



THORALF ALBERT SKOLEM IN MEMORIAM

JENS ERIK FENSTAD

Professor Thoralf Albert Skolem døde den 23. mars 1963 nær 76 år gammel. Med ham har Norge mistet en av sine fremste matematikere gjennom alle tider. Professor Skolems bortgang kom meget uventet, like til det siste var han i full aktivitet. Han sto like foran en reise til U. S. A., hvor han, som så ofte før, var innbudt til å forelese ved en rekke universiteter. Han var fremdeles meget produktiv innen sitt fag.

Thoralf Skolem var født den 23. mai 1887 i Sandsvær som sønn av lærer og kirkesanger Even Skolem. Examen artium tok han i 1905 og begynte deretter å studere realfag ved Universitetet i Oslo hvor han i 1913 tok den matematisk-naturvitenskapelige embetseksamen med den omfattende fagkrets: fysikk, kjemi, botanikk, zoologi og som hovedfag matematikk. For sin hovedfagsoppgave, »Undersøkelser innenfor logikkens algebra«, fikk han ren 1.0. Thoralf Skolem var først en tid privatassistent for professor Kr. Birkeland, og det var innen fysikken, sammen med Birkeland, at Skolem offentliggjorde sine første vitenskapelige arbeider: to noter angående Zodiakallyset samt deler av den matematiske utarbeidelse av Birkelands nordlysresultater.

Vinteren 1915–16 studerte Skolem i Göttingen under de meget vanskelige forhold som den første verdenskrig skapte. Fra 1916–18 var han universitetsstipendiat, og i 1918 ble han beskikket i en nyopprettet

stilling som dosent i matematikk ved Universitetet i Oslo, eller Kristiania som det dengang het.

Nær førti år gammel, i 1926, tok Skolem doktorgraden på avhandlingen »Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen«. Den noe høye alder har sin forklaring. Viggo Brun og Skolem inngikk i yngre år en overenskomst om at ingen av dem skulle bry seg med å ta doktorgraden, men i midten av tyveårene kom en yngre garde stormende. I 1924 tok Øystein Ore sin grad, og i 1926 sto Trygve Nagell for tur. Skolem mente da det var riktig at han også oppfylte det formelle krav som en doktorgrad gjerne oppfattes å være, og han »fikk tillatelse« av Brun til å disputere. Brun var for øvrig alt i 1924 blitt utnevnt til professor ved Norges Tekniske Høgskole.

Den 23. mai 1927 ble Skolem gift med Edith Wilhelmine Hasvold.

Fra 1930 til 1938 var Skolem forsker ved Chr. Michelsens Institutt, en meget frittstående stilling med samme betingelser som en professor — bortsett fra administrasjon og undervisning! Som forsker ved Chr. Michelsens Institutt måtte han oppholde seg i Bergen, og i forordet til sin velkjente monografi »Diophantische Gleichungen« bemerker han de store vanskeligheter det var med å skaffe matematisk litteratur der.

I en alder av 51 år ble Skolem i 1938 utnevnt til professor ved Universitetet i Oslo. Han foreleste gjerne algebra og tallteori for de hovedfagsstuderende, mer sjelden foreleste han over den matematiske logikk, det fag han vel har gjort størst innsats innenfor. Thoralf Skolem var av natur meget beskjedent og tilbakeholdende. Han skapte ingen skole og hadde ingen »elever«, men gjennom sin innsats og sin forskerglød har han inspirert mer enn en av de yngre norske matematikere.

I 1957 falt Skolem for aldersgrensen; etter den tid har han flere ganger vært Visiting Professor ved amerikanske universiteter.

Innen sitt fags organisasjoner har professor Skolem vært en aktiv og ofte benyttet mann. En liten oppsummering viser det: Han har vært formann i Norsk Matematisk Forening og flere ganger representert norske matematikere utad. I en årrekke var han redaktør for Norsk Matematisk Tidsskrift og fortsatte etter dets opphør som redaktør av *Mathematica Scandinavica*. Han var også redaktør for *Acta Mathematica* og *Journal of Symbolic Logic*. Professor Skolem var medlem av flere vitenskapelige akademier, alt i 1918 ble han innvalgt som medlem av Vitenskapsakademiet i Oslo. Hyppig har han vært innbudt som foredragsholder ved internasjonale kongresser og symposier, og han er blitt tildelt flere vitenskapelige æresbevisninger, bl. a. fikk han i 1962 Gunnerus-medaljen fra Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab.

I 1954 ble han utnevnt til Ridder av 1. klasse i St. Olavs-ordenen.

Men det er først og fremst gjennom sin vitenskapelige innsats professor Skolem vil bli minnet. Lærergjerning og organisasjonsvirksomhet var nødvendige plikter, — forskningen var hans liv.

Etter en foreløpig opptelling fins det 182 vitenskapelige publikasjoner fra Skolems hånd, en rekke av dem epokegjørende, de aller fleste av stor vitenskapelig verdi, og noen få av mindre interesse for ettertiden. Professor Skolem var jo redaktør av Norsk Matematisk Tidsskrift, og det hendte han i full fart måtte skrive en avhandling eller to for å fylle et hefte. En del mindre meddelelser i algebra og tallteori hører til denne kategori. I samme tidsskrift finnes også den noe kuriøse »En liten studie i transfinit mekanikk« fra 1940. På den annen side fins det fra hans hånd meget betydningsfulle avhandlinger på dette noe bortjemte sted; ett eksempel er »Über die mathematische Logik« fra 1928. Professor Skolem har også skrevet en lang rekke meget grundige anmeldelser i dette tidsskrift, ikke bare innen matematikk, men også innen filosofi og fysikk, fag han interesserte seg sterkt for. Det bør nevnes at han, logikeren og tallteoretikeren, var en av de få matematikere som flittig møtte frem til fysikernes foredrag og diskusjoner.

Professor Skolem publiserte gjerne sine arbeider enten i Vitenskapsakademiets Skrifter og Avhandlinger, i Norsk Matematisk Tidsskrift, eller i Det Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger. En grovtelling viser at vel 120 av hans 180 arbeider er offentliggjort på disse steder. Dette har vært til noe av fortvilelse for hans utenlandske fagfeller, da disse publikasjoner ikke er av de mest tilgjengelige, — et akademis skrifter, i broket blanding som de gjerne kommer, havner som oftest i ett eller annet magasin i sentralbibliotekets kjeller og kommer svært sjelden opp på det matematiske bibliotek. En samlet utgave av Skolems arbeider er derfor svært påkrevd; en første begynnelse ble gjort alt før han døde, og dette arbeidet fortsetter. Hans egne skrifter, i samlet form, vil være ham et bedre minne enn mange store ord ved hans død.

Store matematikere begynner gjerne å publisere i ung alder. Professor Skolem var en unntagelse. Da han ble dosent i 1918, 31 år gammel, forelå det fra ham to arbeider (bortsett fra noen mindre ting han skrev sammen med Kr. Birkeland som dennes assistent). Men omkring 1920 kom det en serie avhandlinger som stilte Skolem blant de fremste forskere innen den matematiske logikk: »Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls ...« daterer seg fra 1919. Året etter kom »Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze ...«. I 1922 holdt han et foredrag på den femte skandinaviske matematikerkongress, »Einige Bemerkungen zur axiomat-

tischen Begründung der Mengenlehre», og endelig i 1923 kom det store arbeid »Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrerende Denkweise ...«. Alt dette avhandlinger som er blitt klassiske innen logikken, selv om de nok av samtidens matematikere, især de skandinaviske, forble ganske upåaktede og uleste!

Professor Skolems innsats er altfor stor og mangesidig til kort å kunne omtales eller karakteriseres. Vi har gjort et utvalg av hans verker, som nok er subjektivt, men som vi tror innbefatter de ting han lengst vil huskes for. Og vi anser det som vesentlig å antyde noe om de ideer og problemer han arbeidet med.

I avhandlingen fra 1920 beviser Skolem den sats som siden har båret navnet Skolem-Löwenheims teorem. Kort utsier denne at hvis en endelig eller tellbar uendelig utsagnsmengde, formulerbar innen den sedvanlige predikat kalkyl, er oppfylld (eller, i annen terminologi, har en modell), så er denne utsagnsmengde allerede oppfylld innen et tellbart individ-område. Et biprodukt av beviset for denne sats er den kjente Skolems normalform for predikat kalkylen.

I foredraget fra 1922 danner denne Skolem-Löwenheims sats utgangspunktet for den relativisering av mengdebegrepet som Skolem påpekte, og som siden ble kjent under navnet Skolems paradoks. Hvis Zermelos aksiomatikk er fri for motsigelser, må den ha en modell, dvs. være oppfylt innen et, hva Skolem kaller, »Denkbereich«, og dermed etter satsen også være oppfylt innen et tellbart område. Men dette står i strid med Cantors lære om det ikke-tellbare, om den uendelige følge av stadig større transfinite mektigheter. Skolems »paradoks« er likevel ingen motsigelse, grovt sagt viser det at der fins ingen fullstendig aksiomatisering av matematikken, og at visse begreper, som f. eks. mektighetsbegrepet, må oppfattes relativt til den gitte aksiomatikk og modeller av denne. En mengde som innen et aksiomsystem ikke kan vises å være tellbar, kan innen en modell av dette system erkjennes som tellbar. Dette er kanskje et paradoks, men ingen motsigelse, det hele beror på at opptellingsfunksjonen ikke kan konstrueres innen aksiomatikken.

I samme foredrag gir Skolem den i dag allment aksepterte presisering av mengdebegrepet og frir dermed mengdelæren fra den psykologisme som ligger i Cantors beskrivelse av en mengde som »eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen«. Zermelo erstattet dette Cantors begrep med det noe vage at mengder blir bestemt gjennom »definite Aussagen«. Skolem presiserte dette ganske enkelt — for oss som er fortrolig med logikkens symbolspråk — til det at velbestemt utsagn er det samme som en predikatlogisk formel. Skolem utfylte også på et viktig

punkt Zermelos aksiomsystem, så det som i dag ofte benevnes Zermelo-Fraenkels system, rettere burde hete Zermelo-Skolem-Fraenkels versjon av den aksiomatiske mengdelære.

Skolem selv var ingen ubetinget tilhenger av mengdelæren med dens transfinite mektigheter og ikke-konstruktive resonnementer. Hans syn er vel bedre representert gjennom den store avhandlingen fra 1923. I den søker Skolem å bygge opp den elementære aritmetikk uten anvendelse av kvantorene »alle« og »det fins« utstrakt over den hele mengde av naturlige tall. Historisk sett må dette arbeid betraktes som »det første« innen den rekursive matematikks teori. I en avhandling fra 1924 gir han også et konstruktivt bevis for algebraens fundamentalsats. Men mens den rekursive teori har hatt en rik utvikling, har den strengt finitistiske oppbygning av matematikken som Skolem foreslo, vakt mindre interesse. I sitt foredrag til den internasjonale matematikerkongress i 1950 uttalte han at »the very natural feature of my considerations would convince people that this finitistic treatment of mathematics was not only a possible one but the true or correct one—«. For en vanlig matematiker fortoner dette seg som et ganske ekstremt standpunkt, så Skolem haster med å tilføye: »Now I will not be misunderstood, I am no fanatic,—«.

Skolems arbeider innen den matematiske logikk vakte liten interesse blant hans skandinaviske kolleger, og han har senere selv antydnet at det ga liten inspirasjon å vite at hans arbeider forble uleste. Fra midten av tyveårene begynte han å arbeide mer med tradisjonelle og »aktverdige« matematiske disipliner: algebra og tallteori. Innenfor teorien for diofantiske ligninger har Skolem skrevet en rekke omfattende arbeider, ikke så meget om spesielle ligninger som om metoder av mer generell karakter. Mest kjent er han vel for sin såkalte p -adiske metode, som i visse tilfeller lar en konkludere at spesielle systemer diofantiske ligninger har kun et endelig antall heltallige løsninger. I visse tilfeller lyktes det også Skolem, sin natur tro, å angi konstruktive metoder til å finne disse løsninger. Et kjent arbeid fra Skolem om denne metode er »Einige Sätze über p -adische Potenzreihen mit Anwendung auf gewisse exponentielle Gleichungen« fra Math. Annalen 1935. I 1938 kom den kjente monografi »Diophantische Gleichungen« i Ergebnisse-serien.

Innen algebraen har Skolem også vært meget produktiv, mest kjent her er han kanskje for hva han selv i de første linjer kaller »dieser kleine Aufsatz«, nemlig: »Zur Theorie der assoziativen Zahlensysteme«. Blant de 65 anførte satser der er han vel i dag best kjent for hva som nå kalles Skolem-Nöthers teorem som karakteriserer automorfismene av simple algebraer. Denne sats som ble funnet av Skolem i 1927 og senere gjenoppdaget av Emmy Nöther og R. Brauer, uttaler i sin nyere utforming,

kort formulert, at det fins ikke andre automorfismer enn indre automorfismer av simple algebraer A av endelig rang over en kropp K , der K er sentret til A og invariant under automorfismen.

Skolems innsats innen algebra og tallteori, som er langt mer omfattende enn det som her kan nevnes, skulle rekke til mer enn en matematiker-reputasjon. Og så kommer hans logikk i tillegg.

I 1928, i Norsk Matematisk Tidsskrift, offentliggjør han et foredrag, »Über die mathematische Logik«, som han tidligere samme år hadde holdt i Norsk Matematisk Forening. Bak denne noe beskjedne presentasjon skjuler seg et meget betydningsfullt arbeide. I det vil han, som han selv angir, vise hvorledes deduksjonsproblemet for den elementære logikk kan tilbakeføres på et aritmetisk-kombinatorisk problem. Å avgjøre, sier han, for gitte formler U og V , om V følger av U er ensbetydende med å undersøke om U & $\bar{V}$ er en motsigelse eller ikke. Det er således klart, konkluderer han, at alt reduserer seg til å avgjøre om en gitt formel er en kontradiksjon eller ikke. Og så gir Skolem en generell metode hvorved deduksjonsproblemet blir redusert til en ren aritmetisk oppgave. I sin alminnelighet lar den seg ikke effektivt løse, men for visse klasser av formler kan man finne en effektiv avgjørbarhetsmetode. De eksempler Skolem her gir, er viktige bidrag til det såkalte logiske »Entscheidungsproblem«. Skolem har offentliggjort en rekke arbeider over dette problem, og spesielt disse arbeider har et kombinatorisk preg. Typisk i så måte er en liten avhandling fra Fundamenta Math. 1933, »Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem«. Den kombinatoriske sats det her er tale om, er det velkjente Ramsays teorem, som Skolem gir en skjerpet versjon av med et forenklet bevis.

For øvrig har Skolem skrevet en rekke arbeider innen kombinatorikken i en snevrere betydning. Sammen med Viggo Brun sto han for annenutgaven av Netto: »Lehrbuch der Kombinatorik«, og har der tilføyd en lang rekke originale bidrag.

I 1929 kommer en av Skolems mest kjente avhandlinger, »Über einige Grundlagenfragen der Mathematik«. Der vender han tilbake til Skolem-Löwenheims sats og gir for denne to nye beviser. Ett er kort, men bruker utvalgsaksiomet. Det andre er heller ikke konstruktivt i en snevrere betydning, men fortjener en spesiell kommentar. Skolem oppfattet ikke logikken aksiomatisk. Konsistensbegrepet var for ham det semantiske, dvs. oppfylldhet innen et individområde. I dag er det mer vanlig med et bevisteoretisk (eller deduktivt) konsistensbegrep: det fins ingen formel A slik at både A og $\neg A$ (negasjonen av A) er bevisbare. Når Skolem formulerte sin og Löwenheims sats på denne måte: »Hvis en formel A er konsistent, så er den oppfylld innen et tellbart individområde«, så

er det den semantiske tolkning som ligger bak. Med den bevisteoretiske tolkning av konsistensbegrepet blir det en ganske annen sats, og kjennes da under navnet Gödels fullstendighetsteorem for predikatkalkylen. Hva som kan bringe en smule forvirring, er at Skolems bevis fra 1929, med små endringer, kan tjene som bevis for Gödels sats fra 1930. Man kunne med god rett snakke om Skolem-Gödels fullstendighetssats for den elementære logikk.

Skolem gir også i dette arbeid en enkel aksiomatikk for mengdelæren, bl. a. får utvalgsaksiomet en særlig pregnant form: det fins en »global« utvalgfunksjon w slik at $x \in y \Rightarrow w(y) \in y$. Selv var han nokså mistroisk overfor dette aksiom. I et foredrag fra 1932 sa han: »Vil man gå over til en konsekvent formalistisk matematikk, basert på et endelig antall eksakt formulerte aksiomer, så er der intet annet å innvende, enn at der kan være spørsmål om motsigelsesfrihet og hensiktsmessighet o. l. Men innenfor den matematiske praksis, slik den vanligvis drives med kontinuua, som slett ikke er gitt i kraft av de og de bestemte oppregnede konstruksjonsprinsipper, er utvalgsprinsippet etter min mening avgjort en uting — en slags videnskabelig svindel.«

På slutten av avhandlingen fra 1929 uttrykker Skolem på grunnlag av den mengdeteoretiske relativisme han har påvist, sin tvil om at matematiske begreper fullstendig kan karakteriseres, og han gir noen foreløpige resultater. I 1934 i arbeidet »Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe ...« i *Fundamenta Math.* gir han et oppsiktsvekkende svar hva begrepet naturlig tall angår. Det er umulig med et endelig eller tellbart uendelig antall utsagn innen predikatkalkylen å sette opp et kategorisk aksiomsystem for de naturlige tall! Nå til dags utleder man dette resultat som en relativt enkel konsekvens av Gödels fullstendighetsteorem. Dette teorem kan hensiktsmessig formuleres slik: en utsagnsklasse E har en modell, hvis og bare hvis hver endelig delklasse F av E har en modell. La nå E_0 være et forslag til aksiomsystem for de naturlige tall N , f. eks. Peanoaksiomene. Tilføy en ny konstant a og følgende aksiomer: $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2$, ..., $a \neq n$, ... i tellbart uendelig antall. Det fremkommer en utsagnsmengde E_1 , og det er lett å se at N er modell for hver endelig delmengde F_1 av E_1 , nettopp fordi a kan tolkes som et tall m større enn alle n som forekommer i det endelige antall aksiomer av typen $a \neq n$ i F_1 . Etter Gödels sats har så E_1 en modell N_1 , som etter Skolem-Löwenheims teorem kan velges tellbar uendelig. a må i N_1 tolkes som et »uendelig stort« tall idet alle aksiomene $a \neq n$ er oppfylt innen N_1 . Det er da opplagt at N_1 ikke kan være ordningsisomorf med de naturlige tall, hvilket igjen sier at de naturlige tall ikke kan karakteriseres aksiomatisk.

Skolems bevisteknikk var en annen og mer direkte modellkonstruksjon, som i den senere tid, rendyrket til den såkalte »ultraprodukt«-konstruksjon, har vist seg usedvanlig fruktbar innen mange områder av den matematiske logikk.

Innen den rekursive teori har Skolem også etter 1923 levert mange bidrag. Vi nevner spesielt et vakkert lite arbeide fra 1940, »Einfacher Beweis der Unmöglichkeit eines allgemeinen Lösungsverfahrens für arithmetische Probleme«. Han viser først at ethvert generelt rekursivt utsagn er aritmetisk, og deduserer fra dette ved en anvendelse av Cantors diagonalmetode, at om man presiserer »effektiv« som generelt rekursiv, så fins der ingen effektiv avgjørbarhetsmetode for aritmetiske problemer.

Vi har gitt etter for fristelsen til å ta med en del av Skolems bevis i kort riss. Har leseren holdt ut så lenge, vil vi ikke snyte ham for et smukt resonnement. Derfor, et aritmetisk utsagn bygges opp ved addisjon, multiplikasjon og de logiske symboler fra tall og variable for tall. Det er ikke vanskelig å innse at de aritmetiske utsagn, spesielt de med en variabel, lar seg stille opp i en tellbar uendelig rekke. La $A_k(x)$ være det k 'te slike utsagn. Anta man hadde en effektiv, dvs. generelt rekursiv metode til å avgjøre for vilkårlige k og x om $A_k(x)$ er sann eller ikke. Det vil si at man hadde en rekursiv funksjon $f(k, x)$ slik at $f(k, x) = 1$ hvis $A_k(x)$ er sann, og $f(k, x) = 0$ hvis $A_k(x)$ er gal. Betrakt utsagnet » $f(x, x) = 0$ «, det er generelt rekursivt, og etter første del av Skolems bevis er det dermed aritmetisk. Følgelig fins det et tall k_0 slik at $f(x, x) = 0$ er identisk med $A_{k_0}(x)$. Substituerer vi k_0 for x , har vi motsigelsen. For $A_{k_0}(k_0)$ er sann, hvis og bare hvis $f(k_0, k_0) = 1$, men $A_{k_0}(k_0)$ er jo identisk med $f(k_0, k_0) = 0$!

Skolem publiserte, som vi tidligere har nevnt, størsteparten av sine arbeider i Norge, og slett ikke så lett tilgjengelig for utenlandske fagfeller. Dette har ledet til at andre hyppig har gjenoppdaget Skolems resultater, noe som alt ble nevnt i forbindelse med Skolem-Nöthers sats. Et annet eksempel er Skolems grunnleggende arbeider innen lattice-teorien, som forble fullstendig upåaktet av samtiden. I 1936 måtte han endog offentliggjøre en avhandling »Über gewisse »Verbände« oder »lattices«, hvor han beretter om de resultater som han alt i 1913 og i 1919 hadde nådd innen denne teori, og som først i 1930-årene ble »gjenoppdaget«. Skolem hadde bl. a. bestemt den fri distributive lattice generert av en mengde på n elementer (1913), og han hadde vist at enhver implikativ lattice er distributiv samt den delvise omvending at enhver endelig distributiv lattice er implikativ (1919). Særlig dette siste er av interesse for algebraiseringen av den matematiske logikk, og Skolem var meget nær opp til det å gi en aksiomatisering av den intuitjonistiske logikk, over ti år før Heyting.

Skolems forskeraktivitet avtok ikke med årene; som eksempel kan vi anføre at i tiåret 1948–57, fra sitt 61. til 70. år, offentliggjorde han 48 arbeider. I sannhet en imponerende innsats. Og like til det siste var han med på å åpne nye områder. I en avhandling fra 1957, »Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom«, tok han opp de mengdeteoretiske kontradiksjoner i lys av den flerverdige logikk og viste at visse former for et ubegrenset utsondringsaksiom er motsigelsesfritt innen denne logikk. Flere har tatt opp Skolems undersøkelser på dette området. Også her, som så mange ganger før, har Skolem ledet an på et nytt forskningsfelt. Det har grodd i hans spor, — og det er det beste ettermæle en matematiker kan få.

TVÅ ASTRONAUTISKA PROBLEM

NILS MUSTELIN

1. Inledning. Ett centralt problem inom den teoretiska astronautiken är att beräkna hur en viss rymdmission, t. ex. uppsändandet av en satellit i en given bana kring jorden, skall genomföras så ekonomiskt som möjligt, d. v. s. med minsta möjliga bränsleförbrukning. I stället för att direkt ange bränslebehovet använder man härvid ofta den s. k. *karakteristiska hastigheten* eller *behovshastigheten*, v_b , som för en given rymdmission är den maximala hastighet v som rymdfarkosten utgående från vila skulle kunna uppnå i lufttom, gravitationsfri rymd genom att förbruka den för rymdmissionen behövliga bränslemängden. Sambandet mellan denna hastighet och bränslemängden kan erhållas ur den bekanta raketformeln

$$\frac{m}{m_0} = e^{v/c},$$

där m/m_0 är förhållandet mellan rymdskeppets massa före och efter den aktuella manövern, och c är förbränningsgasernas utblåsningshastighet.

Med den typ av raketmotorer som nu används kommer en rymdfarkosts bankurva i huvudsak att bestå av fria himmelsmekaniska banor (raketmotorn avstängd) sammanlänkade medelst relativt korta avsnitt där motorn satts i gång för att överföra farkosten från en bana till en annan. Dessa avsnitt kan med god approximation betraktas som punkter i vilka rymdfarkosten genom momentana hastighetsändringar Δv_i abrupt ändrar sin bana (se fig. 1). Behovshastigheten blir härvid summan av dessa hastighetsimpulsers belopp:

$$(1) \quad v_b = \sum_i |\Delta v_i| = \sum_i \Delta v_i.$$

Vi skall här diskutera anbringandet av en rymdfarkost i en cirkelformig satellitbana kring en planet under två helt olika förutsättningar. I det ena fallet befinner sig rymdfarkosten ursprungligen på planetens yta, i det andra fallet närmar den sig planeten från mycket stort avstånd med en viss given asymptotisk hastighet. I bägge dessa fall skall vi diskutera det mest bränsleekonomiska förfarandet (d. v. s. det som gör

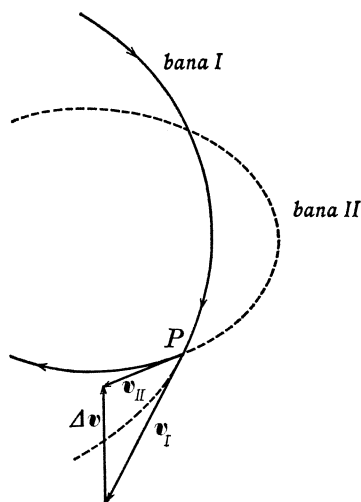


Fig. 1. Överföring av en rymdfarkost från en himmelsmekanisk bana (I) till en annan (II) genom en hastighetsimpuls Δv i skärningspunkten P . Hastigheten i punkten P är v_I i bana I och v_{II} i bana II, och Δv är vektorskillnaden $\Delta v = v_{II} - v_I$.

behovshastigheten enligt definitionen (1) så liten som möjligt), och speciellt undersöka hur behovshastigheten beror av den önskade cirkelbanans radie.

2. Banhastigheten. Då en partikel rör sig i det sfäriskt symmetriska gravitationsfältet kring en himlakropp, är dess bana i ett icke-roterande koordinatsystem med origo i himlakroppens medelpunkt som bekant en konisk sektion med en brännpunkt i origo. Om den koniska sektionens halva huvudaxel är a , gäller för hastigheten v på avståndet ϱ från origo det välkända uttrycket

$$(2) \quad v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{\varrho} \pm \frac{1}{a} \right)},$$

där plustecknet gäller för hyperbelbanor och minustecknet för ellipsbanor; μ är en konstant som anger gravitationsfältets styrka.

Vi inför dimensionslösa storheter på följande sätt. Alla avstånd uttrycks med planetens radie R som enhet, varvid vi betecknar $\varrho/R = v$, och $a/R = k$. Alla hastigheter v uttrycks med cirkelhastigheten v_0 vid planetens yta som enhet. Denna cirkelhastighet fås ur (2) genom att man sätter $\varrho = a = R$ (och väljer minustecknet):

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R}}.$$

De dimensionslösa hastigheterna betecknas $v/v_0 = q$.

På detta sätt elimineras μ ur uttrycket för banhastigheten, som nu kan skrivas

$$(3) \quad q = \sqrt{\frac{2}{v} \pm \frac{1}{k}}.$$

3. Satellitbana utgående från planetarytan. För att placera en rymd-farkost i en cirkelbana kring en planet utgående från planetens yta behöver man åtminstone två hastighetsimpulser: en vid planetarytan och en vid ingången i cirkelbanan på den önskade höjden. Man kan visa att behovshastigheten härvid blir minst, om man som övergångsbana väljer en ellips, som i sitt perigeum tangerar planetarytan och i sitt apogeum cirkelbanan (se fig. 2).

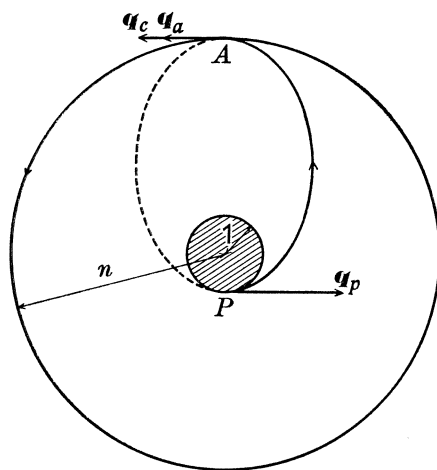


Fig. 2. Den optimala övergången från ytan av en planet till en cirkelbana med radien n . Hastigheterna i ellipsens perigeum P och apogeum A har betecknats q_p respektive q_a , och hastigheten i cirkelbanan q_c , samtliga i dimensionslösa enheter.

Med beteckningarna i fig. 2 är hastighetsimpulserna i punkterna P och A

$$\begin{cases} \Delta q_P = q_p, \\ \Delta q_A = q_c - q_a, \end{cases}$$

så att behovshastigheten (i dimensionslösa enheter betecknad $v_b/v_0 = Q$) blir

$$Q = \Delta q_P + \Delta q_A = q_p + q_c - q_a.$$

Om cirkelbanans radie är n , fås de tre hastigheterna ur (3) (med minus-tecken), enligt följande schema:

$$q_p: \quad \nu = 1, \quad k = \frac{1}{2}(n+1),$$

$$q_c: \quad \nu = n, \quad k = n,$$

$$q_a: \quad \nu = n, \quad k = \frac{1}{2}(n+1),$$

d. v. s.

$$(4) \quad Q(n) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} + \sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}.$$

För $n=1$ fås $Q=1$ (d. v. s. $v_b=v_0$), vilket är naturligt då det i detta fall är tillräckligt att ge rymdfarkosten en enda hastighetsimpuls, vars storlek är just cirkelhastigheten vid planetytan. Då n går mot oändligheten, närmar sig $Q(n)$ asymptotiskt värdet $Q=\sqrt{2}$ (d. v. s. $v_b=\sqrt{2}\cdot v_0$), vilket är värdet på flykthastigheten vid planetytan, såsom framgår då man i (3) sätter $\nu=1$ och $k=\infty$.

För att undersöka förekomsten av extremvärden deriverar vi funktionen $Q(n)$ och sätter derivatan $=0$. Härvid erhålles tredjegradslikningen

$$n^3 - 15n^2 - 9n - 1 = 0,$$

som har tre olika stora reella rötter, varav två negativa och en positiv. Då funktionen $Q(n)$ är av fysikaliskt intresse endast för $n \geq 1$, beaktar vi här bara den positiva roten, som är $n \approx 15,58$. Det tillhörande värdet på Q befinnes vara $Q \approx 1,54$ och är alltså ett maximum, varför $Q(n)$ närmar sig det asymptotiska värdet $\sqrt{2}$ uppifrån. Någonstans mellan $n=1$ och

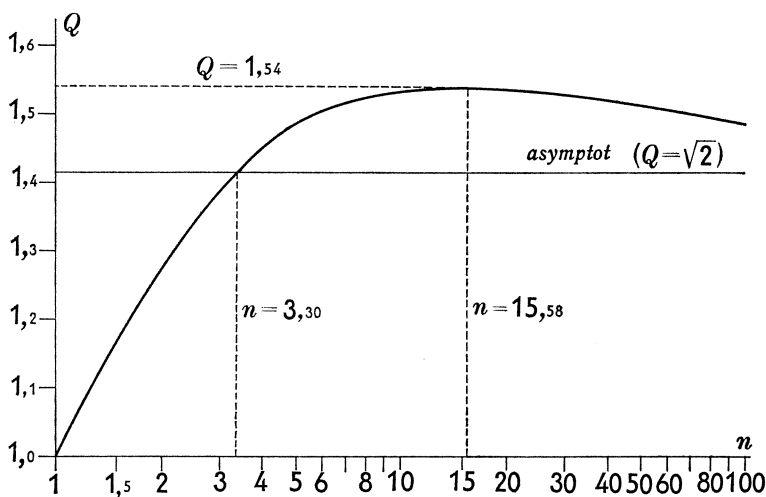


Fig. 3. Grafisk framställning av funktionen $Q(n)$, definierad av (4). Q -skalan är linjär, n -skalan logaritmisk.

$n \approx 15,58$ måste $Q(n)$ antaga sitt asymptotiska värde; detta inträffar vid $n \approx 3,30$ (se fig. 3).

Vi kan konstatera att det är lättare att skicka en rymdfarkost ut till oändligheten från ytan av en planet än att placera den i en cirkelformig satellitbana vars radie är större än 3,30 gånger planetens radie. Då satellitbanans radie är 15,58 gånger planetens radie är behovshastigheten störst, och överstiger då med 8,6% flykthastigheten.

4. Satellitbana vid ankomst från oändligheten. Då en rymdfarkost närmar sig en planet från »oändligheten«, d. v. s. från mycket stort avstånd, blir dess bana i förhållande till planeten i allmänhet en hyperbelgren. Hastigheten i hyperbelbanan fås ur (3) (med plustecken). Speciellt gäller för den asymptotiska hastigheten — varmed förstås hastighetens gränsvärde då avståndet r går mot oändligheten — uttrycket

$$(5) \quad q_{\infty} = k^{-\frac{1}{2}}.$$

En viktig egenskap hos hyperbelbanan är perigeumavståndet h (se fig. 4), som kan skrivas

$$(6) \quad h = \sqrt{k^2 + d^2} - k,$$

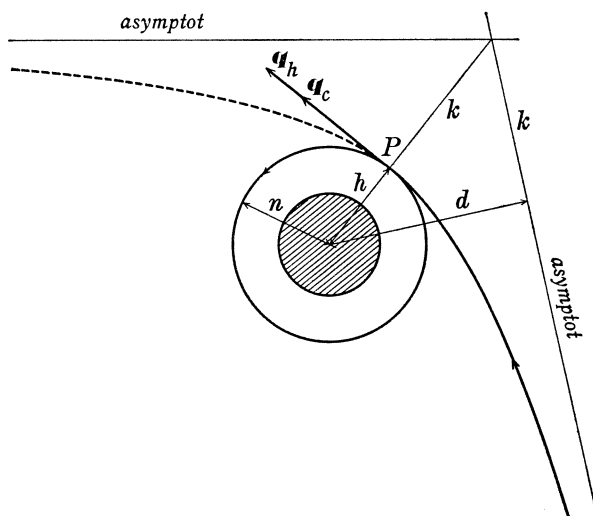


Fig. 4. Övergång från hyperbelbana till cirkelbana medelst en enimpuls-manöver. Cirkelbanan har radien n , hyperbelbanan har stötparametern d och perigeumavståndet $h=n$. Hastigheten i hyperbelns perigeum P har betecknats q_h , och hastigheten i cirkelbanan q_c .

där d är den s. k. stötparametern (det vinkelräta avståndet från origo till asymptoten), som är lika med hyperbelns halva konjugataxel.

Halva huvudaxeln (transversalaxeln) k är här, enligt (5), bestämd genom den asymptotiska hastigheten q_∞ , som vi skall betrakta som en given parameter och, med användning av (5), införa i hastighetsuttrycket (3):

$$(7) \quad q = \sqrt{\frac{2}{r} + q_\infty^2}.$$

Stötparametern d kan däremot lätt justeras till önskat värde genom att rymdfarkosten på stort avstånd från destinationsplanet ges en lateral hastighetsimpuls, som kan vara praktiskt taget hur liten som helst om den bara göres i tillräckligt god tid. Sålunda kan man, enligt (6), fritt välja vilket rimligt värde som helst på perigeumavståndet h , från noll uppåt, utan att detta märkbart påverkar vare sig behovshastigheten eller den asymptotiska hastigheten.

Det förfarande som ligger närmast till hands, då man vill placera det ankommande rymdskeppet i en cirkelbana med radien n , är att välja $h=n$, så att hyperbeln och cirkeln tangerar varandra i punkten P (se fig. 4), där en hastighetsimpuls reducerar hastigheten i hyperbelns perigeum till den lokala cirkelhastigheten. För denna *enimpuls-manöver* är behovshastigheten

$$Q_1 = \Delta q_P = q_h - q_c,$$

d. v. s. enligt (7) och (3):

$$Q_1(n) = \sqrt{\frac{2}{n} + q_\infty^2} - \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Vi skall också betrakta ett annat förfarande, nämligen en *tvåimpuls-manöver*, där övergången från hyperbeln till cirkeln sker via en ellips, som i perigeum tangerar hyperbeln i dess perigeum och i apogeum tangerar cirkelbanan (se fig. 5). Av skäl som senare kommer att framgå lägges nu hyperbelns perigeum så lågt som möjligt, d. v. s. vi väljer $h=1$.

För de två hastighetsimpulserna gäller nu, med beteckningarna i fig. 5:

$$\begin{cases} \Delta q_P = q_h - q_p, \\ \Delta q_A = q_c - q_a, \end{cases}$$

och behovshastigheten blir

$$Q_2 = \Delta q_P + \Delta q_A = q_h - q_p + q_c - q_a,$$

d. v. s. enligt (7) och (4):

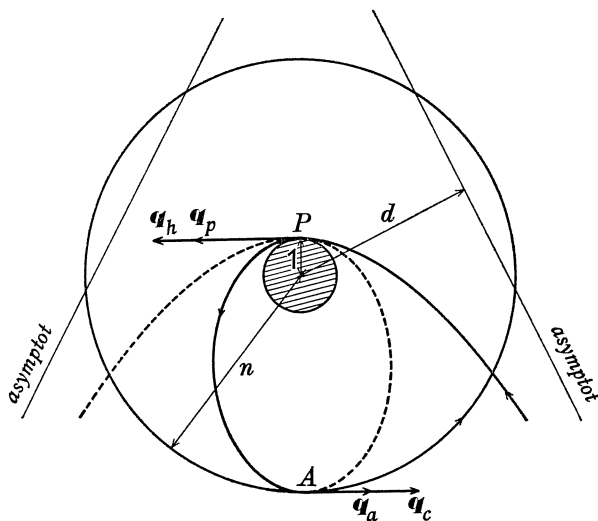


Fig. 5. Övergång från hyperbelbana till cirkelbana medelst en tvåimpuls-manöver. Cirkelbanans radie är n , hyperbelbanans perigeumavstånd är $h=1$. Hastigheten i hyperbelns perigeum P är q_h , hastigheterna i övergångselliptions perigeum P och apogeum A är q_p och q_a , hastigheten i cirkelbanan är q_c .

$$Q_2(n) = \sqrt{2+q_\infty^2} - \sqrt{\frac{2n}{n+1}} + \sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}$$

eller

$$Q_2(n) = \sqrt{2+q_\infty^2} - \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Av fysikaliska skäl är funktionerna $Q_1(n)$ och $Q_2(n)$ definierade endast i området $n \geq 1$.

Genom att derivera $Q_1(n)$ finner man att denna funktion, för $q_\infty > \sqrt{2}$, icke har något extremum, utan stiger monotont från sitt begynnelsevärde vid $n=1$,

$$(8) \quad Q_1(1) = \sqrt{2+q_\infty^2} - 1$$

mot sitt asymptotiska värde

$$Q_1(\infty) = q_\infty.$$

För $q_\infty \leq \sqrt{2}$ har $Q_1(n)$ däremot ett minimum för $n=2/q_\infty^2$, av storleken

$$Q_1\left(\frac{2}{q_\infty^2}\right) = \frac{q_\infty}{\sqrt{2}}.$$

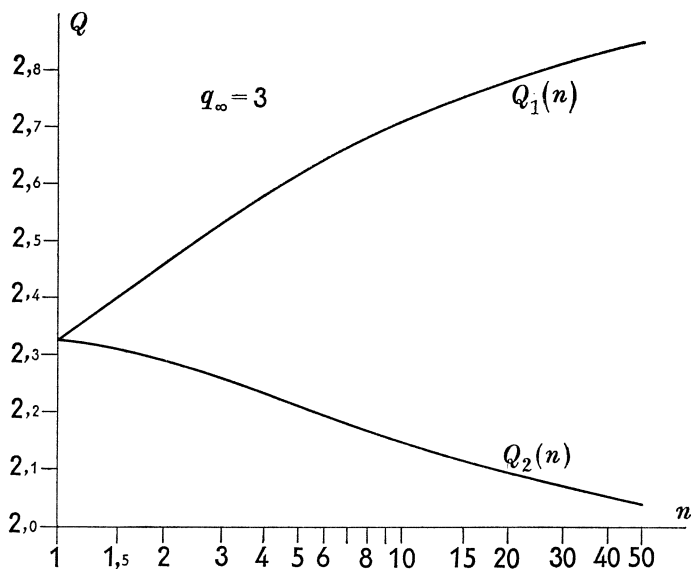


Fig. 6. Grafisk framställning av funktionerna $Q_1(n)$ och $Q_2(n)$ för $q_\infty = 3$. Q -skalan är lineär, n -skalan logaritmisk.

Funktionen $Q_2(n)$ har en försvinnande derivata för $n=1$, och avtar alltid monotont från sitt begynnelsevärde $Q_2(1)$, som är identiskt med värdet $Q_1(1)$ i (8), mot sitt asymptotiska värde

$$Q_2(\infty) = \sqrt{2 + q_\infty^2} - \sqrt{2},$$

som är mindre än q_∞ .

Att Q_1 och Q_2 sammanfaller för $n=1$ är naturligt, ty där degenererar tvåimpuls-manövern av fysikaliska skäl till en enimpuls-manöver, och distinktionen mellan de två slagen av övergång i cirkelbana försvinner. För $q_\infty \geq \sqrt{2}$ har de två funktionerna inget annat gemensamt värde, utan Q_2 är alltid mindre än Q_1 (se fig. 6). För $q_\infty < \sqrt{2}$ har de två funktionerna däremot ytterligare ett gemensamt värde. Detta inträffar överraskande just där Q_1 har sitt minimum, så att man har $Q_2 > Q_1$ för $1 < n < 2/q_\infty^2$, men $Q_2 < Q_1$ för $n > 2/q_\infty^2$ (se fig. 7).

Om vi definierar den optimala behovshastigheten $Q(n)$ sålunda, att funktionen $Q(n)$ för varje n (≥ 1) antar det mindre av värdena $Q_1(n)$ och $Q_2(n)$, erhålles således för varje värde på parametern q_∞ en monotont avtagande funktion. Det är därför alltid mest ekonomiskt att placera ett ankommande rymdskepp i en så hög cirkelbana som möjligt.

Man kunde också beakta möjligheten av att utföra en tvåimpuls-manöver med hyperbelns perigeumhöjd h någonstans mellan $h=1$ och

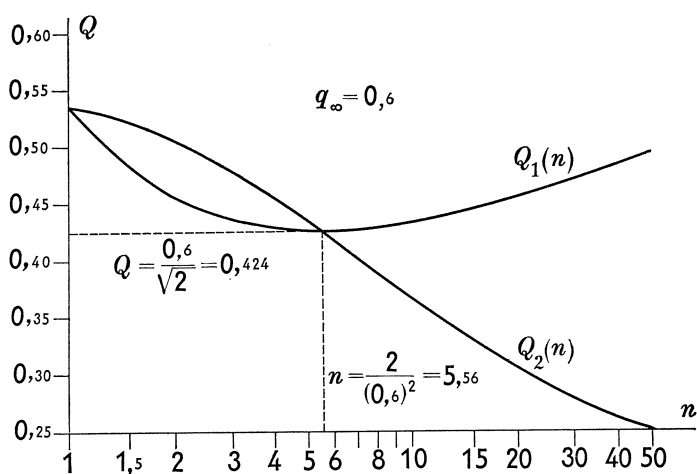


Fig. 7. Grafisk framställning av funktionerna $Q_1(n)$ och $Q_2(n)$ för $q_\infty = 0,6$. Q -skalan är lineär, n -skalan logaritmisk.

$h = n$. De sålunda erhållna funktionerna kommer dock alltid att ligga mellan $Q_1(n)$ och $Q_2(n)$, och kan därför aldrig ge optimal behovshastighet.

Vi kan ytterligare notera att det värde på n (> 1), där funktionerna $Q_1(n)$ och $Q_2(n)$ i fallet $q_\infty < \sqrt{2}$ antar samma värde, tillika ger det avstånd från origo där flykthastigheten har värdet q_∞ , såsom framgår då man i (3) sätter $v = 2/q_\infty^2$ och $k = \infty$. Sålunda kan villkoret för vilken av de två manövertyperna som är den fördelaktigaste formuleras på följande sätt: Om den lokala flykthastigheten på det avstånd där man vill placera rymdfarkosten i cirkelbana är större än rymdfarkostens asymptotiska ankomsthastighet, är enimpuls-manövern att föredraga, men om den lokala flykthastigheten är mindre än den asymptotiska hastigheten, är tvåimpuls-manövern den mest ekonomiska.

I denna formulering täcker villkoret alla värden på q_∞ , ty $q_\infty > \sqrt{2}$ innebär att flykthastigheten redan vid planetytan och därför a fortiori på varje avstånd är mindre än den asymptotiska hastigheten, medan för $q_\infty < \sqrt{2}$ den lokala flykthastigheten är större än q_∞ ända ut till avståndet $n = 2/q_\infty^2$, men därefter mindre.

De i denna artikel diskuterade problemen har tidigare behandlats bl. a. av D. F. Lawden. En översikt med referenser finns i symposium-rapporten »Space Trajectories«, Academic Press 1960, speciellt sid. 201–212.

EFFEKTIVITET HOS ETT SAMMANSATT ELEKTRONISKT SYSTEM

GUNNAR BLOM

Avsikten med denna artikel är att visa hur ett relativt komplicerat praktiskt problem av en i elektronikåldern aktuell typ kan lösas med elementära hjälpmedel hämtade från teorien för födelse- och dödsprocesser. För att kunna läsa artikeln behöver läsaren inte på förhand veta något om sådana processer utan endast ha kännedom om de grundläggande begreppen inom sannolikhetskalkylen. Det kan nämnas att problemet kan lösas direkt med hjälp av vissa mer avancerade satser för födelse- och dödsprocesser. Dessa satser ligger emellertid rätt djupt, och vi skall reda oss utan dem.

Artikeln disponeras i enlighet med det traditionella mönstret vid behandling av ett praktiskt problem med hjälp av en teori. I avd. 1 presenteras problemet, i avd. 2 och 3 uppställs en teoretisk modell, i avd. 4 analyseras modellen och i avd. 5 tillämpas resultatet av analysen på det uppställda problemet.

1. Praktiskt problem. Problemet är allmännare än vad som anges i titeln på artikeln, men vi skall hålla oss till den problemtyp som däri antydes. Vi kan t. ex. tänka oss, att det på en plats uppställs en automatisk luftbevakningsanordning, som innehåller diverse elektroniska instrument. Vi kallar en sådan anordning för en *enhet*. Enheten skall vara i tjänst natt och dag, men eftersom den innehåller en mängd elektroniska komponenter, händer det ibland att den går sönder. I så fall letas felet upp och avhjälpes, vilket tager sin tid. Sedan kan det så småningom bli ett nytt fel, etc. Situationen illustreras i fig. 1, där hel-dragen linje betecknar enhetens tillstånd vid olika tidpunkter. I figuren

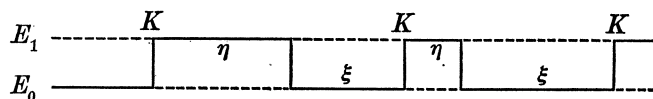


Fig. 1. System med en enhet. E_0 = enhet går; E_1 = enhet står.

har några beteckningar införts som kommer att användas i fortsättningen:

ξ = gångtid

η = reparationstid

K = katastroftidpunkt (= tidpunkt då enheten blir obrukbar).

Storheten ξ anger alltså tiden från det att enheten sättes igång efter en reparation till det att ett nytt fel inträffar, och η betecknar tiden för felsökning och reparation av en enhet. Dessa storheter är stokastiska variabler som antages vara exponentialfördelade, dvs. för $t > 0$ gäller att

$$(1.1) \quad P(\xi > t) = e^{-\lambda t}$$

$$(1.2) \quad P(\eta > t) = e^{-\mu t},$$

där λ och μ är konstanter. (Vi skall senare se att, vad λ beträffar, detta antagande är allmännare än vad det i förstone kan förefalla.) Av de angivna uttrycken följer att frekvensfunktionerna för ξ och η är $\lambda e^{-\lambda t}$ resp. $\mu e^{-\mu t}$ och alltså att medelvärdena för de båda variablerna är

$$(1.3) \quad E[\xi] = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$(1.4) \quad E[\eta] = \mu \int_0^{\infty} t e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu}.$$

Vi skall antaga att alla gångtider och reparationstider är oberoende av varandra.

Ju större λ är, desto oftare blir enheten felaktig, och ju mindre μ är, desto längre tid tar det att reparera den. Om λ är stor eller μ liten, är följaktligen enheten ineffektiv, och ingen militär myndighet skulle då förorda att den användes separat. Effektiviteten kan emellertid höjas därigenom att man kopplar samman flera enheter till ett *system*. Det är om sådana system som denna artikel handlar.

Systemet antages vara så anordnat, att det fungerar om minst en enhet är hel, dvs. det är obrukbart endast om alla enheter är felaktiga samtidigt. Vi skall vidare förutsätta att brukbara enheter ständigt är igång och — oberoende av varandra — utsatta för risk att fel inträffar. (Observera att detta är något helt annat än att förutsätta, att en enhet är igång i taget, medan de andra står i reserv, färdiga att inkopplas vid behov.) Vi skall slutligen även förutsätta att det finns en enda reparatör tillgänglig (eller eventuellt en grupp av samarbetande reparatörer). Detta medför att,

om fel uppstår på en enhet, medan en annan är föremål för felsökning och reparation, den förra får vänta tills den senare är igång igen.

Följande beteckningar införes förutom de tidigare angivna:

$$n = \text{antal enheter i systemet}$$

$$E_i: i \text{ enheter står } (i = 0, 1, \dots, n).$$

(Beteckningarna E_0 och E_1 i fig. 1 får nu sin förklaring.) Vi kan med denna terminologi säga, att systemet i ett visst ögonblick befinner sig i något av *tillstånden* $E_0, E_1, \dots, E_n$. En katastroftidpunkt K inträffar när alla enheter blir obrukbara, med andra ord när tillståndet E_n inträffar. Förloppet illustreras i fig. 2 för specialfallet $n = 2$.

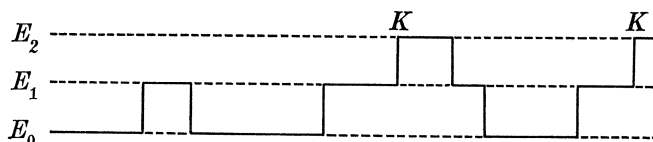


Fig. 2. System med två enheter.

Hur skall man mäta effektiviteten hos ett system? Det kan ske på många olika sätt. Som effektivitetsmått väljes i denna artikel medelavståndet mellan två på varandra följande katastroftidpunkter. Ett system är effektivt om detta avstånd är stort. Det angivna måttet är ur praktisk synvinkel lämpligt, därför att det har en enkel praktisk innebörd. Om nämligen medelavståndet är känt för olika värden på n , kan man få en uppfattning om hur många enheter som bör ingå i systemet, för att det skall bli tillräckligt pålitligt. Vi har alltså följande

PROBLEM. *Bestäm medelavståndet mellan två konsekutiva katastroftidpunkter.*

2. Ett lemma. Innan vi konstruerar modellen, skall vi undersöka innebörden av att gångtid och reparationstid antages vara exponentialfördelade. För detta ändamål behöver vi ett lemma.

Låt H vara en händelse som inträffar en enda gång i intervallet $0 < t < \infty$, säg vid tidpunkten τ . Vi skall antaga att τ är en stokastisk variabel och skall jämföra två olika alternativ rörande dess fördelning.

ALTERNATIV 1. *Den stokastiska variabeln τ är exponentialfördelad.*

Det innebär att för $t > 0$

$$(2.1) \quad P(\tau > t) = e^{-\alpha t},$$

där α är en konstant.

ALTERNATIV 2. Händelsen H inträffar slumpmässigt.

Därmed menar vi noggrant uttryckt att

$$(2.2) \quad P(H \text{ i } (t, t + \Delta t) \mid H \text{ ej i } (0, t)) = \alpha \Delta t + o(\Delta t),$$

dvs.: Den betingade sannolikheten att H inträffar i intervallet $(t, t + \Delta t)$, om det är bekant att H inte inträffat tidigare, är, bortsett från en kvantitet $o(\Delta t)$ som går mot noll snabbare än Δt , proportionell mot intervallets längd. Proportionalitetsfaktorn α kallas sannolikhetsintensiteten för H .

LEMMA. (2.1) $\Leftrightarrow$ (2.2).

Lemmat utsäger med andra ord, att (2.1) inträffar om och endast om (2.2) inträffar, dvs. att alternativen är *identiska*.

BEVIS. Låt A och B betyda händelserna » H inträffar ej i $(0, t)$ « resp. » H inträffar ej i $(t, t + \Delta t)$ «. Enligt definitionen på betingad sannolikhet gäller, om $P(A) > 0$, att

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Händelsen A är emellertid liktydig med att H inträffar senare än t , dvs. att $\tau > t$. Vidare är händelsen $A \cap B$ liktydig med att $\tau > t + \Delta t$. Vi har alltså

$$P(A) = P(\tau > t); \quad P(A \cap B) = P(\tau > t + \Delta t)$$

och följaktligen

$$(2.3) \quad P(B \mid A) = \frac{P(\tau > t + \Delta t)}{P(\tau > t)}.$$

Vi skall nu visa att (2.1) $\Rightarrow$ (2.2). Insättes (2.1) i (2.3), blir högra medlem efter reduktion lika med $e^{-\alpha \Delta t} = 1 - \alpha \Delta t + o(\Delta t)$. Vi får alltså

$$(2.4) \quad P(B \mid A) = 1 - \alpha \Delta t + o(\Delta t).$$

Men (2.4) $\Leftrightarrow$ (2.2), ty om man betraktar den komplementära händelsen till den som anges i (2.2), så får man just (2.4). Alltså gäller (2.2).

Omvändningen, dvs. (2.2) $\Rightarrow$ (2.1), följer också av (2.3). Om

$$\varphi(t) = P(\tau > t),$$

kan (2.3) skrivas

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t)P(B \mid A).$$

Men, som tidigare påpekats, gäller att (2.2) $\Rightarrow$ (2.4), dvs.

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t)[1 - \alpha \Delta t + o(\Delta t)].$$

Om $\Delta t \rightarrow 0$ får man i limes

$$\varphi'(t) = -\alpha \varphi(t).$$

Eftersom $\varphi(0)=1$, har denna differentialekvation lösningen

$$\varphi(t) = e^{-\alpha t},$$

dvs. (2.1) håller. Därmed är lemmat bevisat. (Se också Råde [3], sid. 108.)

Vi skall nu tillämpa lemmat på vårt problem. Betrakta först gångtiden ξ för en enhet. Låt $t=0$ vara det ögonblick då enheten just sättes igång efter en reparation och H händelsen »enheten blir obrukbar». Enligt (1.1) är ξ exponentialfördelad, så att (2.1) är satisfierad med $\tau=\xi$ och $\alpha=\lambda$. Av lemmat följer då, att även (2.2) håller med samma värden insatta, med andra ord att

$$(2.5) \quad P(\text{enhet obrukbar vid } t+\Delta t \mid \text{enhet hel vid } t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Vi har alltså bevisat att antagandet (1.1) om exponentialfördelning innebär, att fel på en enhet uppstår med sannolikhetsintensiteten λ . Villkoret (1.1) är alltså mindre speciellt än vad det vid första anblicken kan tyckas.

Reparationstiden kan diskuteras analogt, och man finner att villkoret (1.2) medför att

$$(2.6) \quad P(\text{enhet hel vid } t+\Delta t \mid \text{enhet lagas vid } t) = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Till skillnad från vad som sades beträffande gångtiden är antagandet om exponentialfördelad reparationstid högst speciellt, och det har gjorts enbart av matematiska skäl. (Ofta har reparationstiden en mindre sned fördelning.) Som vi skall se i fortsättningen har nämligen (2.5) och (2.6) den angenäma konsekvensen att analysen blir relativt enkel.

3. Modell. Efter de i föregående avdelning gjorda förberedelserna skall vi nu konstruera en modell för vårt problem.

Antag att systemet vid tidpunkten t befinner sig i tillståndet E_i , dvs. att i enheter är trasiga (varav en är under reparation). I intervallet $(t, t+\Delta t)$ kan då olika ting hända:

1° Fel inträffar på ytterligare en enhet.

Av (2.5) framgår att chansen för fel på en bestämd enhet är $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Sannolikheten att fel inträffar på någon av de $n-i$ gående enheterna är alltså enligt sannolikhetslagarna

$$1 - [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)]^{n-i} = (n-i)\lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Vi måste här förutsätta att $0 \leq i \leq n-1$, ty om $i=n$ är ju redan alla enheter sönder vid tidpunkten t .

2° Pågående reparation avslutas.

Av (2.6) framgår att chansen att den vid t pågående reparationen avslutas är $\mu\Delta t + o(\Delta t)$. Vi måste i detta fall förutsätta att $1 \leq i \leq n$, ty om $i = 0$ är ju alla enheter igång vid t .

3° Ingen förändring inträffar.

Sannolikheten härför är lika med sannolikheten att varken den i 1° eller den i 2° nämnda händelsen inträffar, dvs. den är lika med

$$[1 - (n-i)\lambda\Delta t + o(\Delta t)] \cdot [1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)] = 1 - (n-i)\lambda\Delta t - \mu\Delta t + o(\Delta t).$$

Vi måste för fullständighets skull omnämna ytterligare en möjlighet, nämligen att flera enheter förändras i $(t, t + \Delta t)$ (t. ex. att flera enheter blir felaktiga). Chansen för att denna händelse skall inträffa kan skrivas $o(\Delta t)$. Detta är inte svårt att bevisa. Man finner t. ex. att sannolikheten att fel skall uppstå på var och en av två bestämda enheter är lika med $[\lambda\Delta t + o(\Delta t)]^2 = o(\Delta t)$, och på likartat sätt bevisas det allmänna påståendet. (Väsentligt för att påståendet skall vara korrekt är naturligtvis det inledningsvis gjorda antagandet om oberoende enheter.)

Av ovan förda resonemang följer, att systemets växling mellan olika tillstånd kan beskrivas med hjälp av en s. k. *födelsedödsprocess* med ändligt antal tillstånd. För en sådan process gäller följande postulat (se vidare [1], [2]):

POSTULAT. Systemet kan befinna sig i ettdera av tillstånden E_i ($i = 0, 1, \dots, n$). Om systemet vid tidpunkten t är i E_i , är sannolikheten att det i intervallet $(t, t + \Delta t)$ övergår till E_{i+1} lika med $a_i\Delta t + o(\Delta t)$ ($a_i > 0$; $0 \leq i \leq n-1$), och sannolikheten att det övergår till E_{i-1} lika med $b_i\Delta t + o(\Delta t)$ ($b_i > 0$; $1 \leq i \leq n$). Sannolikheten för övergång till andra tillstånd än E_{i+1} och E_{i-1} är $o(\Delta t)$.

(Namnet på processen beror på dess biologiska användningar. Om man vid analys av biologiska populationer låter E_i avse antalet individer, betyder övergångarna $E_i \rightarrow E_{i+1}$ och $E_i \rightarrow E_{i-1}$ att en individ födes resp. dör.)

I vårt problem har vi tydligen att sätta

$$(3.1) \quad \begin{cases} a_i = (n-i)\lambda & (0 \leq i \leq n-1) \\ b_i = \mu & (1 \leq i \leq n). \end{cases}$$

Vi har därmed visat att vi såsom modell för det elektroniska systemets övergångar mellan olika tillstånd kan använda en födelsedödsprocess.

4. Analys av modellen. Vi skall formulera ett allmänt problem för en födelsedödsprocess som såsom specialfall innehåller det i slutet av avd. 1 uppställda problemet.

PROBLEM. *Bestäm medelvärden för återgångstider och förstapassagetider för en födelsedödsprocess.*

För att förklara terminologien sätter vi

$\zeta_{i,j}$ = avståndet från en tidpunkt då E_i börjar till närmast följande tidpunkt då E_j börjar ($i, j = 0, 1, \dots, n$).

Om $i=j$ kallar vi detta avstånd för *återgångstid* och om $i \neq j$ för *förstapassagetid*. Vi söker alltså medelvärdet för den stokastiska variabeln $\zeta_{i,j}$. Vi inför för detta medelvärde beteckningen $m_{i,j}$.

Att det nya problemet innehåller problemet i avd. 1 som specialfall inser man lätt. Medelavståndet mellan två katastroftidpunkter är ju detsamma som medelavståndet från en tidpunkt då E_n börjar till nästa gång då E_n börjar, dvs. med den nya terminologien lika med medelåtergångstiden för E_n , alltså $m_{n,n}$. När vi har beräknat det allmänna uttrycket för $m_{i,j}$ har vi alltså bara att sätta $i=j=n$ samt insätta de värden (3.1) på a_i och b_i som är aktuella i det speciella problemet.

Det allmänna problemet löser man i tre steg, nedan betecknade (a), (b) och (c). Innan vi tager itu härmed, skall vi endast konstatera att $m_{i,j}$ är en funktion av de givna parametrarna $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ och $b_1, b_2, \dots, b_n$. Det visar sig bekvämt att utöka dessa parametersviter med

$$a_n = 0; \quad b_0 = 0;$$

därmed är a_i och b_i definierade för alla $i=0, 1, \dots, n$.

(a). *Varaktigheten av E_i .*

Sätt

$$\tau_i = \text{varaktigheten av } E_i,$$

dvs. τ_i är tidsavståndet från en tidpunkt då E_i börjar till dess att E_i slutar.

Vi skall bevisa att τ_i är exponentialfördelad med medelvärdet

$$(4.1) \quad E[\tau_i] = \frac{1}{a_i + b_i}.$$

Detta påstående följer av lemmat i avd. 2. Enligt postulaten för en födelsedödsprocess (se avd. 3) slutar E_i med att övergå till antingen E_{i+1} eller E_{i-1} . Sannolikheten att detta skall ske i $(t, t + \Delta t)$ är $(a_i + b_i)\Delta t + o(\Delta t)$. (På grund av definitionen på a_n och b_0 inses att detta håller för

alla $i = 0, 1, \dots, n$.) Låter vi i lemmat $t = 0$ vara tidpunkten » E_i börjar» och händelsen H vara » E_i slutar», ser vi av det just anförda att (2.2) är satisfierad med $\alpha = a_i + b_i$. Av lemmat följer att då även (2.1) håller med $\tau = \tau_i$ och samma värde på α , dvs.

$$P(\tau_i > t) = e^{-(a_i+b_i)t}.$$

Härav följer genast (4.1). (Jämför härledningen av (1.3) och (1.4).)

(b). *En differensekvation för $m_{i,j}$.*

Enligt definitionen är $\zeta_{i,j}$ avståndet från » E_i börjar» till » E_j börjar». Detta avstånd delas i två delar av händelsen » E_i slutar» (där den andra delen eventuellt kan vara noll). Den första delen har enligt (a) längden τ_i . Den andra delen beter sig olika, allt eftersom E_i övergår till E_{i+1} eller E_{i-1} . I förra fallet är längden av denna del uppenbarligen $\zeta_{i+1,j}$ och i senare fallet $\zeta_{i-1,j}$. Vi har därmed konstaterat att

$$(4.2) \quad \zeta_{i,j} = \tau_i + \begin{cases} \zeta_{i+1,j} & \text{om } E_i \rightarrow E_{i+1} \\ \zeta_{i-1,j} & \text{om } E_i \rightarrow E_{i-1}. \end{cases}$$

(Övergångarna från E_i till andra tillstånd än dessa inträffar med sannolikheten $o(\Delta t)$ och kan försummas.) För att (4.2) skall vara uppfylld för alla i och j är det dock nödvändigt att som konvention införa att $\zeta_{i,i}$ sättes lika med noll i *högra membrum* (för alla i); det inses nämligen att om $j = i + 1$ och E_i övergår till E_{i+1} , så är man redan framme vid tidpunkten » E_j börjar», och alltså faller den andra delen bort; samma sak inträffar om $j = i - 1$ och E_i övergår till E_{i-1} .

Man inser vidare utan större besvär att de betingade sannolikheterna för övergång till E_{i+1} och E_{i-1} , då övergång sker till ett av dessa båda tillstånd, är lika med $a_i/(a_i + b_i)$ resp. $b_i/(a_i + b_i)$.

Låt oss nu antaga att $m_{i,j}$ existerar. Genom att taga medelvärdet av (4.2) under utnyttjande av (4.1) och de just anförda betingade sannolikheterna, får man efter utbrytning av en faktor $1/(a_i + b_i)$ i högra membrum

$$(4.3) \quad m_{i,j} = \frac{1}{a_i + b_i} (1 + a_i m_{i+1,j} + b_i m_{i-1,j})$$

$$(i, j = 0, 1, \dots, n; a_n = b_0 = 0; m_{j,j} = 0 \text{ i högra membrum}).$$

Detta är en linjär differensekvation med i som argument och variabla koefficienter.

(c). *Analys av differensekvationen.*

Vid diskussionen av (4.3) stryker vi andra index j i $m_{i,j}$ samt behandlar två fall var för sig.

(c 1). Medelförstapassagetid ($i \neq j$).

Differensekvationen kan då skrivas

$$a_i(m_i - m_{i+1}) - b_i(m_{i-1} - m_i) = 1$$

$$(i = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n; a_n = b_0 = 0; m_j = 0).$$

Sätt

$$(4.4) \quad u_i = \begin{cases} m_i - m_{i+1} & \text{om } i = 0, 1, \dots, j-2 \\ m_i & \text{om } i = j-1, j+1 \\ m_i - m_{i-1} & \text{om } i = j+2, \dots, n. \end{cases}$$

Då blir differensekvationen

$$(4.5a) \quad a_i u_i - b_i u_{i-1} = 1 \quad \text{om } i < j$$

$$(4.5b) \quad b_i u_i - a_i u_{i+1} = 1 \quad \text{om } i > j.$$

Låt oss börja med ekvationen (4.5a). Den ger successivt (observera att $b_0 = 0$)

$$u_0 = \frac{1}{a_0}; \quad u_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{b_1}{a_0 a_1}; \dots$$

och allmänt

$$u_\nu = \frac{1}{a_\nu} + \frac{b_\nu}{a_{\nu-1} a_\nu} + \dots + \frac{b_1 b_2 \dots b_\nu}{a_0 a_1 \dots a_\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, j-1).$$

Om vi sätter

$$(4.6) \quad \varrho_0 = 1; \quad \varrho_\nu = \frac{a_0 a_1 \dots a_{\nu-1}}{b_1 b_2 \dots b_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

kan detta efter omformning skrivas kortare som

$$u_\nu = \frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \dots + \varrho_\nu}{a_\nu \varrho_\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, j-1).$$

Addition av u -värdena i (4.4) från i till $j-1$ ger $m_i = \sum_{\nu=i}^{j-1} u_\nu$, så att vi får lösningen

$$m_i = \sum_{\nu=i}^{j-1} \frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \dots + \varrho_\nu}{a_\nu \varrho_\nu} \quad (i < j).$$

Alternativet $i > j$ behandlas analogt. Ekvationen (4.5b) ger successivt

$$u_n = \frac{1}{b_n}; \quad u_{n-1} = \frac{1}{b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} b_n}; \dots$$

och allmänt

$$u_\nu = \frac{\varrho_\nu + \varrho_{\nu+1} + \dots + \varrho_n}{b_\nu \varrho_\nu} \quad (\nu = j+1, \dots, n),$$

där ϱ_v som förut definieras av (4.6). Addition av u -värdena i (4.4) från $j+1$ till i ger $m_i = \sum_{v=j+1}^i u_v$, och följaktligen blir

$$m_i = \sum_{v=j+1}^i \frac{\varrho_v + \varrho_{v+1} + \dots + \varrho_n}{b_v \varrho_v} \quad (i > j).$$

(c2). Medelåtergångstid ($i=j$).

Sätter man $i=j$ i den ursprungliga ekvationen (4.3) och i högra medlemmen utnyttjar de just härledda värdena på m_i i specialfallen $i=j-1$ och $i=j+1$ samt (4.6), får man

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{1}{a_j + b_j} (1 + b_j m_{j-1} + a_j m_{j+1}) \\ &= \frac{1}{a_j + b_j} \left(1 + b_j \cdot \frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \dots + \varrho_{j-1}}{a_{j-1} \varrho_{j-1}} + a_j \cdot \frac{\varrho_{j+1} + \varrho_{j+2} + \dots + \varrho_n}{b_{j+1} \varrho_{j+1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_j + b_j} \left(1 + \frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \dots + \varrho_{j-1}}{\varrho_j} + \frac{\varrho_{j+1} + \varrho_{j+2} + \dots + \varrho_n}{\varrho_j} \right) \\ &= \frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \dots + \varrho_n}{(a_j + b_j) \varrho_j}. \end{aligned}$$

Lösningen till differensekvationen (4.3) blir alltså i samlad form

$$(4.7) \quad m_{i,j} = \begin{cases} \sum_{v=i}^{j-1} \frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \dots + \varrho_v}{a_v \varrho_v} & \text{om } i < j \\ \sum_{v=j+1}^i \frac{\varrho_v + \varrho_{v+1} + \dots + \varrho_n}{b_v \varrho_v} & \text{om } i > j \\ \frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \dots + \varrho_n}{(a_j + b_j) \varrho_j} & \text{om } i = j. \end{cases}$$

Härvid är ϱ_v definierad av (4.6).

5. Praktisk tillämpning. Som redan framhållits i början av föregående avdelning, utgöres det praktiska problemet i avd. 1 av bestämning av $m_{n,n}$ för de speciella värdena (3.1) på konstanterna a_i och b_i . Sätter man in dessa värden i (4.6) och (4.7) samt inför den s. k. *betjäningstid*

$$k = \frac{\lambda}{\mu},$$

finner man

$$(5.1) \quad m_{n,n} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1 + nk + n(n-1)k^2 + \dots + n! k^n}{n! k^n}.$$

Detta uttryck anger alltså det sökta medelavståndet mellan två katastroftidpunkter för ett system med n enheter. Av (1.3) och (1.4) framgår att

$$k = \frac{1/\mu}{1/\lambda} = \frac{E[\eta]}{E[\xi]}.$$

Betjäningsfaktorn är alltså lika med kvoten mellan medelreparations-tiden och medelgångtiden. Vi ser av formen på (5.1), att man för att beräkna $m_{n,n}$ endast behöver känna dessa båda medelvärden.

Av speciellt intresse är att konstatera, hur mycket effektiviteten hos ett system ökar vid utbyggnad från en till två enheter. Vi har

$$m_{1,1} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1+k}{k}; \quad m_{2,2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1+2k+2k^2}{2k^2}$$

och alltså

$$\frac{m_{2,2}}{m_{1,1}} = 1 + \frac{1}{2k(1+k)}.$$

I praktiken är ofta k litet och kvoten alltså ungefär $1/2k$. Som man kan vänta sig blir alltså ett system med två enheter betydligt effektivare än ett bestående av endast en enhet.

Det skall till sist påpekas att de allmänna formlerna (4.7) för medelåtergångstider och medelförstapassagetider för en födelsedödsprocess har intresse även vid lösning av andra praktiska problem än det som givit upphov till denna artikel.

LITTERATUR

- [1] W. FELLER: *An introduction to probability theory and its applications*. New York 1957. Ch. 17.
- [2] E. PARZEN: *Stochastic processes*. San Fransisco 1962. Ch. 6.
- [3] L. RÅDE: *Ordnade stickprov för exponentialfördelade stokastiska variabler med tillämpning på minoritetsprincipen*. NMT 11 (1963), sid. 107–115.

BOKMELDINGER

PAUL FUNK: *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 94.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962. 16+676 S. Ganzl. DM 98.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 72.)

Disposisjon og fremstillingsform i denne boken følger stort sett de klassiske mønstre, uten større avvik i noen retning. Det er to egenskaper ved dette verket som bør fremheves: For det første gir det en meget rikholdig og vel gjennomtenkt samling eksempler og anvendelser, dels egnet til å illustrere bruken av de generelle resultater på konkrete problemer av historisk eller praktisk interesse, særlig innen elastisitetslæren, dels for å illustrere svakheter ved tidligere resonnementer (eksempel: Dirichlets prinsipp), og behovet for nyere synspunkter. For det andre er teksten gjennomgående med kommentarer om den historiske utvikling av variasjonsregningen, og flere finnes i et Anhang. Det er interessant lesning, men gir, sammen med en litt omstendelig stil, fremstillingen en bredde som kan skape assosiasjoner med Tolstojs romaner, noe ikke alle vil se som en god egenskap ved en matematikkbok.

Fremstillingen er best, og til dels meget god, i de første kapitlene. Etter hvert som emnene som behandles blir noe mer avanserte, og kravene til presisjon og omhu i formuleringene stiger, blir et visst skissemessig preg stadig tydeligere, og eksemplifiseringen blir tynnere. For eksempel er både den »direkte metode« og Ritz' mer praktiske anvendelser av denne, nokså løst skissert. Når mer »moderne« begreper dukker opp, blir formuleringene til dels svært slappe (se for eksempel på definisjonen s. 195 av omegn til en funksjon, eller behandlingen av ytre differensialformer og Stokes' sats).

I følge forordet tar boken dels sikte på å vise renmatematikerne hvilke insitamenter anvendelsene har budt frem i denne gren av analysen, dels på å gi fysikere og teknikere kjennskap til metoder som kan løse praktiske problemer, og til »grunnleggende satser og almene prinsipper fremstillet i mest mulig gjennomsiktig form«. Siden forfatteren har vært professor ved tekniske høyskoler (i Praha og Wien), er det rimelig at

hensynet til den sist nevnte del av publikum har dominert. Forhåpentlig til glede for disse, om enn til noen sorg for mer teoretisk interesserte lesere, kretser nesten hele boken om de klassiske problemer med søken etter nødvendige betingelser for ekstremaler; de vanskeligere problemene om tilstrekkelige betingelser er knapt nevnt. Likeledes er det lagt liten vekt på nøyaktighet i formuleringen av resultatene, f. eks. blir stadig betingelser om deriverbarhet underforstått eller gjort unødige strenge der dette antas å lette fremstillingen.

I en bok som ellers egner seg godt som oppslagsbok, og som sikkert vil bli anvendt slik, burde resultatene vært langt bedre typografisk markert, og det burde vært lettere å finne frem for folk som ikke kjenner boken i detalj (kapitel og avsnitts-nummer, ikke bare overskrift, øverst på hver side!). Ellers er det bare godt å si om den tekniske utførelsen (men ikke om prisen).

Bent Birkeland

I. S. GRADSHTEIN: *Direct and converse theorems*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 27.) Translated from the Russian by T. Boddington. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 18+173 pp. sh. 30/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 183.)

At $A \Rightarrow B$ er ensbetydende med at ikke- $B \Rightarrow$ ikke- A , og at hvis A er en nødvendig betingelse for B , så er B en tilstrekkelig, men i alminnelighet ikke en nødvendig betingelse for A , er enkle logiske slutningsregler som det kan være vanskelig å få overbevist en begynnende matematikkstudent om. Denne boken, som tar sikte endog på realgymnasets elever, søker å forklare de forskjellige sammenheng mellom logiske relasjoner av typen antydnet ovenfor. Dertil kommer en meget elementær innføring i mengdelære. Den siste del av boken gir en kort oversikt over den symbolske logikk, igjen ytterst elementært. Boken inneholder en lang rekke eksempler, som oftest hentet fra skolematematikken. Den er også forsynt med en rekke oppgaver. En gymnaslærer vil nok kunne ha nytte av den i sine bestrebelser for å lære sine elever å forstå hva et bevis er; på universitetsnivå er boken alt for elementær.

Jens Erik Fenstad

JOSEPH E. HOFMANN: *Geschichte der Mathematik, I*. Zweite, erw. Aufl. (Sammlung Göschel 226/226a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1963. 251 S. DM 5,80.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 183.)

Første utgave av »Geschichte der Mathematik, I: Von den Anfang bis zum Auftreten von Fermat und Descartes« utkom i 1953 og ble anmeldt av meg i NMT 1954. Denne annen utgave er femti sider større enn den forrige. Som i første utgave er den antikke matematikk fremstillet meget kortfattet mens også her middelalderen og renessansen er utførligere behandlet enn det er vanlig. Kapitlene om babylonernes, kinesernes og muhamedanernes matematikk er betraktelig utvidet, da her foreligger mange nye forskningsresultater.

Et nytt kapitel om de gamle bysantinere er kommet til. Det viser seg at det vitenskapelige liv i Bysants fra det tiende til det fjortende århundre var mer utviklet enn man tenker seg. Patriarken av Konstantinopel kom omkring 870 i heftig konflikt med romerkirken og la grunn til den endelige utskillelse 1054. Han og hans elever studerte og kommenterte Aristoteles, Platon og tildels Diofant. År 1050 ble det opprettet et akademi i Konstantinopel. Forbindelsen med Norden var på den tid — væringernes og Sigurd Jorsalfarers tid — meget livlig, så kjennskap til de kulturelle forhold der kan være av interesse for oss. Helt utelukket er det vel ikke at det kan ha vært en viss påvirkning. Hauk Erlendsson kjenner iallfall (ca. 1300) Platons Timaios godt. Men det er vel sannsynligere at han har sin viden over Paris.

Også den meget verdifulle litteraturfortegnelse er utvidet så den nå er på 60 sider.

Viggo Brun

GUIDO HOHEISEL: *Integralgleichungen*. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. (Sammlung Götschen 1099.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1963. 112 S. DM 3.60.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 130.)

Forfatteren bygger opp teorien for lineære integralligninger ved hjelp av lineære normerte rom. I de første kapitler gis en kort fremstilling av grunnlaget for læren om metriske rom. Der gjøres rede for begrepene Banachrom, Hilbertrom, separable rom og ortogonale delrom. Kapittel 6 og 7 handler om lineære operatorer. En lineær operator A defineres som en avbildning av et rom R_1 i et rom R_2 (hvor R_2 også kan være R_1) slik at man har $Ax = y$ hvor $x \in R_1$, $y \in R_2$ og $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2$. Det vises hvordan mengden av lineære operatorer selv kan oppfattes som et lineært normert rom. Normen av operatoren A defineres som $\|A\| = \sup \|Ax\|$. Her er $\|Ax\|$ normen av Ax , og x gjennomløper alle funksjoner i et rom R slik at $\|x\| = 1$. Man betrakter nå ligninger av formen $x - \lambda Ax = y$ hvor λ er en tallfaktor. En slik ligning omfatter også lineære

integralligninger. Man får i dette tilfelle $Ax = \int k(s, t)x(t)dt$ og $y = f(s)$.

I kapitel 8 behandles integralligninger ut fra dette synspunkt. Fremstillingen er tildels nokså tung og det er adskillige trykkfeil som kan forvirre leseren. Forfatteren bruker betegnelsen $f \otimes g$ for produktet $f(s) \cdot g(t)$. Dette virker unødig tungt og kan forvirre, idet man kan tro det dreier seg om en ny regneoperasjon. Det vanskeligste avsnittet er kanskje kapitel 10, hvor det er nokså mange trykkfeil. Boken inneholder ca. 80 øvelsesoppgaver som til dels er blandet sammen med teksten slik at det kan være vanskelig å se hva som er oppgave og hva som er tekst. Boken inneholder både en liste over anvendte symboler og en sakliste samt en meget kort litteraturfortegnelse.

Selv om boken ikke er lettlest, oppveies det delvis ved at den er kortfattat og ved de interessante synspunkter som legges til grunn for fremstillingen. Man får et klart inntrykk av hva lineære normerte rom kan brukes til og berettigelsen av de begreper som man der opererer med.

K. S. Kolden

LARS HÖRMANDER: *Linear partial differential operators*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 7+287 S. Cloth DM 42.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 183.)

Vid den internationella matematikerkongressen i Stockholm sommaren 1962 tilldelades den unge svenske professorn Lars Hörmander en av de två Fields-medaljerna (matematikens Nobelpris) för utomordentliga insatser inom teorin för partiella differentialekvationer och angränsande områden av analysen. Till stor del just tack vare Hörmanders forskningsresultat har teorin för de lineära differentialekvationerna nu för första gången kunnat presenteras i en sammanfattande form efter ett fåtal klart uppdragna riktlinjer.

Det klassiska receptet för en bok om partiella differentialekvationer har länge varit att i skilda kapitel behandla elliptiska, hyperboliska och paraboliska ekvationer och med dem sammanhängande problem med fysikalisk anknytning. Den här anmälda boken utgår istället från de ur matematisk synpunkt centrala problemen om existens, entydighet och regularitet av lösningarna till en allmän lineär differentialekvation. De flesta av de klassiska resultaten finns naturligtvis fortfarande med men är nu inbäddade i de nyare teorierna. (En kortfattad exposé över de moderna idéer och resultat som redovisas i Hörmanders bok, kan man finna i två föredrag av professor Lars Gårding, publicerade i meddelan-

dena från de internationella matematikerkongresserna 1958 och 1962.) Ett utmärkande drag för det nya sättet att betrakta lineära differential-ekvationsproblem är att man ser dem med utgångspunkt från teorin för lineära topologiska rum. Mycket riktigt framgår detta redan av bokens titel; boken behandlar i första hand differentialoperatorer, definierade på olika klasser av funktioner. Belysande är det faktum, att av de i bokens bibliografi upptagna cirka 130 titlarna ungefär 100 syftar på tidskriftsartiklar publicerade under den senaste dekad, d. v. s. efter det att Schwartz' distributionsteori blivit ett oundgängligt hjälpmedel i forskningen omkring lineära differentialekvationer.

Trots det utomordentligt rika innehållet, är boken mycket lättläst tack vare omsorgsfull redigering och sparsam användning av nya symboler och definitioner. Anmälaren vill varmt rekommendera boken till alla som vill tränga djupare in i en mycket vital och fascinerande matematisk teori.

Jöran Friberg

SAUNDERS MACLANE: *Homology*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 114.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 10+422 S. Cloth DM 62.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 131.)

Dette er en bok om homologisk algebra, ikke, slik titelen kunne tyde på, en bok om algebraisk topologi.

Homologisk algebra er en av de yngste disipliner innen matematikken. Som egen disiplin kan en trygt si at den oppsto med Cartan og Eilenbergs fundamentale bok *Homological Algebra* fra 1955. Den boken MacLane her har skrevet kompletterer på en utmerket måte den generelle litteratur på området.

Med den stadige flom av nye resultater som homologisk algebra kan oppvise er det ikke noen lett oppgave å skrive en systematisk oversikt. Det som en dag er god teologi, er kanskje dagen etter håpløst foreldet. MacLane har konsentrert seg om den del av teorien som nå må kunne antas å være vel fundert, og har overlatt til de historiske noter, som forresten er utsøkt informerende, det stoff som fremdeles er i utvikling.

Boken er en lærebok, ikke en oppslagsbok for de som har bruk for spesielle resultater. Den er uten tvil vel egnet på et stadium i undervisningen tilsvarende norsk hovedfag i matematikk. Av de 12 kapitler gir de to første en innføring i det språk og den problemstilling som skal behandles. Kapittel 3 er viet funktoren $\text{Ext}^{(n)}$, bygget på Yonedas utvidelser av lengde n . Resolusjoner bringes inn i diskusjonen, på et sent

tidspunkt, for å bevise eksakthet i følgen tilordnet en kort-eksakt følge. Kapittel 4 gir en innføring i cohomologiteori for grupper, basert på funktoren $\text{Ext}^{(\cdot)}$. I kapittel 5 innfører forfatteren tensor og torsjonsprodukter analogt til den metode han benyttet seg av i kapittel 3, d. v. s. han gir først en karakterisering av $\text{Tor}^{(n)}$ uten å nevne resolusjoner, en metode som skyldes ham selv, for så å innføre projektive resolusjoner og den klassiske karakterisering. Dette kapitlet inneholder teoremet om universelle koeffisienter, og Künneths formel.

I kapittel 6 gis en kort, men meget instruktiv innføring i de typer algebraer som er hyppigst forekommende i homologisk algebra. Kapittel 7 tar for seg dimensjonsbegrepet og inneholder f. eks. Hilberts syzygie-teorem. Kapittel 8 inneholder en utsøkt behandling av produkter for Tor og Ext, en liten innføring i simpliciale mengder, asykliske modeller, Eilenberg–Zilber teoremet og cup-produktet.

Kapitlene 9 og 10 behandler forskjellige typer resolusjoner og den klassiske teori for cohomologi av algebraiske systemer. De to siste kapitler, 11 og 12, tar for seg spektralsekvenser og teorien for deriverte funktorer i generelle abelske kategorier. Det siste kapitlet inneholder ved siden av en generell innføring, basert på Grothendiecks Tôhoku-artikkel, også et avsnitt om $\text{Ext}^{(\cdot)}$ i kategorier som ikke inneholder nok projektive eller injektive objekter.

Olav Arnfinn Laudal

HERBERT JOHN RYSER: *Combinatorial mathematics*. (The Carus Mathematical Monographs 14.) Published by The Mathematical Association of America. John Wiley & Sons, London, New York 1963. 14+154 pp. sh. 30/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 132.)

Bokens to første kapitler gir en klar innføring i noen av kombinatorikkens grunnleggende begreper, idet forfatteren antar at leseren ikke har beskjeftiget seg med kombinatorikk tidligere. I tredje kapittel introduseres bl. a. latinske kvadrater. Et latinsk kvadrat (LK) av orden n er et $n \times n$ -skjema fylt ut ved hjelp av n symboler, slik at hvert symbol forekommer én gang på hver linje og i hver kolonne. Euler formodet i 1782 at dersom et LK, A , av orden $n = 4t + 2$ legges oppå et annet, B , av samme orden, vil et av symbolene i A dekke et av symbolene i B to eller flere ganger. I fagspråket: Det finnes ikke innbyrdes *ortogonale* LK av orden $4t + 2$. For $t = 1$ ble Eulers formodning verifisert i 1900 av Tarry. En regnemaskin ble for noen år siden satt til å lete etter et par av ortogonale LK av orden 10, men fant ingen før bevilgningen tok slutt. Det

første moteksempel ble (med $t=5$) konstruert i 1959, og senere er det påvist at Eulers formodning er gal for alle $t \geq 2$.

Et moteksempel med $t=2$ er beskrevet i bokens kapitel 7. Her studeres også de endelige projektive plan, som er et svært aktuelt emne innen kombinatorikken. Eksistensen av et projektivt plan av orden n (d. v. s. med $n+1$ punkter på hver linje) er nemlig ekvivalent med eksistensen av $n-1$ innbyrdes ortogonale LK av orden n . Hadde Eulers formodning vært riktig ville altså tallene 10, 14, ... være utelukket som ordener for projektive plan. I én retning er det man vet hittil gitt ved Bruck–Rysers sats: Dersom $n=4t+1$ eller $4t+2$, og et primtall $p=4k+3$ går opp i n , må $n=p^{2l}m$, der p ikke går opp i m . I den annen retning har man: Er $n=p^\alpha$ finnes det minst et projektivt plan av orden n . Denne sats bevises i kapitel 7, mens Bruck–Rysers sats kommer ut, i kapitel 8, som et spesialtilfelle av en setning om (v, k, λ) -konfigurasjoner. En (v, k, λ) -konfigurasjon kan oppfattes som et generalisert projektivt plan med v punkter, med k punkter på hver linje. To linjer har alltid λ punkter felles og to punkter bestemmer λ linjer. Kapittel 8 inneholder også mye annet interessant stoff om (v, k, λ) -konfigurasjonene og generalisasjoner av disse, mens kapittel 9 behandler en spesiell type (v, k, λ) -konfigurasjoner, de såkalte »difference sets«.

Kapitel 4 gjengir Erdős' bevis for en interessant setning av Ramsey (Skolem har også gitt et bevis for denne). Ramsey anvendte satsen i visse grunnleggende undersøkelser i matematisk logikk, men i boken gis en mindre høytidelig anvendelse på et geometrisk problem som kanskje kan interessere noen av NMT's lesere: La m være gitt. Hva er det maksimale antall $N(m)$ punkter en kan velge ut i planet når en forlanger at ingen m -kant med hjørner blant de valgte punkter skal være konveks? Ramseys sats gir $N(m) < \infty$. Det er formodet (og bevist for $m=3, 4, 5$) at $N(m) = 2^{m-2}$.

Kapitel 5 behandler bl. a. de såkalte representantsystemer (se NMT 1962, s. 52). Her fremsettes en formodning om permanenten til produktet av to bistokastiske matriser, men denne formodning er gal.

Kapitel 6 behandler et av Rysers spesialfelter. La $R=(r_1, \dots, r_m)$ og $S=(s_1, \dots, s_n)$ være vektorer med heltallige, ikke-negative koordinater, og la $\mathfrak{A}(R, S)$ betegne klassen av de $m \times n$ -matriser hvis elementer er 0-er og 1-ere og hvis rekke-(søyle)summer er $r_1, \dots, r_m$ ($s_1, \dots, s_n$). Ryser gir først en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at $\mathfrak{A}(R, S)$ ikke skal være tom, og foretar så et inngående studium av $\mathfrak{A}(R, S)$. Et viktig hjelpemiddel er her »byttesatsen«. Dersom en i matrisen $A \in \mathfrak{A}(R, S)$ bytter ut en undermatrise av formen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ med en av formen

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (eller omvendt), vil den nye matrisen B også høre til $\mathfrak{A}(R, S)$.

»Byttesatsen« sier nå at ved å anvende ovenstående operasjon tilstrekkelig mange ganger kan en få frem *enhver* matrise i $\mathfrak{A}(R, S)$. Beviset i boken er en forbedring av Rysers opprinnelige bevis, men ytterligere forbedringer er mulig. Hvilken leser av NMT sender inn det beste bevis?

Anmelderen håper at de smakebitene som er gitt ovenfor vil stimulere riktig mange til å kjøpe denne fascinerende boken. Kombinatorikk er en viktig matematisk disiplin både i seg selv og ved sine anvendelser på de forskjelligste andre felter av matematikken. Dessuten er emnet underholdende, om jeg får bruke et slikt uttrykk. Enda mer underholdende blir det når det får en slik glimrende fremstilling som Ryser's. La meg til slutt nevne at boken ikke bare inneholder kjente resultater men også en god del uløste problemer og ubehandlede problemstillinger.

Helge Tverberg

MOTTATTE BØKER

Acta Polytechnica Scandinavica. Mathematics and Computing Machinery Series No. 8. The Danish academy of technical sciences, Copenhagen 1963. 75 s. Sv. kr. 10.00.

Viggo A. Kjær: Introduction, harmonics by torsional vibration 5–18 * Chr. Andersen: The ruler method. An examination of a method for numerical determination of Fourier coefficients 19–75.

Gunnar Bergendal — Inge Brick: *Lineär algebra och geometri*. Lunds Studentkårs Intressebyrå, Lund 1963. 217 s. Sv. kr. 30.00.

Inledning 7–10 * Vektorer 11–48 * Punkter, räta linjer och plan 49–69 * Lineär algebra 70–109 * Plan i rummet 110–127 * Skalar produkt. Ortogonala matriser 128–158 * Avbildningar 159–193 * Litet elementär geometri 194–209 * Svar till övningarna 210–214 * Index 215–217 * Förklaring till några symboler 217.

Th. Christensen — C. J. K. Larsen — K. Ejrnæs: *Geometri i første og anden real*. Gyldendal, København 1963. 170 s. D. kr. 15.75.

Grundbegreber 7–16 * 1., 2. og 3. hovedsætning 16–47 * Trekanter I 47–53 * Parallele linier 54–60 * Cirkelen 61–78 * Trekanter og firkanter 78–103 * Areal 103–112 * Retvinklet trekant 113–118 * Regulære polygoner 119–124 * Transversalsætninger 125–136 * Spejling, drejning og parallelforskydning 136–143 * Multiplikation om et punkt 143–150 * Særlige arealformler 151–156 * Eksempler på konstruktioner og beregninger 157–160 * Blandede opgaver 161–170.

I. I. Gol'denblat: *Some problems of the mechanics of deformable media*. Translated from the Russian by Z. Mroz. P. Noordhoff, Groningen 1963. 16 + 304 pp. D. fl. 25.00.

Introduction 1–21 * The strain field and its invariants 25–93 * The stress field and its invariants 94–111 * Joint invariants of the strain and stress fields 112–127 * General forms of the relationships between the components of the stress and strain tensors for equilibrium deformation processes of isotropic media 128–141 * The general forms of the relationships between stresses and strains for non-equilibrium deformation processes of isotropic bodies 142–149 * Extension of some of the preceding results to anisotropic media 150–162 * On the relation between the directions of the principal axes of the stress and strain tensors for different media 163–172 * The first and second laws of thermodynamics 175–200 * Thermodynamic potentials

of deformation 201–221 * The differential equations of the thermodynamics of deformation 222–251 * The thermodynamics of the deformation of anisotropic media 252–256 * Some special problems of the thermodynamics of deformation 257–289 * Dynamical problems 290–300 * Author index 301 * Subject index 302–304.

I. S. Gradshteyn: *Direct and converse theorems*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 27.) Translated from the Russian by T. Boddington. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 18 + 173 pp. sh. 30/-.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 175.)

Direct and converse theorems 1–78 * The elements of mathematical logic 79–140 * Solutions of the problems incorporated in the text 141–173.

Joseph E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik, I*. Zweite, erw. Aufl. (Sammlung Götschen 226/226a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1963. 251 S. DM 5.80.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 175–176.)

Allgemeiner Überblick 5–9 * Vorgriechische Mathematik 10–26 * Die Griechen (etwa 800 v. bis 600 n. Chr.) 27–58 * Mittelalter (etwa 500 bis 1400 n. Chr.) 59–108 * Humanismus (etwa 1300 bis 1580 n. Chr.) 109–145 * Frühbarock (etwa 1550 bis 1650 n. Chr.) 146–191 * Namen- und Schriftenverzeichnis 192–242 * Sachverzeichnis 243–251.

Vernon E. Howes — Roy Dubisch: *Self teaching intermediate algebra*. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 446 pp. sh. 38/-.

Fundamental concepts 1–33 * Multiplication, division, and factorization of polynomials 34–85 * Rational algebraic expressions 86–122 * Word problems 123–140 * First-degree equations 141–204 * Equations of higher degree 205–254 * Functions, graphs, and inequalities 255–314 * Exponents and logarithms 315–375 * Families of curves 376–394 * Sequences, series, and the binomial theorem 395–420 * Complex numbers 421–446.

Lars Hörmander: *Linear partial differential operators*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 7 + 287 pp. Cloth DM 42.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 177–178.)

Distribution theory 1–33 * Some special spaces of distributions 33–62 * Existence and approximation of solutions of differential equations 63–96 * Interior regularity of solutions of differential equations 96–114 * The Cauchy problem (constant coefficients) 114–155 * Differential equations which have no solutions 156–170 * Differential operators of constant strength 170–180 * Differential operators with simple characteristics 180–230 * The Cauchy problem (variable coefficients) 230–287

cients) 230–241 * Elliptic boundary problems 242–274 * Appendix. Some algebraic lemmas 275–279 * Bibliography 280–284 * Index 285 * Index of notations 287.

Alexey Nikolaevitch Khovanskii: *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*. Translated from the Russian by Peter Wynn. P. Noordhoff, Groningen 1963. 12 + 212 pp. D. fl. 28.00.

Certain problems in the theory of continued fractions 1–75 * Continued fraction expansions of certain functions 76–150 * Further methods for obtaining rational function approximations 151–181 * Generalized continued fractions 182–202 * Literature in the Russian language on the general theory of continued fractions 203 * References 204–209 * Supplementary references 210 * Index 211–212.

Klaus Krickeberg: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1963. 200 S. Leinen DM 29.40.

Zufällige Variable 7–35 * Erwartungen und Verteilungen 36–92 * Folgen unabhängiger Variablen 92–118 * Bedingte Erwartungen 118–160 * Der Brownsche und der Poissonsche Prozess 160–191 * Anhang 191–197 * Namen- und Sachverzeichnis 198–200.

Erik Kristensen — Ole Rindung: *Matematik II*. G. E. C. Gads Forlag, København 1963. 8 + 265 s. D. kr. 39.50.

Kvantorer 1–8 * Reelle tal 9–20 * Numerabilitet 21–27 * Kontinuitet og grænseværdi 28–69 * Differentialregning 70–145 * Integralregning 146–181 * Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner 182–191 * Approximerende polynomier 192–199 * Afbildninger af planen ind i planen 200–234 * Ellipse, hyperbel, parabel 235–259 * Sagregister 260–264 * Symbolliste 265.

M. A. Lavrent'ev: *Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations*. Translated from the Russian by J. R. M. Radok. P. Noordhoff, Groningen 1963. 150 pp. D. fl. 16.25.

Introduction 9–15 * Variational principles of the theory of conformal mapping 16–25 * Behaviour of a conformal transformation on the boundary 26–41 * Hydrodynamic applications 42–71 * Quasi-conformal mappings 72–89 * Linear systems 90–117 * The simplest classes of non-linear systems 118–145 * References 146–150.

Solomon Lefschetz: *Differential equations: Geometric theory*. Second edition. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 6.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1963. 10 + 390 pp. sh. 75/–.

Preliminary questions 1–28 * Existence theorems. General properties of the solutions 29–54 * Linear systems 55–75 * Stability 76–85 * The differential equation

$dx/dt = Px + q(x; t)$ (P a constant matrix; $q(0; t) = 0$) 87–141 * The differential equation $dx/dt = P(t)x + q(x; t)$ ($P(t)$ a variable matrix; $q(0; t) = 0$) 142–154 * Periodic systems and their stability 155–180 * Two-dimensional systems. Simple critical points. The index. Behavior at infinity 181–208 * Two-dimensional systems (continued) 209–263 * Differential equations of the second order 264–311 * Oscillations in systems of the second order. Methods of approximation 312–346 * Appendix I: Complement on matrices 347–359 * Appendix II: Some topological complements 360–372 * Problems 373–375 * Bibliography 376–385 * List of principal symbols 386 * Index 387–390.

Harry Malmheden: *Matematisk statistik*. CWK Gleerups förlag, Lund 1963. 310 s. Hft. sv. kr. 40.00, inb. sv. kr. 46.00.

Inledning 11–13 * Beskrivning och behandling av ett begränsat statistiskt material 15–30 * Beskrivning med användning av kontinuerlig variabel. Lokalisations- och spridningsmått 31–42 * Tvådimensionell populationsvariabel 43–61 * Summa och differens av två populationsvariabler. Lokalisations- och spridningsmått 62–74 * Sannolikhetskalkyl 75–106 * Lokalisations- och spridningsmått för en sannolikhetsfördelning 107–111 * Tvådimensionell sannolikhetsvariabel 112–118 * Summa av två sannolikhetsvariabler. Symbolerna E och D . Generaliseringar 119–130 * Normalfördelningen 131–145 * Binomialfördelningen (komplettering). Ur binomialfördelningen genom gränsövergång härledda fördelningar 146–159 * Några för stickprovsteorin viktiga fördelningar och deras karaktäristikor 160–172 * Stickprovsteori 173–210 * Tillämpningar av stickprovsteorin 211–232 * Lineär regression 233–251 * Lineär korrelation i två variabler 252–273 * Appendix 274–302 * Litteraturförteckning 303 * Tabeller 304–307 * Sakregister 308–310.

Zlatko P. Mamuzic: *Introduction to general topology*. Translated from the Serbo-Croatian by Leo F. Boron. P. Noordhoff, Groningen 1963. 159 pp. D. fl. 17.50.

List of symbols 5 * Introduction 9–12 * (Generalized) topological spaces 13–15 * Neighborhood spaces 15–17 * Accumulation points; interior, exterior and boundary of a set; closed sets and open sets 18–22 * Topological spaces 22–31 * Topological base 31–34 * Continuous mappings of a space into a space; homeomorphisms 34–41 * Topologization of a set by a mapping 41–52 * Separation axioms; classification of spaces by means of the separation axioms 52–62 * Topologization of a set by means of a real distance; metric spaces 62–85 * Topologization of a set by the uniform topology; Efremovich's proximity spaces or δ -spaces 85–100 * Topologization of a set by means of the uniform topology; Weil uniform spaces 100–121 * Topologization of a set by means of an abstract distance 121–150 * Literature 151–156 * Index 157–159.

Monographies de L'Enseignement Mathématique, No. 6. Société Mathématique Suisse, 1963. 135 pp. S. Fr. 22.00.

Introduction à la géométrie des nombres par C. Chabauty 5–17 * Introduction à l'analyse diophantienne par F. Châtelet 18–32 * Problèmes d'approximation

diophantienne par R. Descombes 33–41 * Introduction à la théorie des nombres algébriques par Ch. Pisot 42–55 * Le théorème de Thue–Siegel–Roth par G. Poitou 56–60 * Bibliographie de l'arithmétique par A. Châtelet 61–79 * Quelques problèmes de la théorie des nombres par Paul Erdős 80–135.

Holger Moth — Axel Nygaard — B. Risom Pedersen — Hans A. Rasmussen: *Regnebogen* 8. Gyldendal, København 1963. 234 s. D. kr. 18.75.

Grafisk afbildning 9–18 * Repetition 19–67 * Procentregning 68–80 * Individuel regning I 81–90 * Rentesregning 91–97 * Individuel regning II 98–103 * Fremmed mønt 104–114 * Handelsregning 115–128 * Individuel regning III 129–137 * Forholds-, delings- og blandingsregning 138–159 * Individuel regning IV 160–165 * Flademål 166–185 * Individuel regning V 186–194 * Rummål 195–205 * Individuel regning VI 206–210 * Blandede opgaver, prøvesæt 211–234.

N. I. Muskhelishvili: *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Translated from the Russian by J. R. M. Radok. P. Noordhoff, Groningen 1963. 31 + 718 pp. D. fl. 57.50.

Analysis of stress 5–27 * Analysis of strain 28–51 * The fundamental law of the theory of elasticity; the basic equations 52–87 * General formulae of the plane theory of elasticity 88–103 * Stress function. Complex representation of the general solution of the equations of the plane theory of elasticity 104–161 * Multivalued displacements. Thermal stresses 162–170 * Transformation of the basic formulae for conformal mapping 171–190 * On Fourier series 193–197 * Solution for regions, bounded by a circle 198–223 * The circular ring 224–242 * Application of conformal mapping 243–256 * On Cauchy integrals 257–288 * Boundary values of holomorphic functions 289–305 * General solution of the fundamental problems for regions bounded by one contour 307–325 * Solution of the fundamental problems for regions mapped on to a circle by rational functions. Extension to approximate solution for regions of general shape 326–380 * Solution of the fundamental problems for the half-plane and for semi-infinite regions 381–403 * Some general methods of solution of boundary value problems. Generalizations 405–433 * The problem of linear relationship 437–460 * Solution of the fundamental problems for the half-plane and for the plane with straight cuts 461–513 * Solution of boundary problems for regions, bounded by circles, and for the infinite plane, cut along circular arcs 514–534 * Solution of the boundary problems for regions, mapped on to the circle by rational functions 535–566 * Torsion and bending of homogeneous bars (Problem of Saint-Venant) 571–607 * Torsion of bars consisting of different materials 609–626 * Extension and bending of bars, consisting of different materials with uniform Poisson's ratio 627–635 * Extension and bending for different Poisson's ratios 636–667 * On the concept of a tensor 668–682 * On the determination of functions from their differentials in multiply connected regions 683–693 * Determination of a function of a complex variable from its real part. Indefinite integrals of holomorphic functions 694–697 * Author's index and references 699–711 * Supplementary references 713–714 * Subject index 715–718.

Ya I. Rivkind: *Problems in mathematical analysis*. P. Noordhoff, Groningen 1963. 98 pp. D. fl. 10.50.

Sequences 3–18 * Functions 19–34 * The derivative and the indefinite integral 35–43 * The definite integral 44–58 * Series 59–73 * Answers and comments 74–98.

Walter Rudin: *Fourier analysis on groups*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 12.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1962. 9 + 285 pp. sh. 72/–.

The basic theorems of Fourier analysis 1–34 * The structure of locally compact Abelian groups 35–57 * Idempotent measures 59–75 * Homomorphisms of group algebras 77–96 * Measures and Fourier transforms on thin sets 97–130 * Functions of Fourier transforms 131–155 * Closed ideals in $L^1(G)$ 157–191 * Fourier analysis on ordered groups 193–229 * Closed subalgebras of $L^1(G)$ 231–245 * Appendices: Topology 247–252 * Topological groups 252–256 * Banach algebras 256–264 * Measure theory 264–269 * Bibliography 271–280 * List of special symbols 281 * Index 283–285.

Lennart Råde: *Sannolikhetslära och statistik*. Biblioteksförlaget, Stockholm 1963. 232 s. Sv. kr. 28.50.

Inledning 1–17 * Ändliga utfallsrum 18–54 * Stokastiska variabler 55–98 * Något om statistisk hypotesprövning 99–110 * Kontinuerliga stokastiska variabler 111–156 * Statistisk skattning 157–215 * Tabeller 216–223 * Litteraturförteckning 224–225 * Svar och anvisningar till övningsuppgifter 226–232.

Karl Steinbuch: *Automat und Mensch*. (Kybernetische Tatsachen und Hypothesen.) Zweite, erweiterte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 12 + 392 S. DM 36.00.

Vorbetrachtungen 1–6 * Rationale Analyse geistiger Vorgänge 6–23 * Signal und Nachricht 24–34 * Informationstheorie 34–51 * Logische Verknüpfungen und Zuordner 51–67 * Signale in Raum und Zeit 68–86 * Sprechen und Hören 87–98 * Zeichenerkennung 98–117 * Speicher 117–133 * Regelung 134–151 * Nachrichtenverarbeitung 152–167 * Über die zukünftige Entwicklung der Nachrichtenverarbeitung 167–190 * Lernende Automaten 190–213 * Bedingte Reflexe, die Lernmatrix 213–241 * Aufnahme und Verarbeitung von Nachrichten durch den Menschen 242–266 * Bewusstsein und Kybernetik 266–287 * Automat und Mensch im Weltraum 288–305 * Gullivers Experiment 306–316 * Kybernetik 316–340 * Automat und Mensch 341–358 * Literaturverzeichnis 359–381 * Literaturhinweise 382–383 * Sachverzeichnis 384–392.

Howard E. Taylor — Thomas L. Wade: *University freshman mathematics*. John Wiley & Sons, London, New York 1963. 14 + 369 pp. sh. 55/–.

List of some symbols used xiii–xiv * Basic concepts 1–12 * Number systems.

The rational number system 13–48 * The real number system. The complex number system 49–91 * Absolute value, graphs and functions 92–121 * Systems of linear equations 122–127 * Vectors, matrices, and determinants 128–173 * Mathematical induction and the binomial theorem 174–184 * Polynomials and polynomial functions 185–219 * Exponents. Exponential and logarithmic functions 220–247 * The trigonometric ratios and the trigonometric functions 248–308 * Inverse trigonometric functions 309–317 * The trigonometric form of a complex number 318–322 * Solution of triangles 323–334 * Tables 335–345 * Answers to some odd-numbered exercises 346–361 * Index 363–369.

A. F. Timan: *Theory of approximation of functions of a real variable*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 34.) Translated from the Russian by J. Berry. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 12 + 631 pp. sh. 100/–.

Weierstrass' theorem 1–25 * The best approximation 26–92 * Some compact classes of functions and their structural characteristics 93–169 * Some properties of algebraic polynomials and transcendental integral functions of exponential type 170–253 * Direct theorems of the constructive theory of functions 254–330 * Converse theorems. Constructive characteristics of some classes of functions 331–401 * Further theorems connecting the best approximations of functions with their structural properties 402–464 * Linear processes of approximation of functions by polynomials and some estimates connected with them 465–586 * Some results from the theory of functions and functional analysis 587–601 * Bibliography 602–620 * Index 621–631.

B. Z. Vulikh: *Introduction to functional analysis for scientists and technologists*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 32.) Translated from the Russian by Ian N. Sneddon. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 11 + 404 pp. sh. 70/–.

Finite-dimensional Euclidean space 1–43 * Infinite-dimensional Euclidean space 44–67 * Metric spaces 68–109 * Continuous operators in metric spaces 110–129 * Normed spaces 130–151 * Hilbert space 152–174 * The L^2 -space 175–213 * Linear operators 214–244 * Linear functionals 245–280 * Adjoint and self-adjoint operators in Hilbert space 281–310 * Completely continuous operators 311–336 * Approximate solution of functional equations 337–366 * Partially ordered normed spaces 367–397 * Literature on functional analysis 399 * Index 401–404.

Edwin Weiss: *Algebraic number theory*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, San Francisco, Toronto, London 1963. 12 + 275 pp. sh. 77/–.

Elementary valuation theory 1–40 * Extension of valuations 41–71 * Local fields 73–117 * Ordinary arithmetic fields 119–184 * Global fields 185–232 * Quadratic fields 233–254 * Cyclotomic fields 255–270 * Symbols and notation 271–272 * Index 273–275.

LØSNINGER

241. Bevis, at

$$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$$

er nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at trekant ABC er retvinklet.

Fr. Fabricius-Bjerre

Løsning: Da

$$\begin{aligned} r + r_a + r_b + r_c &= s \operatorname{tg} \frac{1}{2}A + (s-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}A + (s-c) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A + (s-b) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A \\ &= (b+c) \operatorname{tg} \frac{1}{2}A + a \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A, \end{aligned}$$

er

$$\begin{aligned} a + b + c = r + r_a + r_b + r_c &\Leftrightarrow a(1 - \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A) = (b+c)(\operatorname{tg} \frac{1}{2}A - 1) \\ \Leftrightarrow A = 90^\circ \text{ eller } \operatorname{tg} \frac{1}{2}A &= \frac{a}{b+c}. \end{aligned}$$

Den sidste betingelse kan omskrives til

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} &= \frac{b+c}{a} \\ \Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a)a^2 &= (a+c-b)(a+b-c)(b+c)^2 \\ \Leftrightarrow a^4 &= b^4 + c^4 - 2b^2c^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \Leftrightarrow \text{enten } B = 90^\circ \text{ eller } C = 90^\circ. \end{aligned}$$

Bernhard Andersen

Også løst av A. Lyngbye.

242. Konstruer en trekant af en vinkel, den modstående side samt halveringslinien til den givne vinkel.

P. W. Karlsson

Løsning: Givet A , a og v_A . Lad M være midtpunktet af buen BC på trekantens omskrevne cirkel, altså

$$\triangle ABM \sim \triangle BDM, \text{ hvoraf } x : k = k : (v_A + x).$$

x bestemmes ved en mellempportionalkonstruktion, hvorefter A findes ved skæring mellem den cirkel, hvorfra a ses under den givne vinkel A , og cirklen med M som centrum og $x + v_A$ som radius.

PRISOPGAVE FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier udskriver herved nedenstående prisopgave for elever i gymnasier og ved studenterkurser. Opgaven ønskes besvaret så fuldstændigt som muligt, og der lægges vægt på en omhyggelig og overskuelig fremstilling. For den bedste blandt de tilfredsstillende besvarelser udsættes en præmie på 150 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstra-præmier.

Besvarelsenerne indsendes senest 31. marts 1964 til lektor Henrik Meyer, Bakke-draget 15, Birkerød. På besvarelsen skal anføres navn, adresse, skole og klassetrin. Indsenderen skal samtidig med besvarelsen indsende en erklæring om, at opgave-løsningen er selvstændigt arbejde. (Benyttelse af litteratur er dog tilladt.)

En mængde af reelle tal, som indeholder tallet 1, og som, hvis den indeholder tallene a og b , også indeholder tallene $a-b$ og ab , kaldes en *integritetsring*.

1) Vis, at en integritetsring I indeholder tallet 0, og at hvis I indeholder tallene a og b , indeholder den også tallet $a+b$.

Mængden Z bestående af alle hele tal er et eksempel på en integritets-ring.

2) Vis, at mængden $Z(\sqrt{10})$ bestående af alle tal af formen $a+b\sqrt{10}$, hvor a og b er hele tal, er en integritetsring.

Bevis, at $a+b\sqrt{10}=0$, når og kun når $a=b=0$.

I det følgende skal græske bogstaver betegne tal fra $Z(\sqrt{10})$.

Ved *det konjugerede tal* til tallet $\alpha=a+b\sqrt{10}$, forstås tallet $\bar{\alpha}=a-b\sqrt{10}$, og ved *normen* af α forstås det hele tal $N(\alpha)=\alpha\bar{\alpha}=a^2-10b^2$.

3) Vis, at

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta).$$

Ved en *enhed* ε i $Z(\sqrt{10})$ forstås et tal, hvis norm er 1 eller -1 .

4) Vis, at produktet af to enheder er en enhed.

Vis, at 1 og -1 ikke er de eneste enheder i $Z(\sqrt{10})$. Giv et eksempel på en enhed med normen -1 .

5) Vis, at der eksisterer en enhed ε_0 med den egenskab, at enhver enhed kan skrives som ε_0^h eller $-\varepsilon_0^h$, hvor h betegner et helt tal.

Et tal β siges at være *divisor* i et tal α , hvis der findes et tal γ , så $\alpha = \beta\gamma$.

6) Bevis, at en enhed er divisor i ethvert tal.

Et tal β kaldes *associeret* til et tal α , hvis der findes en enhed ε , så $\beta = \varepsilon\alpha$. Vi skriver kort

$$\beta \text{ as } \alpha.$$

7) Bevis, at for vilkårlige tal α , β og γ gælder

a) α as α .

b) α as β medfører β as α .

c) α as β og β as γ medfører α as γ .

8) Gør rede for, at der er uendelig mange enheder i $Z(\sqrt{10})$, og at ethvert tal har uendelig mange associerede.

Et tal i $Z(\sqrt{10})$ kaldes et *primal*, når det ikke er en enhed, og dets divisorer kun er enhederne og de med tallet associerede.

9) Bevis (f. eks. ved brug af 3)), at tallene 2, 5 og $\sqrt{10}$ er primal i $Z(\sqrt{10})$.

10) Bevis, at ethvert tal, som ikke er enhed, har en divisor, som er et primal, samt at ethvert tal, der ikke er enhed, kan skrives som et produkt af primal (primfaktoropløsning).

To primfaktoropløsninger inden for $Z(\sqrt{10})$ vil vi kalde *det væsentlige ens*, hvis de kan bringes til at svare til hinanden faktor for faktor, således at tilsvarende faktorer er associerede.

11) Undersøg, om primfaktoropløsning inden for $Z(\sqrt{10})$ er entydig i den forstand, at to primfaktoropløsninger af samme tal altid er i det væsentlige ens.

12) Vis, at der findes uendelig mange primal i $Z(\sqrt{10})$, hvoraf ikke to er associerede.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

Oppgavekonkurranse for 1964, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Den beste samling besvarelser vil bli tildelt H.K.H. Kronprins Haralds premie på 200 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med. Oppgavene faller inn under reallinjens pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som mulig. Det er ikke nødvendig å ha svart på alle 6 oppgavene. Ingen kan vinne hovedpremien mer enn én gang.

En sender løsninger til lektor Ragnar J. Solvang, Ris skole, Vinderen, Oslo, innen 1. 8. 1964, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

Oppgavene er også publisert i *Den Høgre Skolen*¹ for 1. febr. 1964.

Vi henstiller til matematikklærerne på reallinjen om å gjøre flinke elever oppmerksom på konkurransen.

1. Tre sirkler med sentrene A , B og C tangerer hverandre utvendig, og tangerer dessuten alle en og samme rette linje. Vis at trekanten ABC er stumpvinklet, og bestem forholdene mellom sirklenes radier slik at den stumpe vinkel blir størst mulig.

2. Bevis at $\sqrt[3]{2}$ ikke kan skrives på formen $p+q\sqrt{r}$ der p , q og r er rasjonale tall.

3. Løs likningen

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2.$$

4. Bevis på en eller helst flere måter at $3^{2n}+63$ for alle naturlige tall n kan deles med 72. Hvordan må n velges for at $3^{2n}+63$ skal kunne deles med 64?

5. Finn den største og minste verdi

$$z = x+y$$

kan anta, når følgende ulikheter samtidig skal være oppfylt:

¹ Her er det dessverre en trykkfeil, idet de to siste ulikheter $y \geq$ i høyre kolonne i oppg. 5 er gjengitt med $y \leq$.

$$\begin{array}{ll} y \leq -\frac{1}{3}x + 7 & x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq -x + 10 & y \geq -2x + 4 \\ y \leq -3x + 24 & y \geq -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}. \end{array}$$

6. Et kvadrat $ABCD$ med side 1 er gitt. Forleng AB og AD slik at kvadratet blir liggende i et hjørne. Et linjestykke av lengde a skal gå gjennom C og dessuten ha sine endepunkter E og F på forlengelsene av AB og AD .

a) Beregn AE og AF .

b) Hva er den minste verdi vi kan velge for a i denne oppgaven?

RESULTAT AV PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASSELEVER

(Oppgavene i NMT 10 (1962), s. 227–228.)

I konkurransen var det 20 deltakere. Blant disse var fjorårets vinner, Byrge Birkeland, som ifølge bestemmelsene deltok utenfor konkurranse. Også i år har han levert et utmerket arbeid.

H.K.H. Kronprinsens premie kr. 200 ble tildelt Ulf Tangen, elev av 5 Rg., Gjøvik og Vardal interkomm. høgre allmennskole. Han har levert meget bra besvarelser på alle oppgavene.

KRONIKK

RESOLUTION

Den femte nordiska kongressen för lärare i matematik, fysik och kemi, som försgick i Helsingfors under tiden 26–29 juni 1963 och föregicks av ett seminarium för ledare och funktionärer, samlade omkring 500 läroverkslärare från de nordiska länderna. Emedan matematikens, fysikens och kemins betydelse i samhället fortfarande växer snabbt, måste undervisningen i dessa ämnen kraftigt påverkas av denna utveckling. Kongressen vill därför efter en möjligast grundlig diskussion av en rad aktuella frågor för sin del framhålla följande:

1. För uppnående av en riktig balans mellan humanistiska och matematisk-naturvetenskapliga ämnen på de icke-matematiska linjerna i gymnasiet bör matematiken få en tillräckligt stor andel av timantalet. Undervisningen bör avslutas med en effektiv och lämpligt utformad examen. Med hänsyn till fysikens och kemins stora andel i den nutida världsbilden och deras betydelse för förståelsen av den tekniska utvecklingen bör de icke-matematiska linjerna ha en för dem lämpad kurs i fysik och kemi. Detta är ett allmänt bildningskrav och kan i vissa fall även vara av betydelse som direkt förutsättning för elevernas studier och kommande yrkesutövning.

2. Det nordiska samarbetet kräver, att vart och ett av de nordiska länderna strävar att upprätthålla ungefär samma nivå inom alla områden av samhällslivet. Detta gäller även den matematisk-naturvetenskapliga undervisningen. Den internationella konkurrensen inom vetenskap och teknik kräver särskilt, att undervisningens standard bör höjas, om den i något av våra länder ligger under den övriga nordiska nivån.

3. Reformarbetet inom den matematisk-naturvetenskapliga ämnesgruppen bör fortsättas. Samtidigt bör allt det värdefulla inom den nuvarande undervisningen tas till vara. Det bästa slutresultatet uppnås icke genom en våldsam omvälvning utan genom en lugn utveckling. Kongressen anser, att allt vidare kretsar bör delta i försöksundervisningen samt i diskussionen om målsättningen och kursernas utformning samt om resultaten av försöksundervisningen, så snart sådana föreligger.

4. Utvecklingen inom matematiken, fysiken och kemin samt moderniseringen av kurserna ställer nya stora krav på lärarna. Kongressen riktar därför en vädjan till de ansvariga undervisningsmyndigheterna att de måtte ge verksamt ekonomiskt stöd åt en intensiv lärarfortbildning.

DEN 14. SKANDINAVISKE MATEMATIKERKONGRES

afholdes i København den 24.–28. august 1964.

Kongressen vil behandle såvel ren som anvendt matematik. Foredrag kan holdes på skandinaviske sprog, samt engelsk, tysk eller fransk og de kan vare 45 minutter eller 20 minutter.

Programmet vil desuden omfatte mindst én aftensammenkomst og én udflugt. Endvidere tilrettelægges et program for deltagernes ledsagere.

Kongresbidraget er foreløbig fastsat til 100 kr. (danske) for hver deltager og 50 kr. for hver voksen ledsager.

Henvendelser rettes til:

Sekretariatet for Den 14. skandinaviske Matematikerkongres,
Matematisk Institut, H. C. Ørsted Instituttet,
Universitetsparken 5,
København Ø.

NORDSAM 64

Svenska Samfundet för Informationsbehandling anordnar under tiden 18–22 augusti 1964 i Stockholm det sedvanliga symposiet över användning av data-maskiner. Ett antal framstående utländska experter har inbjudits att föreläsa över de allra nyaste resultaten inom centrala forskningsavsnitt eller att ge en samlad överblick över större områden. Vidare inbjudas föredragshållare från de nordiska länderna att medverka. Där så är lämpligt kommer paneldiskussioner att anordnas för att underlätta en allsidig belysning genom att olika åsiktsriktningar beredas tillfälle att framträda.

Preliminärt program kommer att utsändas omkring 20 april. Upplysningar kan erhållas från:

NordSAM 64, Box 474, Solna 4, Sverige.

SUMMARY IN ENGLISH

JENS ERIK FENSTAD: *Thoralf Albert Skolem in memoriam.* (Norwegian.)

An obituary on professor Thoralf Albert Skolem, May 23, 1887–March 23, 1963.

NILS MUSTELIN: *Two astronomical problems.* (Swedish.)

The optimal mode of entering a circular orbit around a planet is discussed in terms of the characteristic velocity (*i.e.*, the sum of the velocity impulses applied), a) for a space ship starting from the planetary surface, b) for a space ship approaching the planet from a very large distance.

GUNNAR BLOM: *Reliability of a compound electronic system.* (Swedish.)

An electronic system, consisting of a given number of identical units, is served by a single repairman. At any moment each unit is either at work or not at work (because of some sort of failure of the unit). When a unit is not working, it is either being repaired or waiting for repair to begin (because the repairman is serving another defective unit). The running-time of each unit, that is, the duration of time from the moment when repair ends up to the moment when a new failure occurs, is assumed to be exponentially distributed. Also, the repair-time is assumed to be exponentially distributed. The system breaks down when and only when all the units are not working.

A measure of reliability of the system is given by the average time-duration from the moment when a breakdown of the system occurs until the moment of the next breakdown. This average, which depends on the number of units and on the means of the exponential distributions mentioned above, is obtained as a special case of a known general formula stating the average recurrence time and the average first passage time of a birth and death process. This formula is derived using elementary arguments.

INNHOLDSFORTEGNELSE

HARALD BERGSTRÖM: En definition av exponentialfunktionen.....	41- 48
KURT-R. BIERMANN: N. H. Abel und Alexander von Humboldt	59- 63
GUNNAR BLOM: Effektivitet hos ett sammansatt elektroniskt system...	163-173
P. ERDÖS: On a combinatorial problem.....	5- 10
FOLKE ERIKSSON: De naturliga talen.....	81- 96
JENS ERIK FENSTAD: Thoralf Albert Skolem in memoriam.....	145-153
DAVID FOG: Nye matematikbøger til nyt matematikpensum.....	116-124
SIGBJØRN HALVORSEN: En generalisering av l'Hospitals regel.....	103-106
PETER KIERKEGAARD-HANSEN: Matrix-symbolik anvendt på differen- tialregning.....	13- 21
NILS MUSTELIN: Två astronautiska problem.....	154-162
KAY PIENE: Utdanning av lærere i matematikk.....	49- 55
HANS RIESEL: Om delbarhetsregler.....	56- 58
LENNART RÅDE: Ordnade stickprov för exponentialfördelade stokas- tiska variabler med tillämpning på minoritetsprincipen.....	107-115
HELGE TVERBERG: En setning om multilineære polynomer.....	11- 12
AIMO TÖRN: Tillämpning av Monte Carlo-metoden på beräkning av fler- dimensionella integraler.....	97-102

Bokmeldinger:

HARVEY COHN: A second course in number theory (CLAS-OLOF SELENIUS)	22
BERNHARD EPSTEIN: Partial differential equations. An introduction (BENT BIRKELAND).....	23
W. T. FISHBACK: Projective and Euclidean geometry (I. JOHANSSON)...	64
CARL-ERIK FRÖBERG: Lärobok i numerisk analys. ANNA LYSEGÅRD: Problemsamling i numerisk analys (ERNST S. SELMER)	65
PAUL FUNK: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik (BENT BIRKELAND).....	174
JOHAN C. H. GERRETSEN: Lectures on tensor calculus and differential geometry (OTTAR YTREHUS).....	67
I. S. GRADSHTEIN: Direct and converse theorems (JENS ERIK FENSTAD)	175
MORTON HAMERMESH: Group theory and its application to physical prob- lems (ALF LOFTHUS).....	24
JOSEPH E. HOFMANN: Frans van Schooten der Jüngere (JOHS. LOHNE).	25
JOSEPH E. HOFMANN: Geschichte der Mathematik (VIGGO BRUN)	175
GUIDO HOEISEL: Integralgleichungen (K. S. KOLDEN).....	176
LARS HÖRMANDER: Linear partial differential operators (JÖRAN FRIBERG)	177
MARK KAC: Statistical independence in probability, analysis and number theory (OLAV REIERSØL).....	26
SERGE LANG: Introduction to differentiable manifolds (PER HOLM)....	125

SAUNDERS MACLANE: Homology (OLAV ARNFINN LAUDAL)	178
OSKAR PERRON: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene (OT- TAR YTREHUS).....	68
M. M. POSTNIKOV: Foundation of Galois theory (JENS ERIK FENSTAD)	126
HERBERT JOHN RYSER: Combinatorial mathematics (HELGE TVERBERG)	179
Mottatte bøker.....	28, 70, 128, 182
Oppgaver	
Oppgaver til løsning.....	31, 75
Løsninger.....	32, 76, 133, 189
Eksamensoppgaver.....	138
Prisoppgaver for gymnasiaster.....	34, 79, 191
Kronikk.....	35, 195
Summary in English.....	40, 80, 144, 197

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

Bind 11 (1963), hefte 1-4.