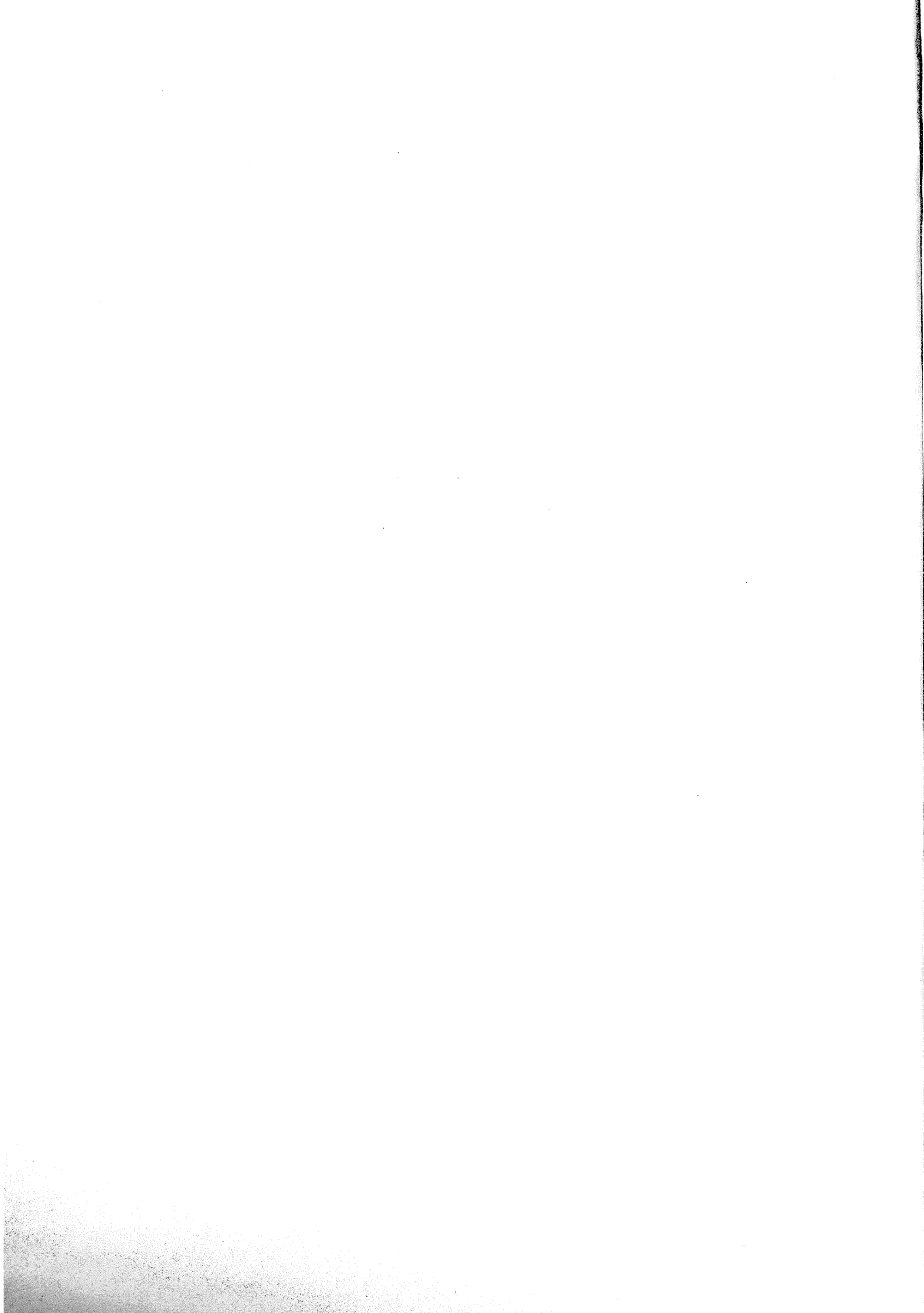
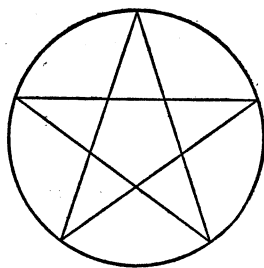


**NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT**



NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 12



OSLO 1964

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.
Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.
Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.
Matemaattisten aineiden opettajien liitto – Finlands matematik-, fysik-
och kemilärarförbund.
Íslenska stærðfræðafélagið.
Norsk matematisk forening.
Norsk lektorlags matematikkseksjon.
Svenska matematikersamfundet.
Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.
Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.
Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

REDAKSJON:

David Fog, Carl-Erik Fröberg, G. af Hällström,
Bo Kjellberg, Regnar Norgil, Bertil Nyman, Ragnar J. Solvang,
B. L. Stara, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.
Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSER:

Redaksjon: Matematisk Institutt, Allégt. 34, Bergen.
Ekspedisjon: Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.



Axel Thue

AXEL THUE 1863–1922

R. TAMBS LYCHE

En av norsk vitenskaps eiendommeligste og mest originale forskerpersonligheter, Axel Thue, ble født i Tønsberg 19. februar 1863. Da han døde i mars 1922 var det bare få som var klar over at han hadde satt spor etter seg som vil bevare hans navn for ettertiden som en av våre store matematikere.

Geologen, professor J. H. L. Vogt, har fortalt følgende anekdote om ham. Vogt, som da var dekanus ved Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet, rådet Thue til å søke et adjunktstipendium som nettopp var blitt ledig. Thue innvendte at han visste ikke hvordan han skulle skrive en slik søknad, så Vogt hjalp ham med å sette opp en kladd: »Til Det Ak. Coll. Undertegnede . . . osv. Kristiania, dato, N. N.« Noen tid etter kom ganske riktig søknaden, en tro kopi av Vogts kladd med forkortelser og det hele, undertegnet »N. N.« Det hører med til historien at Thue fikk stipendiet.

Praktisk var i hvert fall Thue ikke. Selv har han flere steder gitt uttrykk for sitt syn på det praktisk nyttige kontra det teoretisk grunnleggende. »Jo fjernere fra nytte og praktisk anvendelse, desto viktigere«.

I en avhandling om »tegnrekker« — kanskje det første (?) arbeide på dette område som senere med hell har vært tatt opp av andre — har han tilsynelatende følt et behov for å forklare at han kunne gi seg av med noe så åpenbart »unyttig«. Han sier nemlig innledningsvis at »det er av betydning å stille problemer som det viser seg å være vanskelig å løse«. Mange vil kanskje mene at det er mange nok av slike problemer på forhånd, om en ikke akkurat skal lage dem med hensikt. Men Thues mening er jo klar: når det viser seg å være vanskelig å løse et problem, tyder det på at det rører ved dyptliggende logiske sammenhenger.

En annen eiendommelighet ved Axel Thue som forsker henger sammen med at han hadde store vanskeligheter med å lese hva andre hadde skrevet. Så snart han var klar over problemstillingen i et arbeide, begynte hans egen tankevirksomhet å ta fatt, og resultatet ble da som regel at han la arbeidet til side, og forfulgte tankegangen ut fra sine egne, som oftest svært originale, synsmåter. Han ble derfor aldri noen *lærd* matematiker. Hans forskning kunne sjelden starte ut fra det som allerede var oppnådd på et bestemt område; hans arbeidsmåte var å starte fra grunnen av, noe som naturligvis svært ofte førte til at han gjorde oppdagelser som det viste seg andre hadde nådd fram til før. Dette bekymret ham dog ikke særlig, bortsett fra at han da mistet all interesse for emnet, og tok fatt på noe annet — det var jo alltid nok å ta av.

Det er kanskje ikke så overraskende at Thues hovedinnsats, med en slik innstilling og arbeidsmåte, først og fremst kom til å ligge innenfor tallteorien, der så mange uløste problemer ligger så vidt nær grunnlaget, at det å være *lærd* på området er av mindre betydning enn på de fleste andre områder av matematikken. Det var formodentlig forsøket på å løse Fermats problem som førte Thue inn på studiet av ubestemte likninger, det studiet som førte fram til »Thues sats« om »uløsheten i store tall« av ubestemte likninger i to variable av en meget almen karakter. For å nå dette resultat, trengte Thue en vurdering av muligheten for tilnærming av irrasjonale algebraiske tall ved rasjonale tilnærmingverdier. Det var ikke tilstrekkelig med det resultat som Liouville på svært enkel måte hadde vist: er ϱ et irrasjonalt algebraisk tall av grad n , så har ulikheten

$$\left| \varrho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

et begrenset antall løsninger i hele tall p og q . Det var nødvendig å vise at eksponenten n her er unødig høy. Det lyktes Thue ved et ytterst sindrig bevis å erstatte n med $\frac{1}{2}n$, og dette var tilstrekkelig til å kunne utlede setningen om ubestemte likninger. Men med utgangspunkt i Thues

resultat har senere forskere ytterligere skjerpet tilnærmingssetningen, inntil punktum ble satt i 1958, da den engelske matematiker Klaus F. Roth, til den matematiske verdens forbauselse, kunne vise at en istedenfor n , eller Thues $\frac{1}{2}n$, kunne sette ethvert tall > 2 . Men det var Axel Thue som innledet denne »Thue–Siegel–Dyson– . . . –Roth’s sats«.

Det var nesten noe av et paradoks at Axel Thue, da han endelig ble professor ved universitetet i Kristiania, fikk professoratet i »anvendt matematikk«. Men en ville ta helt feil av Thue om en mente at han ville forsømme den »anvendte matematikk« (dvs. den rasjonelle mekanikk i følge universitetets tradisjonelle oppfatning av begrepet), for bare å sysle med tallteori og andre ikke-»anvendte« matematiske emner. Sitt professorat tok han tvertom meget alvorlig — men naturligvis på sin egen maner. Hans forelesninger over mekanikk ble mønstergyldige med hensyn til helhetssyn og streng logisk oppbygning. Men for å oppnå dette, måtte han først bygge opp en abstrakt vektorteori som han kalte »pilteori«. Denne Thues »pilteori«, som han bygget hele den rasjonelle mekanikk på, var i seg selv et logisk byggverk av stor skjønnhet. At den ikke kom til å slå igjennom hos andre, er åpenbart fordi vektorregningen, slik den etter hvert er blitt utformet, har vist seg som et i lengden mere hensiktsmessig verktøy.

Som menneske var Axel Thue det mest stillferdige og beskjedne en kan tenke seg. Med litt mindre av disse i og for seg så sympatiske egenskaper er det mulig at hans liv og vitenskapelige innsats kunne ha artet seg noe annerledes og levnet ham mere tid og krefter til å utfolde sine sjeldne evner. Som det var, kom han til hele sitt liv å være plaget av økonomiske bekymringer som tvang ham til å skjøte på sine inntekter med ekstra undervisningsarbeide — noe hans ikke altfor robuste helbred slett ikke tålte.

OM VERKSAMHETEN INOM NORDISKA KOMMITTÉN FÖR MODERNISERING AV MATEMATIKUNDERVISNINGEN

MATTS HÅSTAD

Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen startade sin verksamhet 1960 som en kommitté under Nordiska Kulturkommissionen. Den har sexton ledamöter, fyra från vardera Danmark, Finland, Norge och Sverige. Ledamöterna är matematiklärare från skola och universitet, skoladministratörer m. fl.. En är representant från industrin. Kommittén har hela skolans matematikkurser på sitt program.

Verksamheten inleddes med att kommittén lät utarbeta en preliminär kursförteckning. Målsättningen var därvid att matematikundervisningen skulle bättre än nuvarande kurser motsvara de krav som det moderna samhället ställer.

Utvecklingen under det senaste århundradet avspeglas i kursförteckningen genom införande av nya avsnitt såsom mängdlära, vektorer och sannolikhetslära. Vidare har vissa uteslutningar skett av delar som befunnits överflödiga. Detta gäller särskilt geometriska moment. Även tillämpningar ges i högre grad än för närvarande utanför geometrin och hämtas bl. a. från andra ämnen som fysik, teknik, ekonomi och samhällsvetenskaperna. Man har försökt anpassa kursen efter det ökade bruket av räknesticka, räknemaskiner och datamaskiner. Träningen i numeriska räkningar har därför delvis omgestaltats.

Lösandet av komplicerade problem reduceras. I stället bör tid läggas ned på att ge eleverna större insikt och förståelse. Detta bör kunna uppnås genom att de grundläggande begreppen behandlas mer ingående. Försök har visat att man med framgång vid relativt tidig ålder kan introducera allmänna, grundläggande begrepp med utgångspunkt i konkreta situationer från elevernas egen erfarenhet, samtidigt som man ej ställer för stora krav på deras räkneskicklighet. Med hjälp av dessa enklare begrepp kan sedan mer komplicerade förhållanden lättare förklaras. Viktigt är också att göra eleverna intresserade av matematikundervisningen.

Kommittén har funnit det väsentligt att verkligen pröva dessa idéer genom försöksverksamhet i skolorna. Den har därför engagerat författare

som i team utarbetar försökstexter. Dessa texter provas sedan läsåret 1961–62 i Nordens skolor. Försöksverksamhet har bedrivits i 600–700 klasser t. o. m. läsåret 1963–64 med i allmänhet flera texter i samma klass. Lärarna har delgivit kommittén sina erfarenheter. Till och med läsåret 1963–64 har tjugo olika försökstexter utgivits. Förutom användning i skolorna har texter sålts till intresserade lärare. Sammanlagt har 40–50 000 exemplar av texterna utgivits.

I fortsättningen ges en kort beskrivning av innehållet i de olika texterna. Vidare redogöres för de insända rapporterna.

ÅRSKURS 1–3.

Text: Matematik för årskurs 1 del IA (M 1 IA)¹.

Innehåll: Tonvikten i texten ligger på att klargöra talbegreppet. Begreppen mängd, element och union av mängder införes jämte symbolerna $\{ \}$ och $\cup$. Talen införes som antal element i mängder. Addition diskuteras relativt sent och som ett uttalande om antalet element i unionen av två mängder. Symbolerna $\neq$, $=$, $>$ och $<$ införs. Givetvis introduceras alla begrepp med utgångspunkt från den föreställningsvärld och det språk som är barnens. Aktivt arbete med pedagogiska hjälpmedel — klossar, flaneltavla etc. — spelar en viktig roll.

Erfarenheter: Texten provas läsåret 1963–64.

Text under arbete: Matematik för årskurs 1 del IB (M 1 IB).

Innehåll: Subtraktion införes föregånget av utfyllnadsövningar med addition varvid konkreta operationer med mängder utnyttjas. Minustecknet används första gången i mitten av vårterminen första året. Skrivsätt med positionssystemet för talen 0–100 behandlas.

Planerade texter: Texter för årskurs 2 och 3 planeras. Multiplikation definieras med anknytning till antal element i en produktmängd (elementen ordnade i ett rektangulärt schema) och division förbereds genom övningar av typen $3 \cdot \square = 18$, $\square \cdot 2 = 4$. Även något geometri skall behandlas.

ÅRSKURS 4–6.

Text: Matematik för årskurs 4 del I (M 4 I).

Innehåll: Texten är en översättning av en experimenttext, som ingår i ett stort projekt i U. S. A. (School Mathematics Study Group). Den utnyttjar vissa enkla begrepp och symboler från mängdläran, diskuterar talskrivning i andra positionssystem än tio-systemet samt behandlar egenskaper hos de fyra räknesätten.

¹ Beteckningen inom parentes anges vid beställning av texten.

Texter under arbete: Kommittén avser att, om försöken med de första delarna blir framgångsrika, översätta hela textserien för årskurserna 4–6. Från innehållet i texterna kan nämnas en förberedande geometrikurs, ingående diskussioner av de centrala egenskaperna hos de fyra räknesätten på naturliga tal, rationella tal och decimaltal, enkla användningar av variabler, introduktion till koordinatsystem och negativa tal.

Erfarenheter: Texterna för årskurs 4 provas läsåret 1963–64. Endast ett fåtal klasser är engagerade.

ÅRSKURS 7–9 (STÖRRE KURSEN).

Text: Algebra del I (A 7–9 I).

Innehåll: Texten inleds med några enkla begrepp och symboler från mängdläran såsom mängd, element, delmängd, union och snitt. Innebörden i orden »och» och »eller» diskuteras och begreppen »utsaga» (uttalande, omdöme, påstående) och »öppen utsaga» införs. De »öppna utsagorna» omfattar både ekvationer och olikheter, vilka på detta sätt kan behandlas gemensamt. De grundläggande räknelagarna för addition och multiplikation diskuteras och dessa räknesätts sammanhang med subtraktion och division behandlas.

Erfarenheter: Texten provas sedan läsåret 1962–63. 14 rapporter från 22 klasser (i Finland och Sverige) har inlämnats. Inte i någon rapport avstyrks att arbetet efter textens riktlinjer skall fortsätta. I några fall sägs »mängdläran» vara så lättfattlig att den kan behandlas före årskurs 7. Elevernars reaktioner bedöms vara lika eller mera positiva än vid den vanliga kursen. I större delen av rapporterna anmäls svårigheter att intressera eleverna för ett avsnitt om tillordningsregler, vilket föregår diskussionen av räknelagarna för de naturliga talen. I några rapporter önskar man att negativa tal införes i textens andra kapitel före lösningen av ekvationer och olikheter i kapitel 3. Texten har med ett undantag fått ett positivt mottagande. Den innehåller väsentligt mer beskrivande text än vanliga skolböcker i matematik. Det har rapporterats vissa svårigheter för eleverna att själva läsa den beskrivande texten.

Text: Algebra del II (A 7–9 II).

Innehåll: Denna del skall i huvudsak läsas i sjunde årskursen. Den innehåller kapitel om faktorisering (potenser), rationella tal, andra positionssystem, decimaltal, närmevärden och procent. Närmevärden diskuteras ingående. I kapitlet om procent koncentreras arbetet på förståelse av procentbegreppet och endast ett minimum av »handelsterminologi» ges.

Erfarenheter: Texten började provas under vårterminen 1963. Det är ännu för tidigt att uttala sig om resultatet.

Text: Algebra del III (A 7–9 III).

Innehåll: De negativa talen införs liksom absolutbelopp. Koordinat-systemet behandlas föregånget av övningar i grafisk avbildning av par av hela tal. I ett kapitel behandlas polynom och brutna rationella uttryck (förenklingar, faktorruppdelningar, definitionsomängd, enkla andrags-ekvationer). Avsnittet är mindre omfattande än i vanliga läroböcker. I koordinatsystemet åskådliggörs lösningsmängden till öppna utsagor i två variabler samt behandlas avbildningar av punktomängder.

Erfarenheter: Texten provas i årskurs 8 med början läsåret 1963–64.

Planerade texter: Algebra-textens avslutande delar för årskurs 9 skall innehålla statistik och enkel sannolikhetslära, funktionsbegreppet, lösning av linjära ekvationssystem, räknestickan och reella tal.

Text: Geometri del I (G 7–9 I).

Innehåll: Texten innehåller en intuitiv introduktion av geometriska begrepp genom rit- och mätövningar. Elevenna får lära sig hantera hjälpmedel såsom linjal, passare, vinkelhake och gradskiva. Ett stort antal övningar ges. I ett kapitel behandlas likformighet och i ett rymd-geometri.

Erfarenheter: Texten skall användas i årskurs 7 och under höstterminen i årskurs 8. Den har provats i skolorna i Finland, Norge och Sverige sedan läsåret 1961–62. Från försöken i årskurs 7 har inlämnats 50 rapporter. Endast i en rapport avstyrks fortsatt försöksverksamhet. Några menar att mycket av innehållet kan flyttas ned till mellanstadiet. I 29 rapporter sägs angående elevernas intresse för texten »stort intresse, större intresse, mycket intresserade, roade» och liknande. Ingen rapporterar mindre intresse än i vanliga fall. Några lärare klagar över att definitioner och satser endast förekommer bland övningarna. Fyra lärare är negativa till definitionen av vinkel som unionen av strålar. Sju lärare saknar handledning i ritteknik. Texten kan sägas ha fått ett mycket positivt mottagande.

Text: Geometri del II (G 7–9 II).

Innehåll: I första kapitlet behandlas kongruensavbildningar såsom spegling i en linje, parallellförflyttning, vridning, spegling i en punkt. Det andra kapitlet, som är betitlat »Geometri och logik», försöker ge en motivering för ett mer stringent studium av geometrin och förbereder nästa kapitel där ett fullständigt axiomsystem ges. Det är utarbetat av den franske professorn Choquet och är lämpligt vid uppbyggnad av en

avbildningsgeometri. Det förutsätter de reella talen. Resten av texten omfattar genomgång av de viktigaste egenskaperna hos kongruens- och likformighetsavbildningar samt ger bevis för de viktigaste satserna inom elementargeometrin. Area- och volymsberäkningar ingår även.

Erfarenheter: Texten är avsedd att täcka resten av geometrikursen på stadiet 7–9 och den har börjat provas under vårterminen 1963. Endast 11 rapporter har inkommit. Även för denna del rapporteras positivt intresse hos eleverna samt sägs att texten har varit lämplig. Kapitlet om axiomen har från ett par håll rapporterats vara svårt.

Text: Geometri (MINDRE KURSEN) (GM 7–9 I).

Innehåll: Texten är en förkortad och omarbetad version av försökstexten för större kursen och avsedd för årskurs 7.

Erfarenheter: Försöksverksamheten började hösten 1963.

Planerade texter: En ny textserie i geometri för årskurs 7–9 är planerad. Den skall utarbetas i nära anknytning till en i viss utsträckning omarbetad version av kommitténs text i algebra. Texten skall uppbyggas kring avbildningar, koordinatsystemet och vektorer. Ett kort avsnitt om trigonometri kommer troligen att ingå.

GYMNASIET.

Text: Algebra del I (A 10–12 I).

Innehåll: I samband med repetition av vissa moment i den tidigare matematikkursen introduceras enkla begrepp och symboler ur mängdläran. En genomgång göres sedan av de grundläggande räknelagarna för naturliga tal, hela tal och rationella tal, varvid man har försökt framhäva de olika talmängdernas struktur. Ett kapitel behandlar lösning av linjära ekvationer, ekvationssystem och olikheter med användande av enkla begrepp och symboler från logik och mängdlära. Texten avslutas med ett kapitel om funktionsbegreppet, vilket införes som en avbildning av en mängd in i en mängd.

Erfarenheter: Texten är avsedd för första terminen av gymnasiets första år (10:de skolarbetet) och har prövats sedan läsåret 1962–63. Från Sverige har inkommit 16 rapporter. Den allmänna tendensen i rapporterna är att texten innebär en modifiering av kursen åt rätt håll medan viss oenighet råder i hur långt man skall gå i de olika avsnitten. Flera av lärarna synes ha ansett texten väl omfattande och har haft svårigheter att hinna med den på den avsedda tiden. Några anser att genomgången av räknelagarna i de olika talmängderna har blivit för teoretisk. Bristande intresse från eleverna rapporteras därvid. I sju rapporter rapporteras dock stort, större eller positivt intresse. Tre lärare säger att

texten gynnar de bättre eleverna. I 8 rapporter klagas över att texten innehåller för få övningar. Kapitlen om ekvationer, ekvationssystem och olikheter samt funktionsbegreppet får genomgående positiv kritik. En viss oro uttrycks över att elevernas räkneskicklighet skulle bli sämre. Med anledning av rapporterna har vissa omarbetningar skett till läsåret 1963-64.

Text: Algebra del II (A 10-12 II).

Innehåll: Första kapitlet behandlar polynom (bl. a. ekvationslösning, divisionsalgoritmen och faktorteoremet). Närmevärden ges i nästa kapitel en relativt ingående behandling med diskussion av fel, relativt fel och felskattningen vid de fyra räknesätten med närmevärden. Textens tredje kapitel behandlar enkla talföljder, summeringar av talföljder och induktionsbevis. I ett långt kapitel diskuteras de reella talens egenskaper. Kvadratrötter behandlas kortfattat. Potenser med reell exponent införes med utgångspunkt från rationell exponent och rotlagar. Logaritmer behandlas. Därvid diskuteras endast kortfattat hur numeriska räkningar utföres med logaritmer. Som hjälpmedel vid numeriska räkningar skall räknestickan användas. Den behandlas i textens sista kapitel.

Erfarenheter: Texten skall användas under vårterminen av gymnasiets första årskurs (10:de skolåret). Från rapporterna kan nämnas att flera ansåg polynomkapitlet vara för abstrakt. I tre rapporter konstaterades att principen vid induktionsbevis förstods lättare av eleverna tack vare mängdbegreppen. Se för övrigt erfarenheterna under del I ovan.

Text under arbete: I den högsta årskursen skall algebratexterna kompletteras med ett kapitel om komplexa tal för provning läsåret 1964-65.

Text: Geometri del I (G 10-12 I).

Innehåll: Inledningsvis behandlas egenskaper hos parallellförflyttningar av planet. Därefter definieras vektorbegreppet och räknelagarna för vektorer behandlas (addition, subtraktion, multiplikation med skalär, skalärprodukt). Parallellkoordinatsystem för vektorer och punkter i planet införes. I ett kapitel om trigonometri definieras de trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar. Sinus- och cosinusteoremen bevisas och exempel på enkla triangelsolveringar ges. Omfånget av detta senare moment är kraftigt reducerat jämfört med ordinarie kurser.

Erfarenheter: Texten är avsedd för gymnasiets första årskurs (10:de årskursen). Den har använts vid försöksverksamhet sedan läsåret 1961-62. Från denna har 57 rapporter insänts från Danmark, Norge och Sverige. Erfarenheterna är genomgående goda om man undantar 5-6 rapporter, vilka är mycket negativa. Dessa har ogillat den relativt breda

framställningen med mycket beskrivande text för eleverna att läsa och har ansett den för svårläst för gymnasister. Ingen avstyrker dock att arbetet med att föra in vektorer i gymnasiet fortsättes. I ett tjugotal rapporter anses texten för omfattande, tio anser den för teoretisk och 29 att den är försedd med för få övningar. Övningarnas antal har sedermera utökats. I 13 rapporter redovisas stort, större eller positivt intresse.

I 15 rapporter anmärks på framställningen av skalärprodukt, vilken definierats med hjälp av koordinater i en dimension. I allmänhet önskar man skalärprodukten definierad med hjälp av trigonometri. Tre lärare efterlyser vektorprodukt. Flera vill ha ett större antal tillämpningar från fysik och mekanik. Kapitlet om trigonometri har fått ett mycket positivt mottagande.

Text: Geometri del II (G 10–12 II).

Innehåll: Texten behandlar räta linjens analytiska geometri. Räta linjen framställs i koordinatform, vektorform, parameterform och normalform. Begreppen riktningskoefficient, riktningsvinkel och riktningsstal införes. Ett kort avsnitt, där principerna för linjär programmering visas, avslutar texten.

Erfarenheter: Texten skall studeras i gymnasiets näst högsta årskurs. Den började provas läsåret 1962–63. I de 12 insända rapporterna är man i stort sett nöjd. Texten anses av flera något för omfattande.

Text: Geometri del III (G 10–12 III).

Innehåll: Texten inleds med en kortfattad framställning av kägelsnittens analytiska geometri. Ekvationerna för cirkel, parabel, ellips och hyperbel härleds. Hur man med hjälp av koordinatbyte kan avgöra den geometriska betydelsen av en andragradsekvation i två variabler visas i några exempel. Behandlingen av andragrads kurvorna är väsentligt kortare än i ordinarie kurser.

I fortsättningen behandlar texten rymdgeometri. Vektorer i rymden införes liksom rätvinkligt koordinatsystem med vars hjälp planet och linjens ekvationer behandlas. Ett kapitel handlar om volymeräkningar. Texten innehåller därmed mycket litet av den klassiska stereometrin.

Erfarenheter: Texten skall behandlas i högsta årskursen i gymnasiet. Den har börjat användas vid försöksundervisning först i slutet på vårterminen 1963. Vissa kapitel ur geometri del II och III har bundits samman till en text, som är avsedd för kurser med mindre timtal.

Text: Funktionslära del I (F 11–12 I).

Innehåll: Texten inleds med ett kapitel vari några begrepp och symboler från mängdläran införs. Begreppen intervall, omgivning, övre och

undre gräns behandlas. Funktionsbegreppet introduceras som avbildning av en mängd in i en mängd. Definitionsmängd, värdemängd, monotona och trigonometriska funktioner behandlas. Gränsvärden och kontinuitet ges en relativt bred behandling bl. a. med utnyttjande av omgivningsbegreppet. Sedan derivator och deriveringsregler genomgåts, används medelvårdessatsen för att visa sambandet mellan monotonitet och derivata hos deriverbara funktioner.

Erfarenheter: Texten prövas med början läsåret 1963–64 i näst högsta årskursen.

Text: Funktionslära del II (F 11–12 II).

Innehåll: Ur innehållet kan nämnas högre derivator (konvexitet), talföljder och serier, integraler (definition av bestämd integral, samband mellan bestämd integral och primitiv funktion, tillämpningar på area- och volymberäkningar), naturliga logaritmer (definierade med hjälp av en integral), inversa funktioner (tillämpningar på de cyklometriska funktionerna), exponentialfunktioner (definierade som inverser till logaritm-funktionerna), partiell integration och integration med substitution, vektorfunktioner (derivator av vektorfunktioner) och polynomapproximation (MacLaurins formel).

Erfarenheter: Texten skall prövas med början vårterminen 1964.

Text: Differentialekvationer (D 11–12).

Innehåll: Linjära differentialekvationer av första ordningen löses. Existens- och entydighetsfrågor diskuteras. Linjära differentialekvationer av andra ordningen löses utan användning av komplexa tal.

Erfarenheter: Texten började användas vid försöksverksamhet läsåret 1961–62. Det har inlämnats 42 rapporter från försöksverksamhet i alla fyra nordiska länderna. Ingen avstyrker vidare försök. Några anser att framställningen är för bred (7 lärare) samt för teoretisk (5 lärare) och försedd med för få övningar (15 lärare). 20 rapporter berättar om större intresse medan ingen anmäler mindre intresse. I vissa rapporter har man önskat att annat stoff från området skall vara med såsom komplexa tal, separabla differentialekvationer (4 lärare), fler tillämpningar från fysik (8 lärare) och andra integrationsmetoder (4 lärare). Inledningskapitlet har ansetts vara väl abstrakt. Genomgående har man varit nöjd med att studera ämnet i skolan med den föreliggande texten.

Text: Sannolikhetslära och statistik (S 10–12).

Innehåll: Sannolikhetsläran inleds med den klassiska definitionen av sannolikheten för en händelse som kvoten mellan antalet för händelsen gynnsamma och totala antalet fall. Denna definitions begränsning dis-

kuteras sedan. Därefter behandlas de relativa frekvensernas stabilitet, som praktiskt demonstreras både för fall, där den klassiska definitionen på grund av »symmetri« synes vara berättigad (kast med mynt och tärningar), och för fall, där den klassiska definitionen inte ger någon ledning (kast med häftstift).

Sedan behandlas sannolikheter i ändliga utfallsrum. Härvid utnyttjas enkla begrepp från mängdläran. Bl. a. följande begrepp behandlas: Händelse, sannolikhet för en händelse, komplementärhändelser och ömse- sidigt uteslutande händelser, oberoende händelser, stokastisk variabel, frekvensfunktion, väntevärde och varians för en stokastisk variabel och binomialfördelningen.

Kontinuerliga stokastiska variabler behandlas sedan relativt kortfattat. Begreppet frekvensfunktion definieras och sannolikheter beräknas med bestämda integraler. Framställningen leder fram till normalfördelningen och approximation av binomialfördelningen med normalfördelningen.

Statistiken omfattar först och främst beskrivande statistik. Härvid behandlas såväl grafiska som numeriska metoder att beskriva statistiska material. Framställningen omfattar beräkning av medelvärde, median, varians och standardavvikelse samt grafisk konstruktion av stolpdia- gram, histogram, summapolygon. Även klassindelad material behandlas. Av statistisk inferens slutligen behandlas konfidensintervall för en sto- kastisk variabels väntevärde och för en okänd sannolikhet.

Erfarenheter: Texten började prövas i de båda högsta årskurserna läsåret 1961–62. Hittills föreligger 12 rapporter från Danmark och Sverige. Rapporterna är genomgående positiva. Man anser att försöksverksam- heten bör fortsättas. I flera rapporter framhålls att texten är omfat- tande, dock bara i två att den är för omfattande. I 6 rapporter sägs övningarna vara för få. 7 lärare rapporterar större intresse. Av andra moment från området saknar enstaka lärare korrelationskoefficient, Poissonfördelningen, fördelningsfunktion och betingad sannolikhet.

Texten har sommaren 1963 undergått en omarbetning varvid bl. a. ett stort antal övningar tillförts den och den beskrivande statistiken fått inleda texten.

I mån av tillgång kommer texter att försälas till intresserade. Upp- lysningar kan erhållas efter hänvändelse till kommitténs sekretariat under adress

Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen
Kungl. Ecklesiastikdepartementet
Fack
Stockholm 2

ALGORITMER I MATEMATIKKEN: EN INNFØRING I DEN REKURSIVE MATEMATIKK OG DENS ANVENDELSER, I

JENS ERIK FENSTAD

Innledning. Med en *algoritme* vil vi foreløpig forstå en effektiv regneprosess eller, mer generelt, en effektiv metode til å avgjøre et problem. Hvilke typer problemer som kan kalles algoritmiske skal vi ikke prøve å klassifisere nærmere, men heller antyde ved å gi noen eksempler. Enkelte aritmetiske regneprosesser er så enkle at man vanligvis ikke benytter ordet algoritme for dem; f. eks. til å finne produktet av to naturlige tall, a og b , har vi følgende regnemetode: tallet $a \cdot b$ fremkommer ved å ta tallet a som addend så mange ganger som tallet b angir. Her vil altså $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12$; metoden er effektiv forutsatt vi kan addere — og til *det* har vi algoritmen med å »telle på fingrene«!

Ordet algoritme brukes vanligvis i forbindelser som »divisjonsalgoritme« og »Euklidsk algoritme«. Anta at a og b er ikke-negative hele tall og $b > 0$. Divisjonsalgoritmen sier da at det fins entydig bestemte tall q og r , med $0 \leq r < b$, slik at $a = q \cdot b + r$. Her kan q og r finnes effektivt idet q må være et av tallene $0, 1, \dots, a$. Man starter da med å regne ut i rekkefølge $0 \cdot b, 1 \cdot b, \dots, a \cdot b$, og undersøker hver gang differensen $a - i \cdot b$. Den entydig bestemte i slik at $0 \leq a - i \cdot b < b$, er den søkte q . Regnemetoden er opplagt effektiv, og så intuitivt innlysende at man sjelden beskriver den så detaljert som her.

En litt mer innviklet algoritme er den Euklidske til å finne største felles divisor for to hele positive tall. Som kjent bygger denne algoritme på gjentatt bruk av divisjonsalgoritmen.

Disse eksempler på algoritmer er tatt fra aritmetikken, men innen hvert område av matematikken er det i bruk algoritmer av forskjellige slag. Sannhetsverditabellene er en effektiv metode til å avgjøre almen gyldigheten av utsagnslogiske formler.

Å vise at et problem er *effektivt avgjørbar* løses i praksis ved å konstruere en eller annen form for algoritme som man intuitivt innser leder

til det forønskede resultat. Så lenge man er overbevist om at de spesielle algoritmer man anvender er effektive, har man intet behov for et generelt begrep algoritme, men har man mistanke om det motsatte, at et gitt problem *ikke* er algoritmisk løsbart, så vil man måtte vite hva en effektiv regneprosess »egentlig« er.

Dette siste er ikke så helt enkelt, effektiv avgjørbarhet er et intuitivt og ikke matematisk begrep. Det har neppe noe helt presist innhold, og argumentasjon ut fra dette intuitive startpunkt vil lett lede ut i en endeløs filosofisk dispuTT om hva effektive prosesser i »virkeligheten« er for noe. Det vår erfaring har gitt oss er en rekke eksempler på algoritmer, og en følelse av at en effektiv regneprosess skal være noe i retning av en operasjon med visse typer symboler, hvor det foreligger et endelig antall utgangssymboler med hvilke vi skal foreta visse manipulasjoner, slik at det er nøyaktig foreskrevet hvilke symbol-manipulasjoner vi på et hvert trinn i »regningen« skal utføre.

Dette er ikke presist, så tar man sitt utgangspunkt her, blir det ikke noe matematikk ut av den generelle teori for algoritmer. Det man fornuftigvis bør gjøre er å *teknifisere* begrepet, det intuitive algoritmebegrep vil bli erstattet med begrepet *rekursiv funksjon*, og et spørsmål om eksistens av algoritmer vil bli omformet til et problem om visse funksjoner er rekursive eller ikke.

Så snart klassen av rekursive funksjoner er definert kan man som renmatematiker stille seg fornøyd. Denne funksjonsklasse har en rekke interessante egenskaper, og studiet av dem gir anledning til en masse fin matematikk. Resten kunne forsåvidt være irrelevant. Men rekursive funksjoner er foreslått som en teknifisering av algoritmebegrepet. Er nå algoritmer det samme som rekursive funksjoner? Stilles spørsmålet på denne måte, er der intet fornuftig svar. Vi kan ikke »bevise« at rekursive funksjoner er det samme som algoritmer, for her har vi å gjøre med sammenhengen mellom et intuitivt og et formalt begrep. Skal teorien for rekursive funksjoner ha noen relevans for problemet om effektiv beregnbarhet, må vi overbevise oss, på det intuitive plan, om tre ting. For det første må enhver rekursiv funksjon være, intuitivt sett, effektivt beregnbar. For det andre må vi til enhver kjent algoritme kunne tilordne en rekursiv funksjon slik at det å regne ut funksjonsverdien for visse argumenter betyr å løse det algoritmiske problem. Og for det tredje må vi ha i vår besittelse teknikker til å omforme algoritmiske problemer til problemer om eksistens eller ikke-eksistens av rekursive funksjoner. I tur og orden vil disse problemer bli diskutert. Men først en skisse av den matematiske teori for rekursive funksjoner.

Primitivt rekursive funksjoner. Utgangspunktet skal være den elementære teori for de naturlige tall. Vi betrakter de naturlige tall som umiddelbart gitt: tallrekken begynner med tallet 0 og genereres ved en primitiv operasjon, etterfølgeroperasjonen, som betegnes med '. Symbolene $1, 2, 3, \dots$ er da per definisjon navn på de genererte objekter $0', 0'', 0''', \dots$. Sammenfattende kan en si: 1° 0 er et naturlig tall; 2° hvis n er et naturlig tall, så er n' et naturlig tall; 3° naturlig tall er fullstendig beskrevet ved reglene 1° og 2° .

Her er 3° en slags ekstremalbetingelse som gjør det umiddelbart klart at induksjonsprinsippet er gyldig for de naturlige tall. For har 0 en egenskap P , og nedarves denne egenskap ved etterfølgeroperasjonen, så vil alle tall ha egenskapen P , idet noe er et tall, hvis og bare hvis det enten er 0 eller fremkommet fra 0 ved et endelig antall gangers bruk av etterfølgeroperasjonen.

Videre er det opplagt at man kan definere funksjoner $f: N \rightarrow N$ ved rekursjon (her står N for de naturlige tall). En rekursiv definisjon består i å angi eksplisitt hva $f(0)$ er, og definere $f(n')$ ut fra n og $f(n)$ ved bruk av allerede veldefinerte funksjoner. Det er da klart, slik tallrekken oppfattes generert, at $f(n)$ er definert for alle n , og at funksjonsverdien er entydig bestemt.

Dette er det sedvanlige intuitive grunnlag for teorien om de naturlige tall. Den blir her uten videre akseptert. Ganske annerledes ville saken stille seg fra et aksiomatisk eller formal-logisk standpunkt. Det skal vi komme tilbake til senere i denne artikkel i forbindelse med det meget omtalte Gödels ufullstendighetsteorem for den elementære aritmetikk.

En beskjeden bruk av logiske og mengdeteoretiske symboler vil lette fremstillingen i det følgende. N skal, som ovenfor antydnet, symbolisere mengden av de naturlige tall, $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. $A, B, C, \dots$ vil betegne delmengder av N . Komplementærmengden til A vil vi skrive $N - A$, og ellers anvende som vanlig symbolene $n \in A$, $A \cup B$ og $A \cap B$.

Tallteoretiske predikater (eller utsagnsfunksjoner) vil vi betegne med symbolene $P, Q, R, S, \dots$ og angi i parenteser det antall variable som predikatet er avhengig av, slik at $P(x_1, \dots, x_n)$ vil stå for et eller annet tallteoretisk predikat av n variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ som for et gitt n -tupel av naturlige tall er enten sant eller galt.

De logiske symboler med deres betydning angir vi i nedenstående tabell.

Logiske Symboler:

Lesemåte:

$P \Rightarrow Q$

P impliserer Q .

$P \Leftrightarrow Q$

P er ekvivalent med Q .

Logiske Symboler:	Lesemåte:
$P \& Q$	P og Q .
$P \vee Q$	P eller Q .
$\neg P$	ikke P .
$\forall x P(x)$	for alle $x, P(x)$.
$\exists x P(x)$	det fins en x slik at $P(x)$.
$(\forall x < y) P(x)$	for alle $x < y, P(x)$.
$(\exists x < y) P(x)$	det fins en $x < y$ slik at $P(x)$.
$(\mu x < y) P(x)$	den minste $x < y$ slik at $P(x)$ hvis $(\exists x < y) P(x)$; ellers, y .

μ -operatoren er strengt tatt ikke det vi vanligvis forstår med en logisk operator, det er et operasjonstegn vi kan benytte til å danne tallteoretiske funksjoner fra utsagnsfunksjoner eller tallteoretiske predikater. To enkle eksempler (det første viser også hvorledes vi tillater oss å gjøre små endringer i den innførte symbolisme uten videre forklaringer):

$$(\mu y < 2x+1)[x < y] = x+1$$

$$(\mu y < x)[x < y] = x.$$

N er generert ved etterfølgeroperasjonen ut fra tallet 0. Gitt N kan vi innføre en funksjon $\sigma: N \rightarrow N$ ved definisjonen $\sigma(x) = x'$ for alle $x \in N$. σ kalles etterfølgerfunksjonen. Den er effektivt beregnbar etter et hvilket som helst intuitivt algoritmebegrep. Videre er det intuitivt klart at funksjoner definert ved rekursjon er effektivt beregnbare, idet selve definisjonsarten gir anvisning på en effektiv regneprosess. La oss betrakte situasjonen litt nøyere. En typisk rekursiv definisjon av en funksjon $f(x)$ kan være

$$f(0) = q$$

$$f(x') = h(x, f(x)).$$

Her er $q \in N$ eksplisitt gitt, og vi antar at $h(x, y)$ er en effektivt beregnbar funksjon. Skulle vi regne ut $f(0'')$, ville vi beregne i rekkefølge

$$f(0) = q$$

$$f(0') = h(0, f(0)) = h(0, q) = q_1$$

$$f(0'') = h(0', f(0')) = h(1, q_1) = q_2.$$

Idet h er beregnbar, vil tallene q_1 og q_2 være effektivt gitt, dermed også funksjonsverdien av f for $x = 0''$. Ut fra denne overveielse vil man kunne overbevise seg om at $f(x)$ er effektivt beregnbar for alle $x \in N$, nettopp ved å følge den algoritme som er bygget inn i den rekursive definisjon.

De *primitivt rekursive funksjoner*, den første klasse av effektivt beregnbare funksjoner og i en viss forstand en basismengde for klassen av alle effektivt beregnbare funksjoner, er funksjonsklassen generert ut fra etterfølgerfunksjonen ved rekursive definisjoner. Denne avgrensning av de primitivt rekursive funksjoner er for lite presis for vårt formål, så det vil være nødvendig å gi definisjonen i langt større detalj.

Grunnfunksjonene vil være gitt etter følgende skjema:

- (I) $f(x) = x'$
 (II) $f(x_1, \dots, x_n) = q, q \in N$
 (III) $f(x_1, \dots, x_n) = x_i, 1 \leq i \leq n.$

Hvert av skjemaene (I)–(III) definerer en tallteoretisk funksjon av det spesifiserte variabelantall. (I) gir etterfølgerfunksjonen σ , (II) gir de konstante funksjoner med vilkårlig variabelantall, og (III) er et skjema som er tatt med for å kunne standardisere de etterfølgende substitusjons- og rekursjonsskjema. (En anvendelse av (III) i forbindelse med rekursjonsskjemaet vil bli gitt nedenfor.)

De genererende prinsipper for klassen av primitivt rekursive funksjoner skal være substitusjon og rekursjon i henhold til følgende to skjema:

- (IV) $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$
 (Va) $\begin{cases} f(0) = q \\ f(y') = h(y, f(y)) \end{cases}$
 (Vb) $\begin{cases} f(0, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n) \\ f(y', x_2, \dots, x_n) = h(y, f(y, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n). \end{cases}$

En funksjon f kalles primitivt rekursiv hvis det fins en endelig følge (sekvens) av funksjoner $f_1, \dots, f_n$ slik at enhver funksjon i følgen enten er en grunnfunksjon (dvs. direkte definert ved et av skjemaene (I)–(III)), eller er dannet ved substitusjon eller rekursjon (dvs. etter skjemaene (IV)–(V)) fra forangående funksjoner i følgen, og $f_n = f$.

Som et eksempel angir vi følgende sekvens. (Til høyre har vi gitt hva man kaller analysen av rekursjonsfølgen, dvs. en spesifikasjon for hver f_i etter hvilket skjema og fra hvilke funksjoner den er dannet.)

1. $f_1(x) = x$ (III); $n = i = 1.$
2. $f_2(x) = x'$ (I).
3. $f_3(y, z, x) = z$ (III); $n = 3, i = 2.$
4. $f_4(y, z, x) = f_2(f_3(y, z, x))$ (IV); linje 2 og 3.
5. $\begin{cases} f_5(0, x) = f_1(x) \\ f_5(y', x) = f_4(y, f_5(y, x), x) \end{cases}$ (V); linje 1 og 4.

Funksjonen $f_5(y, x)$ er således primitivt rekursiv, og det er ganske lett å se at det er addisjon av naturlige tall som her er definert. Vanligvis gis den rekursive definisjon på følgende måte:

$$\begin{aligned}x + 0 &= x \\x + y' &= (x + y)'.\end{aligned}$$

Hva vi her har gjort er å omforme denne definisjon, bl. a. ved bruk av (III) og (IV), slik at rekursjonsligningene blir brakt på den form skjema (Vb) krever. Denne standardisering av rekursjon og substitusjon er selv sagt nødvendig for å få en presis avgrensning av klassen av primitivt rekursive funksjoner. Imidlertid vil vi gi eksemplene på en uformell måte og overlate til leseren å omskrive disse etter skjema (I)–(V).

I visse tilfelle vil vi få bruk for funksjonen $x \dot{-} y$, som er lik $x - y$ hvis $x \geq y$, og lik 0 hvis $x < y$. Til den rekursive definisjon av denne funksjon trengs en art invers funksjon til etterfølgerfunksjonen:

$$\begin{aligned}\pi(0) &= 0 \\ \pi(x') &= x.\end{aligned}$$

$x \dot{-} y$ blir da definert ved

$$\begin{aligned}x \dot{-} 0 &= x \\ x \dot{-} y' &= \pi(x \dot{-} y).\end{aligned}$$

Rekursivitet av tallteoretiske *predikater* (utsagnsfunksjoner) blir tilbakelagt til rekursivitet av funksjoner ved bruk av teknikken med representerende (eller karakteristiske) funksjoner. Er $P(x_1, \dots, x_n)$ et tallteoretisk predikat, kalles en funksjon f dets *representerende funksjon* hvis $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ eller $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ for alle n -tupler $x_1, \dots, x_n$, og

$$P(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

$P(x_1, \dots, x_n)$ kalles primitivt rekursiv hvis f er primitivt rekursiv.

Det vil i sin alminnelighet være en lett oppgave for leseren å vise at de vanlige tallteoretiske predikater og funksjoner er primitivt rekursive. Her skal det anføres noen generelle skjema til dette bruk.

- A. Hvis P og Q er primitivt rekursive predikater, så er $\neg P$, $P \& Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$ og $P \Leftrightarrow Q$ primitivt rekursive. Likeledes leder substitusjon av primitivt rekursive funksjoner for argumentene i et primitivt rekursivt predikat til et nytt primitivt rekursivt predikat.

La oss som et eksempel på bevis ta $P \vee Q$. Hvis f og g er de representerende funksjoner for henholdsvis P og Q , så vil den representerende funksjon for $P \vee Q$ være $h = f \cdot g$.

B. Er $P(x_1, \dots, x_n, y)$ et primitivt rekursivt predikat, så vil $(\exists y < z) P(x_1, \dots, x_n, y)$ og $(\forall y < z) P(x_1, \dots, x_n, y)$ være primitivt rekursive predikater av $x_1, \dots, x_n, z$, og $(\mu y < z) P(x_1, \dots, x_n, y)$ vil være en primitivt rekursiv funksjon av $x_1, \dots, x_n, z$.

La den representerende funksjon til P være $f(x_1, \dots, x_n, y)$. Anta at $y = m < z$ er den minste y slik at $P(x_1, \dots, x_n, y)$. Da vil $f(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n, 1) = \dots = f(x_1, \dots, x_n, m-1) = 1$ og $f(x_1, \dots, x_n, m) = 0$. Visste vi at m var den eneste $y < z$ slik at $P(x_1, \dots, x_n, y)$, kunne vi definere en funksjon $g(x_1, \dots, x_n, z)$ ved

$$g(x_1, \dots, x_n, z) = \sum_{y < z} f(x_1, \dots, x_n, y),$$

og få at $g(x_1, \dots, x_n, z) = m$. Det vet vi ikke, men vi kommer unna ved følgende knep. Definer $h(x_1, \dots, x_n, y)$ ved

$$h(x_1, \dots, x_n, y) = \prod_{s \leq y} f(x_1, \dots, x_n, s).$$

Da vil $h(x_1, \dots, x_n, y) = 1$ så lenge y er mindre enn den minste y_1 slik at $P(x_1, \dots, x_n, y_1)$, og $h(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ når $y \geq$ denne minste y_1 . Dermed kan vi definere

$$(\mu y < z) P(x_1, \dots, x_n, y) = \sum_{y < z} h(x_1, \dots, x_n, y).$$

Den siste detalj, at funksjonsverdien er lik z hvis det ikke fins noen $y < z$ slik at $P(x_1, \dots, x_n, y)$, er det lett å verifisere at vår definisjon oppfyller.

C. En funksjon f definert ved

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), & \text{hvis } Q_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n), & \text{hvis } Q_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

er primitivt rekursiv hvis $f_1, \dots, f_m, Q_1, \dots, Q_m$ er primitivt rekursive, og hvis det for alle $x_1, \dots, x_n$ fins akkurat en Q_i , $1 \leq i \leq m$, slik at $Q_i(x_1, \dots, x_n)$.

Disse »avledede slutningsskjema« er meget effektive til å påvise at visse tallteoretiske predikater og funksjoner er primitivt rekursive. Til eksempel gis noen predikater og funksjoner i forbindelse med primtall. Vi minner om at ethvert tall kan spaltes entydig i et produkt av primtall.

$$x \mid y \Leftrightarrow (\exists z \leq y)[x \cdot z = y]$$

$$\text{Pr}(x) \Leftrightarrow x > 1 \ \& \ \neg(\exists y < x)[y > 1 \ \& \ y \mid x]$$

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ p_y = (\mu x < p_y! + 1)[x > p_y \ \& \ \text{Pr}(x)] \\ (x)_i = (\mu y < x)[p_i^y \mid x \ \& \ p_i^{y'} \nmid x]. \end{cases}$$

Her er $x \mid y$ delelighetsrelasjonen, $\text{Pr}(x)$ betyr at x er et primtall, $p_y = \text{det}(y+1)$ 'te primtall, og $(x)_i =$ eksponenten til p_i i den entydige primtallfaktoriseringen av x (bemerk at etter vår definisjon av μ -operatoren er $(0)_i = 0$ for alle i , likedan er $(1)_i = 0$ for alle i). $x \nmid y$ betyr som vanlig $\neg(x \mid y)$. Definisjonene er ikke nøyaktig i overensstemmelse med de offisielle skjema (dvs. skjema (I)–(V) og A–C), men det er en enkel oppgave, generøst overlatt til leseren, å omskrive definisjonene slik at full overensstemmelse foreligger.

Dette avslutter våre bemerkninger om klassen av primitivt rekursive funksjoner, basis for klassen av alle effektivt beregnbare tallteoretiske funksjoner. Denne fremstilling har vært nøye knyttet til den som Kleene gir i sin store lærebok, »Introduction to metamathematics«, Amsterdam 1952 (se for øvrig litteraturhenvisningene på slutten av denne artikkel). I de etterfølgende avsnitt vil vi velge en noe avvikende fremgangsmåte, som synes å lede til hovedresultatene i den rekursive teori på en særlig enkel og direkte måte (når man velger å starte fra et aritmetisk grunnlag (dvs. rekursjon), og ikke velger f. eks. elementært formale systemer, Turing-maskiner el. lign. som utgangspunkt for den rekursive teori).

Rekursivt genererte mengder og rekursive funksjoner. Som en forberedelse til innføringen av begrepet rekursiv funksjon vil det være hensiktsmessig å diskutere begrepet rekursivt generert *tallmengde*. Vi sier at en mengde $A \subseteq N$ er *rekursivt generert* hvis $A = \emptyset$, eller det fins en primitivt rekursiv funksjon f slik at

$$x \in A \Leftrightarrow \exists n [f(n) = x],$$

dvs. A er enten tom eller verdiområdet til en primitivt rekursiv funksjon. Den intuitive bakgrunn er at vi ved å beregne funksjonsverdiene $f(0), f(1), \dots$ effektivt kan generere elementene i A .

Hvis A er rekursivt generert, så er ikke $N - A$ nødvendigvis rekursivt generert; intuitivt er det ikke effektivt å avgjøre for en gitt x om $f(n) \neq x$ for alle $n \in N$. I visse tilfelle lar det seg gjøre. La $f(n) = 2n$ og $g(m) = 2m + 1$. Da er $A_f = \{x \mid \exists n [f(n) = x]\}$ mengden av de like tall og $A_g = \{x \mid \exists m [g(m) = x]\}$ mengden av de odde (ulike) tall. Her er $A_g = N - A_f$, og $f(n) \neq x$ for alle n hvis og bare hvis det fins en m slik at $g(m) = x$.

En tallmengde $A \subseteq N$ kalles *rekursiv* hvis både A og $N - A$ er rekursivt generert. Er A rekursiv kan vi effektivt *avgjøre* om $x \in A$ eller ikke. For

la f_1 generere A og f_2 generere $N - A$. Det vil da finnes et n slik at $x = f_1(n)$ eller $x = f_2(n)$. Beregner vi suksessivt $f_1(0), f_2(0), f_1(1), f_2(1), \dots$, vil vi før eller senere komme til et n slik at $x = f_1(n)$ eller $x = f_2(n)$, dvs. vi vil effektivt kunne avgjøre om $x \in A$ eller om $x \in N - A$. (Er $A = \emptyset$ eller $A = N$ fins det ikke funksjoner f_1 og f_2 som her antatt, men det er opplagt effektivt avgjørbart om $x \in A$ eller ikke.)

Et predikat $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ kalles rekursivt hvis tallmengden $P_0 = \{x \mid P((x)_0, (x)_1, \dots, (x)_n)\}$ er rekursiv. Her er $(x)_i$ den primitivt rekursive funksjon som ble definert i forrige paragraf. Poenget her å er å redusere predikater av $n + 1$ variable til predikater av en variabel, dvs. til tallmengder. Skal man avgjøre om $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ eller $\neg P(x_0, x_1, \dots, x_n)$, regner man først ut $x = 2^{x_0} \cdot p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n}$ og undersøker om $x \in P_0$ eller $x \notin P_0$. Dette lar seg effektivt avgjøre idet P_0 er antatt rekursiv. Denne overveielse viser følgelig at rekursive predikater må aksepteres som effektivt beregnbare.

En liten sats om rekursivt genererte mengder viser at definisjonen ikke er alt for spesiell. Intuitivt skal jo en rekursivt generert mengde motsvare en effektivt genererbar mengde.

La $R(x, y)$ være et rekursivt predikat. Da vil mengden

$$A = \{x \mid \exists y R(x, y)\}$$

være rekursivt generert.

Bevis: Enten fins det ikke noen x og y slik at $R(x, y)$; i dette tilfellet er $A = \emptyset$ og dermed rekursivt generert. I motsatt fall fins det en x_0 slik at $\exists y R(x_0, y)$, hvilket betyr at det fins en primitivt rekursiv funksjon f slik at $R(x, y) \Leftrightarrow \exists n [f(n) = 2^x \cdot 3^y]$. Nå vil $f((y)_0) = 2^{x_0} \cdot 3^{(y)_1}$ være et primitivt rekursivt predikat $Q(x, y)$; la $h(x, y)$ være den representerende primitivt rekursive funksjon. Definer en funksjon g ved

$$\begin{aligned} g(0) &= x_0 \\ g(n+1) &= (n)_0 \cdot (1 - h((n)_0, (n)_1)) + g(n) \cdot h((n)_0, (n)_1). \end{aligned}$$

Per definisjon er $g(n)$ primitivt rekursiv, og

$$g(n+1) = \begin{cases} (n)_0, & \text{om } Q((n)_0, (n)_1) \\ g(n), & \text{om } \neg Q((n)_0, (n)_1). \end{cases}$$

Vi skal vise at

$$A = \{x \mid \exists n [g(n) = x]\},$$

altså for det første at hvis $f(m) = 2^r \cdot 3^s$, så hører eksponenten r til verdiområdet for g . For dette formål velger vi

$$n = 2^r \cdot 3^{2^m \cdot 3^s},$$

altså

$$(n)_0 = r = x, (n)_1 = 2^m \cdot 3^s = y; (y)_0 = m, (y)_1 = s.$$

Da blir

$$f((y)_0) = f(m) = 2^r \cdot 3^s = 2^x \cdot 3^{(y)_1},$$

slik at $Q(x, y)$, altså $Q((n)_0, (n)_1)$, og dermed $g(n+1) = (n)_0 = r$. — Omvendt vises lett ved tilsvarende formler at hvis r tilhører verdiorrådet for g , så kan vi bestemme m og s slik at $f(m) = 2^r \cdot 3^s$. (Både y og n kan da få andre primfaktorer i tillegg til $p_0 = 2$ og $p_1 = 3$.)

Vi gir noen andre enkle egenskaper ved rekursive predikater: Ethvert primitivt rekursivt predikat er rekursivt. Et predikat $P(x)$ er rekursivt hvis og bare hvis det fins primitivt rekursive predikater $R(x, y)$ og $S(x, y)$ slik at

$$P(x) \Leftrightarrow \exists y R(x, y) \Leftrightarrow \forall y S(x, y).$$

For enten er mengden $A = \{x \mid P(x)\}$ tom, i hvilket tilfelle $P(x)$ er ekvivalent til $\exists y [x \neq x \ \& \ y = y]$ og til $\forall y [x \neq x \ \& \ y = y]$; eller så er $N - A$ tom, hvilket behandles analogt; eller så fins det primitivt rekursive funksjoner f_1 og f_2 slik at

$$x \in A \Leftrightarrow \exists y [f_1(y) = x], \quad x \in N - A \Leftrightarrow \exists y [f_2(y) = x].$$

Vi lar da $R(x, y) \Leftrightarrow f_1(y) = x$ og $S(x, y) \Leftrightarrow f_2(y) \neq x$; det er da umiddelbart at både R og S er primitivt rekursive og at de påståtte ekvivalenser holder.

Videre vil det til ethvert rekursivt predikat $R(x, y)$ finnes et primitivt rekursivt predikat $S(x, y)$ slik at

$$\exists y R(x, y) \Leftrightarrow \exists y S(x, y).$$

Beviset er en enkel anvendelse av satsen ovenfor, med en opplagt modifikasjon hvis det ikke fins noen tall x, y slik at $R(x, y)$.

Klassen av rekursive mengder danner en Boolesk algebra, mens et av våre hovedresultater vil være at klassen av rekursivt genererte mengder ikke er lukket under komplementdannelse. For et mer utførlig studium av disse klasser henvises til litteraturlisten. For oss er disse klasser kun et skritt på vegen til de generelt rekursive funksjoner.

En tallteoretisk *funksjon* $f(x_1, \dots, x_n)$ kalles (generelt) *rekursiv* hvis predikatet $R_f(x_1, \dots, x_n, y)$ definert ved

$$R_f(x_1, \dots, x_n, y) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = y,$$

er rekursivt.

For å godtgjøre at en rekursiv funksjon er effektivt beregnbar kan man angi følgende (lite praktiske!) regnemetode: La $x_1, \dots, x_n$ være gitt.

Betrakt suksessivt $f(x_1, \dots, x_n) = 0, f(x_1, \dots, x_n) = 1, \dots, f(x_1, \dots, x_n) = m, \dots$. Da f er en funksjon fins det en og bare en verdi m slik at $f(x_1, \dots, x_n) = m$, og da $f(x_1, \dots, x_n) = y$ er et rekursivt predikat, kan man effektivt finne det første av utsagnene i følgen ovenfor som er korrekt. Den tilhørende m er funksjonsverdien av f for argumentverdiene $x_1, \dots, x_n$. Enhver rekursiv funksjon må således på intuitivt grunnlag ansees for algoritmisk.

La $\mu y R(x_1, \dots, x_n, y)$ bety det minste tall y slik at $R(x_1, \dots, x_n, y)$ holder, hvis det fins minst en y slik at $R(x_1, \dots, x_n, y)$; ellers la $\mu y R(x_1, \dots, x_n, y)$ være udefinert. Vi skal vise at μ -operatoren, under en eksistensbetingelse, kan benyttes til å definere rekursive funksjoner fra rekursive predikater. Mer presist:

La $R(x, y)$ være et rekursivt predikat slik at $\forall x \exists y R(x, y)$. Da vil funksjonen

$$f(x) = \mu y R(x, y)$$

være rekursiv.

Beviset er en anvendelse av en tidligere bemerkning. Idet $R(x, y)$ er rekursiv fins det primitivt rekursive predikater $S_0(x, y, z)$ og $S_1(x, y, z)$ slik at

$$R(x, y) \Leftrightarrow \exists z S_0(x, y, z) \Leftrightarrow \forall z S_1(x, y, z).$$

Vi kan da uttrykke predikatet $f(x) = y$ ved

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow R(x, y) \ \& \ (\forall u < y) \neg R(x, u) \\ &\Leftrightarrow \exists z S_0(x, y, z) \ \& \ (\forall u < y) \exists w \neg S_1(x, u, w). \end{aligned}$$

Å si at det til alle $u < y$ fins en z slik at $P(u, z)$ er det samme som å påstå at det fins en sekvens $z_0, z_1, \dots, z_{y-1}$ slik at $P(u, z_u)$ holder for alle $u < y$. Men en slik sekvens kan representeres ved et tall $w = 2^{z_0} \cdot p_1^{z_1} \dots p_{y-1}^{z_{y-1}}$, og vi får ekvivalensen

$$(\forall u < y) \exists z P(u, z) \Leftrightarrow \exists w (\forall u < y) P(u, (w)_u).$$

Benyttes denne ekvivalens på uttrykket ovenfor, fåes

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \exists z S_0(x, y, z) \ \& \ \exists w (\forall u < y) \neg S_1(x, u, (w)_u) \\ &\Leftrightarrow \exists z [S_0(x, y, (z)_0) \ \& \ (\forall u < y) \neg S_1(x, u, ((z)_1)_u)]. \end{aligned}$$

Her er uttrykket i parentesen et primitivt rekursivt predikat (anvendelse av skjema A-B fra forrige paragraf), og dermed er $f(x) = y$ uttrykkbar på formen $\exists z R_1(x, y, z)$. — Analogt vil man få følgende ekvivalens:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \forall z S_1(x, y, z) \ \& \ (\forall u < y) \forall w \neg S_0(x, u, w) \\ &\Leftrightarrow \forall z [S_1(x, y, (z)_0) \ \& \ (\forall u < y) \neg S_0(x, u, ((z)_1)_u)]. \end{aligned}$$

Ved omvending av den bemerkning som innledet beviset følger at predikatet $f(x)=y$ er rekursivt, altså at $f(x)=\mu y R(x,y)$ er en rekursiv funksjon under forutsetning av at $R(x,y)$ er rekursiv og $\forall x \exists y R(x,y)$, denne siste betingelse for å sikre at $f(x)$ er definert for alle $x \in N$.

Anvendelse av μ -operatoren til å definere rekursive funksjoner gir oss et meget kraftig skjema til å definere beregnbare funksjoner, idet vi nå fra en effektiv betingelse $R(x,y)$ kan finne en funksjon $f(x)$ slik at $R(x, f(x))$ holder for alle x . (Vi forutsetter da eksistensbetingelsen.) μ -operatoren uttømmer i en viss betydning muligheten for å definere rekursive funksjoner, hva følgende sats viser:

Gitt en rekursiv funksjon $f(x)$. Det fins da to primitivt rekursive funksjoner $g(y)$ og $h(x,y)$ slik at

$$f(x) = g(\mu y [h(x,y) = 0]),$$

der vi har at $\forall x \exists y [h(x,y)=0]$, og $g(y)$ kan velges uavhengig av f .

Beviset er enkelt. $f(x)=y$ er et rekursivt predikat slik at

$$\forall x \exists y [f(x) = y].$$

Nå kan $f(x)=y$ uttrykkes som $\exists z R(x,y,z)$ med en primitivt rekursiv R . La $h_1(x,y,z)$ være den representerende funksjon til R . Vi har da at $f(x)=y \Leftrightarrow \exists z [h_1(x,y,z)=0]$. Definer $h(x,y)=h_1(x,(y)_0,(y)_1)$; man innser da lett at $\forall x \exists y [h(x,y)=0]$, og dermed kan $f(x)$ skrives som

$$f(x) = (\mu y [h(x,y) = 0])_0.$$

Her er $g(y)$ den primitivt rekursive funksjon $g(y)=(y)_0$.

Med dette har vi vist en *normalform* for generelt rekursive funksjoner. (I et senere avsnitt skal vi gi en sterkere form.) Videre kan vi bemerke at klassen av generelt rekursive funksjoner kan genereres ved skjemaene (I)–(V) samt et skjema (VI) som følger:

$$(VI) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0],$$

der

$$\forall x_1, \dots, x_n \exists y [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

Vi skal også i et senere avsnitt konstruere en rekursiv funksjon som ikke er primitivt rekursiv; dermed leder skjema (VI) ut over basisklassen av primitivt rekursive funksjoner. Opplagt er funksjoner definert ved skjema (I)–(VI) effektivt beregnbare på intuitivt grunnlag. Spørsmålet er nå om det er rimelig å identifisere klassen av rekursive funksjoner med de effektivt beregnbare funksjoner. Dette har selvsagt intet eksakt svar

fordi det angår forholdet mellom en formalisme og dens tolkning. Men to ting kan sies. For det første kjenner man ingen intuitivt effektivt beregnbar funksjon som ikke har vist seg å være rekursiv etter ovenstående definisjon. Og for det andre så har man betraktet en rekke forslag til definisjon av effektiv beregnbarhet (f. eks. ved Turingmaskiner), og hver gang har man kunnet vise at de korresponderende klasser av effektivt beregnbare funksjoner er de samme. Dette har ledet til følgende tese, først fremsatt av den amerikanske logiker A. Church i 1936:

Enhver effektivt beregnbar funksjon er rekursiv.

Normalform for primitivt rekursive funksjoner. Klassen av primitivt rekursive funksjoner er *tellbar*, idet vi har et tellbart antall grunnfunksjoner, og enhver primitivt rekursiv funksjon er »endelig generert« ut fra grunnfunksjoner ved substitusjon og rekursjon. Spesielt vil klassen av primitivt rekursive funksjoner av en variabel kunne arrangeres i en tellbar uendelig rekke

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Vi kan da definere en tallteoretisk funksjon av to variable, $F(n, x)$, ved

$$F(n, x) = f_n(x).$$

Anta at vi effektivt kan telle opp de primitivt rekursive funksjoner av en variabel, dvs. gitt n , så kan vi effektivt finne f_n . Funksjonen $F(n, x)$ vil da være effektivt beregnbar, idet vi for gitt n og x først finner f_n og deretter beregner $f_n(x)$ som funksjonsverdien av F for argumentene n, x . Etter Church's tese skulle da $F(n, x)$ være rekursiv. Men F er ikke primitivt rekursiv. For da ville også funksjonen

$$f(x) = F(x, x) + 1$$

være primitivt rekursiv og dermed finnes i sekvensen $f_1, f_2, \dots$. La n_0 være en indeks slik at $f = f_{n_0}$; vi får da motsigelsen

$$f(n_0) = F(n_0, n_0) + 1 = f(n_0) + 1.$$

Under våre forutsetninger, at opptellingen er effektiv, og at enhver effektiv funksjon er rekursiv, kan vi slutte at *ikke alle rekursive funksjoner er primitivt rekursive*. Formålet med denne paragraf er å eliminere de antatte forutsetninger, dvs. å definere en rekursiv funksjon $F(n, x)$ slik at gitt en primitivt rekursiv funksjon $f(x)$, så fins det minst en n slik at $f(x) = F(n, x)$. Funksjonen F vil også være utgangspunktet for konstruksjonen av en rekursivt generert mengde som ikke er rekursiv, dvs. hvis komplement ikke er rekursivt generert.

Som en forberedelse til definisjonen av F skal vi først konstruere en en-entydig avbildning av $N \times N$ inn på N . La tallparene være ordnet på følgende måte:

$$\begin{aligned} &(0,0) \\ &(0,1) \ (1,0) \\ &(0,2) \ (1,1) \ (2,0) \\ &\dots\dots\dots \\ &(0,n) \ (1,n-1) \dots (x,y) \dots (n,0) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Idet vi erindrer at N starter med 0, dvs. at vi begynner å telle med 0, ser vi at tallparet (x,y) får nummeret

$$J(x,y) = [1 + 2 + \dots + (x+y)] + x = \frac{1}{2}[(x+y)^2 + 3x + y].$$

Avbildningen $J: N \times N \rightarrow N$ er primitivt rekursiv og en-entydig på. De inverse avbildninger lar seg definere ved

$$\begin{aligned} K(z) &= (\mu x \leq z)(\exists y \leq z)[z = J(x,y)] \\ L(z) &= (\mu y \leq z)(\exists x \leq z)[z = J(x,y)]. \end{aligned}$$

Disse funksjonene er også primitivt rekursive og oppfyller ligningene

$$J(K(z), L(z)) = z, \quad K(J(x,y)) = x, \quad L(J(x,y)) = y.$$

Ved rekursjon kan man så definere for alle $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} J_2(x,y) &= J(x,y) \\ J_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= J(x_1, J_n(x_2, \dots, x_{n+1})), \end{aligned}$$

og dermed få en-entydige avbildninger av n -tupler på tall. Det er en enkel sak å sette opp definisjoner av de tilhørende inverse funksjoner.

Vi skal nå definere en rekursiv funksjon $G(m,k)$ slik at hvis det er gitt en primitivt rekursiv funksjon $f(x_1, \dots, x_n)$, så skal det finnes et tall m slik at

$$f(x_1, \dots, x_n) = G(m, J(n, J_n(x_1, \dots, x_n))).$$

Funksjonen $F(n,x)$ vil da kunne defineres som $G(n, J(1,x))$, om vi setter $J_1(x) = x$. La oss kortere skrive $\langle n, x_1, \dots, x_n \rangle$ for $J(n, J_n(x_1, \dots, x_n))$, idet $\langle 0, x \rangle$ skal forstås som $J(0,x)$. G vil bli konstruert ved en art dobbel rekursjon. Først utgangsverdiene:

$$\begin{aligned} G(m, \langle 0, x \rangle) &= 0, \text{ for alle } m. \\ G(0, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle) &= 0, \text{ for alle } n > 1 \text{ og alle } x_1, \dots, x_n. \\ G(0, \langle 1, x \rangle) &= x', \text{ for alle } x. \end{aligned}$$

Dermed er $G(m, k)$ definert for $m=0$ eller $K(k)=0$. Vi antar nå at $n=K(k) \geq 1$. Alt ettersom $(m)_0=0, 1, 2$, eller ≥ 3 skiller vi mellom følgende tilfeller:

$$(m)_0 = 0:$$

$$G(m+1, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle) = (m)_1.$$

For korthets skyld vil vi nå sløyfe tilføyelser av arten: »for alle $n \geq 1$ og alle $x_1, \dots, x_n$ », — som man burde ha tatt med for fullstendighets skyld.

$$(m)_0 = 1 \text{ og } 1 \leq (m)_1 \leq n:$$

$$G(m+1, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle) = x_{(m)_1}.$$

$$(m)_0 = 1 \text{ og } (m)_1 = 0 \text{ eller } (m)_1 > n:$$

$$G(m+1, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle) = 0.$$

Dermed er $G(m, k)$ definert for alle primitivt rekursive funksjoner etter skjema (I)–(III), og samtidig er det tilføyd passende verdier for ikke å få noen »huller« i definisjonen av G , dvs. at det ikke fins noen tallpar m, k slik at $G(m, k)$ er udefinert.

Substitusjonsskjemaet (IV) »bygges inn« i G på følgende måte:

$$(m)_0 = 2 \text{ og } (m)_2 = 0:$$

$$G(m+1, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle) = 0.$$

$$(m)_0 = 2 \text{ og } (m)_2 \geq 1:$$

$$G(m+1, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle)$$

$$= G((m)_3, \langle (m)_2, G((m)_{1,1}, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle), \dots, G((m)_{1, (m)_2}, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle) \rangle)$$

Her er $(m)_{i,j}$ å opfatte som $((m)_i)_j$.

Rekursjonsskjemaet (V) gis ved

$$(m)_0 \geq 3 \text{ og } n = 1:$$

$$\begin{cases} G(m+1, \langle 1, 0 \rangle) = (m)_1 \\ G(m+1, \langle 1, x' \rangle) = G((m)_2, \langle 2, x, G(m+1, \langle 1, x \rangle) \rangle) \end{cases}.$$

$$(m)_0 \geq 3 \text{ og } n > 1:$$

$$\begin{cases} G(m+1, \langle n, 0, x_2, \dots, x_n \rangle) = G((m)_1, \langle n-1, x_2, \dots, x_n \rangle) \\ G(m+1, \langle n, x', x_2, \dots, x_n \rangle) = \\ G((m)_2, \langle n+1, x, G(m+1, \langle n, x, x_2, \dots, x_n \rangle), x_2, \dots, x_n \rangle) \end{cases}.$$

Som eksempel betrakter vi den primitivt rekursive definisjon av addisjon som ble gitt i en tidligere paragraf. Vi skal nå finne et tall m slik at

$$G(m, \langle 2, x_1, x_2 \rangle) = x_2 + x_1.$$

La først $m_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ og $n = 1$, som gir

$$G(7, \langle 1, x \rangle) = x.$$

La videre $m_2 = 0$ og $n = 1$, som gir

$$G(0, \langle 1, x \rangle) = x'.$$

Til $f_3(y, z, x) = z$ får vi å sette $m_3 = 2^1 \cdot 3^2 + 1 = 19$ og $n = 3$:

$$G(19, \langle 3, x_1, x_2, x_3 \rangle) = x_2.$$

Dette gir de tre utgangsfunksjoner til den rekursive definisjon av addisjon. Anvendelsen av substitusjonsskjemaet gir oss

$$m_4 = 2^2 \cdot 3^{3^3} \cdot 5^1 \cdot 7^{m_2} + 1$$

og $n = 3$, altså

$$G(m_4, \langle 3, x_1, x_2, x_3 \rangle) = G(0, \langle 1, G(19, \langle 3, x_1, x_2, x_3 \rangle) \rangle) = x_2'.$$

Settes så $m_5 = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_4} + 1$ og $n = 2$, gir definisjonen av $G(m, k)$ at

$$G(m_5, \langle 2, x_1, x_2 \rangle) = x_2 + x_1.$$

Ut fra dette eksemplet innser man lett at til enhver primitivt rekursiv funksjon $f(x_1, \dots, x_n)$ fins det et tall m slik at $f(x_1, \dots, x_n) = G(m, \langle n, x_1, \dots, x_n \rangle)$ for alle n -tupler av tall $x_1, \dots, x_n$. Man vil videre innse at $G(m, k)$ er definert for alle tallpar m, k . Dette kan vises ved en induksjon på m hvor man i basis og induksjonstrinn benytter en induksjon på $K(k)$.

Det gjenstår da å gjennomføre det fullstendige bevis for at $G(m, k)$ er rekursiv. Nå er det ganske umiddelbart at G er effektivt beregnbar, som følgende eksempel indikerer: La oss beregne $G(61, 7)$. Entydig faktorisering gir $61 = 60 + 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, og den effektive omvending av J gir $7 = \langle 1, 2 \rangle$. Herav følger at

$$G(61, 7) = G(0, \langle 1, G(0, \langle 1, 2 \rangle) \rangle) = G(0, \langle 1, 3 \rangle) = 4.$$

Når G er effektivt beregnbar, er G rekursiv ifølge Church's tese. De lesere som ikke føler seg intuitivt overbevist om dette, men gjerne vil se et formelt bevis for rekursiviteten av $G(m, k)$, henvises til litteraturlisten på slutten av denne artikkel, spesielt til Grzegorzczyk's bok, »Fonctions recursives«, Paris 1961, hvor et liknende bevis er skrevet ut i detalj.

Ved det Cantor-type argument som vi ga i begynnelsen av denne paragraf, kan vi også slutte at $G(m, k)$ *ikke* er en primitivt rekursiv funksjon.

Rekursivt inseparable mengder. Den rekursive funksjon $G(m, k)$ kan benyttes til å stille opp en forbedret versjon av normalformen for rekursive funksjoner. I en tidligere paragraf viste vi at gitt en rekursiv funksjon $f(x)$, så kan vi finne en primitivt rekursiv funksjon $h(x, y)$ slik at

$$f(x) = (\mu y [h(x, y) = 0])_0.$$

La $F(m, x, y) = G(m, \langle 2, x, y \rangle)$; da vil det å finne en primitivt rekursiv funksjon $h(x, y)$ være det samme som å finne et tall m slik at $h(x, y) = F(m, x, y)$. Normalformen vil således bli: *Til enhver rekursiv funksjon $f(x)$ kan man finne et tall m_f slik at*

$$f(x) = (\mu y [F(m_f, x, y) = 0])_0.$$

m_f kalles vanligvis et *Gödel-tall* for $f(x)$ (etter K. Gödel, hvis fundamentale resultater innen den rekursive matematikk vi senere skal stifte nærmere bekjentskap med).

Vi kan nå påvise at det fins *rekursivt genererte mengder som ikke er rekursive*, dvs. at klassen av rekursivt genererte mengder ikke er lukket under komplementdannelse. Bevisteknikken er en variant av Cantors diagonalmetode. La $F(x, y) = G(x, \langle 1, y \rangle)$, definer en tallmengde C_0 ved

$$x \in C_0 \Leftrightarrow \exists y [F(x, y) = x].$$

Idet predikatet $F(x, y) = x$ er rekursivt, så er C_0 rekursivt generert. Det er lett å se at $C_0 \neq N$; la f.eks. $x = 4$, da er $F(4, y) = G(4, \langle 1, y \rangle) = 1$ for alle y , dvs. $4 \notin C_0$. Var C_0 rekursiv, så ville $N - C_0$ være en ikke-tom rekursivt generert mengde. Det betyr at det skulle finnes en primitivt rekursiv funksjon f_0 slik at $x \in N - C_0 \Leftrightarrow \exists y [f_0(y) = x]$. Da $F(x, y)$ er en universalfunksjon for klassen av primitivt rekursive funksjoner, ville det eksistere et tall m_0 slik at $f_0(y) = F(m_0, y)$. Vi får da

$$x \in N - C_0 \Leftrightarrow \exists y [F(m_0, y) = x].$$

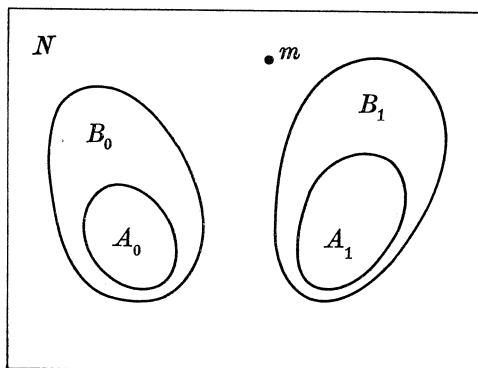
Men dermed har man motsigelsen, for

$$m_0 \in C_0 \Leftrightarrow \exists y [F(m_0, y) = m_0] \Leftrightarrow m_0 \in N - C_0.$$

Med dette har vi nådd frem til et av hovedresultatene i den elementære del av den rekursive teori.

For i neste paragraf å kunne gi den skarpeste versjon av Gödels teorem, trenger vi et sterkere eksistensutsagn. To mengder A_0 og A_1 kalles disjunkte hvis $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. De kalles *rekursivt separable*, hvis det fins en rekursiv mengde B slik at $A_0 \subseteq B$ og $A_1 \cap B = \emptyset$, altså $A_1 \subseteq N - B$, hvor $N - B$ også er en rekursiv mengde.

Mengder som ikke rekursivt kan separeres kalles *rekursivt inseparable*. Det er klart at hvis $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, så er A_0 og A_1 rekursivt inseparable hvis og bare hvis det for hvert par av disjunkte, rekursivt genererte mengder B_0 og B_1 , med $A_0 \subseteq B_0$ og $A_1 \subseteq B_1$, fins et tall m slik at $m \notin B_0$ og $m \notin B_1$ (se figur). Spesielt kan da hverken A_0 eller A_1 være rekursive mengder.



La som ovenfor $F(x, y) = G(x, \langle 1, y \rangle)$. To predikater $R_0(x, y)$ og $R_1(x, y)$ defineres ved

$$\begin{aligned} R_0(x, y) &\Leftrightarrow F((x)_1, y) = x \ \& \ (\forall z \leq y) [F((x)_0, z) \neq x] \\ R_1(x, y) &\Leftrightarrow F((x)_0, y) = x \ \& \ (\forall z \leq y) [F((x)_1, z) \neq x] . \end{aligned}$$

Definer tallmengdene D_0 og D_1 ved

$$\begin{aligned} x \in D_0 &\Leftrightarrow \exists y \ R_0(x, y) , \\ x \in D_1 &\Leftrightarrow \exists y \ R_1(x, y) . \end{aligned}$$

KLEENES TEOREM. *Tallmengdene D_0 og D_1 er to ikke-tomme, disjunkte, rekursivt genererte tallmengder som er rekursivt inseparable.*

Kleene benytter ikke eksakt de samme predikater som her til å definere D_0 og D_1 , men det var han som først eksplisitt påviste eksistensen av rekursivt inseparable mengder.

Først vises at $D_0 \cap D_1 = \emptyset$. Anta at $x \in D_0 \cap D_1$; det vil da finnes tall y_0 og y_1 slik at 1° $F((x)_1, y_0) = x$; 2° $F((x)_0, z) \neq x$ for alle $z \leq y_0$; 3° $F((x)_0, y_1) = x$; 4° $F((x)_1, z) \neq x$ for alle $z \leq y_1$. Av 2° og 3° følger at $y_0 < y_1$, og av 1° og 4° følger at $y_1 < y_0$, hvilket er den ønskede motsigelse.

Vi skal nå godtgjøre at $D_0 \neq \emptyset$ og $D_1 \neq \emptyset$. La $f_0(y) = y \div 1$ og $f_1(y) = y$; dette er primitivt rekursive funksjoner av en variabel, slik at det fins tall m_0 og m_1 som gir $F(m_0, y) = y \div 1$ og $F(m_1, y) = y$. Vi påstår at $m = 2^{m_0} \cdot 3^{m_1} \in D_0$. For det første har vi at $F((m)_1, m) = m$, og for det

andre vil $F((m)_0, z) = z - 1 \neq m$ for alle $z \leq m$. Dette gir $R_0(m, m)$, dvs. $\exists y R_0(m, y)$ som er ekvivalent med $m \in D_0$. På samme måte vises at $2^{m_1} \cdot 3^{m_0} \in D_1$.

Anta at B_0 og B_1 er to rekursivt genererte mengder slik at $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ og $D_0 \subseteq B_0$, $D_1 \subseteq B_1$. Vi skal da konstruere et tall m slik at $m \notin B_0$ og $m \notin B_1$.

Da D_0 og D_1 er ikke-tomme må det finnes primitivt rekursive funksjoner som definerer B_0 og B_1 , dvs. det må gis tall m_0 og m_1 slik at hvis $m = 2^{m_0} \cdot 3^{m_1}$ så vil

$$\begin{aligned} x \in B_0 &\Leftrightarrow \exists y [F((m)_0, y) = x] \\ x \in B_1 &\Leftrightarrow \exists y [F((m)_1, y) = x]. \end{aligned}$$

Anta at $m \in B_0$, dvs. at det fins en y_m slik at $F((m)_0, y_m) = m$. Da $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ vil $m \notin B_1$, dvs. $F((m)_1, y) \neq m$ for alle y , spesielt $(\forall z \leq y_m) [F((m)_1, z) \neq m]$. Og dette leder, etter definisjonen på $R_1(x, y)$ og D_1 , til at $m \in D_1$. Dette er en motsigelse idet $D_1 \subseteq B_1$. På samme måte vises at antagelsen $m \in B_1$ leder til motsigelsen $m \in D_0$.

Den første etappe er nå gjennomført. Vi har gitt et riss av den rekursive matematikks teori frem til det fundamentale resultat, grunnlaget for all anvendelse, at det fins rekursivt genererte tallmengder som ikke er rekursive (og den skarpere versjon om eksistens av rekursivt genererte, men rekursivt inseparable par av mengder). Selvsagt er det trivielt at det fins ikke-rekursive mengder, idet klassen av rekursive mengder er tellbar mens klassen av alle delmengder av N er ikke-tellbar. Betydningen av vårt resultat er at vi effektivt har funnet en tallmengde som ikke er rekursiv. Anvendelser av dette resultat kommer i de følgende paragrafer, hvor vi skal diskutere problemer omkring aksiomatiserbarhet og effektiv avgjørbarhet av teorier, samt gi en oversikt over en del undersøkelser omkring algoritmiske problemer i algebra og topologi.

(Fortsettes i neste hefte.)

PERSONNUMMERERING I NORGE: LITT ANVENDT TALLTEORI OG PSYKOLOGI

ERNST S. SELMER

»Og det skjedde i de dager at det utgikk et bud fra keiser Augustus at all verden skulle innskrives i manntall.«

Meget har endret seg siden juleevangeliet ble skrevet, og det gjelder også prinsippene for folkeregistrering. Idag fører statlige byråer omfattende statistikker over befolkningen. Avanserte statistiske metoder og moderne elektroniske regnemaskiner er uunnværlige hjelpemidler i dette arbeid.

I Norge sorterer folkeregistreringen under Statistisk Sentralbyrå, i engere kretser bare omtalt som »Byrået«. Denne hendige forkortelse skal vi også adoptere her.

For å lette den maskinelle bearbeidelse av et sentralt personregister for Norge, er det meningen å overføre det til magnetbånd. Dette vil skje i forbindelse med en total *nummerering* av hele den norske befolkning (allerede i 1964). Nummeret skal knyttes til den enkelte person, uavhengig av bopel, gitemål o. l. Registeret må selvsagt stadig ajourføres på grunnlag av meldinger om fødsler, dødsfall, flyttinger osv. Det regnes med at Byråets sentrale register etter hvert kan bli til stor nytte for en rekke andre instanser, f. eks. skattemyndigheter, trygde- og pensjonskasser, Forsvaret, Norsk Rikskringkasting o. l. I vårt fremtidige mellomværende med slike institusjoner må vi regne med at vårt tildelte personnummer kommer til å spille en viktig rolle.¹

Prinsippet for nummereringen er enkelt og velkjent: Først kommer et sekssifret tall for *fødselsdatoen*, med to sifre for dag, to for måned og to for årstall. Deretter kommer et *individualnummer* innen hver fødselsdato. For en befolkning som Norges trenges her *tre sifre*, men det skulle også holde en stund. Hittil har det vært maksimalt ca. 250 fødsler på samme dag i Norge — naturligvis våren 1946.

Først et par bemerkninger om fødselsdatoen. Forfatteren er født 11. februar 1920, og vil altså som første del av sitt personnummer få sifrene

¹ Initiativet til personnummereringen kom ikke fra Byrået, men fra næringslivets organisasjoner. Begrunnelsen var nettopp at et fast nummer for den enkelte lønnstaker ville lette næringslivets mellomværende med skattemyndigheter, trygdeordninger o. l.

110220. Fra et registreringssynspunkt er selvsagt årstallet viktigst, der-nest måneden. I den allerede innførte *svenske* personnummerering har man derfor valgt å gi opplysningene i datoen i motsatt rekkefølge, altså for eksemplet ovenfor som 200211. Imidlertid tyder svenske erfaringer på at man herved har introdusert en psykologisk betinget feilkilde; folk er nå engang vant til å oppgi dag, måned og år i denne rekkefølge.

Ved at sifrene for *århundre* sløyfes, introduserer man en viss liten mulig-het for forveksling. I Oslo, hvor en lokal personnummerering med to-sifret individualnummer allerede har vært i bruk en tid, opplevet man f. eks. en forveksling mellom et nyfødt barn og det ikke avsluttede dødsbo etter en millionær som var født nøyaktig 100 år tidligere. Forveks-lingen fikk ingen skattemessige konsekvenser for babyen, men var jo godt avisstoff.

Med *tresifret* individualnummer er det imidlertid lettere å forebygge slike forvekslinger, idet man f. eks. kan bruke visse 100-sifre for personer som er født i forrige århundre, andre sifre for fødselsdatoer i dette år-hundre og atter andre 100-sifre for fødsler fra år 2000. Med under 300 fødsler pr. dag er det jo nok av individualnummer til rådighet.

Med et *nisifret* personnummer er det nokså stor sannsynlighet for *feil*, av to helt forskjellige typer:

1° *Punchefeil*. En rekke lokale registre føres på *hullkort* som må punches, og slike kort brukes også som hjelpemiddel ved overføring av opplysningene til magnetbånd. Ingen operatør puncher feilfritt, og gjen-tatt punching med sammenligning er en nokså omstendelig kontroll-metode, som man om mulig vil unngå. — I samme kategori kommer *avskriftsfeil* på steder hvor opplysningene behandles rent manuelt.

2° *Gale opplysninger* fra publikum. At folk glemmer et tilfeldig tildelt individualnummer kan forklares, men som vi skal se er det påfallende hvor mange som angir sin egen fødselsdag galt.

For å knipe eventuelle forekommende feil kan man innføre ett eller flere *kontrollsifre* etter fødselsdatoen og individualnummeret. Her er det forfatteren kommer inn i billedet, idet jeg av Statistisk Sentralbyrå ble anmodet om å vurdere effektiviteten av forskjellige kontrollsystemer. Det har vært et omfattende arbeid, hvor både matematiske, maskintek-niske og registreringsmessige problemer måtte koordineres, i nært sam-arbeid med byråsjef B. Bendiksen i Byrådet. Nedenfor skal jeg vesentlig gi en kort fremstilling av den matematiske side av saken.¹

¹ Nærmere detaljer finnes i min rapport »Kontrollsifre ved personnummerering«, del 1-3, som i stensillert form kan fåes ved henvendelse til Statistisk Sentralbyrå, Oslo.

Det meste av det hullkortutstyr som brukes i Norge er levert av IBM (International Business Machines), som også produserer forskjellige typer *kontrollutstyr* til punchingen. Metoden bygger på at man tar en *veiet tverrsum* av det tall som skal kontrolleres. Denne tverrsum reduseres så etter en viss modul til et ensifret tall, det egentlige kontrollsiffer, som plasseres umiddelbart til høyre for det siste siffer av tallet.

Det finnes utstyr som *beregner* kontrollsifferet samtidig med punchingen. I Norge vil imidlertid kontrollsifrene bli beregnet sentralt, på Byråets elektroniske regnemaskin, slik at det senere bare vil bli behov for utstyr som *kontrollerer* samtidig med punchingen, og varsler hvis kontrollsifferet ikke stemmer med resten av tallet.

Det kontrollsystem som vil bli tatt i bruk er det såkalte »Modulus 11«. Vekttallene i standard-modellen gjentas her i grupper på 6, etter følgende system:

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{Sifre i gitt tall:} & \dots & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ \text{Vekttall:} & & \dots & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Av den veide tverrsum

$$t = \dots + 4x_8 + 3x_7 + 2x_6 + 7x_5 + 6x_4 + 5x_3 + 4x_2 + 3x_1 + 2x_0$$

dannes så minste positive rest r ved divisjon med 11. Kontrollsifferet k er ikke selve denne rest, men dens 11-komplement:

$$k = 11 - r.$$

Uttrykt med det tallteoretiske kongruenssymbol $\equiv$ blir derfor¹

$$k = 11 - r \equiv 11 - t \equiv -t \pmod{11}.$$

De mulige verdier for k er 0, 1, 2, ..., 9, 10. Siden k bare skal representere ett siffer, må vi *forkaste* $k=10$, og altså også alle tall som leder til et slikt kontrollsiffer. Prinsippet er derfor ikke brukbart i systemer hvor det ikke foreligger noen valgfrihet; det ville f. eks. ikke være mulig å kontrollere bare fødselsdatoen på denne måte. Men nå skal det jo etter fødselsdatoen tilføyes et forholdsvis vilkårlig tresifret individualnummer. Den elektroniske regnemaskin passer da ved tildelingen på at det resulterende kontrollsiffer er lovlig. Under hver fødselsdato må derfor hvert 11-te individualnummer forkastes (men det er fortsatt rikelig å ta av).

¹ Som kjent betyr $a \equiv b \pmod{n}$ at differensen $a - b$ er delelig med n , altså at a og b gir samme (hoved)rest ved divisjon med n . Kongruenser kan adderes, subtraheres og multipliseres som vanlige ligninger. Når modulen n er et primtall, kan vi også fritt forkorte i en kongruens (med tall $\not\equiv 0$, altså med tall som ikke er multipla av modulen).

Et eldre IBM-system (brukes nå i Oslo) anvender modulen 10, med vekttallene 1, 2, 1, 2, ... Her behøver man ikke forkaste noe kontroll-siffer, men systemet er vanskeligere å behandle matematisk, siden modulen ikke (i motsetning til 11) er et *primtall*. For vårt spesielle formål har systemet videre den ulempe at det tydeligvis gir samme veide tverrsum — altså uoppdaget feil — hvis *dag og måned ombyttes* i fødselsdatoen. Dette er nemlig en hyppig forekommende feiltype.

Selv om man velger modulen 11, kan man på bestilling få *andre vekttall* enn standardserien 7, 6, 5, 4, 3, 2. Vi vil derfor i alminnelighet betegne vekttallene med v_i , idet vi samtidig innfører følgende betegnelser for sifrene i personnummeret:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Dag} & \text{Måned} & \text{År} & \text{Nummer} \\ \hline d_{10} & d_1 & m_{10} & m_1 & a_{10} & a_1 & n_{100} & n_{10} & n_1 \\ v_9 & v_8 & v_7 & v_6 & v_5 & v_4 & v_3 & v_2 & v_1 \end{array}$$

Så må vi se nærmere på de feil som vekttallene skal kontrollere. Som nevnt er det delvis punchefeil, delvis gale oppgaver fra publikum.

Den dominerende punchefeil er *feil i ett enkelt siffer*. Hvis det korrekte siffer kalles x , det galt punchede for x' , og det tilhørende vekttall v , vil feilen forbli *uoppdaget* bare hvis

$$vx \equiv vx' \pmod{11},$$

eller

$$v(x - x') \equiv 0.$$

(I det følgende kan »mod 11« utelates.) Da modulen er et primtall, medfører dette

$$v \equiv 0 \quad \text{eller} \quad x \equiv x'.$$

Det er klart at man alltid vil velge (det ensifrede) $v \neq 0$, altså $\neq 0 \pmod{11}$. For enhver modul ≥ 10 vil videre $x \equiv x'$ medføre $x = x'$. Feil i ett siffer vil derfor *alltid oppdages* når alle vekttall er $\neq 0$. (Dette argument holder ikke når modulen er < 10 . F. eks. ville et system modulus 7 ikke kunne skille mellom sifrene 0 og 7, mellom 1 og 8 eller mellom 2 og 9.)

De hyppigste punchefeil i *to sifre* er ombytting og kompensasjon. — Hvis operatøren *bytter om* to (forskjellige) sifre x_i og x_j , svarende til vekttallene v_i og v_j , vil feilen forbli *uoppdaget* bare hvis

$$v_i x_i + v_j x_j \equiv v_i x_j + v_j x_i,$$

eller

$$(v_i - v_j)(x_i - x_j) \equiv 0.$$

Da vi har antatt $x_i \neq x_j$, altså $x_i - x_j \neq 0$, medfører dette $v_i \equiv v_j$, altså $v_i = v_j$. En ombytting av to sifre vil altså forbli uoppdaget bare hvis de to plasser svarer til samme vekttall. For IBM's standard vekttall (grupper på 6 sifre) betyr dette en avstand på 6 plasser mellom de ombyttede sifre. En slik ombytting er imidlertid uhyre usannsynlig; de aller fleste ombyttinger skjer mellom *nabo*-posisjoner.

»Kompensasjon« vil si at to nabosifre begge økes eller minskes med samme beløp i forhold til de korrekte verdier, f. eks. 45 istedenfor 12. (Feilen skyldes gal håndstilling i forhold til tastaturet.) Hvis de korrekte sifre er x_i og x_{i+1} , de punchede sifre $x_i + a$ og $x_{i+1} + a$, og de tilhørende vekttall v_i og v_{i+1} , vil feilen forbli uoppdaget bare hvis

$$v_i x_i + v_{i+1} x_{i+1} \equiv v_i (x_i + a) + v_{i+1} (x_{i+1} + a),$$

eller

$$a(v_i + v_{i+1}) \equiv 0.$$

Da vi antar $a \neq 0$, altså $a \neq 0$, medfører dette $v_i + v_{i+1} \equiv 0$, altså $v_i + v_{i+1} = 11$. Kompensasjon vil derfor alltid oppdages hvis summen av to nabovekttall aldri er 11. For IBM's standard vekttall opptrer imidlertid denne sum én gang innen gruppen, som 5 + 6.

Det forekommer også andre punchefeil i to sifre, av mer tilfeldig karakter. Punchefeil i mer enn to sifre er forholdsvis sjeldne, og vanskelige å systematisere.

Vi kommer så til den annen hovedtype av feil, nemlig *gale oppgaver* fra publikum. Det viser seg, kanskje nokså overraskende, at slike feil må ventes å forekomme to-tre ganger så hyppig som punchefeil (forutsatt erfarne punche-operatører). Og her er det at titelens »anvendt psykologi« kommer inn i bildet.

Først noen ord om erfaringsmaterialet: Vi bygget opprinnelig på en sammenligning som Byrået hadde foretatt for »en årgang av døde«, ca. 35 000 personer, mellom kirkebøkens og dødsattestenes oppgave over fødselsdato. Materialet var imidlertid hverken tilstrekkelig stort eller helt representativt hva utfyllingen av oppgavene angår (prest — lege).

Men så gjorde Byrået et funn i Oslo kommune. Som nevnt har Oslo allerede gjennomført en lokal personnummerering, i forbindelse med en folketelling i 1960. Ved denne telling skulle publikum selv fylle ut fødselsdatoen, som så ble sammenlignet med oppgavene i folkeregisteret. Man fant og noterte i Oslo ca. 8000 uoverensstemmelser, men vi fikk bare ca. 7000 av dem. De resterende tusen var personer som også hadde skrevet navnet sitt galt, og derfor var havnet i en annen skuff!

Materialet fra Oslo er så stort at det må antas å være representativt

også i landsmålestokk. De divergerende oppgaver ble punchet på kort ved Byrået og gjennomanalysert på dets elektroniske regnemaskin.

Som ved punchefeil er den dominerende feiltype at bare *ett siffer* er galt angitt. Ombytting av nabosifre er også forholdsvis hyppig forekommende. For slike feil gjelder det samme som forklart under omtalen av punchefeil.

Ved siden av ett siffer galt er den største feilpost at *begge sifre i fødselsdagen* er galt angitt (mens måned og år er riktige). Om vi holder ombytting av sifrene utenfor, gjenstår det nesten 600 feil av denne kategori. Antallet er så stort at det berettiger et nøyere studium av »psykologien« bak feilene.

Hvis den korrekte fødselsdag har sifrene $d_{10}d_1$ og den gale $d'_{10}d'_1$, følger det av (1) at feilen forblir uoppdaget hvis

$$v_9d_{10} + v_8d_1 \equiv v_9d'_{10} + v_8d'_1,$$

eller

$$(2) \quad \frac{v_9}{v_8} \equiv \frac{d'_1 - d_1}{d_{10} - d'_{10}}.$$

Høyresiden er uforandret ved en ombytting av merkede og umerkede sifre; ved analysen er det selvsagt ikke nødvendig å vite hvilken oppgave som var korrekt og hvilken som var gal.

Det viser seg nå at differens 1 ved 10-skifte, altså ombyttingene $09 \leftrightarrow 10$, $19 \leftrightarrow 20$ og $29 \leftrightarrow 30$, tilsammen svarer for omtrent $\frac{1}{8}$ av alle de betraktete feil i fødselsdagen. For slike ombyttinger er

$$d_{10} - d'_{10} = \pm 1, \quad d'_1 - d_1 = \pm 9$$

(tegnene følger hverandre), og de vil altså ifølge (2) *ikke* bli oppdaget hvis vi velger $v_9/v_8 \equiv 9$. Denne verdi for forholdet v_9/v_8 bør derfor absolutt unngås.

Det er også andre, om ikke så markerte psykologiske »fallgruber« blant de forekommende feil i fødselsdagen. Den beste oversikt får man ved å lage en tabell over antall uoppdagede feil for de forskjellige verdier av forholdet $v_9/v_8 \pmod{11}$. Som ventet er forholdet 9 desidert det ugunstigste (123 feil ialt), mens det på den annen side viser seg at forholdet $v_9/v_8 \equiv 2$ er det beste valg (38 feil, hvorav ingen markerte fallgruber). Dette gjelder i hvert fall i Oslo-materialet, men avstanden til nest beste valg (48 feil) er såpass stor at man kanskje kan vente samme tendens i landsmålestokk.

På samme måte kan man behandle de nokså vanlige feil med begge sifre gale i måneden eller i årstallet. Når det gjelder feil i måned, domine-

res disse av ombyttingen september $\leftrightarrow$ oktober, altså 09 $\leftrightarrow$ 10. Her kommer nok også fonetikken inn i billedet; det er lett å høre feil på »niende» og »tiende». Også ved årstall er differens 1 ved 10-skifte en alminnelig feil.

I forbindelse med årstallet dukket det opp en psykologisk kuriositet. Av (1) følger at det er verdien av forholdet $v_5/v_4 \pmod{11}$ som er avgjørende. Av visse grunner kunne man vente at $v_5/v_4 \equiv 2$ ville være et meget godt valg, men dette slo ikke til i Oslo-materialet. En nærmere undersøkelse ga forklaringen: Dette forhold tar ikke ombyttingen 00 $\leftrightarrow$ 19, som viste seg å være ganske vanlig. Grunnen er at »år nittenhundree» blir til årstallet 19.

Ved å ta hensyn til slike psykologiske tendenser i Oslo-materialet, kan man »skreddersy» et sett vekttall som gir færre uoppdagede feil enn IBM's standard vekttall. Uansett hvilket system man bruker, viser det seg imidlertid at antall uoppdagede feil ved bare ett kontrollsiffer vil bli nokså stort, anslagsvis i nærheten av 0,5 promille av samtlige registreringer. For å øke sikkerheten er det derfor bestemt at man i Norge skal bruke *to kontrollsifre*; derved regner man med å komme ned i omtrent én uoppdaget feil (punch- eller oppgavefeil) pr. 100 000 registreringer.

Av mange grunner er det naturlig å bruke *samme modul* 11 ved begge kontrollsifre, men vekttallene kan godt være forskjellige. Vi tenker oss derfor (1) utvidet med et nytt sett vekttall w_i :

$$(3) \quad \begin{array}{cccccccccccc} d_{10} & d_1 & m_{10} & m_1 & a_{10} & a_1 & n_{100} & n_{10} & n_1 & k_v & k_w \\ v_9 & v_8 & v_7 & v_6 & v_5 & v_4 & v_3 & v_2 & v_1 & & \\ w_9 & w_8 & w_7 & w_6 & w_5 & w_4 & w_3 & w_2 & w_1 & w_0 & \end{array}$$

Ved hjelp av vekttallet w_0 kan annet kontrollsiffer k_w også kontrollere første kontrollsiffer k_v .

Vi skal også se litt på den matematiske behandling av to sett vekttall, og begynner med *feil på to vilkårlige plasser i og j*. Med de tidligere betegnelser vil slike feil forbli uoppdaget hvis

$$v_i x_i + v_j x_j \equiv v_i x'_i + v_j x'_j,$$

og tilsvarende for w , altså

$$\begin{aligned} v_i(x_i - x'_i) + v_j(x_j - x'_j) &\equiv 0 \\ w_i(x_i - x'_i) + w_j(x_j - x'_j) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Da vi antar at $x_i - x'_i$ og $x_j - x'_j \not\equiv 0$, medfører disse homogene kongruenser at

$$\begin{vmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{vmatrix} \equiv 0, \text{ eller } \frac{v_i}{w_i} \equiv \frac{v_j}{w_j}.$$

Feil på to vilkårlige plasser vil derfor alltid tas med to kontrollsifre om alle forhold v_i/w_i er inkongruente (mod 11). Hvis derimot $v_i/w_i \equiv v_j/w_j$ for et visst valg av i og j , vil samtlige feil i x_i og x_j som passerte uoppdaget ved første kontrollsiffer *også* passere uoppdaget ved annet siffer.

Til slutt skal vi se på en av de store psykologiske fallgruber, nemlig *ombytting av fødselsdag og måned* (mens ombyttinger dag $\leftrightarrow$ år og måned $\leftrightarrow$ år ikke forekommer så hyppig). Av (3) ser vi at en slik feil vil passere uoppdaget hvis

$$v_9 d_{10} + v_8 d_1 + v_7 m_{10} + v_6 m_1 \equiv v_9 m_{10} + v_8 m_1 + v_7 d_{10} + v_6 d_1,$$

og tilsvarende for w , altså

$$\begin{aligned} (v_9 - v_7)(d_{10} - m_{10}) + (v_8 - v_6)(d_1 - m_1) &\equiv 0 \\ (w_9 - w_7)(d_{10} - m_{10}) + (w_8 - w_6)(d_1 - m_1) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Som ovenfor finner vi derfor at alle ombyttinger av dag og måned vil tas med to kontrollsifre hvis

$$\begin{vmatrix} v_9 - v_7 & v_8 - v_6 \\ w_9 - w_7 & w_8 - w_6 \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Til slutt skal vi kort beskrive den kombinasjon av kontrollsifre som ble valgt, etter omfattende undersøkelser og vurderinger.

Man kunne tenke seg å bruke IBM's standard vektall for begge kontrollsifre, eller samme «skreddersydd» vektall for begge. Det er også mulig å bruke ett standard og ett skreddersydd kontrollsiffer, i den ene eller annen rekkefølge, og det var en av de siste løsninger som ble valgt.

Første kontrollsiffer k_v vil bli skreddersydd for å motvirke punchefeil og psykologisk betingede oppgavefeil. *Annet* kontrollsiffer k_w blir derimot av standard IBM type. Dette kontrollsiffer skal da brukes i feltet, ved hjelp av umodifisert kontrollutstyr, og samtidig får man også en kontroll av sifferet k_v . De aller fleste feil vil tas ved denne kontroll.

Kontrollsifferet k_v brukes bare hver gang opplysningene kommer inn til Byrået for ajourføring av det sentrale personregister (på magnetbånd). Disse opplysninger må da likevel passere den elektroniske regnemaskin, og for denne er det like lett å kontrollere et skreddersydd som et standard vektallsystem. Praktisk talt alle feil som passerte den første kontroll vil da bli oppdaget.

Det kan tenkes at visse institusjoner for internt bruk helst vil nøye seg med ett kontrollsiffer, altså utelate k_w . En slik institusjon må da spesialbestille utstyr til bruk for det skreddersydde kontrollsiffer k_v , men får til gjengjeld et for formålet bedre system enn standard-vekt-tallene gir.

For å tilfredsstille nysgjerrige lesere skal jeg angi de skreddersydde vekttall v_i :

$$\begin{array}{cccccccccc} v_9 & v_8 & v_7 & v_6 & v_5 & v_4 & v_3 & v_2 & v_1 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 \end{array}$$

Det er klart at et slikt system er bestemt (mod 11) bare på en proporsjonalitetsfaktor nær.

Hver norsk borger skal altså i nær fremtid tildeles et 11-sifret kjen-ningsnummer. Det kan virke langt, men nummeret vil av praktiske grunner bli delt i to deler, en sekssifret for fødselsdatoen og en femsifret for individualnummer og kontrollsifre. Sin egen fødselsdato bør man jo kunne huske (selv om Oslo-materialet viser at det kan by på visse pro-blemer), og resten av nummeret er tross alt ikke lenger enn et gjennom-snittlig norsk telefonnummer.

DEN FÖRSTA SIFFRAN OCH POINCARÉ'S ROULETTEPROBLEM

LENNART RÅDE

Inledning. Det är ett anmärkningsvärt fenomen att fysikaliska konstanter och liknande tal betydligt oftare börjar med någon av siffrorna 1, 2, 3 eller 4 än med någon av siffrorna 5, 6, 7, 8, 9. Med första siffran avses då den första signifikanta siffran t. ex. 4 i talet 0,00489. Intuitivt väntar man väl sig att i genomsnitt $\frac{4}{9}$ av talen i en tabell med befolkningsdata eller med materialkonstanter skall börja med 1, 2, 3 eller 4. I stället finner man att i allmänhet 70% av talen har denna egenskap.

W. Weaver berättar [4, sid. 270–277] att en ingenjör vid General Electric Company upptäckte att i en stor och ofta använd logaritmtabell bar sidorna spår av successivt allt mindre användning från de första räknat. Ingenjören drog härav den riktiga slutsatsen att man oftare har anledning att bestämma logaritmen för tal med låga begynnelse-siffror än för tal med höga sådana.

Detta egendomliga fenomen, som synes ha uppmärksamrats först för c:a 20 år sedan har nyligen givits en matematisk motivering av R. S. Pinkham [2]. Vi skall här redogöra för Pinkhams modell och även visa detta fenomenens samband med ett av sannolikhetslärans klassiska problem, Poincaré's rouletteproblem. Redan nu vill vi emellertid nämna att det följer av Pinkhams modell att proportionen fysikaliska konstanter, vars begynnelse-siffra är mindre än eller lika med x , i genomsnitt är lika med $\log(x+1)$. (Med $\log x$ avses här alltid $^{10}\log x$.) Härav följer speciellt att proportionen fysikaliska konstanter med begynnelse-siffran 1 i genomsnitt är $\log 2 \approx 0,30$ och att proportionen fysikaliska konstanter med begynnelse-siffran 1, 2, 3 eller 4 i genomsnitt är $\log 5 \approx 0,70$. Att möta en fysikalisk konstant, som börjar med 9, är rent av en ganska sällsynt händelse, då proportionen sådana konstanter är $\log 10 - \log 9 \approx 0,05$.

Beteckningen fysikalisk konstant skall ej här uppfattas alltför bokstaveligt. För att den nyss omnämnda logaritmlagen skall väntas gälla för en mängd tal skall dessa avse totalbilden av något »fysikaliskt» fenomen. Se t. ex. nedan angivna exempel. Man kan ej vänta sig att den skall gälla för sådana censurerade data som t. ex. ytan av Sveriges största

sjöar, folkmängden i världens största städer. För att lagen skall gälla bör konstanterna ha stor spridning, vilket framgår av härledningen nedan.

Innan vi går in på Pinkhams modell skall vi med en tabell belysa logaritmlagen empiriskt med några exempel.

Tabell 1.

Empiriska exempel på logaritmlagen.

Typ av konstant	Antal konstanter	Antal konstanter, som börjar på 1, 2, 3, el. 4	
		Antal	%
Folkmängd i Sveriges städer $1/1$ 1962	133	91	68
Yta i ha av Sveriges städer	133	90	68
Folkmängd i Sveriges köpingar $1/1$ 1962	96	63	66
Yta i ha av Sveriges köpingar	96	67	70
Konstanter för metalliska grundämnen på sid. 48-49 i ELFYMA-tabellen	343	251	73
Göteborgs driftutgifter 1961 fördelade på olika titlar	125	86	69

Av tabellen framgår att i samtliga de sex anförda exemplen är andelen konstanter med begynnelsesiffrorna 1, 2, 3 eller 4 ungefär lika med 70% helt i enlighet med logaritmlagen. De ovan angivna exemplen har ej valts bland flera andra utan är de sex första exempel som förf. undersökt för att empiriskt belysa logaritmlagen.

Första siffrans fördelning. Vi betraktar nu följande matematiska modell för en mängd fysikaliska konstanter. Vi låter konstanterna motsvaras av en positiv och kontinuerlig stokastisk variabel ξ med frekvens- och fördelningsfunktionerna f_ξ och F_ξ , där $F_\xi(x) = \int_0^x f_\xi(t) dt$, $x \geq 0$. Utfallsrummet E_ξ för ξ är då $E_\xi = \{x; 0 < x < \infty\}$.

Låt nu η vara första siffran i en fysikalisk konstant ξ . Då är också η en stokastisk variabel. Den är en funktion av ξ och den har utfallsrummet $E_\eta = \{1, 2, \dots, 9\}$. Vi bestämmer nu fördelningsfunktionen F_η för η , som är bestämd av att $F_\eta(x) = P(\eta \leq x)$. För varje $x \in E_\eta$ gäller nu att händelsen $\{\eta \leq x\}$ innebär att någon av händelserna $\{10^n \leq \xi < (x+1) \cdot 10^n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, inträffar, ty alla tal i intervallet $\{t; 10^n \leq t < (x+1) \cdot 10^n\}$ har en begynnelsesiffra, som är mindre än eller lika med x . Då dessa händelser är ömsesidigt uteslutande, så är

$$F_\eta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(10^n \leq \xi < (x+1) \cdot 10^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_\xi((x+1) \cdot 10^n) - F_\xi(10^n)].$$

Enligt detta samband bestäms fördelningsfunktionen F_η värden i språngpunkterna $x \in E_\eta$. För övrigt är den en ren språngfunktion, då η är en diskret stokastisk variabel.

Vi inför nu vidare den stokastiska variabeln $\varphi = \log(\eta + 1)$. Den har utfallsrummet $E_\varphi = \{\log 2, \log 3, \dots, \log 10\}$ och fördelningsfunktionen F_φ , sådan att

$$\begin{aligned} F_\varphi(x) &= P(\log(\eta + 1) \leq x) = P(\eta \leq 10^x - 1) = F_\eta(10^x - 1) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_\xi(10^{x+n}) - F_\xi(10^n)], \quad x \in E_\varphi. \end{aligned}$$

Om vi nu dessutom definierar den stokastiska variabeln $\varrho = \log \xi$, så är med uppenbara beteckningar $E_\varrho = \{x; -\infty < x < \infty\}$ och $F_\varrho(x) = F_\xi(10^x)$. Vi får alltså

$$F_\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_\varrho(x+n) - F_\varrho(n)], \quad x \in E_\varphi.$$

Vi har här uttryckt fördelningsfunktionen för $\varphi = \log$ aritmen för den första siffran ökad med 1 i den fysikaliska konstanten ξ i fördelningsfunktionen för $\varrho = \log$ aritmen för ξ .

Enligt den i inledningen nämnda logaritmlagen så skall det gälla att $F_\eta(x) \approx \log(x+1)$ dvs. att $F_\varphi(x) = F_\eta(10^x - 1) \approx x$ eller att

$$F_\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_\varrho(x+n) - F_\varrho(n)] \approx x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Här är högra ledet fördelningsfunktionen för en stokastisk variabel med likformig sannolikhetsfördelning på intervallet $(0, 1)$. Vi skall nu med en elementär metod uppskatta skillnaden $F_\varphi(x) - x$. I vårt fall är ϱ en kontinuerlig stokastisk variabel, vars frekvensfunktion vi betecknar med f_ϱ , $-\infty < x < \infty$. För f_ϱ gäller, som för varje frekvensfunktion, att $\int_{-\infty}^{\infty} f_\varrho(x) dx = 1$.

Vi får nu med hjälp av medelvärdessatsen för bestämda integraler:

$$\begin{aligned} F_\varphi(x) - x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_\varrho(x+n) - F_\varrho(n)] - x \int_{-\infty}^{\infty} f_\varrho(x) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+x} f_\varrho(x) dx - x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f_\varrho(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x f_\varrho(n + \theta_n x) - x \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_\varrho(n + \theta'_n) \\ &= x \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_\varrho(n + \theta_n x) - f_\varrho(n + \theta'_n)], \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1, \quad 0 \leq \theta'_n \leq 1. \end{aligned}$$

Vi får då

$$|F_\varphi(x) - x| \leq x \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_\varphi(n + \theta_n x) - f_\varphi(n + \theta'_n)| \leq x \cdot V[f_\varphi], \quad 0 \leq x \leq 1,$$

där $V[f_\varphi]$ är totala variationen av frekvensfunktionen f_φ .

Vi har alltså visat att $|F_\varphi(x) - x| \leq x \cdot V[f_\varphi]$. Det kan nämnas att Pinkham [2] med avancerade analytiska hjälpmedel visar olikheten $|F_\varphi(x) - x| \leq \frac{1}{6} V[f_\varphi]$. Vi kan alltså vänta oss bättre anslutning till logaritm-lagen om $V[f_\varphi]$ är liten. Om t. ex. ϱ är normalfördelad med standard-

avvikelsen σ , så är $V[f_\varphi] = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. I detta fall är alltså approximationen

bättre ju större standardavvikelsen dvs. spridningen är.

Man kan fråga sig om det existerar något allmänt samband mellan den totala variationen $V[f_\varphi]$ och standardavvikelsen σ . Som man lätt inser behöver ej stor standardavvikelse betyda liten totalvariation. Däremot kan man visa att liten totalvariation medför stor standardavvikelse. I själva verket gäller följande olikhet, som angivits och bevisats av Mats Rudemo i en diskussion i anslutning till denna uppsats:

$$V[f_\varphi] \geq \frac{2}{3\sqrt{3}\sigma}.$$

Denna olikhet kan bevisas med hjälp av att $2f_\varphi \leq V[f_\varphi]$ (då integralen $\int_{-\infty}^{\infty} f_\varphi(x) dx$ är konvergent måste f_φ anta värden som ligger godtyckligt nära 0), och Chebyshevs olikhet på följande sätt:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_\varphi(x) dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x - \mu| \geq \varepsilon} f_\varphi(x) dx = \varepsilon^2 \left(1 - \int_{\mu - \varepsilon}^{\mu + \varepsilon} f_\varphi(x) dx \right) \geq \varepsilon^2 (1 - \varepsilon V[f_\varphi]).$$

Här är μ väntevärdet $E(\varrho)$. Om vi här väljer $\varepsilon = \frac{2}{3V[f_\varphi]}$, vilket maximerar högra ledet, får vi den angivna olikheten.

Vi får alltså den bästa anslutningen till logaritm-lagen, då $V[f_\varphi]$ är liten, vilket i sin tur medför att ϱ har stor standardavvikelse. Intuitivt ter sig detta rimligt.

Vi skall nu visa att ett annat problem i sannolikhetsläran leder till exakt samma matematiska frågeställning som problemet ovan.

Poincarés rouletteproblem. Betrakta en vridbar visare av sådan längd att dess spets vid rotation beskriver en cirkel med omkretsen 1. Antag att visaren bringas att rotera och att härvid spetsen förflyttar sig längden ϱ längs periferin, $-\infty < \varrho < \infty$. Vi antar att ϱ är en kontinuerlig stokastisk variabel.

Låt vidare (fig. 1a) φ vara avståndet längs periferin från visarens begyn-

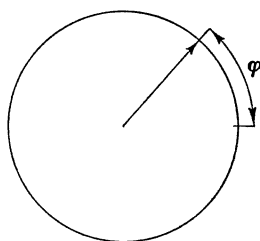


Fig. 1a

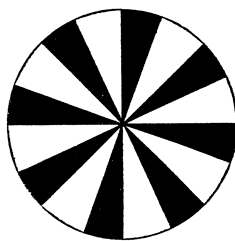


Fig. 1b

nelseläge till dess slutläge, mätt i ϱ :s orientering. Då är φ en stokastisk variabel med utfallsrummet $E_\varphi = \{x; 0 \leq x < 1\}$ och fördelningsfunktionen F_φ , som lätt uttryckes i fördelningsfunktionen F_ϱ för ϱ . Vi får

$$F_\varphi(x) = P(\varphi \leq x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n \leq \varrho \leq x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_\varrho(x+n) - F_\varrho(n)].$$

Vi har alltså samma samband mellan de stokastiska variablerna ϱ och φ som i problemet om första siffran. Den enda skillnaden är att φ här är en kontinuerlig stokastisk variabel. I detta rouletteproblem förefaller det mycket rimligt att φ i allmänhet har en i det närmaste likformig sannolikhetsfördelning runt periferin dvs. att oavsett den mekanism, med vilken visaren bringas att rotera, så är sannolikheterna att visaren skall stanna på skilda men lika långa cirkelbågar approximativt lika. Denna princip tillämpas för övrigt som bekant vid ett mycket stort antal olika spel av roulettetyp. Att approximationen till en likformig sannolikhetsfördelning är bättre ju mindre $V[f_\varrho]$ är, verkar också rimligt.

Vi skall här visa att för en speciell roulette uppför sig alltid visaren som om utslaget hade approximativt likformig sannolikhetsfördelning runt periferin. Detta visades ursprungligen av H. Poincaré [3, sid. 148–150], som emellertid gjorde onödigt stränga förutsättningar. Vi återger här ett allmännare bevis enligt Fréchet [1, sid. 3–6].

Vi delar in rouletten i $2n$ sektorer, omväxlande röda och svarta (fig. 1b), och så att alla röda cirkelbågar har längden r och alla svarta längden s .

I fig. 2 har vi åskådliggjort frekvensfunktionen f_ϱ för ϱ . Vi definierar mängderna R_k och S_k , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, enligt figuren dvs

$$\begin{aligned} R_k &= \{x; k(s+r) \leq x < ks + (k+1)r\} \\ S_k &= \{x; ks + (k+1)r \leq x < (k+1)(s+r)\}. \end{aligned}$$

Om vi vidare betecknar $R = \bigcup_{-\infty}^{\infty} R_k$ och $S = \bigcup_{-\infty}^{\infty} S_k$ och låter p_n och q_n vara sannolikheterna för rött respektive svart, så är

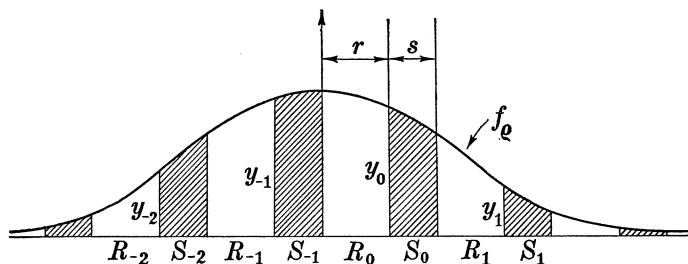


Fig. 2

$$p_n = P(\varrho \in R) = \int_R f_\varrho(x) dx \quad \text{och} \quad q_n = P(\varrho \in S) = \int_S f_\varrho(x) dx;$$

$$p_n + q_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varrho(x) dx = 1.$$

Vi skall nu visa att oberoende av f_ϱ så gäller vid gränsövergång sådan att kvoten r/s är konstant att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{r}{r+s} \quad \text{och} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{s}{r+s}.$$

Detta betyder att för stora värden på n uppför sig alltid visaren som om utslaget φ hade en likformig sannolikhetsfördelning längs periferin med avseende på fördelningen rött - svart.

Vid beviset utnyttjar vi endast att f_ϱ såsom varje frekvensfunktion för en kontinuerlig stokastisk variabel är integrerbar. Vi antar att f_ϱ är begränsad och inför följande beteckningar för supremum och infimum av f_ϱ i R_k respektive S_k :

$$\sup_{x \in R_k} f_\varrho = A_k, \quad \inf_{x \in R_k} f_\varrho = a_k, \quad \sup_{x \in S_k} f_\varrho = B_k, \quad \inf_{x \in S_k} f_\varrho = b_k.$$

Då gäller att

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r a_k \leq p_n \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} r A_k,$$

och då $p_n + q_n = 1$, att

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (r a_k + s b_k) \leq 1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (r A_k + s B_k).$$

Låt vidare y_k vara ordinatan i gränspunkten mellan R_k och S_k (fig. 2) och sätt

$$p'_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r y_k, \quad S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (r+s) y_k.$$

Då är

$$S_n = (r+s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k = \frac{r+s}{r} p'_n \text{ eller } p'_n = \frac{r}{r+s} S_n.$$

Vi visar nu att $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p'_n$. Detta följer av att

$$|p_n - p'_n| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(A_k - a_k)$$

$$|1 - S_n| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(A_k - a_k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(B_k - b_k).$$

Då funktionen f_q är integrerbar så går summan i högra ledet av den andra olikheten mot 0, då n går mot oändligheten. Samma sak gäller då också om summan i högra ledet av den första olikheten. Härav följer de nyss nämnda gränsvärdena samt sedan att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{r}{r+s} \quad \text{och} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{s}{r+s}.$$

Pinkhams invarianslag. Som ett ytterligare stöd för logaritmlagen visar Pinkham [2] följande invarianslag. Låt som förut den stokastiska variabeln ξ vara matematisk modell för en mängd fysikaliska konstanter. Vad händer med fördelningen av första siffran i dessa konstanter om de samtliga multipliceras med ett och samma tal c ? Det tycks naturligt förmoda att denna transformation ej påverkar fördelningen av första siffran. Att så är fallet om första siffran har fördelningsfunktionen $\log(x+1)$ inses lätt. Pinkham visar nu att denna fördelning är den enda fördelningen för första siffran, som har denna egenskap.

För att kunna räkna med $\log x$ i stället för med $\log(x+1)$ definierar vi funktionen G_η så att

$$G_\eta(x) = P(\eta \leq x-1) = F_\eta(x-1).$$

Enligt vad vi visat förut så är då

$$G_\eta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_\xi(x \cdot 10^n) - F_\xi(10^n)], \quad x \in \{2, 3, \dots, 10\}.$$

Om vi nu multiplicerar ξ med c , så blir funktionen G för första siffran

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_\xi \left(\frac{x}{c} \cdot 10^n \right) - F_\xi \left(\frac{1}{c} \cdot 10^n \right) \right].$$

Om nu denna är invariant så får vi

$$G_\eta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_\xi(x \cdot 10^n) - F_\xi(10^n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_\xi\left(\frac{x}{c} \cdot 10^n\right) - F_\xi\left(\frac{1}{c} \cdot 10^n\right) \right].$$

Härav får vi

$$G_\eta(x) = G_\eta\left(\frac{x}{c}\right) - G_\eta\left(\frac{1}{c}\right),$$

eller om vi sätter $\frac{1}{c} = x_1$:

$$G_\eta(x) + G_\eta(x_1) = G_\eta(xx_1).$$

Den enda här användbara kontinuerliga lösningen till denna funktionalekvation är $G_\eta(x) = \log x$. Detta är välkänt om x är godtyckligt. Pinkham visar att funktionalekvationen leder till samma entydigt bestämda lösning om x , vilket här är fallet, endast antar värdena 2, 3, ..., 10.

LITTERATUR

- [1] M. FRÉCHET: *Calcul des probabilités*, Vol. 2. Gauthier-Villars, Paris 1950.
- [2] R. S. PINKHAM: *On the distribution of first significant digits*. Ann. Math. Stat. 32 (1961), sid. 1223–1230.
- [3] H. POINCARÉ: *Calcul des probabilités*. Paris 1896.
- [4] W. WEAVER: *Lady Luck*. Doubleday & Co., New York 1963. Svensk översättning 1964.

OM VÄRDEFÖRDELNINGSLÄRANS HUVUDSATSER

GUNNAR AF HÄLLSTRÖM

1. Inledning. Rolf Nevanlinnas teori för meromorfa funktioners värdefördelning utformades i sina grunddrag under 1920-talet [17–18]. Den kulminerade i tvenne fundamentalsatser, som ger uttryck för den jämvikt som råder med avseende på fördelningen av de värden den betraktade funktionen antager. Som ett korollarium till den andra fundamentalsatsen framgick den enkelt formfulländade defektrelationen, som utgör en generalisering av Picards berömda sats [22], att en meromorf funktion på sin höjd kan utelämna två värden.

I den Nevanlinnaska teoriens spår har sedermera följt en lång rad av modifikationer och av utvidgningar till andra funktionsklasser. Trots att modern funktionsteori företrädesvis har sökt sig andra vägar, har de berörda värdefördelningssatserna bevarat sin plats som hjälpmedel och inspirationskälla. Det kan måhända därför vara på sin plats att ge en resumé över nådda resultat. Den följande framställningen kan icke gå in på bevisföringar och ej heller i övrigt ge en fullständig bild av området.

2. Analytiska funktioner. Betraktar vi en komplex funktion $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ av den komplexa variabeln $z = x + iy$, så kallas den som känt *analytisk*, om $w'(z)$ existerar. Alternativt kan villkoret uttryckas så, att u och v är kontinuerliga jämte sina första derivator och uppfyller Cauchy–Riemanns differentialekvationer

$$(1) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Om $w(z)$ är analytisk i hela z -planet, kallas $w(z)$ en *hel* funktion. Om i varje punkt av planet antingen $w(z)$ eller $1/w(z)$ är analytisk, kallas $w(z)$ *meromorf*. Gäller detta blott ett avgränsat område, säges $w(z)$ i detta vara meromorf eller *av meromorf natur*.

3. Värdefördelningsstorheterna. Vi betraktar en meromorf funktion $w(z)$. Alternativt antages den meromorfa karaktären hos $w(z)$ vara garanterad blott i enhetscirkeln $|z| < 1$. I vartdera fallet är det lämpligt att

undersöka funktionens beteende innanför och på cirklar $|z|=r$ och särskilt det asymptotiska förhållandet när r växer mot ∞ resp. 1 [18, 20].

Funktionens tendens att på cirkelperiferin approximera ett givet värde a mäter Nevanlinna med den s. k. *smygfunktionen*

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|w(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi \quad (a \neq \infty),$$

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |w(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

där $\ln^+ t$ betyder $\ln t$ om detta tal är positivt, annars 0. Låt $w(z)$ ha $n(r, a)$ a -ställen för $|z| \leq r$, varvid multipla rötter till ekvationen $w(z) = a$ räknas så många gånger som multipliciteten anger. Av dessa antal $n(r, a)$ bildar Nevanlinna genom integration *antalsfunktioner* $N(r, a)$ enligt formeln

$$(2) \quad N(r, a) = \int_0^r [n(t, a) - n(0, a)] \frac{dt}{t} + n(0, a) \ln r,$$

vilken ju för alla $a \neq w(0)$ förenklas till

$$(3) \quad N(r, a) = \int_0^r n(t, a) d \ln t.$$

4. Första huvudsatsen. Medelst en lämplig interpretation av Jensens sats kommer Nevanlinna till sin första huvudsats. Denna utsäger, att om $w(z)$ blott sparsamt antager ett värde a innanför en cirkel, så måste funktionen desto starkare approximera detta värde på periferin och vice versa. Något exaktare, *summan av smygfunktionen och antalsfunktionen är tillnärmelsevis oberoende av a* . Om man definierar vad Nevanlinna kallar w 's *karakteristiska funktion* T genom likheten

$$T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty),$$

så utsäger i själva verket *första huvudsatsen*, att för alla a

$$(4) \quad m(r, a) + N(r, a) = T(r) + O(1),$$

där $O(1)$ betecknar en term som för alla r absolut sett understiger en endast av a beroende kvantitet, $\ln^+ |a| + \text{konst.}$

5. Konkurrensen mellan m och N . Första huvudsatsen (4) innebär alltså att m och N väsentligen kompletterar varandra, så att deras

summa är nästan oberoende av a . Men frågan därom, hur stor del av T de båda termerna utgör, ger betydande svårigheter att besvara. För i hela planet meromorfa $w(z)$ föreligger starka indicier för hur svaret kommer att utfalla. Enligt Picards sats kan $N(r, a)$ icke försvinna eller ens förbli ändligt för mer än två a -värden. Men även alla beräkningar av m och N för »kända« meromorfa funktioner gav vid handen att $m(r, a)$ blott för enstaka a -värden numeriskt kunde utgöra den dominerande termen i $T(r)$ eller ens något så när mäta sig med $N(r, a)$, när r är stort. Det lyckades R. Nevanlinna att klä denna företeelse i exakt form och att för denna sin andra huvudsats ge ett bevis som bygger på långa skickligt genomförda kalkyler. Viktigaste etappstation utgjorde en sats som ut-säger att den logaritmiska derivatans smygfunktion för $a = \infty$ växer relativt långsamt med r . Kort därpå gav brodern Frithiof Nevanlinna ett alternativt bevis [16], som utnyttjar egenskaperna hos lösningar till differentialekvationen $\Delta u = 4e^{2u}$.

6. Andra huvudsatsen. För att formulera Nevanlinnas andra huvudsats betraktar vi q (> 2) värden $a_1, \dots, a_q$. Utom antalsfunktionen $N(r, a)$ inför vi $\bar{N}(r, a)$, som framgår ur formeln (2) om vi i den ersätter $n(r, a)$ med det antal $\bar{n}(r, a)$ som fås, om vi räknar även multipla a -ställen enkelt. På den av $w(z)$ uppbyggda Riemannska w -ytan R_w motsvaras ju ett k -faldigt a -ställe för $w(z)$ av en k -faldig vindlingspunkt, och $k-1$ kallas dess förgreningsordning. Skillnaden

$$(5) \quad n_1(r, a) = n(r, a) - \bar{n}(r, a)$$

anger då summan av de multipla a -ställets förgreningsordningar i r -cirkeln. Förgreningssumman av alla multipelställen anges av

$$(6) \quad n_1(r) = \sum_{(a)} n_1(r, a),$$

där summan utsträcker sig över de a -värden som råkar antas multipelt för $|z| \leq r$. Nu kan man analogt med (2) bilda jämväl $N_1(r, a)$ och $N_1(r)$, och har då enligt (5) och (6)

$$(7) \quad N_1(r, a) = N(r, a) - \bar{N}(r, a); \quad N_1(r) = \sum_{(a)} N_1(r, a).$$

Med dessa beteckningar kan vi formulera *andra huvudsatsen* så här:
Man har

$$(8) \quad \sum_{k=1}^q m(r, a_k) + N_1(r) \leq 2T(r) + S(r),$$

där $S(r)$ utgör en restterm, om vilken följande gäller:

1:o. Om $w(z)$ är meromorf i hela planet (det s. k. paraboliska fallet), är

$$(9) \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} S(r)/\ln[rT(r)] < \infty;$$

2:o. om $w(z)$ är av meromorf natur i enhetscirkeln (det hyperboliska fallet), gäller

$$(10) \quad \liminf_{r \rightarrow 1} S(r)/\ln \frac{T(r)}{1-r} < \infty.$$

7. Kommentrar till andra huvudsatsen. Vilken är nu den djupare innebörden av andra huvudsatsen?

Det kan visas att $T(r)$ går snabbare mot ∞ än $\ln r$, så snart $w(z)$ är en icke-rationell meromorf funktion. Sålunda visar (9), att $S(r)$ i (8) är en term som är helt underordnad $T(r)$ för alla transcendent meromorfa funktioner (naturligtvis inkluderande hela funktioner). I undantagsintervaller kan denna regel brytas, eftersom (9) blott är ett undre gränsvärde. Men det visas att sådana intervaller alltid har ändlig totallängd, och de saknas helt om w är av *ändlig ordning*, d. v. s. om

$$\limsup \ln T(r)/\ln r < \infty.$$

För transcendent $w(z)$ utsäger därför (8), att, hur många a -värden man än väljer, summan av deras smygfunktioner alltid asymptotiskt blir högst $\approx 2T(r)$, medan enligt (4) antalsfunktionerna då måste svara för ett belopp åtminstone $\approx (q-2)T(r)$. Flera än 2 värden kan då ej utelämnas eller ens antagas blott ett ändligt antal gånger, enär i så fall deras $N(r, a)$ bleve $O(\ln r)$, d. v. s. mindre än en multipel av $\ln r$. De här nämnda resultaten gäller även de under punkt 2:o nämnda funktioner för vilka $T(r)$ växer snabbare än $-\ln(1-r)$, medan ett större antal undantagsvärden och en större betydelse hos smygfunktionen kommer i fråga hos sådana funktioner i enhetscirkeln, vilkas karakteristika $T(r)$ är begränsad eller i varje fall inte växer snabbare än $-\ln(1-r)$.

8. En modifikation. Tillämpas (4) och (7) på (8), finner man med en något förändrad restterm $S(r)$, som dock fortfar att uppfylla (9) resp. (10), att

$$(11) \quad (q-2)T(r) \leq \sum_{k=1}^q \bar{N}(r, a_k) + S(r).$$

Denna formulering av andra huvudsatsen är värd särskild uppmärksamhet, enär den är frigjord från smygfunktionen och därför visar sig mer lämpad än (8) för generalisering till vissa allmännare funktionsklasser.

I detta sammanhang må nämligen följande företeelse förutskickas. Å ena sidan beror ekvivalensen mellan formuleringarna (8) och (11) på giltigheten av första fundamentalsatsen (4). Å andra sidan gäller icke (4) utan stark modifikation om den analytiska karaktären av $w(z)$ uppluckras; däremot kan (11) i sådana lämpligt avgränsade fall förbli bestående. En motsatt företeelse inträffar om $w(z)$ förblir analytisk men existensområdet kompliceras. Under rätt allmänna betingelser förblir då (4) i kraft, men andra huvudsatsen måste i regel modifieras.

9. Defektrelationen. Förrän vi övergår till modifikationer av just nämnda slag, skall vi behandla defektrelationen. Man definierar *defekten* hos värdet a såsom

$$(12) \quad \delta(a) = \liminf \frac{m(r, a)}{T(r)} .$$

Värdets förgreningsindex definieras som

$$(13) \quad \mu(a) = \liminf \frac{N_1(r, a)}{T(r)}$$

samt funktionen $w(z)$'s totala *förgreningsindex* som

$$(14) \quad \mu = \liminf \frac{N_1(r)}{T(r)} .$$

Gränsvärdena i (12)–(14) gäller för $r \rightarrow \infty$ eller $r \rightarrow 1$ beroende på om planet eller enhetscirkeln utgör det betraktade (existens)området.

I alla de fall där $T(r)$ är obegränsad, har man enligt (4) följande alternativa uttryck:

$$(15) \quad \delta(a) = 1 - \limsup \frac{N(r, a)}{T(r)} .$$

Ur (6)–(10) får man nu, när (8) divideras med $T(r)$,

$$(16) \quad \sum_{k=1}^q (\delta(a_k) + \mu(a_k)) \leq \sum_{k=1}^q \delta(a_k) + \mu \leq 2 .$$

Detta är *defektrelationen*, och den gäller för alla meromorfa funktioner och för funktioner i enhetscirkeln som uppfyller villkoret

$$\lim \frac{\ln(1-r)}{T(r)} = 0 .$$

Om $\delta(a) > 0$, säger vi att a är ett *defekt värde*, d. v. s. ett sparsamt förekommande värde, mätt med måttet $N(r, a)$ relativt $T(r)$. För ett värde som en meromorf funktion antar blott ett ändligt antal gånger

eller ej alls är $\delta(a) = 1$. Enligt (16) kan blott två sådana värden förekomma, och detta är *Picards teorem* [22]. Defekrelationen är således en skärpning av denna sats, i det den utsäger att den totala defektsumman, utökad med förgreningsindex, aldrig överstiger 2.

10. Anslutna problem. Låt $w(z)$ vara meromorf i hela planet. Ur (4), (7), (12) och (13) framgår att för varje a

$$\delta(a) + \mu(a) \leq 1.$$

Ett starkt defekt värde kan alltså ej vara mycket starkt förgrenat på den av $w(z)$ alstrade Riemannska ytan R_w , och vice versa.

I ljuset av de exempel som välkända transcendent erbjuder förefaller ett samband existera mellan att ett värde a är defekt och att det är ett asymptotiskt värde, d. v. s. att $\lim w(z) = a$ gäller på någon mot ∞ gående kurva. Exempelvis har $w = e^z$ gränsvärdena ∞ och 0 när z är reellt och går mot $\pm \infty$, men ∞ och 0 är just de värden e^z aldrig antager. Genom exemplet

$$w(z) = \int_0^z t^{-a} \sin t^a dt$$

visade Nevanlinna emellertid att asymptotiska värden ej behöver vara defekta. Hans förmodan att varje defekt värde vore asymptotiskt, vederlades 1941 av Marie-Hélène Schwartz [27], som konstruerade en meromorf funktion med icke-asymptotiskt defekt värde. Hayman visade 1953 [9] en hel funktion av detta slag, och år 1957 gav A. A. Goldberg [8] ett motsvarande exempel på en hel funktion av ändlig ordning.

År 1932 konstruerade R. Nevanlinna [19] en funktionsklass som ger lösningen på följande problem. Till givna tal $a_1, \dots, a_q$ och givna rationella tal $\delta_k \leq 1$ med $\delta_1 + \dots + \delta_q = 2$ skall konstrueras en funktion, så att $\delta_k = \delta(a_k)$ för varje k . År 1954 lyckades Goldberg finna funktioner med oändligt många defekta värden [7]. Funktioner med oändligt många värden med positiv förgreningsindex konstruerades år 1952 oberoende av varandra av Huckemann [10] och förf. [12]. Inom vissa gränser kan talen a_k och indices $\mu(a_k)$ härvid väljas godtyckligt, dock så att varje $\mu(a_k) \leq \frac{1}{2}$ och $\sum \mu(a_k) \leq 1$.

Dugué upptäckte 1947 [5] det märkliga faktum att defekten $\delta(a)$ kan vara beroende av valet av origo i z -planet, d. v. s. valet av medelpunkten i de cirklar till vilka definitionerna av $m(r, a)$ och $N(r, a)$ är knutna. Hayman visade 1953 [9] att en flyttning av origo t. o. m. kan åstadkomma att helt nya a -värden uppträder med positiv defekt. Detta visar att redan i det klassiska fallet arten av z -planets uttömning inverkar på

värdefördelningsstorheterna. Detta blir i än högre grad fallet, om existensområdet för funktionen $w(z)$ icke längre förutsättes vara hela planet eller en cirkel.

11. Allmänna existensområden. I det hittills behandlade klassiska fallet har existensområdet uttömts medelst växande koncentriska cirklar. Dessas periferier är nivåkurvor för den harmoniska funktionen $g(z) = \ln|z|$, reell del av $s(z) = g + ih = g + i \arg z = \ln z$. I (2) kan i själva verket $\lambda = \ln r$, värdet av $g(z)$ på r -cirkeln, anses vara integrationsvariabel, och storheterna m, n, N kan anses vara funktioner av λ i st. f. av r .

Om nu $w(z)$ är meromorf i ett godtyckligt område B , så ligger det nära till hands att uttömma B genom områden begränsade av nivåkurvorna G_λ :

$$(17) \quad g(z) = \lambda$$

till en i B harmonisk funktion $g(z)$, som liksom $\ln|z|$ blir negativt oändlig i en inre punkt O och har ett fast gränsvärde vid närmande till B 's rand Γ . R. Nevanlinna väckte idén att hänföra m, n och N till kurvorna G_λ i st. f. till cirklar. En värdefördelningsteori på denna bas genomfördes sedermera av förf. [11].

Ifall området B är *hyperboliskt*, d. v. s. har en Greensk funktion, sättes helt enkelt denna $= -g(z)$. Metoden leder dock till resultat endast om randen Γ är tillräckligt regelbunden för att $\lim g(z) = 0$ skall gälla likformigt i varje punkt av Γ . Polen O för $g(z)$ kan väljas fritt inom B .

Saknar B Greensk funktion (och blott då), är Γ av kapaciteten 0, och området B kallas *paraboliskt*. En sats av H. Selberg [29] (modifikation av en tidigare sats av Evans [6]) utsäger, att det i detta fall existerar en funktion $g(z)$, som blir $-\infty$ i en inre punkt O av B , som f. ö. är harmonisk i B och som likformigt går mot $+\infty$, när z närmar sig Γ . Med denna funktion erhålles den sökta uttömningen i alla de fall då Γ har försvinnande kapacitet. Olyckligtvis är Selberg-funktionen långt ifrån entydigt bestämd, så att värdefördelningsstorheterna ofta blir starkare beroende av valet av $g(z)$ än av den betraktade funktionen $w(z)$.

12. Första huvudsatsen. Låt $[a, b]$ beteckna det kordala avståndet på Riemanns sfär mellan punkterna a och b . Låt $h(z)$ igen beteckna den harmoniska konjugatfunktionen till $g(z)$, så att $s(z) = g + ih$ är analytisk. Den totala tillväxten av h på G_λ (som kan bestå av flera slutna kurvor) utgör 2π . Vi definierar nu

$$(18) \quad m(\lambda, a) = -\frac{1}{2\pi} \int_{G_\lambda} \ln[w(z), a] dh,$$

$$(19) \quad N(\lambda, a) = \int_{-\infty}^{\lambda} n(g, a) dg + \ln[w(0), a],$$

där $n(\lambda, a)$ utgör antalet a -ställen med beaktad multiplicitet i området $\Delta_\lambda = \{z \mid g(z) \leq \lambda\}$. För $a=w(0)$ behövs en modifikation av (19). Definitionerna av $\bar{N}(\lambda, a)$ och $N_1(\lambda, a)$ är analoga. Övergången från $\ln|w-a|^{-1}$ till $-\ln[w, a]$ är en till värdet obetydlig förändring, som redan för det klassiska fallet infördes av Ahlfors [1], och som erbjuder en stark förenkling av bevismetodiken.

Man finner nu som *första huvudsats* likheten

$$(20) \quad m(\lambda, a) + N(\lambda, a) = T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} A(g) dg,$$

där alltså $T(\lambda)$ är helt oberoende av a , och där $A(\lambda)$ är den s. k. Shimizu-karakteristikan [30]. Den har en enkel geometrisk betydelse: Bilden av Δ_λ på w -sfären har ytan $\pi A(\lambda)$, d. v. s. $A(\lambda)$ anger antalet blad i medeltal på den uppkomna delytan av B 's bildyta R_w .

13. Andra huvudsatsen. Medan den första huvudsatsen alltså helt har bibehållit sin gestalt från det klassiska fallet, så undergår den andra huvudsatsen en modifikation, så snart området B icke är enkelt sammanhängande. Antag att G_λ består av $n_G(\lambda) + 1$ separata kurvor. Om B är p -faldigt sammanhängande, är då $n_G(\lambda) = p - 1$ för $\lambda > \lambda_1$. Är sammanhangstalet för B oändligt, fås $\lim n_G(\lambda) = \infty$ när $\lambda \rightarrow \infty$ resp. 0. Vi definierar nu

$$F^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} n_G(g) dg.$$

Då gäller den *andra huvudsatsen* i formen

$$(21) \quad \sum_1^q m(\lambda, a_k) + N_1(\lambda) \leq 2T(\lambda) + F^*(\lambda) + S(\lambda).$$

För $S(\lambda)$ har vi igen olikheterna (9) resp. (10), där λ ersätter $\ln r$. I det paraboliska fallet är $T(\lambda)$ obegränsad och (9) kan skärpas till

$$(22) \quad \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} S(\lambda) / \ln T(\lambda) < \infty.$$

Jämför vi (21) med (8), finner vi att återigen defektrelationen (16) gäller i det paraboliska fallet och även i det hyperboliska när

$$\ln \frac{1}{|\lambda|} : T(\lambda) \rightarrow 0 ,$$

om blott

$$(23) \quad \lim \frac{F^*(\lambda)}{T(\lambda)} = 0 .$$

Om (23) icke gäller, måste defektskrankan 2 höjas till $2 + \limsup \frac{F^*(\lambda)}{T(\lambda)}$.

14. Allmännare funktionsklasser. De i det föregående behandlade utvidgningarna av de klassiska Nevanlinnaska värdefördelningssatserna har endast haft avseende på det område där den betraktade funktionen $w(z)$ förutsättes vara analytisk (av meromorf karaktär). Men uppluckringen i antagandena kan även gälla själva funktionen. Vi betraktar entydiga funktioner $w(z)$, som i existensområdet B tillhör en lämpligt avgränsad klass, vilken som delklass innefattar de i B meromorfa funktionerna. De närmast ifrågakommande klasserna är inre funktioner och som delklass därav de pseudomeromorfa funktionerna. De senare kan också karakteriseras därmed att de är glatta (d. v. s. $\in C^1$) och kvasikonforma i varje kompakt delområde av B .

I dessa fall har man att utgå från vad som kunde kallas »ointegrerade huvudsatser», vilka i det klassiska fallet litet inexakt skulle kunna sägas fås genom derivering av de förut nämnda huvudsatserna. För första satsens vidkommande kan man här utgå från en observation som i huvudsak för analytiska funktioners vidkommande gjorts av en japansk trio, Ozaki, Ono och Ozawa, år 1951 [21]. För den andra ointegrerade huvudsatsen har man som utgångspunkt Ahlfors' teori för överlagringsytor av 1935 [2], som i vissa riktningar utvidgats och preciserats av Dufresnoy år 1941 [4]. I det klassiska fallet kunde år 1938 Dinghas [3] och senare Dufresnoy [4] och slutligen Wille 1957 [32] nå (8) utgående från Ahlfors' teori med en aning sämre uppskattning av $S(r)$ än vad (9) och (10) ger. Likartade förfaranden ledde även förf. till att år 1958 nå modifierade resultat i det pseudomeromorfa fallet [13].

I de återstående avsnitten går vi kort in på dessa frågor.

15. Första ointegrerade huvudsatsen. Deriverar man (20) i avseende å λ , får man den »ointegrerade första huvudsatsen«

$$(24) \quad \mu(\lambda, a) + n(\lambda, a) = A(\lambda) ,$$

där

$$(25) \quad \mu(\lambda, a) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{G_\lambda} \frac{1 + a\bar{w}}{w - a} \cdot \frac{dw(z)}{1 + |w|^2}, \quad w = w(z).$$

Men (24) gäller [14] under det avsevärt allmännare antagandet att $w(z)$ är en *inre funktion*, vilket kan definieras som följer:

- a) $w(z)$ är kontinuerlig;
- b) rötterna till $w(z) = a$ hopar sig icke i det inre av B för något värde a ;
- c) om en tillräckligt liten cirkel kring en punkt $z_0 \in B$ beskrives ett varv i positiv led, ökas $\arg[w(z) - w(z_0)]$ med $2\pi k$, där k är ett positivt helt tal (eller negativt om avbildningen ändrar omloppsriktningen, vilket fall här uteslutes); det betyder att värdet $w(z_0)$ antages med en viss multiplicitet k ;
- d) $w(z)$ får härutöver ha oändlighetspunkter (poler), i vars omgivning a)–c) gäller för $1/w(z)$ i stället för $w(z)$.

16. Första integrerade huvudsatsen. Den »integrerade första huvudsatsen» (20) gäller tyvärr ej för icke-analytiska funktioner utan en rätt besvärande tilläggsterm, vars storleksordning icke behöver vara mindre än den karakteristiska funktionens.

Vi antar nu att den inre funktionen $w(z) \in C^1$, så att w resp. $1/w$ har kontinuerliga derivator av första ordningen. Man kan då skriva

$$(26) \quad m(\lambda, a) + N(\lambda, a) = T(\lambda) + E(\lambda, a).$$

Härvid är¹

$$(27) \quad E(\lambda, a) = \frac{1}{2\pi} \iint_{A_\lambda} \frac{|w_a|^2}{1 + |w_a|^2} \left\{ \frac{\partial \ln |w_a|}{\partial g} - \frac{\partial \arg w_a}{\partial h} \right\} dg dh,$$

där

$$w_\infty = w(z); \quad w_a = \frac{1 + \bar{a}w}{w - a} \quad \text{för } a \neq \infty.$$

17. Andra ointegrerade huvudsatsen. Vi kan tillämpa ett resultat ur Ahlfors–Dufresnoys teori för överlagringsytor, vilket kan betraktas som en »andra ointegrerad huvudsats».

Låt $L(\lambda)$ beteckna längden av G_λ 's bildkurva på w -sfären. Då gäller [4]

¹ Se [14]. Att (27) gäller för $w \in C^1$ t. o. m. om $s(z)$ ej är analytisk men $\in C^1$, visade förf. i ett föredrag i jan. 1963 i Helsingfors. Detsamma kan visas för (28).

$$(28) \quad \sum_{k=1}^q \bar{n}(\lambda, a_k) \geq (q-2)A(\lambda) - n_G(\lambda) - k_1 L(\lambda).$$

Denna olikhet kan praktiskt taget betraktas som en relation erhållen ur (21) genom termvis derivering efter det denna likhet klätts i den med (11) analoga formen.

Relationerna (26) och (28) kan värdesättas först efter uppskattning av de däri ingående resttermerna $E(\lambda, a)$ resp. $L(\lambda)$. Men därvid skall vi begränsa oss till den händelsen att $w(z)$, som hittills blott antagits vara en inre C^1 -funktion, är pseudomeromorf.

18. Pseudomeromorfa funktioner. Om $w(z)$ är en analytisk funktion, förmedlar den en konform avbildning med undantag för de punkter där $w'(z) = 0$. Konformiteten innebär infinitesimal likformighet, så att en mycket liten cirkel avbildas på en kurva som närmar sig cirkelform när radien avtar. Om nu $w(z) = u + iv$ ej nödvändigtvis är analytisk men har kontinuerliga partiella derivator u_x, u_y, v_x, v_y , så avbildas en infinitesimal cirkel med medelpunkten z på en infinitesimal ellips med axelförhållandet $Q(z) \geq 1$, den s. k. dilatationskvoten. Undantag utgör de punkter z där Jacobideterminanten

$$J(z) = u_x v_y - v_x u_y$$

försvinner. Om $Q(z) \leq K$ i ett givet område och $J(z) \neq 0$ där utom i separata punkter, säges $w(z)$ vara K -kvasikonform i området. Också funktioner som icke är kontinuerligt deriverbara kan vara kvasikonforma, men definitionen av $Q(z)$ måste då modifieras.

Vi definierar nu en pseudomeromorf funktion på följande sätt. Funktionen $w(z) = u + iv$ är *pseudomeromorf* i B , om därstädes

- A) u och v jämte sina partiella derivator är kontinuerliga;
- B) $J(z) > 0$ utom möjligen i punkter som saknar hopningspunkter i B ;
- C) $Q(z)$ är begränsad i varje kompakt delområde;
- D) w kan undantagsvis bli oändlig i punkter inom B , men då måste $1/w$ uppfylla A)–C) i omgivningar av dessa punkter.

Det är klart att en meromorf funktion är kvasikonform med $K=1$. Men även det omvända gäller; en 1-kvasikonform funktion $w(z)$ är analytisk.

19. Uppskattning av E och L . I det följande antar vi, att $w(z)$ är pseudomeromorf i B . Då kan första huvudsatsen (26) kompletteras med resttermsuppskattningen

$$(29) \quad |E(\lambda, a)| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{A_\lambda} (Q(z) - 1) \sqrt{\frac{J}{Q}} \left| \frac{ds}{dz} \right| \frac{|w_a| dx dy}{1 + |w|^2},$$

som visar att $E(\lambda, a)$ ej kan vara mycket stor om avbildningen $w(z)$ är nära nog konform, så att $Q(z)$ är nära 1.

För uppskattning av resttermen $L(\lambda)$ i den ointegrerade andra huvudsatsen (28) gör man efter mönster av Ahlfors [2] bruk av Schwarz' olikhet och finner

$$(30) \quad L(\lambda)^2 \leq 2\pi^2 \bar{Q}(\lambda) A'(\lambda),$$

där $\bar{Q}$ betyder medelvärde

$$\bar{Q}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{G_\lambda} Q(z) dh(z).$$

Härav sluter man lätt att i det *paraboliska* fallet

$$(31) \quad \liminf L(\lambda)/A(\lambda) = 0$$

när $\lambda \rightarrow \infty$, så snart antingen

$$\int \frac{d\lambda}{\bar{Q}(\lambda)} = \infty \quad \text{eller} \quad \int \frac{\bar{Q}(\lambda) dA(\lambda)}{A^2} < \infty.$$

Bl. a. ser vi att detta är fallet så snart $w(z)$ är kvasikonform i B . I det *hyperboliska* fallet fås likartade kriterier. I de nämnda fallen är alltså $Q(z)$ tillräckligt litet för att garantera att enligt (31) $L(\lambda)$ är en obetydlig restterm i bredd med Shimizu-karakteristikan $A(\lambda)$.

20. Andra integrerade huvudsatsen. För att komma till den »integrerade andra huvudsatsen» integrerar vi (28) och finner

$$(32) \quad \sum_1^q \bar{N}(\lambda, a_k) \geq (q-2)T(\lambda) - F^*(\lambda) - S(\lambda),$$

där $S(\lambda) = k_1 \int_{-\infty}^{\lambda} L(g) dg$. Här fås formellt (32) ur (21), om m där ersättes

med $T - N$ enligt den i fallet nr. 13 giltiga första huvudsatsen. Men i vårt fall kan icke $\bar{N} = N - N_1$ ersättas med $T - m - N_1$ för erhållande av formeln (21) ur (32), eftersom i det föreliggande fallet första huvudsatsen innehåller termen E .

Det gäller igen att se när $S(\lambda)$ är av försvinnande ordning i bredd med $T(\lambda)$. Man finner åter med Schwarz' olikhet den med (30) analoga relationen

$$S(\lambda)^2 \leq k_2 q(\lambda) T'(\lambda), \quad \text{där} \quad q(\lambda) = 2\pi \int_{\lambda'}^{\lambda} \bar{Q}(g) dg.$$

Man finner precis som i föregående avsnitt: I det *paraboliska* fallet gäller

$$(33) \quad \liminf S(\lambda)/T(\lambda) = 0,$$

när $\lambda \rightarrow \infty$, så snart antingen

$$(34) \quad \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{q(\lambda)} = \infty \quad \text{eller} \quad \int_{\lambda}^{\infty} \frac{q(\lambda) dT(\lambda)}{T^2} < \infty,$$

vilket t. ex. äger rum om $Q(z) \leq K$. I det *hyperboliska* fallet gäller (33) under modifierade förutsättningar.

21. Defektrelationen. Vi måste nu uttryckligen definiera defekten $\delta(a)$ medelst formeln (15), där naturligtvis variabeln r utbytes mot λ . Denna formel är nu icke likabetydande med (12), eftersom (4) i allmänhet ej gäller.

Om vi skriver (32) i formen (jmf. (7))

$$\sum_1^q \{T(\lambda) - N(\lambda, a_k) + N_1(\lambda, a_k)\} \leq 2T(\lambda) + F^*(\lambda) + S(\lambda),$$

dividerar med $T(\lambda)$ och beaktar definitionerna (13)–(15) med λ i st. f. r som variabel, så finner vi att

$$(35) \quad \sum_1^q \{\delta(a_k) + \mu(a_k)\} \leq \sum_1^q \delta(a_k) + \mu \leq 2 + \limsup \frac{F^*(\lambda)}{T(\lambda)}$$

gäller i alla de fall där (33) gäller, alltså t. ex. när någon av relationerna (34) är i kraft. Så snart $F^*(\lambda)/T(\lambda) \rightarrow 0$ har vi härvid defektrelationen i dess klassiska form med 2 som övre gräns för defekt- och indexsumman.

22. Funktioner på Riemannska ytor. Till slut må nämnas, att utvidgningar har gjorts även till funktioner, som är av meromorf karaktär på allmännare Riemannska ytor.

Redan 1931 undersökte Ullrich [31] och något senare även H. Selberg [28] i detta avseende algebroida funktioner. Dessa är meromorfa på en n -bladig Riemannsk yta. Härvid framgick i andra huvudsatsen en med F^* analog term härflytande ur den givna ytans vindlingspunkter.

Nyligen har Sario betraktat funktioner meromorfa på allmännare Riemannska ytor [24, 25]. Den betraktade ytan B (resp. det betraktade området B på ytan) antages besitta motsvarigheten till en Selbergfunk-

tion eller en Greensk funktion som likformigt $\rightarrow 0$, när z strävar mot randen. Härledningarna av huvudsatserna är analoga med bevisen för nr. 12 och 13. Men det är här befogat att bygga upp $F^*(\lambda)$ ur den Eulerska karakteristikan för Δ_λ i st. f. ur områdets sammanhangstal.

I detta sammanhang är det även av intresse att Sario och Rodin [23] lyckats konstruera ytor B och funktioner $w(z)$ på dem, så att dessa har ett godtyckligt antal P av Picardska undantagsvärden i sitt existensområde, och detta så att (35) blir en likhet med varterda membrum = $P = q$.

Ett avsevärt skarpare resultat har nåtts av Matsumoto [15a]: Om E_w är en godtycklig kompakt mängd av kapaciteten 0, så finns ett $w(z)$, meromorft i ett paraboliskt plant existensområde B , så att w i en omgivning av randen Γ utelämnar *alla* värden tillhörande E_w .

Det ligger i sakens natur att även för på Riemannska ytor pseudo-meromorfa funktioner analoga huvudsatser skall kunna uppställas. Såvitt förf. känner till har sådana betraktelser ej ännu genomförts. I den mån paraboliska ytor (vilka enligt Kuramochi [15] har Selbergfunktioner) eller hyperboliska ytor med på randen försvinnande Greenska funktioner kommer i fråga, förefaller det sannolikt att de i nr. 20 redovisade resultaten förblir oförändrade med den ovan anförda betydelseförskjutningen hos F^* .

Helt nyss har Sario generaliserat värdefördelningssatserna till analytiska avbildningar från en helt godtycklig öppen Riemannsk yta i en sluten [26]. Uttömningen sker medelst områden, som har reguljär rand men i övrigt är godtyckliga. I den andra huvudsatsen uppträder emellertid karakteristikan och övriga termer icke blott en gång integrerade som i (21) utan tre gånger integrerade.

LITTERATUR

- [1] L. AHLFORS: *Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen*. Soc. sci. fenn., Comment. phys.-math. 8, nr. 10 (1935).
- [2] L. AHLFORS: *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*. Acta Math. 65 (1935).
- [3] A. DINGHAS: *Eine Bemerkung zur Ahlfors'schen Theorie der Überlagerungsflächen*. Math. Zeitschr. 44 (1938).
- [4] J. DUFRESNOY: *Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébrique*, Ann. sci. École norm. sup. (3), 58 (1941).
- [5] D. DUGUÉ: *Le défaut au sens de M. Nevanlinna dépend de l'origine choisie*. C. r. Acad. sci. Paris, 225 (1947).
- [6] G. EVANS: *Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions*. Monatsh. f. Math. u. Phys. 43 (1936).
- [7] A. A. GOLDBERG: (*Om meromorfa funktioners defekter*) på ryska. Dokl. Akad. Nauk SSSR, N. S. 98 (1954), s. 893–895.
- [8] A. A. GOLDBERG: (*Ett exempel på en hel funktion av ändlig ordning med ett icke-*

- asymptotiskt defekt värde*) på ryska. Užgorod. Gos. Univ. Naučn. Zap. 18 (1957), s. 191–194.
- [9] W. K. HAYMAN: *An integral function with a defective value that is neither asymptotic nor invariant under change of origin*, J. London math. soc. 28 (1953).
 - [10] F. HUCKEMANN: *Verschmelzung von Randstellen Riemannscher Flächen*. Mitteil. aus dem math. Sem. Giessen 41 (1952).
 - [11] G. AF HÄLLSTRÖM: *Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten*. Acta Acad. Aboensis, math.-phys. XII:8 (1939).
 - [12] G. AF HÄLLSTRÖM: *Eine quasikonforme Abbildung mit Anwendungen auf die Wertverteilungslehre*. Ibid. XVIII:8 (1952).
 - [13] G. AF HÄLLSTRÖM: *Wertverteilungssätze pseudomeromorpher Funktionen*. Ibid. XXI:9 (1958).
 - [14] G. AF HÄLLSTRÖM: *A new approach to the first fundamental theorem on value distribution*. Mich. math. J. 9 (1962).
 - [15] Z. KURAMOCHI: *Evans's theorem on abstract Riemann surfaces with Null-boundaries, I–II*. Proc. of the Japan Acad. 32:1 (1956).
 - [15a] K. MATSUMOTO: *Exceptional values of meromorphic functions in a neighbourhood of the set of singularities*. Journ. Sci. Hiroshima Univ., A 24 (1960).
 - [16] F. NEVANLINNA: *Über die Anwendung einer Klasse von uniformisierenden Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen*. Acta Math. 50 (1927).
 - [17] R. NEVANLINNA: *Zur Theorie der meromorphen Funktionen*. Ibid. 46 (1925).
 - [18] R. NEVANLINNA: *Le théorème de Picard–Borel et la théorie des fonctions méromorphes*. Paris, Gauthier–Villars, 1929.
 - [19] R. NEVANLINNA: *Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten*. Acta Math. 58 (1932).
 - [20] R. NEVANLINNA: *Eindeutige analytische Funktionen*. Berlin, Springer, 1936 & 1953.
 - [21] S. OZAKI — I. ONO — M. OZAWA: *On the function-theoretic identities, I*. Sci. reports, Tokyo Bunrika Daigaku, A 4, 85 (1951).
 - [22] E. PICARD: *Sur une propriété des fonctions entières*. C. r. Acad. sci. Paris 88 (1879).
 - [23] B. RODIN: *Reproducing formulas on Riemann surfaces*. Diss., Los Angeles (Cal.), 1961.
 - [24] L. SARIO: *Picard's great theorem on Riemann surfaces*. Am. math. monthly 69:7 (1962).
 - [25] L. SARIO: *Meromorphic functions and conformal metrics on Riemann surfaces*. Pacific J. of Math. 12:3 (1962).
 - [26] L. SARIO: *Value distribution under analytic mappings of arbitrary Riemann surfaces*. Acta Math. 109 (1963).
 - [27] MME LAURENT SCHWARTZ: *Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques*. C. r. Acad. sci. Paris 212 (1941).
 - [28] H. SELBERG: *Algebroiden Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale*. Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo, I. Mat.-Nat. Klasse, N:o 8 (1934).
 - [29] H. SELBERG: *Über die ebenen Punktmengen von der Kapazität Null*. Ibid. N:o 10 (1937).
 - [30] T. SHIMIZU: *On the theory of meromorphic functions*. Jap. J. of Math. 6 (1929).
 - [31] E. ULLRICH: *Über den Einfluss der Verzweigkeit einer Algebroiden auf ihre Wertverteilung*. J. reine u. angew. Math. 167 (1931).
 - [32] R. WILLE: *On the integration of Ahlfors' inequality concerning covering surfaces*. Indigat. Math. XIX:1 (1957).

BOKMELDINGER

CARL HYLÉN-CAVALLIUS — LENNART SANDGREN: *Matematisk analys II* (för tvåbetygsstadiet vid universitet och högskolor). Lunds studentkårs intressebyrå, Lund 1964. 12+420 s. Sv. kr. 50.00.

(Innehållsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 75.)

Boken utgör en omarbetning av en tidigare version (recension i NMT 8 sid. 88) och utges nu med samma tryck och band som författarnas *Matematisk analys I* (recension i NMT 6 sid. 37). Vid omarbetningen har bl. a. tillagts ett inledningskapitel med en allmän framställning av mängder, funktioner och strukturer.

IVAN NIVEN: *Diophantine approximations*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 14.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1963. 9+68 pp. sh. 36/-.

(Innehållsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 131.)

De diofantiska approximationerna är ett alltför vidsträckt område för att kunna täckas av en liten bok som Nivens. Förf. medger också själv att titeln är anspråksfull och missvisande. Men av den bestämda sektor boken belyser får vi i stället en mycket klar bild. Det gebitet omfattar homogen approximation av såväl reella (kap. 1) som komplexa (kap. 4) tal, icke-homogen approximation, såsom Minkowski-satser för produkter av reella och komplexa linjära former (kap. 2 och 5), samt mångfalden av irrationelltal θ (kap. 3). Det sistnämnda kapitlet är bokens centrala del och behandlar bl. a. den likformiga fördelningen av bråk- och heltalsdelarna till $n\theta$. I samband därmed upptas t. ex. Kroneckers teorem och satser av Skolem och Bang om linjärt oberoende tal θ i den rationella talkroppen.

En viktig plats i kapitlen 1 och 4 intar givetvis Hurwitz' och Fords teorem om approximation med rationella tal: i det reella resp. komplexa fallet äger olikheten $|\theta - h/k| < (\sqrt{5}k^2)^{-1}$ resp. $|\theta - h/k| < (\sqrt{3}|k|^2)^{-1}$ oändligt många lösningar och konstanterna är de bästa möjliga. I det reella fallet anför förf. även sitt eget bevis av Segrés resultat rörande asymmetrisk approximation.

Anmärkningsvärt är att samtliga resultat i boken pressas fram med förbigående av kedjebraksteorins eleganta metodik; i stället används

bland annet Farey-bråk. Niven medger, att finare detaljer därigenom går förlorade men motiverar åtgärden med att en beskrivning av kedjebråken inbesparas. Men bör ändå inte de allra första grunderna av kedjebråksteorin anses ingå i den allmänna utrustningen hos de påtänkta läsarna?

En stor förtjänst är att varje kapitel avslutas med ett avsnitt »Further results«, upptagande korta bibliografiska notiser och uppgifter om längre gående resultat (ryska m. fl. andra arbeten saknas dock helt och hållet). Sådana här översikter borde verkligen vara standard i alla monografier liksom i kurslitteratur. En del av de resultat som här anges är till och med opublicerade.

Författarens stil är klar och redig. Analogierna — liksom de egenartade skillnaderna därvidlag — mellan de reella och komplexa fallen, t. ex. rörande Eggans och Maiers resultat, framträder mycket tydligt. Hade förf. inte undvikit kedjebråken, skulle bevisen i många fall ha blivit avgjort mindre omständliga — och givetvis elegantare. — Tryckfel förekommer i formler på sidorna 4, 7, 19 och 24.

Boken supplerar rätt väl andra monografier från detta vida fält, såsom Cassels', Koksma's, Hardys och Wrights samt Le Veques. Jag tror emellertid den skulle vinna på en utökning av stoffet med till exempel konvergentapproximation, simultana approximationer, minima för kvadratiske former, Roths teorem eller Minkowskis hypotes.

Clas-Olof Selenius

STURE NYDELL: *Hur man konstruerar ett nomogram*. Biblioteksförlaget, Stockholm 1963. 70 s. Sv. kr. 9.75.

(Innehållsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 73.)

Boken tar sikte på å gi en innføring i teknikken ved konstruksjon av nomogram, og er spesielt beregnet på tekniske skoler. Det er lagt størst vekt på punktnomogrammer (syftlinjenomogram), og der er følgende typer behandlet: Nomogram med 3 parallelle skalaer og Z-nomogram. Videre nomogram med 2 parallelle skalaer og en krumlinjet skala. Det stoff som er tatt med dekker de fleste nomogrammer på det trinn boken er beregnet på.

Avsnittet om »konstruksjon av funksjonsskalor gjennom projeksjon« er blitt litt for kort. Den metode som er gitt vil ikke dekke $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ med mindre $b=0$. Anmerkning på s. 10 gir inntrykk av større anvende-

lighet enn tilfellet er. Det er ikke store justeringer som må til, men en som prøver boken til selvstudium vil få vansker her.

Anvisningene for konstruksjon av nomogrammene er klare. Teorien er samlet i kap. V sist i boken. Det liker jeg ikke. Her forutsettes bare kjennskap til rettvinklede trekanter, og jeg ville gjerne hatt begrunnelsen i forbindelse med hver nomogramtype. Under behandlingen av nomogram med 3 parallelle skalaer savner jeg beskrivelse av noen av de snarveier som kan brukes.

Avsnittet om sammensatte nomogram avsluttes med en vakker løsning i et dobbelt Z-nomogram. Her er tegnet to nomogrammer for den samme funksjon (i 4 variable). De to løsningene illustrerer godt de muligheter nomografien gir.

Johs. Østvold

NILS SJÖBERG: *Funktionslära och analytisk geometri, I*. Hermods, Lund 1962. 6 + 261 s. Sv. kr. 32.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 78.)

Denna lärobok är skriven för att användas vid tekniska gymnasier och vid självstudier. Den teori som gives illustreras av ett överflöd av välvalda exempel i texten och problem (över 1000) för läsaren. Författaren har dock funnit det lämpligt att i denna första del låta exempel och problem med direkt teknisk anknytning vara fåtaliga.

Beträffande den teoretiska framställningen uttalar författaren: »En fråga, som ständigt är aktuell vid utformandet av en skolkurs i funktionslära, är den, hur matematiskt stringent framställningen skall vara, och det torde råda delade meningar härom. Med hänsyn till att början av vissa kapitel i denna del lämpligen kan genomgåas samtidigt med eller i direkt anslutning till kursen i algebra och trigonometri, har jag sökt att successivt öka stringensen, sedan begreppsbildningen till en början byggts upp med hjälp av mer åskådliga föreställningar. Det har dock synts mig angeläget, att läsaren alltid skall veta i vilken utsträckning något bevisats eller något måste godtagas utan strängt bevis«.

Det är naturligt, att varje matematiklärare, som undervisat några år, får sina bestämda idéer om vilka teoretiska partier som bör tagas noggrant och vilka som man lättare kan glida förbi. Detta gäller också undertecknad, som sålunda på en och annan punkt har en avvikande mening. T. ex. synes mig begreppet »funktion« alltför starkt ha bundits till begreppet »formel«. Men den detaljen och åtskilliga andra blir säkert ändrade om läroboken i en kommande upplaga skulle anpassas till den nya gymnasiekurs, som i dessa dagar håller på att växa fram.

Framställningen är klar och tydlig, den som studerar denna lärobok har fått ett utmärkt hjälpmedel till trygg behärskning av matematikkursen i fråga.

Bo Kjellberg

GÖSTA WAHDE: *Ett-betygskurs i matematik, geometri och lineär algebra*. Hermods brevkurs 231 R. Hermods, Stockholm 1963. 385 s.

(Innehållsfortegnelse i NMT 11 (1963), s. 74.)

Under de senaste fem åren har en ny geometrikurs för ett betyg utarbetats vid våra universitet. Tonvikten har därvid lagts på lineär algebra och dess tillämpning på (lineär) analytisk geometri i planet och i rummet. Kärnan i den gamla kursen, andragradskurvorna, behandlas nu endast flyktigt. Detta är naturligtvis nödvändigt av utrymmesskal, men är inte enbart av godo. De enklaste icke-triviala tillämpningarna av koordinatbyte ges ju i den analytiska kägelsnittsgeometrin. Likaså saknar man konkreta tillämpningar av teorin för affina avbildningar. (Enbart genom att bevisa satsen om medianernas skärningspunkt i en triangel genom affin avbildning torde man knappast övertygas om denna teoris förträfflighet.) Detta är dock svagheter man förmodligen måste acceptera i en geometrikurs, som med hänsyn till matematikens tillämpningar strävar att uppfylla så många krav.

Föreliggande kurs består av tio brev. Framställningen är utförlig och rikligt försedd med figurer och illustrerande exempel. I varje brev finns gott och väl tjugotalet övningar med fullständiga lösningar. Till varje brev hör dessutom åtta provuppgifter. I slutet av varje brev har gjorts en sammanfattning av de definitioner och satser, som hör till detta, ett förfarande som väsentligt ökar överskådligheten och underlättar inlärandet. Ett brev om differentialekvationer avslutar kursen.

N.-O. Wallin

MOTTATTE BØKER

L. J. Adams: *Applied calculus*. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 9 + 278 pp. sh. 45/—.

Functions and graphs 1–41 * The derivative 42–76 * Applications of the derivative 77–114 * The indefinite integral 115–132 * The definite integral 133–164 * Applications of the definite integral 165–190 * Functions of several variables 191–211 * Multiple integrals 212–227 * Infinite series 228–240 * Differential equations 241–260 * Tables 261–266 * Answers to odd-numbered problems 267–274 * Index 275–278.

A. F. Andersen — Poul Mogensen: *Matematik for det matematiske gymnasium*, I. 6. udg. Gyldendal, København 1964. 320 s. D. kr. 45.50.

Det reelle talsystem 1–57 * Ligninger og uligheder med en ubekendt 58–73 * Nogle grundlæggende begreber i geometrien 74–112 * Vektorfremstillingen 113–125 * Koordinater 126–146 * Indledning til funktionslæren 147–171 * Ligninger med to eller flere ubekendte 172–185 * Andengradspolynomiet. Indledende undersøgelse af andre polynomier 186–209 * Potens med hel eksponent. Rentesregning. Logaritmer 210–223 * Trigonometriens elementer 224–267 * Trigonometriske beregninger 268–287 * Trigonometriske ligninger 288–296 * Regnestokken 297–305 * Sagregister 306–310 * Symbolliste 311–320.

A. F. Bermant: *A course of mathematical analysis*. Part I. (International series of monographs on pure and applied mathematics 44.) Translated from the Russian by D. E. Brown. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 12 + 493 pp. sh. 80/—.

Introduction 1–21 * Functions 22–76 * Limits 77–129 * Derivatives and differentials. The differential calculus 130–196 * The investigation of functions and curves 197–285 * The definite integral 286–322 * The indefinite integral. The integral calculus 323–367 * Methods of evaluating definite integrals. Improper integrals 368–396 * Applications of the integral 397–431 * Series 432–483 * Index 485–493.

A. V. Bitsadze: *Equations of the mixed type*. Translated from the Russian by P. Zador. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1964. 13 + 160 pp. sh. 60/—.

General remarks on linear partial differential equations of mixed type 1–19 * The study of the solutions of second order hyperbolic equations with initial conditions given along the lines of probability 20–43 * The study of the solutions of

second order elliptic equations for a domain, the boundary of which includes a segment of the curve of parabolic degeneracy 44–70 * The problem of Tricomi 71–111 * Other mixed problems 112–149 * References 151–156 * Index 157–160.

I. N. Bronshtein — K. A. Semendyayev: *A guide-book to mathematics for technologists and engineers*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 36.) Translated from the Russian by Jan Jaworowski and Michael N. Bleicher. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1964. 783 pp. sh. 140/–.

Tables 19–95 * Graphs 96–131 * Approximate computations 133–146 * Algebra 147–194 * Geometry 195–211 * Trigonometry 212–234 * Analytic geometry 235–276 * Differential geometry 277–313 * Introduction to analysis 315–359 * Differential calculus 360–392 * Integral calculus 393–513 * Differential equations 514–583 * Complex numbers and functions of a complex variable 585–612 * Vector calculus 613–649 * The calculus of variations 650–681 * Integral equations 682–726 * Fourier series 727–741 * Foundations of the theory of probability and the theory of errors 743–753 * Empirical formulas and interpolation 754–770 * Index 771–783.

D. Bushaw: *Elements of general topology*. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 166 pp. sh. 53/–.

Historical introduction 1–8 * Fundamentals 9–35 * Continuity and homeomorphism 36–43 * The construction of topologies 44–69 * Separation, compactness, and connectedness 70–101 * Uniform spaces 102–129 * Completeness 130–142 * Appendix 1: Sets 143–152 * Appendix 2: Suggested further reading 153–156 * Answers to some of the exercises 157–160 * Index of special symbols 161 * General index 162–166.

Corneliu Constantinescu — Aurel Cornea: *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Bd. 32.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 8 + 244 S. Ganzl. DM 68.00.

Einleitung 1–4 * Hilfsbegriffe und Bezeichnungen 5–10 * Superharmonische Funktionen 10–16 * Die Klasse HP 16–20 * Das Dirichletsche Problem 20–32 * Potentialtheorie 32–45 * Energie und Kapazität 45–54 * Wiener'sche Funktionen 54–65 * Dirichletsche Funktionen 65–85 * Ideale Ränder 85–96 * Q -ideale Ränder 96–109 * Q -Fatousche Abbildungen 109–119 * Klassen von Riemannschen Flächen 119–128 * Fortsetzung einer Potentialtheorie 128–134 * Der Martinsche ideale Rand 134–144 * Das Verhalten der analytischen Abbildungen auf dem Martinschen idealen Rand 145–154 * Vollsuperharmonische Funktionen 154–166 * Der Kuramochische ideale Rand 166–177 * Potentialtheorie auf der Kuramochischen Kompaktifizierung 177–220 * Das Verhalten der Dirichletschen Abbildungen auf dem Kuramochischen idealen Rand 220–222 * Das Randverhalten der analytischen Abbildungen des Einheitskreises 222–237 * Literaturverzeichnis 237–240 * Sachverzeichnis 241–242 * Bezeichnungen 243–244.

Contributions to differential equations. Vol. I. Edited by J. P. LaSalle and J. B. Diaz. (A serial issued under the auspices of RIAS and the University of Maryland.) John Wiley & Sons, New York, London 1964. 5 + 519 pp. sh. 124/-.

S. Lefschetz: Some mathematical considerations on nonlinear automatic controls 1-28 * J. B. Diaz and L. E. Payne: New mean-value theorems in the mathematical theory of elasticity 29-38 * J. Horvath: A generalization of the Cauchy-Riemann equations 39-58 * A. Douglis: On calculating weak solutions of quasi-linear, first-order partial differential equations 59-94 * J. H. Bramble and L. E. Payne: Bounds for solutions of second-order elliptic partial differential equations 95-127 * J. H. Bramble and L. E. Payne: Some integral inequalities for uniformly elliptic operators 129-135 * A. M. Letov: On the theory of nonlinear control systems 139-147 * L. Cesari: Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations 149-187 * R. E. Kalman, Y. C. Ho and K. S. Narendra: Controllability of linear dynamical systems 189-213 * J. K. Hale: On differential equations containing a small parameter 215-250 * A. K. Aziz and J. B. Diaz: On a mean-value theorem of the differential calculus of vector-valued functions, and uniqueness theorems for ordinary differential equations in a linear-normed space 251-269 * A. K. Aziz and J. B. Diaz: On a mean-value theorem of the weak differential calculus of vector-valued functions 271-273 * E. Roxin and V. Spinadel: Reachable zones in autonomous differential systems 275-315 * R. D. Driver: Existence theory for a delay-differential system 317-336 * J. H. Billings: An extension of the Laplace cascade method to systems of second-order equations 337-370 * T. Yoshizawa: Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations 371-387 * C. Olech: On the global stability of an autonomous system on the plane 389-400 * J. K. Hale: Functional-differential equations with parameters 401-410 * J. K. Hale: A class of functional-differential equations 411-423 * C. A. Harvey: Periodic solutions of differential equations $x + g(x) = p(t)$ 425-451 * D. P. Squier: Regularity properties at interfaces of solutions of elliptic equations 453-459 * W. Mlak: Note on maximal solutions of differential equations 461-465 * A. K. Aziz and J. B. Diaz: On Pompeiu's proof of the mean-value theorem of the differential calculus of real-valued functions 467-481 * G. Seifert: Stability conditions for separation and almost periodicity of solutions of differential equations 483-487 * W. A. Harris, Jr.: Linear systems of differential equations 489-519.

Ákos Császár: *Foundations of general topology.* (International series of monographs on pure and applied mathematics 35.) Translated from the French by Mrs. K. Császár. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 19 + 380 pp. sh. 105/-.

Relations 1-6 * Semi-topogenous orders 7-11 * Topogenous orders 12-23 * Perfect semi-topogenous orders 24-31 * Bipерfect topogenous orders 32-45 * Inverse image of a semi-topogenous order 46-57 * Syntopogenous structures 58-68 * Operations on syntopogenous structures 69-97 * Inverse image of a syntopogenous structure 98-110 * Continuity 111-124 * Product of syntopogenous spaces 125-156 * Ordering families of functions 157-177 * Quasi-metrics 178-195 * Separation axioms 196-210 * Convergence of grills 211-241 * Completion and compactification 242-276

* Rank function of a syntopogenous structure 277–305 * Embedding into cubes 306–338 * Totally bounded syntopogenous structures 339–353 * Weight of metrizable spaces 354–371 * Bibliography 372–373 * Axioms 374 * Notation 375–376 * Index 377–380.

Jean Dieudonné: *La géométrie des groupes classiques*. Seconde édition. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Bd. 5.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 8+125 S. Ganzl. DM 38.00.

Collinéations et corrélations 1–36 * Structure des groupes classiques 36–77 * Caractérisations géométriques des groupes classiques 77–90 * Automorphismes et isomorphismes des groupes classiques 90–116 * Table des notations 116–118 * Index des définitions et des principaux théorèmes 119–120 * Bibliographie 120–125.

L. S. Goddard: *Mathematical techniques of operational research*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 38.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 7+230 pp. sh. 42/–.

Mathematical introduction 1–32 * Linear programming 33–63 * Transportation and assignment 64–87 * Queueing theory: the single channel queue 88–140 * Queueing theory: channels in series or parallel 141–165 * Machine interference 166–186 * Problems of stock control 187–227 * Index 228–230.

Theodore E. Harris: *The theory of branching processes*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 119.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 16+230 S., 6 Fig. Cloth DM 36.00.

The Galton–Watson branching process 1–34 * Processes with a finite number of types 34–49 * The general branching process 50–80 * Neutron branching processes (one-group theory, isotropic case) 80–93 * Markov branching processes (continuous time) 93–121 * Age-dependent branching processes 121–163 * Branching processes in the theory of cosmic rays (electronphoton cascades) 164–207 * Appendices 207–210 * Bibliography 211–224 * Index 225–230.

Carl Hyltén-Cavallius — Lennart Sandgren: *Matematisk analys II* (för tvåbetygsstadiet vid universitet och högskolor). Lunds studentkårs intressebyrå, Lund 1964. 12+420 s. Sv. kr. 50.00.

Mängder, funktioner och strukturer 1–31 * De reella talen 32–55 * Punktmängder och punktföljder på linjen och i planet 56–74 * Funktioner av en reell variabel 75–97 * Integraler av funktioner av en variabel 98–117 * Numeriska serier 118–148 * Funktionsföljder och funktionsserier 149–191 * Punktmängder och punktföljder i R^n 192–201 * Funktioner av flera variabler: gränsvärden och kontinuitet 202–225 * Funktioner av flera variabler: differentialkalkyl 226–270 * Funktioner av flera variabler: extremvärden 271–285 * Funktionaldeterminanter och existenssats för implicit givna funktioner 286–317 * Dubbelintegraler och trippelintegraler 318–378 * Linjeintegraler 379–402 * Frenets formler 403–405 * Svar till övningar 406–415 * Index 416–419 * Symboler 420.

Shoschichi Kobayashi — Katsumi Momizu: *Foundations of differential geometry, I*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 15.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), London, New York 1963. 9 + 329 pp. sh. 115/-.

Differentiable manifolds 1-62 * Theory of connections 63-112 * Linear and affine connections 113-153 * Riemannian connections 154-197 * Curvature and space forms 198-224 * Transformations 225-265 * Appendices 267-285 * Notes 287-311 * Summary of basic notations 313-314 * Bibliography 315-323 * Index 325-329.

M. A. Krasnosel'skii: *Topological methods in the theory of non-linear integral equations*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 45.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 11 + 395 pp. sh. 70/-.

Introduction 1-9 * Nonlinear operators 11-75 * The rotation of a vector field 77-140 * Existence theorems 141-180 * Problems concerning eigenfunctions 181-238 * Eigenfunctions of positive operators 239-297 * Variational methods 299-382 * Bibliography 383-392 * Subject index 393-395.

Lectures on modern mathematics. Vol. I. Edited by T. L. Saaty. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 9 + 175 pp. sh. 45/-.

P. R. Halmos: A glimpse into Hilbert space 1-22 * Laurent Schwartz: Some applications of the theory of distributions 23-58 * A. S. Householder: Numerical analysis 59-97 * Samuel Eilenberg: Algebraic topology 98-114 * Irving Kaplansky: Lie algebras 115-132 * Richard Brauer: Representations of finite groups 133-175.

Jan Łukasiewicz: *Elements of mathematical logic*. Translated from the Polish by Olgierd Wojtasiewicz. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 11 + 124 pp. sh. 42/-.

Introduction 1-21 * The sentential calculus 22-66 * Selected problems from the methodology of the sentential calculus 67-91 * The sentential calculus with quantifiers 92-102 * Aristotl's syllogistic 103-117 * Notes 119-121 * The list of works quoted 122-124.

P. Mainardi — H. Barkan: *Calculus and its applications*. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 6 + 537 pp. sh. 55/-.

Fundamental ideas 1-55 * Derivative 56-80 * Differentiation and applications 81-106 * Higher order derivatives 107-118 * Trigonometric functions 119-133 * Exponential and logarithmic functions 134-145 * Differentials and parametric equations 146-169 * Vectors 170-179 * Anti-differentiation 180-195 * Separable differential equations 196-209 * Definite integral 210-237 * Applications of the definite integral 238-268 * Additional applications 269-312 * Technique of integration 313-333 * Approximate integration 334-343 * Solid analytic geometry 344-382 * Multiple integrals 383-404 * Infinite series 405-439 * Differentiation 440-457 * Differential equations 458-474 * Table of integrals 475-482 * Numerical tables 483-500 * Answers to odd-numbered problems 501-531 * Index 532-537.

Edward Otto: *Nomography*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 42.) Translated from the Polish by Janina Smolska. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 313 pp. sh. 75/-.

Introduction 9-59 * Equations with two variables 60-86 * Equations with three variables 87-174 * Lattice nomograms 175-201 * Equations with many variables 202-241 * Problems of theoretical nomography 242-309 * Bibliography 310 * Index 311-313.

Daniel Pedoe: *A geometric introduction to linear algebra*. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney 1963. 12 + 224 pp. sh. 45/-.

Coordinate geometry of the plane 1-20 * Vectors in two dimensions 21-37 * Coordinate geometry of three dimensions 38-63 * Vectors in three dimensions 64-90 * Linear equations with a unique solution 91-113 * Vector spaces 114-147 * Matrices 148-168 * The concept of rank 169-200 * Linear mappings and matrices 201-216 * Answers to exercises 217-220 * Index 221-224.

Bengt Persson: *Analytisk geometri och trigonometri med vektorräkning*. Svenska Bokförlaget/Norstedts, Stockholm 1963. 101 s.

Använda beteckningar 1-2 * Parallellkoordinatsystem 3-31 * Rätvinkliga koordinater 32-51 * Cirkeln 52-60 * Trigonometri 61-88 * Geometriskta orter 89-94 * Svar och anvisningar 95-101.

Robert A. Rankin: *An introduction to mathematical analysis*. (International series in pure and applied mathematics 43.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 15 + 607 pp. sh. 80/-.

Fundamental ideas and assumptions 1-34 * Limits and continuity 35-108 * Differentiability 109-149 * Infinite series 150-190 * Functions defined by power series 191-259 * Integration 260-436 * Convergence and uniformity 437-582 * Hints for solutions of exercises 583-599 * Index 601-607.

Poul Rubinstein: *Nomografi*. (Emnelæsning i matematik.) Gyldendal, København 1964. 72 s. D. kr. 8.50.

Indledende eksempler 9-15 * Skalaer og andre afbildninger 16-30 * Dollar-nomogrammer 31-51 * R-nomogrammer 52-61 * Oversigt 62-67 * Etymologisk liste over anvendte tekniske fremmedord 69 * Alfabetisk emneregister 71-72.

Thomas L. Saaty — Joseph Bram: *Nonlinear mathematics*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, San Fransisco, Toronto, London 1964. 12 + 381 pp. sh. 97/-.

Linear and nonlinear transformations 1-52 * Nonlinear algebraic and transcendental equations 53-92 * Nonlinear optimization; non-linear programming and

systems of inequalities 93–174 * Nonlinear ordinary differential equations 175–275
 * Introduction to automatic control and the Pontryagin principle 276–316 *
 Linear and nonlinear prediction theory 317–364 * Appendix 365–372 * Index 373–
 381.

Nils Sjöberg: *Funktionslära och analytisk geometri, I*. Hermods, Lund
 1962. 6 + 261 s. Sv. kr. 32.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 70–71.)

Grafisk lösning av ekvationer och ekvationssystem 1–15 * Punkten 16–31 *
 Råta linjen 32–57 * Funktion. Gränsvärde. Kontinuitet 58–75 * Derivata. Derive-
 ringsregler. Tangent och normal 76–100 * Maxima och minima. Inflexion 101–130 *
 Derivatet av produkt och kvot. Multipelrötter. Brutna rationella funktioners
 kurvor 131–174 * Rotfunktioner och deras derivator 175–189 * Exponential- och
 logaritmfunksjoner og trigonometriske funksjoner samt deres derivator 190–234 *
 Svar till problemen 235–257 * Sakregister 258–261.

Ambros P. Speiser: *Impulsschaltungen*. Springer-Verlag, Berlin, Göt-
 tingen, Heidelberg 1963. 12 + 288 S., 274 Fig. Ganzl. DM 36.00.

Grundlagen 1–12 * Einteilung der Bauteile und Funktionen 12–14 * Verformung
 mit linearen passiven Elementen 14–34 * Dioden 34–39 * Transistoren 39–73 *
 Elektronenröhren 73–81 * Lineare Impulsverstärker 81–104 * Operationsverstär-
 ker 105–113 * Nichtlineare Verformung 113–133 * Verstärkerstufen im Schalter-
 betrieb 134–146 * Flipflops 146–160 * Multivibratoren 160–170 * Kippschaltungen
 und ihre Synchronisation 170–182 * Impulsübertrager 182–196 * Sperrschwinger
 196–210 * Andere Impulserzeuger 210–216 * Zähler 216–231 * Amplitudenspektro-
 graphen 231–236 * Schaltungen in digitalen Rechenanlagen 236–251 * Nanose-
 kunden-Impulstechnik 251–273 * Betriebssicherheit 274–280 * Literaturverzeichnis
 281–283 * Sachverzeichnis 284–288.

Erling Sverdrup: *Lov og tilfeldighet, I–II*. Universitetsforlaget, Oslo
 1964. Bind I: 13 + 350 s. N. kr. 58.40. Bind II: 7 + 261 s. N. kr. 46.80.

Bind I. En elementær innføring: Innledning 1–6 * Sannsynlighetsbegrepet 7–38
 * Diskrete sannsynlighetsfordelinger 39–71 * Empiriske fordelinger 72–89 * Tilfeldige
 variable 90–153 * Prinsipper for statistisk induksjon 154–194 * Varians- og regre-
 sjonsanalyse 195–243 * Bernoulli- og Poissonforsøk 244–286 * Ikke-parametriske
 situasjoner 287–301 * Glidende gjennomsnitt 302–314 * Hypergeometriske forsøk.
 Stikkprøveundersøkelser 315–338 * Appendiks A. Ulikheter for aritmetisk, har-
 monisk og geometrisk gjennomsnitt, Schwartz' ulikhet 339–342 * Appendiks B.
 Gammafunksjonen 343–344 * Stikkordregister 345–350.

Bind II. En matematisk videreføring: Samplingfordelinger 1–58 * De statistiske
 metoders egenskaper og konstruksjon 59–138 * Varians- og regresjonsanalyse.
 Fortsatt 139–204 * Multinomiske forsøksrekker 205–227 * Sekvensanalyse 228–251
 * Appendiks C. Ortogonale transformasjoner 252–257 * Stikkordregister 258–261.

A. N. Tikhonov — A. A. Samarskii: *Equations of mathematical physics*.
 (International series of monographs on pure and applied mathematics

39.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 16 + 765 pp. sh. 120/-.

Classification of partial differential equations of the second order 1-14 * Simplest problems leading to equations of the hyperbolic type 15-44 * Method of propagating waves 45-82 * Methods of separation of variables 82-125 * Problem with data on characteristics 125-133 * Solution of general linear equations of the hyperbolic type 133-145 * Problems and appendices to Chapter II 145-190 * Physical problems leading to equations of the parabolic type 191-213 * Methods of the separation of variables 213-235 * Problems in an infinite region 235-266 * Problems and appendices to Chapter III 266-300 * Problems reducible to Laplace's equations 301-314 * General properties of harmonic functions 314-337 * Solution of boundary-value problems for the simplest regions by the method of separation of variables 338-348 * Source function 349-360 * Potential theory 360-406 * Method of finite differences 406-413 * Problems and appendices to Chapter IV 413-451 * Problem with initial conditions. Method of averaging 452-461 * Integral relation 461-468 * Vibrations of finite volumes 468-484 * Problems and appendices to Chapter V 485-502 * Heat conduction in infinite space 503-512 * Heat conduction in finite bodies 512-521 * Boundary problems for regions with moving boundaries 521-530 * Thermal potentials 530-535 * Problems and appendices to Chapter VI 535-555 * Fundamental problems leading to the equation $\Delta v + cv = 0$ 556-560 * The source function 560-570 * Problems for an infinite region. The radiation principle 570-580 * Problems of the mathematical theory of diffraction 580-592 * Problems and appendices to Chapter VII 592-626 * Supplement: Special functions 627-636 * Cylindrical functions 637-685 * Spherical functions 686-724 * Chebyshev-Hermite and Chebyshev-Laguerre polynomials 725-744 * Tables of the error integral and some cylindrical functions 745-753 * Index 754-765.

Marie S. Wilcox — John E. Yarnelle: *Mathematics. A modern approach*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), Palo Alto, London 1963. 13 + 385 pp. \$ 3.85.

Numerals, old and new 1-21 * Numerals with different bases 23-43 * Sets; properties of operations 45-63 * Geometry, union and intersection of sets 65-97 * Prime numbers and factors 99-121 * Fractions: symbols for rational numbers 123-145 * Decimal fractions 147-169 * Understanding percent 171-187 * The number line; positive and negative numbers 189-205 * Open sentences 207-235 * Ratio and proportion, percent 237-261 * Similar triangles and numerical trigonometry 263-293 * Polygons, circles, and solids 295-331 * Probability and statistics 333-365 * Table of trigonometric ratios 367 * Answers to selected exercises 368-376 * Index 379-383 * Protractor 385.

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1963 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

Møde i Aarhus:

- 22.1 W. Maak, Göttingen: *Fastautomorphe Funktionen*.

Møder i København:

- 18.2 T. Bang: *Hvorledes beviser man simpelt printalsætningen?*
4.3 W. Maak, Göttingen: *Fastautomorphe Funktionen*.
18.3 J. G. Herriot, Grenoble: *Algorithmic methods in the solution of linear partial differential equations by Bergman's method of integral operators*.
1.4 K. Jacobs, Göttingen: *Recent results in information theory*.
22.4 K. Jörgens, Heidelberg: *Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte singularer Sturm-Liouville-Probleme*.
14.10 H. Tornehave: *Nogle eksempler fra anvendt matematik*.
31.10 W. Fenchel: *Om orientering af linie, plan og rum*.
11.11 A. Lichnerowicz, Paris: *Differential operators on a symmetric space*.
25.11 L. Gårding, Lund: *Uniformisering ved Cauchys problem*.
16.12 H. Rischel: *Holomorfe afbildninger af polyederområder*.

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

- 15.10 H. Skovgaard: *Om indledningen til den matematiske analyse*.
P. Rubinstein: *Kan det logiske formelsprog lette de sproglige tilegnelsen af matematikken?*
16.10 O. Callesen: *Orientering om Datacentralens virksomhed og databehandling*.
Besøg og demonstration på Datacentralen.

Foreningen deltog sammen med Aarhus Universitet og Direktoratet for gymnasieskolerne i arrangementet af matematiklærerkursus på Aarhus Universitet 29. juli-10. august.

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 10.1 P. J. Myrberg: *Katsaus eräisiin funktioteorian probleemoihin [En blick på några funktionsteoretiska problem]*.
G. af Hällström: *Värdefördelningsatser för vissa inre avbildningar av plana områden*.
O. Lehto: *Kvasikonformikuvauksen määritelmistä [Om definitionerna på kvasikonform avbildning]*.

- J. Väisälä: *Kvasikonformikuvaukset n -ulotteisessa avaruudessa* [*De kvasikonforma avbildningarna i n -dimensionell rymd*].
- O. Jussila: *Hellyn lauseesta* [*Om Hellys sats*].
- 11.1 G. Elfving: *Statistikens grundvalsfrågor*.
O. Hellman: *Eräs jonoprobleema* [*Ett köproblem*].
P. Laasonen: *Matematiikan korkeakouluopetuksen ajankohtaisista kysymyksistä* [*Om aktuella frågor beträffande högskoleundervisningen i matematik*].
Y. Juve: *Matematiikan kouluopetuksen uudistamissuunnitelmista* [*Om reformplaner inom skolundervisningen i matematik*].
I. Simola: *Matematiikan opettajien opetusharjoittelusta* [*Om matematiklärares undervisningspraktik*].
- 13.2 V. Ennola: *Äärellisistä unitäärisistä ryhmistä* [*Om ändliga unitära grupper*].
- 6.3 L. Carleson, Uppsala: *Några utvidgningsproblem för kontinuerliga funktioner*.
- 8.4 F. W. Gehring, Ann Arbor: *Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space*.
- 10.4 K. Strebel, Fribourg: *Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises*.
- 25.4 F. Hirzebruch, Bonn: *Die neuen Versionen des Riemann–Rochschen Satzes*.
- 2.9 M. Ohtsuka, Hiroshima: *Extremal lengths and some of its applications*.
- 8.10 E. Mohr, Berlin: *Das Spektrum eines Paares zu einander konjugierter elliptischer Differentialgleichungen; Lorenz–Sommerfeldsche Vermutung*.
- 27.11 R. Kurki-Suonio: *Kielioppi matemaattisena käsitteenä* [*Grammatik som matematiskt begrepp*].
- 11.12 K. Schröter, Berlin: *Über den Begriff der algebraischen Strukturen*.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

- 29.9 Ari Brynjólfsson: *Konservering af fæðavarer*.
- 30.10 Gunnar Böðvarsson: *Anvendt matematik*.
- 18.12 Þorsteinn Sæmundsson: *Solen*.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 23.1 E. Thue Poulsen, Aarhus: *Konstruktion med passer og lineal*.
- 26.2 H. L. Selberg: *Noen integralulikheter fra potensialteorien*.
- 30.4 J. W. S. Cassels, Cambridge: *Rational points on curves of genus 1*.
- 28.5 P. Holm: *Nok en gang om Bohr-kompaktifisering*.

Fellesmøter med Norsk lektorlags matematikkseksjon 25.9, 22.10 og 26.11, smilgn. nedenfor.

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

- 23.3 R. Solvang: *Noen erfaringer fra forsøksundervisning med differensiallikninger*. (Stavanger.)
- 24.3 S. Seim: *Det i særlig grad karakterdannende i matematikken*. (Kristiansand.)
- 5.4 R. Solvang: *Noen erfaringer fra forsøksundervisning med differensiallikninger*. (Trondheim.)
- 22.9 R. Solvang: *Modernisering av matematikkundervisningen og de konsekvenser det kan få for et fremtidig pensum i faget*. (Ålesund.)
- 25.9 K. Piene og R. Solvang: *Forsøksundervisning i matematikk*. (Oslo.)

- 12.10 R. Solvang: *Orientering om forsøksundervisning i matematikk i ungdomsskolen.* (Arendal.)
 13.10 T. J. Engelskjøn: *Nordiske komitéens forsøkspensum i geometri.* (Skien.)
 22.10 I. Johansson: *Symbolspråk — vanlig språk.* (Oslo.)
 26.11 K. E. Aubert: *Innføring av tallbegrepet.* (Oslo.)

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

23.3 Möte i Stockholm:

- M. Essén och B. Kjellberg: *Om minimimodulen för hela funktioner och en faltningssolikhhet.*
 R. Andersson: *Obegränsade Soboleffområden.*
 H. Wallin: *Några utvidgningssatser för kontinuerliga funktioner.*
 J. Boman: *Om holomorfiområdet för lösningar till en partiell differentialekvation med konstanta koefficienter.*

8.6 Möte i Lund:

- A. Hyllengren: *Kvoten mellan två hela funktioner med samma nollställen.*
 H. Waadeland, Trondheim: *Fra teorien for schlichte funksjoner.*
 I. Wik: *Generaliserat lineært oberoende.*
 K.-O. Widman: *Om randvärden för harmoniska funktioner i flera variabler.*
 L. Gårding: *Några problem i teorin för partiella differentialekvationer.*
 J. Friberg: *Fundamentallösningar för partiellt hypoelliptiska operatorer.*
 B. Gamstedt: *En Taubersats med restterm.*
 S. Spanne: *En bilateral Taubersats för Stieltjestransformen.*

16.11 Möte i Stockholm:

- L. Hörmander: *L^2 -metoder i teorin för funktioner av flera komplexa variabler.*
 Å. Pleijel: *Ett Tauberteorem av Malliavin.*

Allmän diskussion kring förslaget till nya matematikkurser i gymnasiet.

FÖRENINGEN I LUND FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG
UNDERSVNING.

7.4 Vårmöte:

- L. Dahlstrand och H. Leyon: *Experimentell kemi i grundskolan.*
 L. Dahlstrand och H. Leyon: *Fysikalisk kemi på gymnasiet.*
 Å. Bjerstedt: *Vad är programmerad undervisning?*
 M. Møller Jørgensen: *Elevlaborationer över radioaktivitet i skolan.*

17.11 Höstmöte:

- M. Hultin: *Naturvetenskaparna i allmänhet och fysiken i synnerhet på det nya gymnasiet.*
 E. Stenqvist: *Kort orientering om lärarhögskolans verksamhet och lokaler.*
 S. Andersson: *Modernisering av kemiundervisningen i Europa och Amerika.*
 — *Litteratur av intresse för kemiläraren.*
 L. Bjellerup: *Kommentarer till gymnasieutredningens förslag till kursplan i kemi.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERSVNING
I STOCKHOLM.

2-5.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 11, s. 38.

VÄSTSVENSKA FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG
UNDERSVNING.

1.12 Årsmöte i Göteborg:

S. Glad: *Fysiken i det nya gymnasiet.*

FORENINGSNYTT

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERSVNING
I STOCKHOLM

höll sitt ordinarie årsmöte i Stockholm den 2-4 januari 1964. Till ny ordförande valdes lektor Stig Lindkvist. Vice ordförande blev lektor Fredrik Ehrnst, sekreterare adjunkt Jan Unenge och skattmästare adjunkt Jacob Isander. De nämnda jämte lektor Bertil Englund utgör styrelsens arbetsutskott.

Lektor Ernst Knave, som efter 15 år som föreningens ordförande nu lämnade denna post valdes till föreningens hedersledamot.

Vid årsmötet diskuterades ämnena matematik, fysik och kemi på det föreslagna nya gymnasiet, matematiken med F. Ehrnst som inledare, fysiken med E. Knave som inledare och inledare i kemi var B. Englund.

R. Dahlkvist informerade i ett föredrag om programmerad undervisning, O. Beckman talade om det fasta tillståndets fysik och B. Dahlbom om meteorologin på grundskolans högstadium.

Omkring 300 medlemmar bevistade årsmötet.

FORENINGENES FORMENN

Nedenfor angis navn og adresse til formennene i de utgivende foreninger:

Dansk matematisk forening: Professor Hans Tornehave, Tornebakken 45, Virum.
Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark:
Lektor Henrik Meyer, Bakkedraget 15, Birkerød.

Finlands matematiska förening: Professor Olli Lehto, Ådvägen 13 A 9, Helsingfors - Drumsö.

Finlands matematik-, fysik- och kemilärarförbund: Dr. Urpo Kuuskoski, Linnankoskenkatu 12 A, Helsinki.

Íslenzka stærðfræðafélagið: Professor Steingrímur Baldursson, Glaðheimar 18, Reykjavík.

Norsk matematisk forening: Professor Karl Egil Aubert, Institutt for matematiske fag, Blindern, Oslo.

Norsk lektorlags matematikkseksjon, Oslo krets: Lektor Torjus I. Engelskjøn, Nadderud h. skole, Bekkestua.

Svenska matematikersamfundet: Professor Lennart Carleson, Matematiska institutionen, Sysslomangatan 8, Uppsala.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning: Docent Stig Andersson, Bankgatan 12, Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm: Lektor Stig Lindkvist, Edinsvägen 4, Ektorp.

Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning: Rektor Arne Pleijel, Hjortmossegatan 160, Trollhättan.

UTNEVNELSER

Till professor i matematik vid Helsingfors Universitet: Docent Lauri Myrberg.

Till professor i matematik vid Uleåborgs Universitet: Biträdande professor Yrjö Kilpi.

Till professor i ren matematikk ved Universitetet i Bergen: Dosent Oddmund Kolberg.

Till professor i matematik vid Göteborgs Universitet: Laborator Olof Hanner.

Till professor i matematik vid Lunds Tekniska Högskola: Docent Jaak Peetre.

Till professor i numerisk analys vid Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm: Laborator Germund Dahlquist.

Till professor i numerisk analys vid Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg: Docent Heinz-Otto Kreiss.

Till professor i matematisk statistik vid Lunds Tekniska Högskola: Docent Gunnar Blom.

Till professor i skoglig matematisk statistik vid Skogshögskolan, Stockholm: Docent Bertil Matérn.

Till biträdande professor i matematik vid Uleåborgs Universitet: Docent Klaus Vala.

Til dosenter i matematikk ved Universitetet i Oslo: Universitetslektor Erik M. Alfsen og universitetsstipendiat Otte Hustad.

Till laborator i matematik vid Stockholms Universitet: Laborator Hans Rådström.

Till laborator i matematik vid Uppsala Universitet: Docent Christer Lech.

MATEMATIKK-SEMINAR I ATHEN NOVEMBER 1963

I dagene 17. til 23. november 1963 ble det holdt et seminar («working session») om matematikkundervisning i skolen i Athen. Innbyder var OECD og det var ialt et halvt hundre deltakere, fra universiteter og skoler, i land som hører til OECD. Ordfører var professor Papaioannou fra Athen. Ved sin side hadde han professor Howard Fehr fra New York, som var den daglige leder foruten at han hadde spilt en vesentlig rolle i forberedelsene av seminaret. Fra Norden var innbudt som deltakere lektorene Erik Kristensen og Ole Rindung fra Danmark, lektor Bjørn Bjarnasson fra Island, rektor Kay Piene og lektor Ragnar Solvang fra Norge og lektorene Matts Håstad og Lennart Råde fra Sverige.

Hensikten med seminaret var å legge fram og diskutere matematikkpensumet i OECD-landene, og videre utdanningen av matematikklærere. En håpet at diskusjonen skulle trekke fram, og til en viss grad klargjøre, reformproblemene og spørsmålet om å endre pensum i relasjon til nåværende og framtidige behov, så vel som å peke på midler til å løse disse problemene.

Seminaret skulle gjøre det mulig å utveksle opplysninger om og erfaringer fra arbeidet med å modernisere matematikkundervisningen. Det skulle legges fram materiale som syntes lovende, lærebøker skrevet for forsøk, videre rapporter om undervisning i moderne begrep og moderne undervisningsmåte innen matematikken, rapporter fra forsøksklasser etc. Seminaret skulle endelig utarbeide en rapport som pekepinn for videre arbeid med moderniseringen. Deltakerne hadde på forhånd fått meldinger fra de enkelte land, basert på et spørreskjema. På selve semi-

naret var det lagt fram atskillig materiale, lærebøker og særtrykk osv., som illustrerte utviklingen og viste at moderniseringen er kommet ganske langt.

Det ble holdt foredrag av Servais (Belgia), Papy (Belgia), Pollak (USA), Athen (Tyskland), Revuz (Frankrike) og Fehr (USA). Dessuten var det en rekke korte meldinger fra forskjellige deltakere. Fra Norden var det Erik Kristensen som talte om innføring av grupper og Lennart Råde om sannsynlighetsregning. Ole Rindung ga tilslutt et presist referat som oppsummerte det som var hendt på seminaret.

Mange deltakere hadde også vært med på seminaret som OECD holdt i Frankrike (Royaumont) i 1959. Seminaret i Athen viste at en nå var kommet et godt skritt videre. Moderniseringsarbeidet er tydeligvis i god gjenge i mange land, og det viser seg at det lar seg gjøre å bruke det nye stoffet i matematikkundervisningen i skolene.

Resolusjon.

1. OECD bør sette igang opplysningstjeneste til medlemslandene som forteller om utviklingen i matematikkundervisningen i disse landene.

2. Konferansen mener at utveksling av folk som arbeider med forbedring av matematikkundervisningen er av vesentlig betydning og på langt sikt også økonomisk. Vi tilrår at OECD og ansvarlige instanser i medlemslandene tar initiativet til å støtte slike besøk.

3. Konferansen mener at forskning i utvidet målestokk bør settes i gang for å granske mulighetene for bruk av film, fjernsyn og programmert undervisning når det gjelder matematikkopplæringen.

4. Konferansen understreker betydningen av forsøksklasser i matematikk for å lette innføringen av nye metoder og nytt stoff. Tatt i betraktning at endringer skjer raskt, tilrår den at slike klasser bør drives kontinuerlig.

5. Det er innlysende at utdanningen av en vordende matematikklærer må legges vekt både på det pedagogiske og det faglige.

Hans kunnskaper i matematikk bør bringes opp på et høyere nivå enn det som vil kreves i lærergjærningen. Dette betyr at læreren må mestre det fundamentale i moderne matematikk, sammen med kjennskap til en mangfoldighet av anvendelser av moderne matematikk.

Det pedagogiske innhold må henge nøye sammen med den matematikk det skal undervises i, og bør innbefatte psykologisk forståelse av de barn som undervisningen gjelder.

I begge henseender skal læreren være slik forberedt at han er i stand til å videreutdanne seg selv, og han må være i stand til å tilpasse seg til de vekslende vilkår som han sikkert vil møte i sitt arbeid. De foregående betraktninger må også gjelde alle de kriseforholdsregler som en kan gripe til for å møte en mangel på kvalifiserte lærere.

Dersom det videre er mer enn ett trinn i utdanningen av lærere for høyere skoler, er det tilrådelig at utdanningen for et lavere trinn skal være slik at den setter den vordende lærer i stand til siden å gå greit over fra et lavere til et høyere trinn.

6. Forbedring og modernisering av matematikkundervisningen er umulig uten store anstrengelser for å innføre eller utvide adgangen til etterutdanning for lærere. Det er forskjellige måter som dette kan gjøres på, inklusive utvikling av korrespondansekurser, men konferansen vil særlig peke på nødvendigheten av at lærere regelmessig vender tilbake til universitetet eller andre institusjoner av samme standard. Det er også ytterst viktig at lærere må bli fritatt for undervisning og bli økonomisk støttet om det trengs, for å sette dem istand til å ha full fordel av

de muligheter som eksisterer. Med tilstrekkelig økonomisk støtte kan viktige bidrag til etterutdannelse bli gitt, ikke bare av universiteter og høyskoler, men også av yrkesorganisasjoner.

7. Fagets kulturelle og praktiske viktighet og de stadig økende anvendelser medfører at hver elev må bli tilstrekkelig opplært i matematikk i den høyere skole. I denne sammenheng må det nevnes at mengder, relasjoner og funksjoner er grunnleggende for all matematikkopplæring.

Det er nødvendig å være klar over betydningen av følgende emner for realfagsspesialister: vektorrom, infinitesimalregning, sannsynlighetsregning og statistikk.

Også andre enn realfagsspesialistene bør få en grundig og skikkelig matematikkundervisning. Deres pensum bør også være fullverdig matematisk; det bør omfatte fundamentale begrep, sammen med kjennskap til deres anvendelser. Spesielt bør disse kurser omfatte sannsynlighetsregning og statistikk.

8. Konferansen mener at bruk av regnemaskiner (computers) mer og mer vil bli et vesentlig element i vår sivilisasjon. Dette faktum må bli tilstrekkelig avspeilet i pensumet for de høyere skoler.

9. Konferansen fremholder sterkt at hvert OECD-land må gå i gang med å modernisere sine matematikkprogram i skolen så langt og så fort som dets utdanningsressurser tillater.

10. Eksamener bør utvikle seg i samsvar med målene for en moderne matematikkundervisning. Det er en stor fare for at eksamener med et fast pensum og standard-oppgavetyper vil virke hemmende for en forbedring av skolens matematikkundervisning.

11. Den «anvendte matematiker» bygger opp matematiske modeller fra situasjoner i den virkelige verden. Han drar slutninger fra modellene og bygger opp en tilsvarende matematisk struktur som han siden prøver på den originale situasjon. Utviklingen av ren matematikk går fram etter et lignende program.

Vi tilrår at matematikkundervisningen bør bruke det samme mønster: eleven bør konfronteres med situasjoner som vekker ettertanke; han bør så bygge opp sin intuisjon omkring disse og så gå i gang med å gjøre dem matematiske.

12. Det er viktig at elevene blir gjort klare over at matematikk er nyttig i samfunnet. En av de lette måter til å utvikle denne holdningen er å bruke, fra tid til annen, anvendelser fra et vidt område, som motivering for undervisning om matematiske begrep, og å bruke matematikk også i sammenheng med slike anvendelser. Dette betyr blant mye annet at matematikklærerne må samarbeide nært med lærere i andre fag som bruker matematikk.

13. Matematikk er en enhetlig disiplin, den er ikke en rekke isolerte tricks. I matematikkundervisningen er det nødvendig å bruke struktur som et fundamentalt verktøy.

14. Matematikkundervisningen har nær forbindelse med undervisningen i andre fag. Mange fordeler kan oppnås gjennom felles diskusjon av pensu og pedagogiske problemer. Derfor anbefaler konferansen OECD at ved fremtidige møter som gjelder undervisning i andre fag, spesielt naturfag, bør også representanter for de andre fag være tilstede.

15. Alle matematiske tegn og symboler som brukes i OECD-rapporter og som ikke vanlig brukes i de tradisjonelle matematiske lærebøker, bør være fullstendig forklart og illustrert ved eksempler, i den utstrekning dette siste ansees nødvendig.

K. P.

SUMMARY IN ENGLISH

R. TAMBS LYCHE: *Axel Thue 1863–1922*. (Norwegian.)

Written in memory of Axel Thue, the Norwegian mathematician whose most famous contribution to mathematics was the first step in the theorem now known as “The Thue–Siegel–Roth-theorem”.

MATTS HÅSTAD: *Activity of the Scandinavian committee for modernizing the teaching of mathematics*. (Swedish.)

The Scandinavian committee has initiated the preparation of experimental texts on all mathematical subjects taught at all school levels from 7 to 19 years of age. The article gives a short description of the different texts, and reports on the experience so far in the cases where the texts have already been used for school teaching.

JENS ERIK FENSTAD: *Algorithms in mathematics: An introduction to recursion theory and its applications, I*. (Norwegian.)

The paper is mainly an expository account of elementary recursion theory. In part I, some care is given to the discussion of the relationship between the mathematical concepts of recursive functions and sets and the intuitive notion of effective decidability. Primitive recursive functions are treated following Kleene. Recursively enumerable (r.e.) sets are then introduced as being the ranges of primitive recursive functions (plus the empty set). Recursive sets are defined as r.e. sets having an r.e. complement, and recursive functions are introduced in terms of recursive sets. The main theorems on normal forms, the μ -operator, etc. are then derived in a direct fashion. An enumeration theorem for primitive recursive functions is next established directly from the five defining schemata, and the existence theorem on r.e. sets which are recursively inseparable is deduced.

ERNST S. SELMER: *Registration numbers in Norway: Some applied number theory and psychology*. (Norwegian.)

In 1964, every person in Norway will get his registration number, consisting of 6 digits for date of birth (year, month, day) and 3 digits to distinguish persons born on the same day. In addition, there will be two check digits, which are weighted sums of digits, reduced modulo 11. The weights were chosen so as to detect most of the errors occurring during registration and punching. An earlier registration of the population of Oslo was studied carefully to analyze psychological tendencies in registration errors.

LENNART RÅDE: *The first digit and the Poincaré roulette problem.* (Swedish.)

The logarithmic distribution of the first significant digits of physical constants is discussed, including some empirical verifications. An elementary derivation, using only the mean value theorem for integrals, is given of the approximation $|F_{\varphi}(x) - x| \leq x \cdot V[f_{\varrho}]$, $0 \leq x \leq 1$. Here F_{φ} is the distribution function of $\varphi = {}^{10}\log(\eta + 1)$, where η is the first significant digit, and f_{ϱ} is the frequency function of ϱ , the logarithm of the physical constants. Further $V[f]$ is the total variation of f . The connection between this problem and the Poincaré roulette problem is discussed and the invariance law of Pinkham is demonstrated.

GUNNAR AF HÄLLSTRÖM: *On the fundamental theorems of the theory of value distribution.* (Swedish.)

The main results in R. Nevanlinna's theory of meromorphic functions are the first and second fundamental theorem and the defect relation. The article provides a survey of these theorems and related topics, especially generalizations to functions, meromorphic in multiply connected domains, and also to pseudo-meromorphic functions and partly to general interior functions.