk integrable variable. Radon-Nikodyms teorem bevises og eksistensen av betingede forventninger til integrable variable utledes herav. Videre finner vi her bl. a. Doobs konvergensteorem for semimartingales, null-en loven, martingale generaliseringer av grensesetningene i Kapitel III, Doobs eksistensteorem for betingede sannsynlighetsfordelinger, en generalisering av Fubinis teorem til ikke nødvendigvis uavhengige variable, Chapman-Kolmogorovs ligning for Markovprosesser med diskret tidsparameter og to grenseteoremer for n^{te} potensen av en stokastisk matrise.

Kapitel V behandler Brownske og Poissonske prosesser. Eksistensen av en prosess med uavhengige tilvekster og gitte tilvekstfordelinger som oppfyller en konsistensbetingelse bevises. Det vises her at Brownske prosesser kan karakteriseres — på noen modifikasjoner nær — som prosesser med kontinuerlige trajektorier og uavhengige tilvekster. Det bevises at trajektoriene ikke har begrenset variasjon i noe intervall. Tilsvarende vises det at en Poissonsk prosess kan karakteriseres — på noen modifikasjoner nær — som en prosess med uavhengige tilvekster, der trajektoriene antar bare heltallige verdier og er monotont voksende med sprang på 1.

I et tillegg nevnes andre måter å bygge opp sannsynlighetsregningen på. Her vil leseren også finne en kort gjennomgåelse av aktuell litteratur.

I hvert avsnitt er det en eller flere oppgaver.

Det forutsettes ikke at leseren har forkunnskaper i sannsynlighetsregning eller målteori. Leseren bør bl. a. være fortrolig med mengdeoperasjonene union, snitt og differens; kunne litt matrise- og determinantregning og ha kjennskap til funksjonaldeterminantens rolle ved skifte av variabel i et multiplert Riemann-integral.

De fleste feil som anmelderen har funnet er av trykkfeils-typen. På side 125 står det at hvis P og Q er to sannsynlighetsmål og ϱ er en konstant slik at $Q \leq \varrho P$ så er $|E_Q Z| \leq \varrho |E_P Z|$ når Z^2 er integrabel. For beviset er det tilstrekkelig at ulikheten holder for ikke-negative variable. Utgangspunktet for definisjonen av forventningsverdi på side 39 er en endelig additiv sannsynlighetsfunksjon P over en semi-ring $\mathfrak{S}$. Endelig additivitet defineres som additivitet for en disjunksjon på to mengder, og så regnes det videre som om vi hadde additivitet for en vilkårlig endelig disjunksjon. At dette — med bokens definisjon av semi-ring — ikke er riktig i sin alminnelighet viser eksemplet:

$$\mathfrak{S} = \{\{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$$

$$P(\{1, 2, 3\}) = P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0.$$

Til slutt et sitat fra forordet: »Wie wenige Gebiete der Mathematik verdankt die Wahrscheinlichkeitstheorie während ihrer ganzen Geschichte ihre eigenartige Gestalt den von Anwendungen und ausser-mathematischen Bereichen herrührenden Impulsen, und trotz aller mathematischen Abstraktion nimmt dieser Einfluss immer noch zu. Die Lektüre einer rein mathematischen Darstellung wie der vorliegenden, wo der beschränkte Raum nur wenige Hinweise auf solche Einflüsse zuließe, kann daher nur eine einseitige Vorstellung vermitteln und sollte durch das Studium der in ganz anderer, nicht masstheoretischer Weise geschriebenen im Anhang zitierten Bücher von W. Feller und M. Kac ergänzt werden.«

Erik N. Torgersen

JAN ŁUKASIEWICZ: *Elements of mathematical logic*. Translated from the Polish by Olgierd Wojtasiewicz. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 11+124 pp. sh. 42/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 76.)

Denne bok er en så godt som uforandret versjon av de forelesninger Łukasiewicz holdt over den elementære del av den matematiske logikk ved Warszawa-universitetet i slutten av 1920-årene. (Førsteutgaven er fra 1929.) Som historisk dokument har boken megen interesse og verdi. Jan Łukasiewicz var en av de store pionerer innenfor den matematiske logikk, og i denne bok la han frem, delvis for første gang, sine resultater over utsagnskalkylens metateori, — av spesiell interesse var hans bevis for den deduktive kompletthet av utsagnskalkylen. Det avsluttende kapittel behandler den aristoteliske sylogismelære med metoder fra den symbolske logikk. På dette området utførte Łukasiewicz et banebrytende arbeid. Disse undersøkelser, i langt mer omfattende form, har han senere utgitt som egen bok (Oxford Univ. Press, 2. utgave 1957).

Verdifull som denne bok er, kan den ikke ubetinget anbefales en nybegynner som i dag ønsker å studere den matematiske logikk. Men for den noe viderekomne som har en historisk interesse for sitt fag, er dette en interessant bok, skrevet som den er av en av de første ledere for den imponerende polske skole innen den formale logikk.

Jens Erik Fenstad

HARRY MALMHEDEN: *Matematisk statistik*. CWK Gleerups förlag, Lund 1963. 310 s. Hft. sv. kr. 40.00, inb. sv. kr. 46.00.

(Innehållsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 185.)

Forfatteren sier i innledningen at boken »vänder sig till en av matematisk statistik intresserad publik med viss matematisk utbildning». Det kreves bl. a. kjennskap til multiple integraler.

Boken er delt i tre hovedavsnitt: »Beskrivande statistik» (ca. 60 sider), »Sannolikhetsvariabler» (ca. 100 sider) og »Stickprov» (ca. 100 sider). Siste avsnitt omfatter imidlertid også utledning av endel sannsynlighetsteoretiske resultater, og de prinsipielle problemer i forbindelse med statistisk induksjon har derfor ikke fått en så bred behandling som ovennevnte sidetall kunne gi inntrykk av.

Selv om fremstillingen er oversiktlig, må emnevalget sies å være noe »out of date», særlig for statistikkens vedkommende. Generelle prinsipper for konstruksjon og vurdering av statistiske metoder er f. eks. ikke omtalt, statistisk forsøksplanlegging ikke nevnt, og ikke-parametriske situasjoner overhodet ikke behandlet.

Arnljot Høyland

MOTTATTE BØKER

Irving Adler: *Tænkende maskiner*. Fremad, København 1964. 119 s. D. kr. 14.75.

Metalhjerner 5–8 * Maskiner med selvkontrol 9–12 * At få en idiot til at tænke 13–19 * Tal og taltegn 20–26 * Tallenes algebra 27–30 * Regnemaskiner 31–41 * Ord, sætninger og logik 42–47 * Klassernes algebra 48–73 * Udsagnsalgebra 74–87 * Algebra for sluttede og afbrudte strømkredse 88–94 * Elektronregnemaskiner 95–115 * Tænkende maskiner og hjernevirksomhed 116–119.

P. O. Andersen — S. Bülow — H. J. Helms: *Matematik for gymnasiet*, Bind II B. Gyldendal, København 1964. 219 s. D.kr. 32.25.

Indledning 9–16 * Talmængder 17–22 * Kontinuitet og grænseværdi for reelle funktioner 23–57 * Differentiable funktioner 58–89 * Integrable funktioner 90–107 * Stamfunktioner 108–122 * Anvendelser af infinitesimalregningen 123–178 * Specielle funktioner 179–200 * Differentialligninger 201–212 * Symbolregister 213–214 * Sagregister 215–219.

P. O. Andersen — S. Bülow — H. J. Helms: *Opgaver til matematik for gymnasiet, den matematisk-fysiske gren*. Gyldendal, København 1964. 96 s. D.kr. 10.50.

Talmængder 7–11 * Grænseværdi for talfølger 12–18 * Funktioners grænseværdi 19–21 * Kontinuerte funktioner 22–25 * Differentiable funktioner 26–36 * Integrable funktioner 37–38 * Stamfunktioner 39–42 * Vektorfunktioner 43 * Anvendelser af infinitesimalregningen 44–59 * Logaritmefunktioner 60–65 * Eksponentialfunktioner 66–69 * Potensfunktioner 70–73 * Keglesnit 74–81 * Transformationer af planen 82–88 * Differentialligninger 89–92 * Taylors formel 93–94 * Tilnærmelser for bestemte integraler 95–96.

Ralph P. Boas — R. Creighton Buck: *Polynomial expansions of analytic functions*. Second edition. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 19.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964. 8+76 S., 16 Fig. Cloth DM 16.00.

Introduction 1–21 * Representation of entire functions 21–47 * Representation of functions that are regular at the origin 47–65 * Applications 65–71 * Bibliography 71–74 * Index 75–76.

D. G. Bourgin: *Modern algebraic topology*. MacMillan Co., New York; Collier — MacMillan, London 1964. 13 + 544 pp.

Preliminary algebraic background 1–10 * Chain relationships 11–27 * Fundamentals of the absolute homology groups and basic examples 28–50 * Relative omology modules 51–71 * Manifolds and fixed cells 72–85 * Omology exact sequences 86–108 * Simplicial methods and inverse and direct limits 109–133 * Gatings 134–166 * Fundamental omology relations and applications 167–189 * Homological algebra 190–233 * Uniqueness proofs and fixed points indices 234–263 * Products 264–315 * Groups of homeomorphisms 316–344 * Fiberings 345–382 * Homotopy 383–421 * Spectral sequences 422–461 * Sheaf theory 462–512 * Appendix 513–534 * Symbols 535–537 * Bibliography 538–540 * Index 541–544.

Bent Christiansen: *Elementær kombinatorik og sandsynlighedsregning*. Munksgaard, København 1964. 135 s. D.kr. 14.75.

Hvad er kombinatorik? 7–13 * Multiplikationsprincippet 14–25 * Hjælpemidler fra mængdelæren 26–46 * Delmængdeudtagelse 47–68 * Afmærkning med mærkesedler 69–83 * Permutationer 84–91 * Binomialformlen 92–97 * Om tilfældige eksperimenter 98–105 * Matematisk model af et tilfældigt eksperiment 106–121 * Sammensætning af tilfældige eksperimenter 122–129 * Binomialfordelingen 130–135.

Bent Christiansen — Jonas Lichtenberg — Johs. Pedersen: *Almene begreber fra logik, mængdelære og algebra*. Munksgaard, København 1964. 388 s. D.kr. 30.00.

Lidt om matematisk logik 1–64 * Om mængder og mængdealgebra 65–126 * Om løsning af åbne udsagn 127–185 * Relationer og funktioner 186–301 * Grundbegreber fra algebraen 302–380 * Litteraturfortegnelse 381–383 * Symbolliste 384 * Stikordsregister 385–388.

Lothar Collatz: *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 120.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964. 6 + 371 S., 96 Fig. DM 58.00.

Typische Fragestellungen der numerischen Mathematik 1–12 * Einige Typen von Räumen 12–36 * Ordnungen 36–41 * Konvergenz und Vollständigkeit 41–61 * Kompaktheit 61–69 * Operatoren in pseudometrischen und spezielleren Räumen 69–88 * Operatoren in Hilberträumen 88–110 * Eigenwertaufgaben 110–132 * Vektornormen und Matrixnormen 132–144 * Weitere Sätze über Vektor- und Matrixnormen 144–160 * Der Fixpunktsatz für das allgemeine Iterationsverfahren in pseudometrischen Räumen 160–169 * Spezialfälle des Fixpunktsatzes und Abänderung des Operators 169–177 * Iterationsverfahren bei Gleichungssystemen 177–185 * Gleichungssysteme und Differenzenverfahren 185–200 * Iterationsverfahren bei Differential- und Integralgleichungen 200–213 * Ableitung von Operatoren in supermetrischen Räumen 213–224 * Aufstellung von Iterationsverfahren 224–239 * Regula falsi 239–251 * Newtonsches Verfahren mit Verschärfungen 251–264 * Monotonie und Extremalprinzipien beim Newtonschen Verfahren 264–275 * Monotone Operatoren 275–286 * Weitere Anwendungen des Schauderschen

Satzes 286–296 * Montone Art bei Matrizen und Randwertaufgaben 296–308 * Anfangswertaufgaben und weitere Monotoniesätze 309–320 * Approximation von Funktionen 320–338 * Diskrete Tschebyscheff-Approximation und Austauschverfahren 338–349 * Anhang: Zum Schauderschen Fixpunktsatz 350–355 * Literaturverzeichnis 356–362 * Namenverzeichnis 363–365 * Sachverzeichnis 366–371.

Pierre Euclide Conner — Edwin Earl Floyd: *Differentiable periodic maps*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 33.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964. 8 + 148 S. Cloth DM 26.00.

Introduction 1–5 * The bordism groups 5–38 * Computation of the bordism groups 38–49 * The G -bordism groups 50–59 * Differentiable involutions 59–75 * Differentiable actions of $(\mathbb{Z}_2)^k$ 75–81 * Differentiable involutions and bundles 81–89 * The structure of $(\mathbb{Z}_p)$, p an odd prime 89–103 * Fixed points of maps of odd prime period 104–124 * Actions of finite abelian groups of odd prime power order 124–146 * List of references 146–148.

A. P. Domoryad: *Mathematical games and pastimes*. (Popular lectures in mathematics, 10.) Translated from the Russian by Halina Moss. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris; MacMillan Book Co., New York 1964. 11 + 298 pp.

Various systems of notation 1–9 * Some facts from the theory of numbers 10–14 * Congruences 15–19 * Continued fractions and indeterminate equations 20–30 * Pythagorean and heronic triples of numbers 31–32 * Arithmetical pastimes 33–36 * Numerical tricks 37–44 * Rapid calculations 45–56 * Numerical giants 57–60 * Games with piles of objects 61–70 * Meleda 71–74 * Lucas' game 75–76 * Solitaire 77–78 * "The game of fifteen" and similar games 79–85 * Problems on determining the number of ways of reaching a goal 86–96 * Magic squares 97–104 * Euler squares 105–106 * Pastimes with dominoes 107–108 * Problems connected with the chess board 109–119 * Making up timetables 120–123 * "The problem of Josephus Flavius" and similar ones 124–126 * Pastimes connected with objects changing places 127–135 * The simplest methods of constructing pleasing patterns 136–141 * Regular polygons from rhombi 142–144 * The construction of figures from given parts 145–148 * Construction of parquets 149–157 * Re-cutting of figures 158–165 * The construction of curves 166–187 * Mathematical borders 188–192 * Models of polyhedra 193–201 * Pastimes with sheet and a strip of paper 202–206 * The four-colour problem 207–210 * Drawing figures at one stroke of the pencil 211–214 * Hamilton's game 215–218 * Arranging points on a plane and in space 219–221 * Problems of a logical nature 222–231 * Rag-bag 232–245 * Notes and answers to problems 246–296 * Bibliography 297–298.

Nelson Dunford — Jacob T. Schwartz: *Linear operators, part II*. (Pure and applied mathematics, 7.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London, Sydney 1964. 9 + 1064 pp. sh. 265/–.

B -Algebras 859–886 * Bounded normal operators in Hilbert space 887–936 * Miscellaneous applications 937–1184 * Unbounded operators in Hilbert space

1185–1277 * Ordinary differential operators 1278–1628 * Linear partial differential equations and operators 1629–1772 * Appendix 1773–1784 * References 1785–1884 * Notation index 1885–1888 * Author index 1889–1898 * Subject index 1899–1923.

Torgil Ekman — Carl-Erik Fröberg: *Lärobok i Algol*. Studentlitteratur, Lund 1964. 4 + 126 s. Genom Lunds studentkårs intressebyrå sv.kr. 16.25. Genom bokhandeln sv.kr. 20.00.

Bakgrund och historik 1–5 * Grundläggande begrepp 6–13 * Beräkningssatser och sammansatta satser 14–17 * Villkorsuttryck och villkorssatser 18–25 * Typdeklarationer och fältdeklarationer 26–32 * Block och blockstruktur 33–39 * Hopp-satser 40–49 * Väljare 50–54 * Deklarationer markerade med »own« 55–57 * Repetitionssatser 58–68 * Algol-kommentarer 69–71 * Funktionsprocedurer 72–78 * Procedurer 79–91 * Strängar och procedurer i maskinkod 92–93 * Metaspråket och Algol-rapporten 94–96 * Om vissa egenheter i Algol 60 97–100 * In- och utmatning 101–103 * Realisering av Algol 60 på datamaskin 104–107 * Om kompilatorkonstruktion 108–111 * Algols framtid 112–114 * Lösningar och svar till övnings-exempel 115–122 * Litteratur 123 * Register 124–126.

B. A. Fuchs — B. V. Shabat: *Functions of a complex variable and some of their applications. Vol. I*. Translated from the Russian by J. Berry. (International series of monographs on pure and applied mathematics, 51.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1964. 13 + 431 pp. sh. 70/–.

Introduction 1–19 * The fundamental ideas of complex analysis 20–51 * Conformal mappings 52–79 * Elementary functions 80–118 * Applications to the theory of plane fields 119–175 * The integral representation of a regular function. Harmonic functions 176–226 * Representation of regular functions by series 227–285 * Applications of the theory of residues 286–353 * Mapping of polygonal domains 354–405 * Answers and hints for solution of exercises 406–426 * Index 427–431.

Paul R. Garabedian: *Partial differential equations*. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney 1964. 12 + 672 pp. sh. 105/–.

The method of power series 1–17 * Equations of the first order 18–56 * Classification of partial differential equations 57–100 * Cauchy's problem for equations with two independent variables 101–135 * The fundamental solution 136–174 * Cauchy's problem in space of higher dimension 175–225 * The Dirichlet and Neumann problems 226–275 * Dirichlet's principle 276–311 * Existence theorems of potential theory 312–348 * Integral equations 349–387 * Eigenvalue problems 388–421 * Tricomi's problem; formulation of well posed problems 422–457 * Finite differences 458–499 * Fluid dynamics 500–557 * Free boundary problems 558–613 * Partial differential equations in the complex domain 614–650 * Bibliography 651–662 * Index 663–672.

R. Giles: *Mathematical foundations of thermodynamics* (International series of monographs on pure and applied mathematics, 53.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1964. 9+237 pp. sh. 70/-.

Introduction 1-8 * Fundamental concepts 9-29 * Formal processes 30-36 * Components of content 37-40 * Irreversibility 41-47 * Mechanical systems and adiabatic processes 48-55 * Entropy 56-59 * Topological considerations 60-71 * Thermodynamic space 72-81 * Equilibrium states and potential 82-89 * Perfect equilibrium states 90-95 * Thermodynamics of a rigidly enclosed system 96-111 * Systems of variable volume 112-118 * Electric and magnetic systems 119-129 * Galilean thermodynamics 130-148 * Symmetry in thermodynamics 149-162 * Special relativistic thermodynamics 163-190 * Appendix A. The formal theory 191-214 * Appendix B. Subadditive functions on a group 215-222 * Appendix C. The physical basis for the adjoint representation 223-228 * References 229-230 * Index 231-236 * Symbol index 237.

Karl Peter Grotemeyer: *Analytische Geometrie*. Dritte, neubearbeitete Auflage. (Sammlung Götschen 65/65a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1964. 218 S. DM 5.80.

Literaturverzeichnis 6 * Einleitung 7 * Die Vektoralgebra 7-26 * Das Koordinatensystem 26-32 * Geraden und Ebenen 32-52 * Kugeln 52-60 * Der Matrizenkalkül 60-74 * Affine Abbildungen 74-85 * Bewegungen 85-98 * Ähnliche (äquiforme) Abbildungen 98-99 * Die Flächen 2. Ordnung 100-155 * Einführung in die projektive Geometrie des Raumes 155-176 * Behandlung der Quadriken im Rahmen der projektiven Geometrie 177-200 * Ergänzungen 200-214 * Namen- und Sachverzeichnis 215-218.

J. Heading: *Mathematics problem book I, algebra and complex numbers*. (The Commonwealth and international library. Mathematics div., vol. 12.) Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, Paris, Frankfurt; Macmillan Book Co., New York 1964. 8+184 pp. sh. 21/-.

Determinants 1-19 * The solution of polynomial equations 20-30 * The theory of equations 31-39 * Partial fractions and the binomial series 40-51 * The exponential and related series 52-60 * The logarithmic series 61-69 * Finite series 70-76 * Convergence and miscellaneous series 77-87 * Algebraic curves 88-94 * Inequalities 95-101 * Hyperbolic functions 102-108 * Matrix algebra 109-132 * The Argand diagram 133-140 * Conformal transformations 141-151 * Real and imaginary parts 152-161 * de Moivre's theorem and applications 162-172 * Complex roots of equations 173-180 * Cauchy-Riemann equations 181-184.

Günther Hellwig: *Differentialoperatoren der mathematischen Physik*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964. 11+253 S. Ganzl. DM 36.00.

Der Hilbertsche Raum 1-31 * Lineare Operatoren 31-91 * Spektraltheorie vollstetiger Operatoren 91-127 * Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren 128-191 * Das Weyl-Stonesche Eigenwertproblem 191-239 * Anhänge 239-246 * Literaturverzeichnis 247-249 * Namen und Sachverzeichnis 250-253.

Hans Hermes: *Einführung in die mathematische Logik. Klassische Prädikatenlogik.* (Mathematische Leitfäden.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1963. 187 S. DM 29.60.

Einführung 9–49 * Die Sprache der Prädikatenlogik 50–70 * Semantik der Prädikatenlogik 71–82 * Ein Prädikatenkalkül 83–113 * Der Gödelsche Vollständigkeitssatz 114–139 * Das Peanosche Axiomensystem 140–156 * Ergänzungen 157–178 * Weiterführende Literatur 179 * Verzeichnis der Kurzbezeichnungen für definierende und abgeleitete Regeln 180 * Bezeichnungen und Symbole 181 * Namen- und Sachverzeichnis 182–187.

J. L. Hodges — E. L. Lehmann: *Basic concepts of probability and statistics.* Holden-Day Inc., San Francisco 1964. 10 + 375 pp. \$ 6.95.

Probability models 3–34 * Sampling 35–54 * Product models 55–76 * Conditional probability 77–117 * Random variables 118–147 * Special distributions 148–187 * Multivariate distributions 188–212 * Estimation 213–227 * Estimation in measurement and sampling models 228–251 * Optimum methods of estimation 252–274 * Tests of significance 275–290 * Tests for comparative experiments 291–322 * The concept of power 323–353 * Tables 354–364 * Index 365–371 * Example index 373–375.

Guido Hoheisel: *Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.* Vierte Auflage. (Sammlung Göschen 1059/1059a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1964. 153 S. DM 5.80.

Differentialgleichungen erster Ordnung 6–55 * Differentialgleichungen höherer Ordnung 56–83 * Systeme von Differentialgleichungen 83–94 * Vermischte Aufgaben 94–153.

A. Ya. Khintchine: *Continued fractions.* Translated from the Russian by Peter Wynn. P. Noordhoff, Groningen 1964. 101 pp. D.fl. 16.25.

The properties of the calculus 6–21 * The representation of numbers by means of continued fractions 22–59 * The metric theory of continued fractions 60–101.

J. P. LaSalle — J. B. Diaz (editors): *Contributions to differential equations. Vol. 2.* Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1964. 4 + 491 pp. sh. 124/–.

Glick: Euler–Cauchy polygon method 1–59 * Hale — Onuchic: Asymptotic behaviour of solutions 60–75 * Morozan: Problème de S. Lefschetz I 77–90 * Coleman: Points and oscillations in 3-space 91–122 * Bogoliubow — Mitropolsky: Methods of integral manifolds 123–196 * Sherman: Third order nonlinear system 197–227 * Bramble — Hubbard: A priori bounds on the discretization error in the numerical solution of the Dirichlet problem 229–252 * Harris, Jr.: Difference equations 253–276 * Conlan — Diaz: Existence of solutions of hyperbolic partial diff. equation 277–289 * Hale: Linear functional diff. equation 291–317 * Bramble — Hubbard: A theorem on error estimation for elliptic equations 319–340 * Seifert:

Periodic integral surfaces for periodic systems 341–350 * Bushaw: Dynamical polysystems and optimization 351–365 * Leighton: Liapunov functions for non-linear diff. equations 367–383 * Jones: Asymptotic fixed point theorems 385–405 * Yoshizawa: Stable sets and periodic solutions in a perturbed system 407–420 * Kelman: Axisymmetric potentials in composite geometries 421–440 * Gilbert: Integral operator methods in biaxially symmetric potential theory 441–456 * Kupka: Contribution à la théorie des champs génériques 457–484 * Struble: Resonant oscillations of the Duffing equation 485–489 * Author index 491.

George A. Miller: *Mathematics and psychology*. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney 1964. 10 + 295 pp. sh. 42/–.

Varieties of mathematical psychology 1–7 * Discursive applications 8–31 * Normative applications 32–91 * Functional applications: Determinate 92–146 * Functional applications: Statistical 147–221 * Structural applications 222–269 * Quasi-mathematical psychology 270–292 * Name index 293–295.

Dietrich Morgenstern: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 124). Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964. 12 + 224 S. DM 34.50.

Elementare Wahrscheinlichkeitsfelder 4–9 * Einblick in die Kombinatorik 9–16 * Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit 16–23 * Zufällige Grössen und Erwartungswert 24–31 * Das Gesetz grosser Zahlen 31–35 * Verteilung der Summe unabhängiger zufälliger Grössen 35–46 * Zentraler Grenzwertsatz 46–61 * Statistische Probleme im Bernoullischen Fall 62–68 * Mehrdimensionale Verteilungen 68–83 * Stichprobentheorie 83–90 * Definition und Rechnen mit Dichten zufälliger Grössen 91–107 * Die empirische Verteilungsfunktion unabhängiger Grössen mit derselben Verteilung 108–121 * Geordnete Stichproben und Anordnungseigenschaften unabhängiger Grössen mit gleicher Verteilung 121–137 * Statistisches Alternativproblem 138–145 * Schadensfunktion und Sequentialverfahren für das Alternativproblem 146–156 * Normalverteilung und zentraler Grenzwertsatz 156–163 * Allgemeine Schätztheorie 163–181 * Schätzungen bei linearen Modellen 181–196 * Allgemeine Testtheorie 196–204 * Testtheorie bei linearen Modellen 204–216 * Literaturverzeichnis 217–220 * Namen- und Sachverzeichnis 221–224.

G. D. Mostow — J. H. Sampson — J. P. Meyer: *Fundamental structures of algebra*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1963. 16 + 585 pp. sh. 69/6.

Binary operations and groups 1–27 * Rings, integral domains, the integers 28–80 * Fields, the rational numbers 81–99 * The real number system 100–117 * The field of complex numbers 118–132 * Polynomials 133–162 * Rational functions 163–170 * Vector spaces and affine spaces 171–215 * Linear transformations and matrices 216–265 * Groups and permutations 266–303 * Determinants 304–340 * Rings of operators and differential equations 341–378 * The Jordan normal form 379–432 *

Quadratic and Hermitian forms 433–493 * Quotient structures 494–513 * Tensors 514–574 * Index 575–585.

A. Mostowski — M. Stark: *Introduction to higher algebra*. (International series of monographs on pure and applied mathematics, 37.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1964. 474 pp. sh. 45/-.

Introduction 11–27 * Some combinatorial problems 28–56 * Complex numbers 57–103 * Determinants 104–162 * Vector spaces and linear equations 163–201 * Polynomials in one variable 202–266 * Rings of real and complex polynomials 267–304 * Ring of rational polynomials; algebraic and transcendental numbers 305–327 * Polynomials in several variables and symmetric functions 328–370 * The theory of elimination 371–394 * Quadratic and Hermitian forms 395–448 * Appendix. Some properties of matrices and quadratic forms 449–468 * Index 469–474.

Josip Plemelj: *Problems in the sense of Riemann and Klein*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics, 16.) Translation by J. R. M. Radok. Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London, Sydney 1964. 7 + 175 pp. sh. 60/-.

Linear differential equations 3–105 * Integral equations 107–173 * Index 175.

Walter Rudin: *Principles of mathematical analysis*. Second edition. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, San Francisco, Toronto, London 1964. 9 + 270 pp. sh. 62/-.

The real and complex number systems 1–20 * Elements of set theory 21–40 * Numerical sequences and series 41–71 * Continuity 72–88 * Differentiation 89–103 * The Riemann–Stieltjes integral 104–129 * Sequences and series of functions 130–157 * Further topics in the theory of series 158–181 * Functions of several variables 182–226 * The Lebesgue theory 227–258 * Bibliography 259 * List of frequently occurring symbols 260 * Index 265–270.

Robert Sauer: *Ingenieur-Mathematik. Band I. Dritte, erweiterte Auflage*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964. 8 + 328 S., 179 Fig. Ganzl. DM 26.00.

Differential- und Integralrechnung für Funktionen von einer Veränderlichen 3–184 * Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Veränderlichen 184–276 * Lineare Algebra 276–299 * Beweise 300–323 * Sachverzeichnis 324–328.

Horst Schubert: *Topologie, eine Einführung*. (Mathematische Leitfäden.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1964. 327 S.

Topologische Räume 9–98 * Uniforme Räume 99–150 * Homotopie 151–231 * Singuläre Homologietheorie 232–313 * Anhang. Grundbegriffe der Mengenlehre 314–319 * Literaturhinweise 320 * Namen- und Sachverzeichnis 321–327.

P. A. Shirokov: *A sketch of the fundamentals of Lobachevskian geometry*. Translated from the Russian by Leo F. Boron. P. Noordhoff, Groningen 1964. 88 pp. D.fl. 11.75.

Euclid's and Lobachevsky's parallel postulates and their relation to the problem of the sum of the angles of a triangle and to the problem of the existence of similar figures 11–19 * Parallel lines and their simplest properties 20–27 * Fundamental properties of intersecting, divergent and parallel lines 28–34 * Pencils of lines and simplest curves in the Lobachevskian plane 35–49 * Fundamental theorems of Lobachevskian stereometry 50–61 * Derivation of the fundamental formulas of Lobachevskian trigonometry 62–71 * A short survey of the further construction of Lobachevskian geometry 72–76 * Various interpretations of the Lobachevskian plane 77–86 * List of books for further reading 87 * Index 88.

I. S. Sokolnikoff: *Tensor analysis*. Second edition. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney 1964. 12 + 361 pp. sh. 74/–.

Linear vector spaces. Matrices 1–49 * Tensor theory 50–104 * Geometry 105–205 * Analytical mechanics 206–286 * Relativistic mechanics 287–312 * Mechanics of continuous media 313–352 * Bibliography 353 * Index 355–361.

Karl Strubecker: *Differentialgeometrie I*. Kurventheorie der Ebene und des Raumes. Zweite, erweiterte Auflage. (Sammlung Götschen 1113/1113a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1964. 253 S. DM 5.80.

Literaturverzeichnis 5 * Einleitung 6 * Theorie der ebenen Kurven 6–127 * Theorie der Raumkurven 128–246 * Namen- und Sachverzeichnis 247–253.

L. Fejes Tóth: *Regular figures*. (International series of monographs on pure and applied mathematics, 48.) Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Paris, Frankfurt 1964. 11 + 339 pp. sh. 84/–.

Plane ornaments 3–55 * Spherical arrangements 56–83 * Hyperbolic tessellations 84–101 * Polyhedra 102–123 * Regular polytopes 124–150 * Figures in the euclidean plane 151–212 * Spherical figures 213–237 * Problems in the hyperbolic plane 238–262 * Problems in 3-space 263–307 * Problems in higher spaces 308–325 * Post-script 326 * Bibliography 327–332 * Index 333–339.

V. I. Zubov: *Methods of A. M. Lyapunov and their application*. Translated from the Russian by Leo F. Boron. P. Noordhoff, Groningen 1964. 16 + 263 pp. D.fl. 33.60; \$ 9.40.

Introduction 1–7 * Stability of invariant sets of a dynamical system in metric space 9–66 * Investigation of the problem of stability of motion for systems of ordinary differential equations 67–165 * Investigation of a neighborhood of the trivial solution of the differential equations with the aid of Lyapunov's first method 166–195 * Investigation of the stability of invariant sets of general systems 196–234 * Solution of the stability problem for a system of partial differential equations 235–258 * Bibliography 259–261 * Index 262–263.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1964 på de matematiske gymnaslinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. Givet en parabel med ligningen $y^2 = 4x$ samt punkterne $A(-12, 0)$ og $O(0, 0)$. Find, idet P er et vilkårligt punkt på parablen, det geometriske sted for skæringspunktet mellem linien AP og en linie gennem O vinkelret på linien OP .
Angiv den fundne kurves art og beliggenhed.

2. I en plan π er givet et kvadrat $ABCD$ med siden a . M er midtpunktet af siden AB , N er et punkt på siden BC , og R er et punkt på siden CD således beliggende, at $DR = BN$. I N tegnes normalen til π , og punktet T afsættes på normalen således, at $NT = BN$.

Bestem længden af BN således, at rumfanget af tetraedret $T-MNR$ bliver så stort som muligt.

3. Der er givet to liniestykker p og q .

Konstruer en trekant ABC , således at $BC = 2AB$, $BD = p$ og $DC = q$, hvor D betegner skæringspunktet mellem siden BC og halveringslinien for vinkel A .

Diskussion kræves.

Beregn sider og vinkler i trekant ABC , når $p = 2,464$ og $q = 3,696$.

Matematik II.

1. Løs ligningen

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}.$$

2. Undersøg og tegn kurven med ligningen

$$y = x\sqrt{4-x^2}.$$

En figur F i første kvadrant begrænses af kurven, dennes tangent i $(0, 0)$ og en kurvetangent, som er parallel med x -aksen.

Bestem arealet af F .

3. En plan skærer en omdrejningskegelflade i en ellipse med storaksen 12 og excentriciteten $\frac{1}{6}$. Planens vinkel med keglefladens akse er lig med keglefladens toppunktsvinkel.

Bestem keglefladens toppunktsvinkel.

Bestem afstandene fra keglefladens toppunkt til hvert af ellipsens fire top-punkter.

FINLAND

Längre kursen.

1. Ett snälltåg av längden a passerar på tiden t ett i samma riktning gående godståg, vars längd är b och hastighet v . Hur lång tid åtgår till tågens passage då de går i motsatta riktningar? (Tiden för tågens passage är den tid, då de åtminstone delvis går jämsides.)

2. En cirkelperiferi är medelst radier delad i tjugo lika stora delar. Från ändpunkten A av en radie fälles normalen AB mot en närliggande radie, från dess fotpunkt B i sin tur normalen BC mot den närmast därpå följande radien o. s. v. Hur många procent är längden av den oändliga brutna linjen $ABC \dots$ större eller mindre än cirkelperiferin? (Två decimalers noggrannhet.)

3. För vilka värden på a är rötterna till ekvationen $x^2 + 4ax + 2 = 0$ reella och positiva samt deras positiva skillnad < 1 ?

4. Härled ekvationerna för normalerna genom origo till kurvan $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$. Rita figur.

5. Härled formeln för avståndet från punkten (x_0, y_0) till linjen $ax + by + c = 0$.

6. Genom skärningspunkterna A och B mellan cirkelarna O_1 och O_2 dras två räta linjer som skär cirkeln O_1 i en och samma punkt P och O_2 i punkterna C och D . Bevisa att kordan CD är parallell med tangenten till O_1 i punkten P . Behandla vart för sig de fall, då P faller utanför och innanför cirkeln O_2 .

7. I en likbent triangel ABC , vars ben $= a$, vrider sig baslinjen kring mittpunkten av basen AB , varvid punkterna A och B rör sig utmed C :s vinkelben till punkterna A_1 och B_1 , så att arean av triangeln A_1B_1C är två gånger ABC :s area. Beräkna summan av triangelnsidorna A_1C och B_1C .

8. Stommen till ett tält, som har formen av en pyramid med kvadratisk bas, utgöres av fyra stavar, envar av längden a . Beräkna det största värde tältets volym kan få.

9. För vilka värden på x är $\left| \frac{\cos 2x}{\sin(45^\circ - x)} \right| < 1$?

10. Beräkna arean av den figur som begränsas av parabeln $2y = x^2$ och räta linjen genom parabelns brännpunkt och punkten $(2, 2)$. Rita figur.

ÍSLAND

I.

1. Lös ligningen $z^5 + 1 = 0$.

2. I trekanten ABC er $A = 110,12^\circ$, $b = 6,731$ og $c = 5,832$. Beregn trekantens ukendte vinkler og side, dens areal og radius i dens omskrevne cirkel.

3. Om de tre følgende ligninger skal det vises, at en af dem er rigtig for alle værdier af x og en anden ikke rigtig for nogen værdi af x . En af ligningerne er rigtig for visse værdier af x . Løs denne fuldstændigt og anfør de løsninger, som ligger i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

- a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 2x$.
- b) $\cos 3x \cos x + 2 \sin^2 2x = \sin 3x \sin x + 1$.
- c) $\cos 2x + 2 \sin 2x = 7$.

4. Tegn parablerne $I: y = x^2 - 12x + 38$ og $II: 2y = 16 - x^2$. A er et punkt på I , B et punkt på II med samme abscisse, som antages positiv.

a) Udtryk arealet af trekanten OAB ved den fælles abscisse for A og B (O er origo).

b) Find maximum og minimum for trekantens areal.

c) Beskriv i hovedtræk, hvordan arealet varierer med den fælles abscisse, når der også for denne tillades negative værdier. Tegn en figur, der viser arealet som funktion af x .

II.

1. Givet funktionen

$$y = \frac{2(x-2)^2}{x^3}.$$

- a) Angiv funktionens definitionsområde.
- b) Bestem maxima og minima.
- c) Bestem kurvens asymptoter.
- d) Tegn den del af kurven, der ligger til højre for y -aksen.
- e) Bestem de tangenter til kurven, der går gennem origo.
- f) Beregn arealet af det lukkede område, der begrænses af x -aksen, linien $x=6$ og en bue af kurven.

2. En ellipse har brændpunkter i $(7,0)$ og $(-7,0)$ og går gennem $(-2,12)$.

- a) Bestem ellipsens ligning.
- b) Beregn arealet af den trekant, der bestemmes af x -aksen, ellipsens tangent i $(-2,12)$ og dens normal i dette punkt.
- c) Find hældningstallet for den diameter, der er konjugeret med diameteren gennem $(-2,12)$.

3. I en regulær firsidet pyramide $T-ABCD$ er hver side i grundfladen 2 længdeenheder og toplansvinklen mellem modstående sideflader $2u$. En plan gennem AB vinkelret på planen TCD skærer TC og TD i henholdsvis C_1 og D_1 . Volumen for pyramiden $T-ABCD$ betegnes med V , for $T-ABC_1D_1$ med V_1 .

- a) Påvis, at $\frac{V_1}{V} = \frac{\cos 2u(1 + \cos 2u)}{2}$.
- b) Bestem den værdi af u , for hvilken dette forhold bliver $\frac{3}{8}$.

NORGE

Reallinjen.

1. I likningen $2x^3 - 2ax^2 - (3a^2 + \frac{1}{2}a + 3)x - 2a^3 + a^2 + 6a = 0$ er a et reelt tall. Vis at $2a$ er en rot i likningen. Finn uttrykk for de to andre røttene i likningen. Hva for verdier av a gjør disse røttene reelle?

For $a = \frac{1}{2}$ blir venstre side i likningen lik funksjonen $2x^3 - x^2 - 4x + 3$.

Skriv nullpunktene til denne funksjonen. Finn maksimal- og minimalpunktene for den kurven som er det grafiske bildet av funksjonen. Tegn en enkel skisse.

Punktet $A(-1, 4)$ ligger på kurven. Hva er likningen for tangenten til kurven i A ?

Gjennom A kan vi legge en rett linje som er tangent til kurven i et annet punkt enn A . Finn likningen for denne tangenten også.

Regn ut det arealet i 2. kvadrant som er avgrenset av y -aksen, kurven og den siste tangenten.

2. I trekanten ABC er $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2a$ og $AC = a$. En rett linje l som ikke skjærer trekanten, går gjennom C og danner vinkelen v med AC . Vis at det rotasjonslegemet som kommer fram når trekanten blir dreid helt rundt om l som akse, har volumet

$$V = \frac{\pi a^3}{3} (\sqrt{3} \sin v + 3 \cos v).$$

Vis at volumet er størst for en viss verdi av vinkelen v , og finn dette største volumet.

Vis at uttrykket for V ovenfor kan formes om til uttrykket $2\pi RT$, der T er arealet av trekanten ABC , og R er radien i den sirkelen som tyngdepunktet i trekanten (skjæringspunktet for medianene) følger når trekanten blir dreid rundt om aksens l .

Bruk dette til å finne direkte av figuren den verdien av vinkelen v som gir det største volumet.

3. Det er gitt en sirkel med sentrum i origo og radius R , og en parabel med toppunkt $(R, 0)$, parameter $2p$ og akse langs den positive x -aksen.

Hva er likningen for polaren til et punkt $P(x_0, y_0)$ med hensyn til parabellen?

Finn likningen for det geometriske stedet til punktet P når polaren skal være tangent til sirkelen. Vis at det geometriske stedet er en hyperbel, og finn sentrum, halvaksene og likningene for asymptotene.

La $Q(x_1, y_1)$ være et parabelpunkt som ligger slik at parabeltangenten i Q også er tangent til sirkelen. Forklar hvorfor Q da må ligge på det geometriske stedet for P .

For $p = R$ blir likningen for det geometriske stedet

$$x^2 - 4Rx - y^2 + 3R^2 = 0.$$

Regn ut koordinatene til Q i dette tilfellet, og skriv likningene for fellestangentene til parabellen og sirkelen.

Tegn de gitte kurvene og det geometriske stedet når $p = R = 2$. Velg 1 cm til enhet på aksene. Tegn også fellestangentene for parabellen og sirkelen.

SVERIGE

Matematisk gren.

1. Bevisa att funktionen $y = e^{-2x} \cdot (\cos x + \sin x)$ satisfierar differentialekvationen $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$. Det förutsättes bekant, att $\frac{de^x}{dx} = e^x$.

2. I en ellips är O medelpunkten och F ena brännpunkten. Ellipsens normal i ena ändpunkten av parametern genom F skär storaxeln i N , så att $ON:OF = q$. Bevisa att ellipsens excentricitet är $\sqrt{q}$.

3. Bevisa att formeln $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4}$ gäller för alla positiva heltalsvärden på n .

4. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen x och andra termen $x+2$. Uttryck den tredje termen som funktion av x . Åskådliggör därefter funktionen grafiskt och ange eventuella asymptoter samt maximi- och minimipunkter.

5. Kordorna AB och AC i en cirkel delar dennas yta i tre lika stora delar. Bestäm vinkeln BAC i grader med en decimal och med ett fel mindre än $0,1^\circ$.

6. Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - |x^2 - x|$ är given. Studera denna funktion särskilt med avseende på maximi- och minimivärden. Upprita i skilda diagram kurvorna $y = f(x)$ och $y = f'(x)$. Ange också för vilka värden på x funktionen $f(x)$ är deriverbar.

7. I ett rätvinkligt koordinatsystem är punkterna $A(2; 0)$ och $B(0; m)$, där m är en från noll skild konstant, givna. En rörlig rät linje, parallell med linjen $y = x$, skär x -axeln i P och y -axeln i Q . De rätta linjerna AQ och BP skär varandra i R . Orten för R , då den rörliga linjen antar alla tänkbara lägen, är ett kägelsnitt. Undersök ortens utseende för olika värden på konstanten m . — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man studerar kvadraten på ortkurvas excentricitet som funktion av m och åskådliggör denna funktion grafiskt.

8. I en parabel är en korda dragen vinkelrätt mot axeln. Visa att ytan av parabelsegmentet är två tredjedelar av ytan av den rektangel, där en sida utgöres av kordan och motstående sida tangerar parabeln. Använd detta för att lösa följande uppgift:

En rät cirkulär kon skäres av ett plan parallellt med en generatris. Den inom konen belägna delen av planet blir då ett parabelsegment, vilket inte här behöver bevisas. För vilka värden på konens toppvinkel kan parabelsegmentet ha en yta, som är större än ytan av konens axelsnitt?

RESULTAT AF PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIASTER

(Opgaverne i NMT 11 (1963), s. 191–192.)

Der indkom 35 besvarelser. En præmie på kr. 150 blev tildelt Karsten R. Olesen, I m Virum Statsskole og en præmie på kr. 100 Frode Poulsen, III m Ribe Kate-dralskole.

SUMMARY IN ENGLISH

KJELL KOLDEN: *On the use of vectors and matrices in plane projective geometry.* (Norwegian.)

A point with plane projective coordinates (p_1, p_2, p_3) is represented by the row vector $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$, and a line with line coordinates (u_1, u_2, u_3) is similarly represented by the column vector $\mathbf{u}^*$. By treating these symbols partly as vectors (scalar and cross products), partly as matrices (matrix products), a rather concentrated presentment of plane projective geometry is obtained.

FINN METHLING: *Representation of logical statements by arcs of concentric circles.* (Danish.)

In the figure p. 98, two statements A and B and some of their logical combinations are represented by arcs of concentric circles.

JENS ERIK FENSTAD: *Algorithms in mathematics: An introduction to recursion theory and its applications, II.* (Norwegian.)

In part II, the earlier results on recursively enumerable sets are used in an exposition of a generalized version of Gödel's theorem, the original application to formalized arithmetic being sketched. The last section discusses recursive unsolvability in group theory giving an account of Rabin's results. A miniature guide to the literature is appended.