

DE NATURLIGA TALEN

FOLKE ERIKSSON

Förord. Matematikens första grunder, införandet av de naturliga talen och de enkla räknesätten, är fortfarande (jfr. Landaus »Vorwort für den Kenner« i [8]) ett försummat kapitel i både undervisning och läroböcker. Ändå är ju grundernas stora betydelse för den övriga matematiken självklar. Dessutom erbjuder teorin för de naturliga talen, emedan den inte kräver några förkunskaper, ett ovanligt tillfälle att även för intresserade lekmän (gymnasister?) demonstrera sträng matematisk bevisföring.

En bok som Landaus [8] har den nackdelen att talen betraktas helt isolerade från sina praktiska uppgifter t. ex. som nummer och antal (jfr. Russells kritik av »formalisterna« [10, s. V ff.]). Dessa — och speciellt begreppet *antal* — ges däremot sin rättmätiga centrala ställning i vissa äldre arbeten, t. ex. Dedekind [3] och Helmholtz [6]. Där bevisas bl. a. att antalet element i en godtycklig mängd inte beror på hur man räknar. För att markera betydelsen av denna sats vill jag kalla den »*räkningens fundamentalsats*«. Tyvärr är fundamentalsatsens bevis relativt svårt, men det kan knappast förenklas nämnvärt ens om man förutsätter alla resultat om de naturliga talen som finns i t. ex. [8].

Begreppet antal möjliggör den enkla och naturliga definitionen av produkten ab som en summa av a st. lika tal b . Räkningens fundamentalsats kan också utnyttjas vid bevisen av räknelagarna. En del av dessa blir därigenom något enklare — eller åtminstone »naturligare« — än t. ex. Landaus, utan att förlora något i stringens. De bevis jag ger är troligen rätt gamla, även om jag inte hittat precis allt i litteraturen. Inte heller i övrigt innehåller min artikel något direkt »nytt«, utom möjligen i dispositionen. Artikelns syfte är framförallt att i någon mån försöka sprida kännedom om äldre tankegångar, som trots sin fundamentala betydelse tycks ha blivit nästan totalt bortglömda. Dessutom blir väl min framställning den första i sitt slag på svenska, och som sådan kan den kanske fylla ett visst behov.

Jag har försökt skriva så enkelt och lättbegripligt som möjligt med speciell tanke på eventuella läsare med ringa matematisk träning. Spe-

ciella symboler används därför så litet som möjligt. Själva uppläggningsen anknyter också någorlunda till det sätt på vilket man som barn lär sig att räkna. Några förkunskaper förutsätts inte utöver förmågan att förstå det svenska språket, i synnerhet orden »inte«, »och«, »om . . . , så«, »mängden innehåller« m. fl. Den som så vill kan därför säga att en viss logik och mängdlära förutsättes. Däremot krävs av läsaren främst *vilja att tänka efter* ordentligt. Det gäller ju att sätta sig in i matematiskt tänkande. Den som vill snabbt ta del av artikelns huvudinnehåll kan eventuellt hoppa över alla något längre bevis (t. ex. vid satserna 4, 5, 11, 12, 13, 14, 17 och 18).

1. Peanos axiom m. m. Den viktiga egenskapen hos de naturliga talen 1, 2, 3, . . . är deras inbördes *ordning*, dvs. att 1 kommer före 2 osv. Denna ordning kan t. o. m. sägas vara *den enda* egenskapen hos de naturliga talen som sådana. Ett naturligt tal har i och för sig ingen enda egenskap — det har bara *en viss plats* i den ordnade mängden av alla naturliga tal. Det kan betraktas som blott och bart en *symbol* för denna plats (jfr. Hölders term »Stellenzeichen« [7, s. 8]). Med andra ord: De naturliga talen är i första hand endast hjälpmedel för att beskriva en viss typ av ordning. Denna *ordning* karakteriseras enklast genom *Peanos axiom* nedan.

Eftersom denna artikel handlar uteslutande om naturliga tal, kallas dessa i fortsättningen för enkelhets skull oftast bara »tal«. De särskilda talen betecknas som vanligt med siffror. I sammanhang där flera olika tal kan åsyftas, användes små bokstäver $a, b, \dots$. Därvid underförstås som vanligt att en bokstav, som förekommer på flera ställen i ett sammanhang, på alla dessa ställen betecknar samma tal. Däremot kan ett och samma tal mycket väl betecknas med flera olika bokstäver. Att a och b betecknar samma tal skrives $a=b$. Om $a=b$, kan tydligen a ersättas med b (eller omvänt) i vilket påstående som helst utan att påståendets riktighet (eller oriktighet) påverkas. Detta användes ofta i bevis i det följande. Ett specialfall är den »transitiva lagen« för likhet: Om $a=b$ och $b=c$, så är även $a=c$. Att a och b *inte* betecknar samma tal skrives $a \neq b$.

Följande axiomsystem brukar tillskrivas Peano [9, s. 34], men det hade till stor del skapats redan av Dedekind [3, s. 20].

AXIOM 1. *Det finns ett tal som betecknas 1.*

AXIOM 2. *Till varje tal a finns exakt ett nästa tal. Detta betecknas a' .*

AXIOM 3. *För varje tal a är nästa tal $a' \neq 1$.*

AXIOM 4. *Om »två« tal har samma nästa tal, så är de även själva lika.*
(I formelskrift: Om $a' = b'$, så är även $a = b$.)

AXIOM 5. (*Induktionsaxiomet.*) Om en mängd M av tal

- a) innehåller talet 1, och
- b) för varje tal a som den innehåller, även innehåller nästa tal a' ,
så innehåller M alla tal.

ANM. Att även axiom 5 (eller något motsvarande) behövs för att karakteristiken av de naturliga talens ordning skall vara fullständig ses lätt med något exempel, där ordningen är av annan typ men ändå uppfyller de fyra första axiomen. Ett sådant exempel är mängden av alla naturliga tal och alla negativa heltal i ordningen: $1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots$ (dvs. först kommer alla de naturliga talen och sedan de negativa heltalen inbördes ordnade som motsvarande naturliga tal).

Talen är fritt uppfunna hjälpmedel för tanken (jfr. Dedekinds berömda formulering »... freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen« [3, s. 21]). De kan uppfattas rent abstrakt, som kort och gott *någoting som uppfyller axiomen*. Som jag ser saken är detta det enda (och uttömmande) svaret på frågan: »Vad är ett tal?«. Någon annan *definition* av begreppet tal, än den som sålunda innehålls i axiomen, kan jag inte ge. Om man vill föreställa sig talen mera konkret, t. ex. som vissa siffertecken, måste man i varje fall komma ihåg, att *det enda som betyder något är talens ordning*, sådan den karakteriserats genom vad axiomen säger om »nästa tal«.

Axiomen skiljer sig inte principiellt från förutsättningarna i de särskilda satserna. Man skulle mycket väl kunna klara sig utan speciella »axiom« och i stället ta med alla behövliga förutsättningar i varje sats. Detta skulle dock vara mycket opraktiskt, eftersom de *allmänna förutsättningar* som axiomen innehåller nästan alla behövs i nästan varje sats. För att undvika ideliga upprepningar är det därför lämpligt att formulera dem en gång för alla i början av teorin och ge dem den särskilda benämningen »axiom«. Sedan kan alla dessa allmänna förutsättningar i de särskilda satserna sammanfattas i det lilla ordet »tal« eller helt underförstås.

Det är lämpligt att avsluta 1 med en sats, som hänger mycket nära samman med själva axiomen:

SATS 1. *Varje tal $a \neq 1$ är nästa tal till exakt ett tal b .*

BEVIS. Betrakta den mängd M som består av talet 1 och alla de tal $a = b'$ som är nästa tal till något tal.

- a) M innehåller 1.
- b) M innehåller a' (för varje tal a) eftersom a' är nästa tal till a .

Enligt axiom 5 innehåller då M alla tal, dvs. varje tal $a \neq 1$ måste vara nästa tal till något tal b . Om nu både $a = b'$ och $a = c'$, så vore $b = c$ enligt axiom 4. a kan alltså ej vara nästa tal till »två» olika tal.

ANM. Ett bevis, där induktionsaxiomet 5 utnyttjas på samma sätt som i beviset för sats 1, kallas ett *induktionsbevis*.

2. Ordningsrelationen $<$. Ordningen mellan talen beskrives vanligen med satser av typen » a är mindre än b » eller i formelskrift » $a < b$ ». Vi skall nu se hur relationen $<$ kan definieras uttryckt i axiomens begrepp »nästa tal» samt härleda relationens viktigaste egenskaper. Dessa är ju välkända, och en enkel möjlighet vore att ta en del av dem som axiom. Här gäller det bara att visa, hur de följer ur våra förutsättningar, Peanos axiom. Därvid följer vi i stort sett samma väg som Skolem [11, s. 6ff.]. Emellertid inför vi allra först för varje tal a »mängden N_a av tal som är mindre än eller lika med a ». Dessa mängder spelar en viktig roll i fortsättningen, t. ex. vid numrering (jfr. 3).

För att definiera mängderna N_a får vi naturligtvis inte använda begreppet »mindre än» som vi definierar senare. I definitionen skall vi ange vilka tal som tillhör N_a , utan att därvid använda några andra begrepp än de genom axiomen givna »tal», »1» och »nästa tal» (samt ord som »och» och »mängden innehåller» vilka får uppfattas som i vanligt språkbruk). En sådan definition av N_a kan nu göras *rekursivt*, nämligen först för $a = 1$, sedan för $a = 2$, osv. Allmänt definieras N_a för $a = b'$ med utnyttjande av den föregående definitionen för $a = b$. Vi uppställer sålunda följande (oändliga) »kedja» av definitioner. Den första (1) är möjlig tack vare axiom 1, och tack vare axiom 2 kan man efter varje definition (a) göra en nästa (a').

DEFINITION 1.

(1) Mängden N_1 innehåller endast talet 1.

(2) Mängden N_2 innehåller endast talen 1 och $1' = 2$.

.....

(a') Mängden $N_{a'}$ innehåller a' och varje tal i N_a , men inga andra tal.

.....

Som kortare beteckning för » a tillhör N_b » inför vi » $a \leq b$ ».

Det måste nu *bevisas* att N_a härmed är *entydigt* definierad för *alla* tal a . Låt därför M vara mängden av de tal a , för vilka N_a är entydigt definierad genom definition 1.

a) M innehåller talet 1, ty (1) är en definition av N_1 , och någon mer definition av N_1 finns inte i kedjan på grund av axiom 3.

b) Om M innehåller a , är (a') en entydig definition av $N_{a'}$, och på grund av axiom 4 innehåller kedjan ingen mer definition av $N_{a'}$. M innehåller då även a' .

På grund av a), b) och axiom 5 innehåller M varje tal a , v. s. b.

Nu definierar vi själva ordningsrelationen »mindre än«:

DEFINITION 2. » $a < b$ « skall betyda » $a \leq b$ och $a \neq b$ «. I ord: a säges vara mindre än b , om a tillhör N_b och inte är lika med b .

På grund av definitionerna 1 och 2 kan vi nu utläsa beteckningen $a \leq b$ på det vanliga sättet: » a är mindre än eller lika med b «.

Vi skall nu närmast undersöka egenskaperna hos relationen $\leq$ (eller mängderna N_a). Vi börjar med ett par enkla satser.

SATS 2. $a \leq a'$ (dvs. a tillhör $N_{a'}$) för varje tal a .

BEVIS. Enligt def. 1 innehåller $N_{a'}$ varje tal i N_a , och N_a innehåller a .

SATS 3. $1 \leq a$ (dvs. 1 tillhör N_a) för varje a .

BEVIS (induktion).

a) Mängden M av de tal a , för vilka 1 tillhör N_a , innehåller 1 , enligt definitionen av N_1 .

b) Om M innehåller ett tal a , dvs. om N_a innehåller 1 , så innehåller också $N_{a'}$ talet 1 enligt definitionen av $N_{a'}$ (rad (a') i def. 1). Detta betyder just att M innehåller a' .

Enligt a), b) och axiom 5 innehåller M varje tal a , v. s. b.

Nu tar vi en något svårare sats, en form av den s. k. *transitiva lagen* för ordningsrelationen:

SATS 4. Om $a \leq b$ och $b \leq c$, så är även $a \leq c$.

BEVIS (induktion över c). Låt M vara mängden av alla tal c , för vilka påståendet gäller.

a) M innehåller 1 , ty för $c = 1$ medför förutsättningarna enligt def. av N_1 att även $b = 1$ och $a = 1$.

b) Om c tillhör M , skall vi nu visa att även nästa tal c' gör det, dvs. att $a \leq c'$, om $a \leq b$ och $b \leq c'$, dvs. $b \leq c$ eller $b = c'$ (def. 1 (c')). Om $b \leq c$ måste även $a \leq c$, eftersom c antogs tillhöra M . Då är också $a \leq c'$ enligt def. av $N_{c'}$. Om $b = c'$ innebär förutsättningen att $a \leq b$ just att $a \leq c'$.

På grund av a), b) och axiom 5 måste M innehålla alla tal c , v. s. b.

SATS 5. Om $a \leq b$, så är även $a' \leq b'$.

BEVIS (induktion över b). Låt M vara mängden av de tal b , för vilka påståendet gäller.

- a) M innehåller 1, ty om $a \leq 1$ är $a = 1$ enligt def. av N_1 . Då är $a' = 2 \leq 2$.
 b) Om b tillhör M , skall vi nu visa att även b' gör det, dvs. att $a' \leq b'$, om $a \leq b'$, dvs. $a \leq b$ eller $a = b'$. (b'' betyder nästa tal till b' .) Om $a \leq b$, är $a' \leq b'$, eftersom b antogs tillhöra M . Enligt def. av $N_{b''}$ är då också $a' \leq b''$. Om $a = b'$ är $a' = b''$ och därmed $a' \leq b''$ (fortfarande enligt def. 1).
 På grund av a), b) och axiom 5 måste M innehålla alla tal b , v. s. b. Omvänt gäller också

SATS 6. Om $a' \leq b'$, så är även $a \leq b$.

BEVIS. Att $a' \leq b'$ betyder enligt def. 1 att $a' = b'$ eller $a' \leq b$. Om $a' = b'$ är enligt axiom 4 även $a = b$, och a tillhör då N_b . Om a' tillhör N_b följer det av sats 2 och sats 4 att även a gör det.

För att bevisa, att för godtyckligt givna tal a och b precis en av relationerna $a < b$, $a = b$ och $b < a$ gäller, behöver vi ytterligare två hjälpsatser.

SATS 7. För varje a gäller att nästa tal a' inte tillhör N_a .

BEVIS (induktion).

- a) $1' = 2$ tillhör enligt def. 1 inte N_1 .
 b) Om a' inte tillhör N_a , kan ej heller a'' tillhöra N_a . Ty om a'' tillhörde N_a , skulle enligt sats 6 även a' tillhöra N_a .
 Påståendet följer nu av axiom 5.

ANM. Av sats 7 följer speciellt att $a \neq a'$, eftersom N_a innehåller a men inte a' . Detta medför att olikheten $a \leq a'$ i sats 2 kan skärpas till $a < a'$ (vilket f. ö. kunde ha visats redan där).

SATS 8. Om $a < b$, så är $a' \leq b$.

BEVIS. Enligt def. 2 betyder $a < b$ att $a \leq b$ och $a \neq b$. Då är även $a' \leq b'$ (sats 5) och $a' \neq b'$ (axiom 4). Enligt definitionen av $N_{b'}$ måste då $a' \leq b$.

ANM. Den »spegelvända» satsen: Om $a < b'$, så är $a \leq b$, följer direkt av definitionerna 1 och 2.

SATS 9. Om $a < b$, så gäller inte $b < a$.

BEVIS. Om $a < b$, är $a' \leq b$ enligt sats 8. Om då även $b < a$ och därmed $b \leq a$, skulle vi enligt sats 4 få $a' \leq a$, vilket strider mot sats 7.

Det är lämpligt att här skjuta in den transitiva lagen (sats 4) i dess vanligaste form.

SATS 10. Om $a < b$ och $b < c$, så är även $a < c$.

BEVIS. Förutsättningarna innebär bl. a. att $a \leq b$ och $b \leq c$. Enligt sats 4 är då $a \leq c$. Men vore $a = c$, skulle det enligt förutsättningarna gälla både $a < b$ och $b < a$, vilket är omöjligt enligt sats 9. Alltså är $a < c$.

SATS 11. För »två« godtyckligt givna tal a och b gäller precis en av relationerna $a < b$, $a = b$ och $b < a$.

BEVIS. På grund av def. 2 och sats 9 kan högst en av relationerna gälla. Att någon av dem gäller visar vi nu genom induktion över b . Betrakta mängden M av tal b , sådana att för varje a någon av relationerna gäller.

a) M innehåller 1, ty $1 \leq a$ enligt sats 3.

b) Om M innehåller b , gäller för varje särskilt a någon av tre möjligheter:

1° $a < b$. Eftersom $b < b'$ (anm. efter sats 7) är då enligt sats 10 även $a < b'$.

2° $a = b$. Då är enligt samma anm. $b < b'$, alltså $a < b'$.

3° $b < a$. Enligt sats 8 är då $b' \leq a$, dvs. $b' < a$ eller $b' = a$ (def. 2).

I varje fall gäller alltså någon av de tre relationerna mellan a och b' . b' tillhör alltså M .

På grund av a), b) och axiom 5 innehåller M alla tal, v. s. b.

ANM. I stället för $b < a$ brukar man även skriva $a > b$ (utläses » a är större än b «), men genom att alltid använda det förra skrivsättet kan vi undvara tecknet $>$. En liknande term skall vi dock för bekvämlighets skull införa.

DEFINITION 3. Tal b , sådana att $a < b$, kallas »tal efter a «.

Talen efter a är tydligen enligt sats 11 de tal som inte tillhör N_a .

Följande viktiga sats är en lämplig avslutning på detta avsnitt (jfr. sats 27 hos Landau [8, s. 13]).

SATS 12. Varje mängd M av naturliga tal innehåller ett minsta tal, om den överhuvudtaget innehåller något tal. (a är det minsta talet i M , om a tillhör M och $a < b$ för varje annat tal b i M).

BEVIS. Låt P vara mängden av alla tal p , sådana att $p \leq m$ för alla m i M . Eftersom M antogs innehålla något tal m , finns det ett tal m' som inte tillhör P på grund av sats 11, då $m < m'$ (anm. efter sats 7). P innehåller alltså ej alla tal. Däremot innehåller P talet 1 enligt sats 3. Då måste P innehålla något tal a , sådant att a' ej tillhör P , ty annars skulle P på grund av axiom 5 innehålla alla tal. Då a tillhör P , är $a \leq m$ för varje m i M . Men a måste självt tillhöra M , ty annars vore för varje m i M $a < m$ och därmed $a' \leq m$ enligt sats 8, vilket strider mot att a'

ej tillhör P . a tillhör således M och $a < m$ för varje annat tal m i M , v. s. b.

3. Numrering, räkning och antal. Talen användes som alla vet i första hand för att *räkna* »elementen» i en godtycklig mängd genom att *numrera* dem. Vid sådana numreringar användes de delmängder N_a av mängden N av alla (naturliga) tal som vi infört och studerat i 2.

DEFINITION 4. En tillordning mellan elementen i en godtycklig mängd M och talen i antingen N eller någon av delmängderna N_a ($a = 1, 2, \dots$) kallas en *numrering* av M , om 1° mot varje element m i M svarar precis ett tal $n(m)$ i N_a resp. N , 2° mot varje tal i N_a resp. N svarar precis ett element i M . Talet $n(m)$ kallas i så fall m :s *nummer*, och N_a (resp. N) kallas *nummernängd* till M . Om M har en numrering säges M vara *numrerbar*, annars kallas M *icke numrerbar*.

Vi kommer nu till den i förordet nämnda *räkningens fundamentalsats* (Stolz 1885 [12, s. 9], Helmholtz 1887 [6, s. 92], Dedekind 1887 [3, s. 54]. Jfr. även t. ex. Hölder [7, s. 15ff.], Brouwer [1, s. 248], van der Waerden [13, s. 10] och Wilder [14, s. 68].) Här tar vi satsen i tre etapper (sats 13–15).

SATS 13. *En numrering av en mängd N_a med N_b som nummernängd är möjlig endast om $a = b$.*

BEVIS (induktion över a).

a) För $a = 1$ är påståendet riktigt: Annars skulle mot talet 1 i N_a svara åtminstone »två» olika tal 1 och b i N_b (jfr. sats 3), i strid mot definitionen av numrering.

b) Vi skall nu visa, att om påståendet är sant för $a = c$, så måste det vara sant även för $a = c'$. Antag nämligen motsatsen, dvs. att N_c hade en numrering med en nummernängd N_x med $x \neq c'$. Som i a) ser vi att $x \neq 1$, varför enligt sats 1 $x = d'$, där $d \neq c$ enligt antagandet. Vid numreringen av N_c har c' ett visst nummer $n(c')$. Detta ger två möjligheter.

1° $n(c') = d'$. I så fall vore (på grund av def. 1 och sats 7) talen i N_c numrerade med talen i N_d , vilket strider mot »induktionshypotesen» att satsens påstående var sant för $a = c$.

2° $n(c') = y \neq d'$. Enligt definitionen av numrering är då d' nummer för ett tal $z \neq c'$ i N_c . Om talen z och c' får byta nummer (så att $n_1(z) = y$, $n_1(c') = d'$) skulle vi åter få en numrering enligt 1°, och därmed samma slutsats: satsens påstående gäller för $a = c'$.

Den mängd tal a , för vilka påståendet gäller måste nu enligt a), b) och axiom 5 vara hela N .

SATS 14. *Mängden N av alla naturliga tal kan ej numreras med någon nummermängd N_a .*

BEVIS. Om det finnes en numrering $n(x)$ av N med N_a som nummermängd, kunde den sammansatta tillordningen

$$(i) \quad n(x) \rightarrow x \rightarrow x' \rightarrow n(x')$$

utnyttjas för att konstruera en numrering av N_a som strider mot sats 13. Man kan anta att $n(1)=a$. Ty om den ursprungliga numreringen n_0 vore sådan att $n_0(1) \neq a$ finnes ett $x \neq 1$ med $n_0(x)=a$, och en numrering n av önskat slag fås om talen 1 och x byter nummer. Nu kan varje tal i N_a , eftersom det är nummer $n(x)$ för något tal x , genom (i) tillordnas talet $n(x')$ som nummer. Därigenom fås en numrering av N_a med en nummermängd bestående av alla tal i N_a utom a . Om $a \neq 1$ och $a=b'$ (sats 1) är denna nummermängd enligt def. 1 och sats 7 N_b , vilket strider mot sats 13. $a=1$ är lika orimligt.

SATS 15. *Ingen mängd kan ha flera olika nummermängder.*

BEVIS. Antag att en viss mängd M hade »två» numreringar med olika nummermängder, antingen N_a och N_b eller N_a och hela N . Då vore varje tal x i N_b (eller N) nummer för ett bestämt element m i M , vilket i sin tur hade ett visst nummer $n(m)$ i N_a vid den andra numreringen. Den sammansatta tillordningen

$$x \rightarrow m \rightarrow n(m)$$

vore en numrering av N_b eller N med N_a som nummermängd. Detta är omöjligt enligt sats 13 eller 14.

DEFINITION 5. Om en mängd M har nummermängden N_a , kallas a (det »största« talet i N_a) för *antalet* element i M .

Sats 15 visar att antalet beror endast av mängden M och ej av numreringen.

DEFINITION 6. Om en mängd M har en numrering med någon mängd N_a , kallas den *ändlig*. Om M är numrerbar endast med användning av hela N , kallas M *numrerbart oändlig*.

När talen används som antal, brukar de kallas *kardinaltal* till skillnad från *ordinaltal*, som representerar olika typer av ordning. Här har ordinaltalen i form av mängderna N_a kommit först, medan kardinaltalen inte införts förrän nu. Kardinaltalet »två» har dock för enkelhets skull an-

vänts på ett par tidigare ställen, bl. a. nyss i beviset för sats 15. Naturligtvis borde jag hittills ha skrivit t. ex. »en mängd N_a och en annan mängd N_b » i stället för »två mängder N_a och N_b ». Men jag har behållit det bekväma ordet »två» och nöjt mig med att påpeka oegentligheten här och genom citationstecken.

Praktiskt är förstås kardinaltalen viktigast. Många anser också att de logiskt sett bör komma först. Därvid vill man definiera t. ex. kardinaltalet fem som »klassen av alla mängder med fem element». (»Klass» är en term med samma allmänna och obestämda betydelse som »mängd». Vi använder den här för att slippa skriva »mängd av mängder».) Men så kan man inte göra direkt, eftersom talet »fem» behövs i denna definition.

Därför definierar man först vad som menas med att två mängder har samma antal element, eller är *ekvivalenta*, utan användning av tal. Två mängder M och N kallas nämligen ekvivalenta, om det mellan elementen i de båda mängderna finns en tillordning med de egenskaper 1° och 2° som en numrering skall ha enligt vår def. 4. Sedan kan man indela alla mängder i s. k. ekvivalensklasser, varvid ekvivalenta mängder hänförs till samma klass. Bland ekvivalensklasserna igenkänner man lätt enhetsklassen (kardinaltalet 1). Genom successiv förening (jfr. def. av »föreningsmängd» i sats 22) av mängder ur enhetsklassen kan man ordna de ekvivalensklasser som består av ändliga mängder efter mängdernas storlek. Slutligen skulle nu t. ex. fem definieras som den femte av dessa ekvivalensklasser. Men problemet att ordningstalet »femte» förekommer i definitionen återstår! En annan variant är att definiera fem som den klass, dit föreningsmängder av fem olika mängder ur enhetsklassen hör.

Whitehead och Russell definierar i Principia Mathematica inte så stora tal som 5. Men 2 definieras [s. 359 (!)] som klassen av alla föreningsmängder av X och Y , där X och Y är olika mängder ur enhetsklassen. De undviker sålunda att använda ordet »två» genom att nämna mängderna X och Y med beteckningar. Detta innebär väl i huvudsak att de definierar »par» genom jämförelse med ett speciellt standardpar, nämligen de symboler som jag här betecknat X och Y . Dessa spelar en roll som motsvarar den mängden N_2 spelar i vår definition av antalet 2. Då man ändå måste ha ett standardpar, tycker jag nog att N_2 är det enklaste. För övrigt möter en definition av större tal à la Principia Mathematica sådana praktiska svårigheter, att man förstår varför författarna stannat vid 2.

I varje fall anser jag det uppenbart, att en teori grundad på kardinaltalen som ekvivalensklasser måste bli oerhört mycket mer komplicerad än t. ex. denna artikel. Den medför många andra problem än de som berörts här (t. ex.: Ändras talet 5, varje gång det föds femlingar?). Vid

räkning (= bestämning av antal) torde kardinaltalen i Principia Mathematicas mening vara till föga hjälp för vanligt folk.

4. Addition. Numrering och räkning enligt 3 kan tillämpas på mängder av vilka slags element som helst. Man kan ju t.ex. räkna folk, äpplen eller dagar. Speciellt viktigt här är att man naturligtvis kan räkna även mängder av tal. Bl. a. kan talen efter a (def. 3) numreras på ett sådant sätt att a' får nummer 1, varefter nästa tal får nästa nummer osv. Det tal som vid denna numrering av talen efter a får nummer b , kallas *summan* av a och b och betecknas $a + b$ (jfr. Helmholtz [6, s. 75]). Denna definition tillämpas direkt i den primitiva metoden att addera genom att räkna på fingrarna el. dyl. Vi måste emellertid *bevisa* bl. a. att *varje* tal b blir nummer för ett tal $a + b$. Därför ger vi först definitionen av *addition* i sträng rekursiv form som vid def. 1.

DEFINITION 7. (1) $a + 1 = a'$
 (2) $a + 2 = (a + 1)'$

 (b') $a + b' = (a + b)'$

ANM. 1. Parenteserna i högerleden användes som vanligt för att markera att det som står inom parentes skall betraktas som en helhet i förhållande till det övriga. I högra ledet av (b') står alltså: nästa tal till summan av a och b . I vänstra ledet står däremot: summan av a och nästa tal till b , vilket fullständigare kunde skrivas $a + (b')$.

ANM. 2. (b'), det s. k. »Grassmanns additionsaxiom« [5, s. 301], är det formella uttrycket för rekursionsföreskriften »nästa tal får nästa nummer«.

Vi ger ett induktionsbevis för att def. 7 är *entydig* och *allmän*. Låt för ett godtyckligt givet a M vara mängden av de tal b för vilka def. 7 innehåller precis en definition av $a + b$.

a) M innehåller 1, ty (1) är en definition av $a + 1$, och den är den enda på grund av axiom 3.

b) Om M innehåller b , är (b') en entydig definition av $a + b'$, och den är den enda på grund av axiom 4. M innehåller då även b' .

På grund av a), b) och axiom 5 innehåller M alla tal, v. s. b.

ANM. Det förefaller sannolikt — ja nästan självklart — att Peanos definition av $a + b$ [9, s. 35] bör tolkas på samma sätt som vår def. 7 (jfr. Cassina [2]). Jag hoppas, att jag vid def. 1 har lyckats visa, att en sådan rekursiv definition inte behöver förutsätta att man först infört

ordningsrelationen $<$. I så fall synes »Grandjots invändning« mot Peano (»Man har ju inte alls definierat $a+b$ «) [8, s. X] orättvis och svårförklarlig.

SATS 16. *För alla tal a och b är $a < a+b$.*

BEVIS (induktion över b).

a) För $b=1$ är $a < a' = a+b$ (anm. efter sats 7).

b) Om $a < a+b$, följer det eftersom $a+b < (a+b)'$ (samma anm.) av sats 10 att $a < (a+b)' = a+b'$.

Satsen följer på grund av axiom 5 av a) och b).

SATS 17. *För alla tal a , b och c med $b < c$ är $a+b < a+c$.*

BEVIS. Vi visar först att

(ii) $a+b \leq a+d$, om $b \leq d$

genom induktion över d .

a) (ii) gäller för $d=1$, ty om $b \leq 1$ är $b=1$ och $a+b=a'=a+d$.

b) Om (ii) gäller för d , skall vi visa att (ii) gäller för d' , dvs. att $a+b \leq a+d'$, om $b \leq d'$.

1° Om $b < d'$, är $b \leq d$ (anm. efter sats 8) och därför enligt (ii) $a+b \leq a+d$. Men $a+d < (a+d)' = a+d'$. Härav följer nu $a+b < a+d'$ (direkt om $a+b=a+d$, annars med sats 10).

2° Om $b=d'$, är $a+b=a+d'$.

På grund av a), b) och axiom 5 gäller (ii) för alla d .

Av (ii) följer sats 17 som i fall 1° under b), ty då $b < c$, är $c=d'$ för något d (sats 1).

SATS 18. *För alla tal a och b med $a < b$ finns precis ett tal c , så att $a+c=b$.*

BEVIS. Det finns *högst* ett sådant tal c , ty om c och d vore två olika sådana tal, vore enligt sats 11 antingen $c < d$ eller $d < c$. Enligt sats 17 vore då $a+c < a+d$ resp. $a+d < a+c$. Det återstår därför att visa att det för varje b efter a finns *något* c . Om det inte vore så, skulle mängden M av tal b efter a , för vilka det inte funnes något c så att $a+c=b$, enligt sats 12 innehålla ett minsta tal m . $m \neq a'$, eftersom $a' = a+1$ enligt def. 7. Då $a < m$, måste då (sats 8) $a' < m = d'$ (sats 1), och $a' \leq d$ (anm. efter sats 8). Då d inte skulle tillhöra M , funnes ett c så att $a+c=d$. Men då vore enligt def. 7 $a+c' = (a+c)' = d' = m$, vilket strider mot att m tillhörde M . M kan därför inte innehålla något enda tal, v. s. b.

ANM. Med satserna 16 och 18 har vi (äntligen!) visat att tillordningen $a+b \rightarrow b$, definierad genom def. 7, verkligen ger en sådan *numrering* av

talen efter a som nämndes i inledningen till detta avsnitt. Talen efter a bildar alltså en numrerbart oändlig mängd.

I samband med sats 18 är det lämpligt att definiera *subtraktion*.

DEFINITION 8. Talet c i sats 18 betecknas $b - a$ och kallas *skillnaden* mellan b och a .

Vår behandling av sambanden mellan additionen och ordningsrelationen bör kompletteras med följande omvändning till sats 17.

SATS 19. Om $a + b < a + c$ för något tal a , så är även $b < c$.

BEVIS. Enligt sats 11 gäller antingen $b < c$, $b = c$ eller $c < b$. Om $b = c$, vore $a + b = a + c$, vilket enligt def. 2 strider mot förutsättningen $a + b < a + c$. Om $c < b$, vore enligt sats 17 $a + c < a + b$, vilket enligt sats 9 strider mot förutsättningen. Alltså återstår endast möjligheten $b < c$.

Enligt def. 7 bör man skilja mellan $a + b$ och $b + a$. Vi kan dock nu visa, att dessa båda summor är lika.

SATS 20. (*Kommutativa lagen för addition.*) För alla tal a och b är $a + b = b + a$.

BEVIS. Antalet tal i N_{a+b} är naturligtvis $a + b$, vilket inses om vart och ett av dessa tal får vara sitt eget nummer. Men samma tal kan också numreras t. ex. så, att man först numrerar talen efter a i N_{a+b} med talen i N_b som vid def. 7, och därefter numrerar talen $x \leq a$ (alla dessa tillhör N_{a+b} enligt sats 4) i ordning med b' osv. Vid denna numrering får talet a nummer $b + a$ enligt definitionen av $b + a$. Då därmed alla tal $x \leq a + b$ numrerats, är deras antal $b + a$, och enligt sats 15 är då $b + a = a + b$.

Ordningen mellan två tal som adderas inverkar alltså ej på summan. Vid addition av tre tal inverkar det ej heller vilka två tal man först adderar:

SATS 21. (*Associativa lagen för addition.*) För alla tal a , b och c är $(a + b) + c = a + (b + c)$.

BEVIS. Det gäller att visa att talet $(a + b) + c$ vid den numrering av talen efter a som användes i def. 7 får nummer $b + c$. Vid denna numrering får $a + b$ definitionsmässigt nummer b . Numreringen av talen efter $a + b$ kan fås genom sammansättning av den enligt def. av $(a + b) + c$ givna numreringen med talen i N_c och den numrering av talen efter b som definierar $b + c$:

$$(a + b) + x \rightarrow x \rightarrow b + x \quad (x \leq c).$$

ANM. Genom upprepad användning av satserna 20 och 21 fås

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= a+(b+c) = a+(c+b) = (a+c)+b \\ &= (c+a)+b = c+(a+b) = c+(b+a) = (c+b)+a \\ &= (b+c)+a = b+(c+a) = b+(a+c) = (b+a)+c,\end{aligned}$$

dvs. summan av tre tal är oberoende av såväl ordningen mellan talen (*termerna*) som hur de adderas. På samma sätt inses att detta gäller allmänt för summan av godtyckligt många tal. Beviset kan genomföras strikt med induktion över antalet termer (se hänvisning nedan vid multiplikationen). Man kan därför utan oklarhet skriva t. ex. $a+b+c+d$ i stället för $a+[(b+c)+d]$.

Additionens praktiska betydelse beror på följande sats.

SATS 22. Om a och b är antalet element i två mängder M_a resp. M_b , och inget element tillhör båda mängderna, så är $a+b$ antalet element i föreningsmängden, dvs. den mängd som består av alla element i M_a och alla element i M_b .

BEVIS. Ur två numreringar av M_a resp. M_b fås en numrering av föreningsmängden, t. ex. genom att för varje $x \leq b$ numret $a+x$ ges till element nummer x i M_b , medan elementen i M_a får behålla sina nummer.

Totala antalet element i två (eller flera) mängder kan alltså bestämmas genom att man räknar varje mängd för sig och sedan adderar antalen.

5. Multiplikation. Enligt anm. till sats 21 kan man tala om *summan* av ett godtyckligt antal termer utan att precisera hur dessa skall adderas. I det viktiga specialfallet att alla termerna inbördes är lika är det praktiskt att införa ett särskilt räknesätt, *multiplikation*.

DEFINITION 9. $ab = \text{produkten}$ av a och b är en summa där antalet termer är a och varje term är b .

ANM. Multiplikationens praktiska betydelse framgår direkt av sats 22 med efterföljande kommentar: ab är totala antalet element i a st. mängder med b element vardera. Ur praktisk synpunkt beror därför multiplikationens användbarhet på att det i verkligheten ofta förekommer att man vill räkna mängder, som är sammansatta av ett antal »lika stora« delmängder (eller åtminstone kan tänkas uppdelade i sådana).

Även här gäller en *kommutativ lag*: de båda på helt olika sätt definierade talen ab och ba visar sig vara lika.

SATS 23. För alla tal a och b är $ab = ba$.

BEVIS (jfr. Hölder [7, s. 24] och Dirichlet [4, s. 1 ff.]). Mängden M av olika talpar (x, y) med $x \leq a$ och $y \leq b$ kan räknas på olika sätt. Den är föreningsmängd av a st. mängder M_x , där M_x betecknar mängden av alla talpar i M med ett givet tal $x \leq a$ som första tal. Genom att använda y som nummer för elementet (x, y) i M_x , ser man att antalet element i M_x är b . Enligt sats 22 med efterföljande kommentar är då antalet element i M summan av a st. tal b , dvs. ab .

Å andra sidan är M föreningsmängd av b st. mängder M'_y , som var och en består av alla talpar i M med ett och samma andra tal $y \leq b$. För varje M'_y finner man antalet element vara a , genom att numrera (x, y) med x . Antalet element i M är då enligt sats 22 med kommentar ba . Eftersom antalet element i M är entydigt bestämt (sats 15), måste $ab = ba$, v. s. b.

Produkten av två tal (*faktorer*) är alltså oberoende av ordningen mellan dessa. Likaså är produkten av tre tal oberoende av vilka två av dessa man multiplicerar först (*associativa lagen för multiplikation*):

SATS 24. För alla tal a , b och c är $(ab)c = a(bc)$.

BEVIS. $(ab)c$ är enligt def. 9 summan av ab st. termer c . Enligt anm. till sats 21 och kommentaren efter sats 22 kan dessa termer grupperas i a st. parenteser med b st. termer i varje. Summan inom varje parentes är då definitionsenligt bc , och hela summan är $a(bc)$, v. s. b.

ANM. Genom upprepad användning av satserna 23 och 24 bevisar man precis som vid additionen (anm. till sats 21) att alla de 12 möjliga sätten att multiplicera tre givna tal ger samma produkt. Allmänt inses på samma sätt att ett godtyckligt antal givna tal har en entydigt bestämd produkt, oberoende av i vilken ordning man multiplicerar dem. Ett fullständigt genomfört induktionsbevis för detta finns hos Dirichlet [4, s. 3 ff.].

Vi kommer nu till den sista av de grundläggande räknelagarna, den som ger möjlighet att »multiplicera in» (eller »bryta ut») en faktor i en parentes.

SATS 25. (*Distributiva lagen.*) För alla tal a , b och c är $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

ANM. Enligt den vanliga konventionen att produkter i första hand skall uppfattas som helheter får parenteserna i högra ledet slopas.

BEVIS. Summan av a st. termer b och a st. termer c är enligt anm. till sats 21 densamma, antingen termerna grupperas i a st. par $b+c$ som i vänstra ledet eller i två parenteser innehållande alla termer b resp. alla termer c som i högra ledet.

Till sist skall vi här visa de två satser om ordningens bevarande vid multiplikation, som är analoga med satserna 17 och 19 för addition och grundläggande för räkning med »olikheter» (dvs. ordningsrelationer).

SATS 26. För alla tal a , b och c med $b < c$ är $ab < ac$.

BEVIS. Enligt sats 18 och def. 8 är $c = b + (c - b)$, varför

$$ac = a[b + (c - b)] = ab + a(c - b)$$

enligt sats 25. Men enligt sats 16 är $ab < ab + a(c - b)$.

SATS 27. Om $ab < ac$ för något tal a , så är även $b < c$.

BEVIS. Enligt sats 11 gäller antingen $b < c$, $b = c$ eller $c < b$. Om $b = c$ vore $ab = ac$, vilket enligt def. 2 strider mot förutsättningen $ab < ac$. Om $c < b$, vore enligt sats 26 $ac < ab$, vilket strider mot förutsättningen på grund av sats 9. Alltså återstår endast möjligheten $b < c$.

LITTERATUR

- [1] L. E. J. BROUWER: *Zur Begründung der Intuitionistischen Mathematik*, I. Math. Ann. 93 (1925), pp. 244–257.
- [2] U. CASSINA: *Sulla critica di Grandjot all'aritmetica di Peano*. Boll. Un. Mat. Ital. (ser. 3) 8, (1953), pp. 442–447.
- [3] R. DEDEKIND: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig 1887.
- [4] L. DIRICHLET: *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Braunschweig 1863.
- [5] H. GRASSMANN: *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten* (1861) i: *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, Band II, Theil 1. Leipzig 1904.
- [6] H. V. HELMHOLTZ: *Zählen und Messen, erkenntnis-theoretisch betrachtet* (1887) i: *Schriften zur Erkenntnistheorie*. Berlin 1921.
- [7] O. HÖLDER: *Die Arithmetik in strenger Begründung*. Leipzig 1914.
- [8] E. LANDAU: *Grundlagen der Analysis*. Leipzig 1930.
- [9] G. PEANO: *Arithmetices principia nova methodo exposita* (1889) i: *Opere scelte*, vol. II. Rom 1958.
- [10] B. RUSSELL: *The principles of mathematics*, 2. ed., London 1937.
- [11] T. SKOLEM: *Begründung der elementaren Arithmetik*. Videnskapselskapets Skrifter, I. Mat.-Naturv. Klasse, No. 6, Oslo 1923.
- [12] O. STOLZ: *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, 1. Teil. Leipzig 1885.
- [13] B. L. V. D. WAERDEN: *Moderne Algebra*. Berlin 1931.
- [14] R. WILDER: *Introduction to the foundations of mathematics*. New York, London 1952.

TILLÄMPNING AV MONTE CARLO-METODEN PÅ BERÄKNING AV FLERDIMENSIONELLA INTEGRALER

AIMO TÖRN

1. Inledning. Att analytiskt försöka beräkna flerdimensionella bestämda integraler är i allmänhet ej en lätt uppgift. Endast i de fall då integrationsområdet är symmetriskt och/eller integranden speciellt enkel kan man vänta sig ett exakt resultat.

Om en analytisk lösning ej går att finna, måste man nöja sig med ett approximativt resultat, t. ex. ett vägt medeltal av integrandens värden i ett antal punkter. Vi kommer härmed över till metoder, som går under det gemensamma namnet numerisk integration.

För numerisk kvadratur (integration över ett intervall) har en mängd olika formler härletts, alltfrån de enklaste, t. ex. trapetsregeln och Simpsons formel, till mera komplicerade och speciella, t. ex. de som uppställts av Chebyshev, Cote, Gauss och Stiefel (se även [1]), för att bara nämna några.

Mycket svårt är det emellertid att härleda formler för numerisk integration i flera dimensioner även om integrationsområdet är symmetriskt. Här har man funnit ett gebit, inom vilket man under det senaste decenniet, främst tack vare de snabba datamaskinerna, med framgång kunnat tillämpa Monte Carlo-metoden.

Användning av Monte Carlo-metoden för beräkning av en bestämd integral I innebär att man betraktar en stokastisk process med en stokastisk variabel vars medelvärde är I . Karakteristiskt för metoden är den slumpvisa provtagningen, som gör den enkel att tillämpa oavsett hur integrationsområdet ser ut.

Vid den enklaste tillämpningen av Monte Carlo-metoden uppskattas integralen I som (se även [3])

$$(1) \quad I = \int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

dvs. som produkten av integrationsområdets storlek V (i detta fall är $V=1$) och medeltalet av N integrandvärden $f(x_i)$. Talen x_i är rektangulär-

fördelade (likformigt fördelade) s. k. slumpstal, dvs. värden av en rektangulärfördelad stokastisk variabel. Felet vid denna metod avtar som $N^{-1/2}$.

2. Slumpstal. Då vid Monte Carlo-beräkningar ett mycket stort antal slumpstal behöves och då datamaskinens inläsning och koppling till minnet är relativt långsamma operationer jämförda med dess aritmetiska operationer, är det ytterst ineffektivt att använda färdiga slumpstal i form av en tabell. Vi måste i stället låta maskinen framställa slumpstalen allteftersom de behöves. Matematiska deterministiska metoder är därvid att föredraga framom fysikaliska, emedan de förra tillåter en reproduktion av slumpstalen och sålunda gör det möjligt att statistiskt testa deras kvalitet.

Vid matematiska metoder bildas slumpstalen enligt rekursionsformler. Emedan talen kan anges med ett begränsat antal siffror, återkommer de i perioder, vilkas längd beror av den metod enligt vilken de framställs. Dessa tal är därför i sträng mening inte slumpstal, och benämnes även pseudo-slumpstal. I praktiken kan blott ett ändligt antal slumpstal tagas med i beräkningarna och om pseudo-slumpstalen period är lång nog kan vi därför använda dem lika gärna som slumpstalen.

Rektangulärfördelade slumpstal har tidigare omnämnts. Vi definierar dem på följande sätt:

Talen x_i i en talföljd X säges vara rektangulärfördelade i intervallet $[0, 1]$ om för antalet $n(\alpha)$ av de tal i X , vilka är mindre än α ($0 \leq \alpha \leq 1$), gäller att $n(\alpha)/n \rightarrow \alpha$ då $n \rightarrow \infty$.

De mest använda metoderna att bilda rektangulärfördelade pseudo-slumpstal i en datamaskin är de s. k. kongruensmetoderna, som kan indelas i två grupper, de multiplikativa [8, 9, 12, 13] och de additiva [9, 11]. För att kunna lita på dessa pseudo-slumpstal, bör man undersöka deras period [2, 11] och testa dem statistiskt [8, 12].

Vi skall beskriva två metoder för generering av pseudo-slumpstal, av vilka den multiplikativa kongruensmetoden härrör från Lehmer, den additiva från Rotenberg [11].

I. *Multiplikativ kongruensmetod* (se även [5]).

Utgångsvärdena ϱ och x väljes godtyckliga, varefter talen bildas enligt följande lag:

$$(2) \quad x_{r+1} \equiv x \cdot x_r \pmod{M},$$

där $x_0 = \varrho$, så att x_r är av formen $\varrho x^r \pmod{M}$. Emedan de flesta maskiner räknar i det binära talsystemet, är det bekvämt att välja $M = 2^l$, där l bestämmes som det antal binära siffror, som i maskinen är reserverat för ett tal. Enligt Barnett [2] erhålles den maximala perioden, 2^{l-2} tal, om

$$(3) \quad \begin{aligned} x &\equiv \pm 5 \pmod{8}, \\ g &\text{ udda.} \end{aligned}$$

II. *Additiv kongruensmetod.*

Vi väljer utgångsvärdena a och c godtyckliga, och bildar talen enligt rekursionsformeln

$$(4) \quad x_{r+1} \equiv (g^a + 1)x_r + c \pmod{g^l}, \quad g = 2 \text{ eller } 10,$$

där $a \geq 2$ och c udda. Metoden lämpar sig både för binärmaskin ($g=2$) och decimalmaskin ($g=10$), och ger maximal period dvs. g^l tal. Ett nytt tal x_{r+1} innebär t. ex. i det binära fallet för maskinen en flyttning av x_r om a steg till vänster ($2^a x_r$) och två additioner ($2^a x_r + x_r + c$). Emedan multiplikation är en långsammare operation än flyttning och addition är metod II i allmänhet snabbare än metod I.

De pseudo-slumptal x_r , som erhålles enligt (2) och (4) ligger i intervallen $[0, g^l]$. Talen $g^{-l}(\beta - \alpha)x_r + \alpha$ ligger däremot i det godtyckliga intervallet $[\alpha, \beta]$.

3. Flerdimensionella integraler. För att erhålla rektangulärfördelade punkter i n dimensioner, t. ex. i en n -dimensionell hyperkub, avdelar vi pseudo-slumptalen, bildade enligt någon av metoderna ovan, i grupper om n element i varje och betraktar dessa som koordinater för punkterna. Att de så erhållna punkterna faktiskt är rektangulärfördelade i n dimensioner är ej utan vidare klart. Davis och Rabinowitz [5] har dock testat dylika sekvenser, genererade enligt metod I, genom att beräkna volymen av n -dimensionella hypersfärer ($n=2, 3, \dots, 12$) och funnit förfarandet vara tillförlitligt.

För flerdimensionella integraler gäller en formel av samma typ som (1):

$$(5) \quad \int_K f(X) dx_1 \dots dx_n \approx \bar{I} = \frac{V}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i).$$

Vi erhåller rektangulärfördelade punkter i området K genom att inskriva K i en n -dimensionell hyperkub, välja rektangulärfördelade punkter i kuben på ovan angivet sätt, och av dessa punkter beakta endast dem som faller i K . Härur får vi $V = \frac{N}{m} V_{\text{kub}}$, där m är antalet punkter i kuben och N de av dessa som faller i K . I de fall då volymen är känd möjliggör detta samband en välkommen kontroll av beräkningarna.

För att återgå till skattningen (5), kan man vid beräkningarna lämpligen successivt välja $N=2^v$ ($v=1, 2, \dots$), för att kunna avgöra i vilken mån $\bar{I}$ »stabiliserar» sig.

Som redan i inledningen nämnts avtar felet i Monte Carlo-metoden som $N^{-1/2}$, där N är antalet punkter som tagits med vid beräkningarna. Proportionalitetskonstanten åter är beroende av integranden och integrationsområdet.

För beräkning av integraler med singulära integrander gäller det att använda Monte Carlo-metoden med urskillning. T. ex. för endimensionella integraler med singulariteter av högre ordning än hos $x^{-1/2}$ för $x=0$ ger metoden felaktiga värden. Vidare är i detta fall den statistiska medelavvikelsen bedrägligt liten, vilket kunde leda till oriktiga antaganden angående resultatens tillförlitlighet [10].

4. Ett exempel. De här beskrivna metoderna har av författaren tillämpats på några integraler av intresse inom den moderna mångpartikelteorin. Emedan kravet på noggrannhet i resultaten ej sträckte sig längre än till en god uppskattning av storleksordningen av de olika integralerna, och då dessa var synnerligen besvärliga att analytiskt beräkna, syntes Monte Carlo-metoden i detta fall, trots singulära integrander [10], vara en utmärkt lösningsmetod. För kontroll av Monte Carlo-metoden uträknades bland andra följande niodimensionella integral även genom serieutveckling och integration term för term:

$$(6) \quad J = \int_K \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{[q \cdot (q + k_1 + k_2)][q \cdot (q + k_2 + k_3)]}, \quad K \begin{cases} |k| < k_f \\ |k + q| > k_f \\ k = k_1, k_2, k_3. \end{cases}$$

Här är k_f en konstant och vektorn q är bestämd till sin riktning medan dess belopp q är en parameter. Integrationsområdet K definieras av att k_i ($i=1, 2, 3$) 1) för $q > 2k_f$ ligger i sfären $|k_i| < k_f$, och 2) för $q < 2k_f$ i samma sfär, dock ej i den del, som är gemensam med en annan sfär med samma radie, belägen så att sfärernas medelpunkter sammanbindes av vektorn q , som utgår från den senare sfärens medelpunkt. För volymen V av integrationsområdet K gäller

$$V = \left[\frac{4\pi}{3} - 2\pi h^2 \left(1 - \frac{h}{3} \right) \right]^3 k_f^9$$

med

$$h = \begin{cases} 1 - \frac{q}{2k_f} & \text{för } q < 2k_f \\ 0 & \text{för } q > 2k_f. \end{cases}$$

Som slumpstal användes pseudo-slumptalen $2(x_r - \frac{1}{2})$, vilka ligger i intervallet $[-1, 1]$, där i enlighet med metod I

$$z_{r+1} \equiv z_0 \cdot z_r \pmod{2^{32}}, \quad z_0 \equiv 5^{17} \pmod{2^{32}}$$

$$x_r = 2^{-32} z_r.$$

I tabell I jämför vi, för några värden på parametern q , de resultat vi erhöill enligt Monte Carlo-metoden med de på analytisk väg beräknade.

Monte Carlo-beräkningarna utfördes på datamaskinen Wegematic 1000 (Alwac III E) vid Åbo Räknecentral.

Tabell I

$\frac{q}{2k_f}$	$\frac{J}{k_f^5}$	
	Riktigt värde	M.C. med 1024 punkter
0.6	11.8	11.9
1.0	15.9	16.4
1.2	16.5	16.5
1.4	15.2	15.1
1.6	13.1	13.1
1.8	10.1	10.0
2.4	2.7	2.8
3.0	1.0	1.0

Resultat erhållna vid Monte Carlo-beräkningar av den niodimensionella integralen J (se (6)) för olika värden på parametern q , jämförda med motsvarande, analytiskt uträknade resultat.

Tabellen visar att det relativa felet i Monte Carlo-värdena ej överstiger 5%, varför resultaten måste anses vara tillfredsställande.

5. Förbättrad metodik. I det behandlade exemplet erhöill vi med Monte Carlo-metoden resultaten snabbare och med mycket mindre arbete än med det analytiska förfarandet. Detta beror på att i Monte Carlo-metoden hela arbetet enkelt kunnat överföras på en datamaskin. Maskintiden, vilken snabbt ökar med kravet på större noggrannhet hos resultaten, är emellertid dyrbar. Det är därför önskvärt att göra metoden effektivare än den är i den enkla form som här beskrivits (N slumpvisa abskissor alla med vikten $1/N$).

Med viktssampling, vilket innebär att vikterna väljes så att varje intervall blir representerat i proportion till sin betydelse för slutresultatet, och med olika slag av korrelerad samplingsteknik kan man med

Monte Carlo-metoden uppnå en mera tillfredsställande precision i resultaten [4, 5, 6, 7], vilket är av största betydelse, då metoden i många fall är den enda användbara.

REFERENSER

- [1] B. AJNE — T. DALENIUS: *Några tillämpningar av statistiska idéer på numerisk integration*. NMT 8 (1960), pp. 145–152.
- [2] V. D. BARNETT: *The behaviour of pseudo-random sequences generated on computers by multiplicative congruential method*. Math. of Comp. 16 (1962), pp. 63–69.
- [3] G. DAHLQVIST: *Monte Carlo-metoden*. NMT 2 (1954), pp. 27–35.
- [4] G. DAHLQVIST: *Monte Carlo-metoden*. Ingeniörsvetenskapsakademien. FKO-meddelande 41 (1961).
- [5] P. DAVIS — P. RABINOWITZ: *Some Monte Carlo experiments in computing multiple integrals*. Math. Tables Aids Comp. X, 53 (1956), pp. 1–8.
- [6] J. H. HALTON — D. C. HANDSCOMB: *A method for increasing the efficiency of Monte Carlo integration*. J. Assoc. Comp. Mach. 4 (1957), pp. 329–340.
- [7] J. M. HAMMERSLEY — K. W. MORTON: *A new Monte Carlo technique: antithetic variates*. Proc. Camb. Phil. Soc. 52 (1956), pp. 449–475.
- [8] D. L. JOHNSON: *Generating and testing pseudo-random numbers on the IBM type 701*. Math. Tables Aids Comp. X, 53 (1956), pp. 8–13.
- [9] E. S. PAGE: *Pseudo-random elements for computers*. Appl. Statist. 8 (1959), pp. 124–131.
- [10] B. QVIST — A. TÖRN: *Calculation of some energy integrals by the Monte Carlo method*. Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. XXIII, 8 (1963).
- [11] A. ROTENBERG: *A new pseudo-random number generator*. J. Assoc. Comp. Mach. 7 (1960), pp. 75–77.
- [12] O. TAUSKY — J. TODD: *The generation and testing of pseudo-random numbers*. Proc. Gainesville Symposium on Monte Carlo. John Wiley & Sons, New York 1954.
- [13] K. D. TOCHER: *The applications of automatic computers to sampling experiments*. J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 16 (1954), pp. 39–61.

EN GENERALISERING AV L'HOSPITALS REGEL

SIGBJØRN HALVORSEN

I det følgende er $f(x)$ og $g(x)$ reelle funksjoner av en reell variabel. Regelen for bestemmelse av $\lim f(x)/g(x)$ når kvotienten tar formen $0/0$ eller ∞/∞ , ved betraktning av $f'(x)/g'(x)$, har flere varianter, se f. eks. [1], p. 293–296, [2], pp. 130–141. Vi betrakter i det følgende eksplisitt bare grenseoverganger fra venstre.

I. $f(x)$ og $g(x)$ forutsettes deriverbare (altså også kontinuerlige) for $x = \xi$, og videre $g'(\xi) \neq 0$. Er da $f(\xi) = g(\xi) = 0$, så gjelder

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Her er da $f(x)$ og $g(x)$ ikke pålagt noen kontinuitetsbetingelser for $x \neq \xi$.

II a. $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$, og $f(x)$, $g(x)$ deriverbare for $x_0 < x < \xi$. På dette åpne intervall skal også $g'(x) \neq 0$. Dersom nå

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k,$$

så vil også

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Her kan ξ og k være endelige eller uendelige.

II b. $g(x) \rightarrow +\infty$ når $x \rightarrow \xi$, $f(x)$ og $g(x)$ deriverbare samt $g'(x) \neq 0$ for $x_0 < x < \xi$. Da gjelder som under II a at (2) medfører (3).

Bevis for (1):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}{\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}} \rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{når } x \rightarrow \xi, \text{ q.e.d.}$$

Setningene under IIa og b kan vises (som det gjøres i de fleste lærebøker i differensialregning) ved hjelp av Cauchys utvidede middelverdisetning ([1], p. 244):

$$(4) \quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{g(x_3) - g(x_1)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} \quad \text{for minst en } x_2, \quad x_1 < x_2 < x_3,$$

når $f(x)$, $g(x)$ er kontinuerlige for $x_1 \leq x \leq x_3$, deriverbare for $x_1 < x < x_3$, $g(x_1) \neq g(x_3)$, samt $f'(x)$ og $g'(x)$ ikke samtidig lik null for $x_1 < x < x_3$.

For beviset av (3) er det mindre vesentlig om ξ er endelig eller ikke; disse to tilfeller kan også føres tilbake på hverandre gjennom en variabelsubstitusjon. Derimot må hvert av tilfellene $g(x) \rightarrow 0$ og $g(x) \rightarrow \infty$ behandles særskilt.

Setningene under IIa og b gir så ved gjentatt anvendelse på seg selv utvidelsen

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)},$$

når den siste grenseverdi eksisterer eller er uendelig, og det for hver k , $0 \leq k < n$, gjelder enten $\lim_{x \rightarrow \xi} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g^{(k)}(x) = 0$ eller $g^{(k)}(x) \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow \xi$, samt $g^{(n)}(x) \neq 0$ for $x_0 < x < \xi$.

Den analoge utvidelse gjelder også for (1), hvilket bevises enten ved substitusjon av $f^{(n-1)}(x)$ og $g^{(n-1)}(x)$ for f og g i (1), og bruk av (5) med $n-1$ for n , eller også ved å bruke den form av Taylors formel ([1], pp. 289–290) som ikke forutsetter eksistensen av $f^{(n)}(x)$ og $g^{(n)}(x)$ for $x \neq \xi$.

Setningene under I og II er uavhengige; i anvendelser hvor begge metoder er brukbare, gir II ofte hurtigere resultatet enn I. Et enkelt eksempel på dette (fra [1], p. 295):

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x, \quad g(x) = x - \sin x, \quad \xi = 0.$$

Her er

$$f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = f''(0) = g''(0) = 0, \\ f'''(0) = 2, \quad g'''(0) = 1,$$

mens

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} \rightarrow 2.$$

F. Lettenmeyer [3] ga i 1936 et enkelt bevis for setningen under IIb, hvor han helt unngikk bruken av Cauchys utvidede middelverdisetning. Hans bevismåte kan brukes til å vise en generalisering av den setning som er gitt gjennom (2) og (3). Selv om denne generaliserte setning er så nærliggende at den sannsynligvis er utledet før, har den ikke funnet veien til noen av de alminnelige lærebøker i differensialregning.

At Lettenmeyers enkle bevis heller ikke synes å være særlig benyttet, gir nok en grunn til å gjøre setningen kjent.

Under for øvrig samme forutsetninger som IIa, henholdsvis IIb ovenfor, men når $f'(x)/g'(x)$ ikke nødvendigvis nærmer seg noen bestemt grenseverdi når $x \rightarrow \xi$, gjelder følgende setning:

$$(6) \quad \alpha = \liminf_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta.$$

Bevis: a) $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$.

For $x_0 < x < \xi$ antas $g'(x) < 0$ (dette er ingen innskrenkning fra forutsetningen $g'(x) \neq 0$, ifølge en setning av Darboux om de mellomliggende verdier av den deriverte funksjon ([1], p. 245); $g'(x) < 0$ betyr da at $g(x)$ er valgt > 0 . Med α og β definert gjennom (6) kan vi til enhver $\varepsilon > 0$ finne en x_0 slik at for $x_0 < x < \xi$ gjelder

$$\alpha - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta + \varepsilon.$$

Herav:

$$f'(x) - (\alpha - \varepsilon)g'(x) < 0, \quad f'(x) - (\beta + \varepsilon)g'(x) > 0,$$

dvs. $f(x) - (\alpha - \varepsilon)g(x)$ er en avtagende, $f(x) - (\beta + \varepsilon)g(x)$ en voksende funksjon. Dette vil igjen si at

$$\begin{aligned} f(x) - (\alpha - \varepsilon)g(x) &> 0 \\ f(x) - (\beta + \varepsilon)g(x) &< 0 \end{aligned} \quad \text{for } x_0 < x < \xi.$$

Divisjon med $g(x) > 0$ gir

$$\alpha - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \varepsilon \quad \text{for } x_0 < x < \xi, \text{ q.e.d.}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$, $g'(x) > 0$ for $x_0 < x < \xi$,

altså

$$(\alpha - \varepsilon)g'(x) < f'(x) < (\beta + \varepsilon)g'(x),$$

som gir

$$\begin{aligned} f(x) - (\alpha - \varepsilon)g(x) &\text{ voksende} \\ f(x) - (\beta + \varepsilon)g(x) &\text{ avtagende} \end{aligned} \quad \text{for } x_0 < x < \xi.$$

En mulighet er nå at $f(x) - (\alpha - \varepsilon)g(x)$ nærmer seg en endelig grenseverdi når $x \rightarrow \xi$. Det samme må da gjelde funksjonen $f(x) - (\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon)g(x)$. Men herav følger at differensen $\frac{1}{2}\varepsilon g(x)$ også går mot en endelig grense, hvilket er umulig etter antagelsen. Følgelig kan vi slutte at

og analogt

$$f(x) - (\alpha - \varepsilon)g(x) \rightarrow +\infty,$$

$$f(x) - (\beta + \varepsilon)g(x) \rightarrow -\infty, \text{ når } x \rightarrow \xi.$$

Velges så x_0 stor nok til at $g(x) > 0$ for $x_0 < x < \xi$, følger

$$\alpha - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \varepsilon, \text{ q.e.d.}$$

Utvidelsen av (6) analog til (5) gir seg selv.

Det er videre klart at denne bevismetode tillater et uendelig antall felles nullpunkter for $f'(x)$ og $g'(x)$, med opphoppningspunkt i ξ , når $g'(x)$ bare ikke skifter fortegn.

En anvendelse av (6): Har vi f. eks.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \geq 0, \text{ og videre } g > 0, g' < 0, f \rightarrow 0, g \rightarrow 0,$$

finner vi

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g'}{g} \left(\frac{f'}{g'} - \frac{f}{g}\right) \geq 0, \quad \frac{f'}{g'} \leq \frac{f}{g},$$

altså ifølge (6):

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f}{g} = \limsup_{x \rightarrow \xi} \frac{f'}{g'}.$$

Ovenfor er antatt $\alpha > -\infty$, $\beta < +\infty$. Når f. eks. $\beta = +\infty$, altså $f'(x)/g'(x)$ ubegrenset oppad, setter vi

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq K(x), \text{ med } K'(x) \geq 0.$$

Vi har

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < K(x) + \varepsilon \quad \text{for } x_0 < x < \xi,$$

og f. eks. $g(x) \rightarrow \infty$, $g'(x) > 0$ for $x_0 < x < \xi$ gir

$$f' - [(K + \varepsilon)g]' < -K'g \leq 0,$$

følgelig som ovenfor:

$$f(x) - [K(x) + \varepsilon]g(x) \rightarrow -\infty,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < K(x) + \varepsilon \quad \text{for } x_0 < x < \xi.$$

LITTERATUR

- [1] G. H. HARDY: *A Course of Pure Mathematics*, 9th ed., Cambridge 1948.
- [2] E. LANDAU: *Differential and Integral Calculus*, 1st ed., New York 1950.
- [3] F. LETTENMEYER: *Über die sogenannte Hospitalsche Regel*. J. reine angew. Math. 174 (1936), pp. 246–247.

ORDNADE STICKPROV FÖR EXPONENTIALFÖRDELADE STOKASTISKA VARIABLER MED TILLÄMPNING PÅ MINORITETSPRINCIPEN

LENNART RÅDE

Inledning. Låt ξ vara en kontinuerlig stokastisk variabel och $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \{\xi_k\}_1^n$ ett stickprov på ξ . Detta innebär att $\{\xi_k\}_1^n$ är n oberoende stokastiska variabler, alla med samma sannolikhetsfördelning som ξ . Om vi nu ordnar variablerna i stickprovet i storleksordning, så föreligger ett ordnat stickprov på ξ , som vi betecknar $\{\zeta_k\}_1^n$. Detta är alltså den permutation av $\{\xi_k\}_1^n$, som uppfyller villkoret $\zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \dots \leq \zeta_n$.

Ordnade stickprov har varit föremål för en intensiv forskning (se t. ex. [7]). Man kan nämligen med endast några av variablerna i det ordnade stickprovet konstruera lätthanterliga och effektiva statistiska metoder. Detta beror på att i det ordnade stickprovet innehåller de enskilda variablerna en viss information om de övriga variablerna. Man vet ju att $k-1$ av variablerna i stickprovet är $\leq$ och $n-k$ är $\geq \zeta_k$. Ett klassiskt exempel på detta är metoden att använda variationsbredden $\zeta_n - \zeta_1$ för att skatta standardavvikelsen för den stokastiska variabeln ξ . Vid vissa tillämpningar är också ordnade stickprov den naturliga metodiken. Vid livslängdsundersökningar, där man samtidigt belastar t. ex. n elektronrör och bestämmer deras livslängder, erhålles dessa i form av ett ordnat stickprov.

I denna artikel skall vi betrakta ordnade stickprov på en exponentialfördelad variabel, ett fall som intar en särställning i detta sammanhang. Vi skall också som en tillämpning undersöka det relativa bidraget av de största termerna till en summa av exponentialfördelade stokastiska variabler.

Exponentialfördelningen. En stokastisk variabel ξ säges vara exponentialfördelad med parametern λ , om den har frekvensfunktionen

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Då gäller för sannolikheten $P(\xi > x)$ samt för medelvärdet $E[\xi]$ och variansen $\text{Var}[\xi]$ att

$$P(\xi > x) = \int_x^\infty f(x) dx = e^{-\lambda x}, \quad E[\xi] = \int_0^\infty x f(x) dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}[\xi] = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 f(x) dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Vi bevisar nu en sats, som entydigt karakteriserar exponentialfördelningen. Den kan ofta användas för att motivera ett antagande om att en variabel ξ är exponentialfördelad. Den är också väsentlig i samband med ordnade stickprov.

SATS 1. *En stokastisk variabel ξ är exponentialfördelad om och endast om*

$$P(\xi > x+y \mid \xi > y) = P(\xi > x) \text{ för varje } x > 0 \text{ och } y > 0.$$

BEVIS. Med $P(A \mid B)$ avses som vanligt den betingade sannolikheten för A under förutsättning att B inträffat. Som bekant är $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Om ξ är exponentialfördelad, så är

$$P(\xi > x+y \mid \xi > y) = \frac{P(\xi > x+y; \xi > y)}{P(\xi > y)} = \frac{P(\xi > x+y)}{P(\xi > y)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x).$$

Om å andra sidan $P(\xi > x+y \mid \xi > y) = P(\xi > x)$, $x > 0$, $y > 0$, så är $P(\xi > x+y)/P(\xi > y) = P(\xi > x)$. Om vi då inför beteckningen $G(x) = P(\xi > x)$, så måste $G(x)$ uppfylla följande funktionalekvation:

$$G(x+y) = G(x)G(y).$$

Den enda användbara kontinuerliga lösningen¹ till denna är i detta fall $G(x) = e^{-\lambda x}$ med $\lambda > 0$.

Om vi tolkar ξ som livslängden för något slag av objekt, så betyder relationen $P(\xi > x+y \mid \xi > y) = P(\xi > x)$, att sannolikheten för att objektet skall leva åtminstone en viss tid x är oberoende av från vilken tidpunkt denna tid räknas. Men detta innebär att objekten inte åldras. Atomerna hos radioaktiva ämnen synes uppfylla detta krav liksom vissa typer av elektronrör, däremot ej mänskliga individer.

¹ Angående denna funktionalekvation se t. ex. de la Vallée Poussin: *Cours d'Analyse Infinitesimale*, tome 1, sid. 40 eller Feller: *An introduction to probability theory and its applications*, sid. 413.

Ordnade stickprov på exponentialfördelad variabel. Låt nu $\{\xi_k\}_1^n$ vara ett stickprov på en exponentialfördelad variabel ξ och $\{\zeta_k\}_1^n$ motsvarande ordnade stickprov. Vi kan tänka oss att vi gör en livslängdsundersökning, där vi från en viss tidpunkt belastar n identiska elektronrör som har exponentialfördelade livslängder. Då är $\{\zeta_k\}_1^n$ de tidpunkter, då i tur och ordning ett elektronrör slocknar. Vi skriver nu

$$\zeta_{k+1} = \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) + \dots + (\zeta_{k+1} - \zeta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Vi beräknar först sannolikheten $P(\zeta_1 > x)$. Detta är emellertid sannolikheten att samtliga n elektronrör skall leva åtminstone x tidsenheter, t. ex. timmar. Vi får då

$$P(\zeta_1 > x) = (e^{-\lambda x})^n = e^{-\lambda n x}.$$

ζ_1 är alltså exponentialfördelad med parametern λn . Om vi sätter $\zeta_1 = \delta_1/n$ eller $\delta_1 = n\zeta_1$, så är δ_1 exponentialfördelad med parametern λ .

Vi bestämmer nu sannolikhetsfördelningen för $(\zeta_{k+1} - \zeta_k)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Vi förutsätter först att $\zeta_k = y$ och beräknar den betingade sannolikheten $P(\zeta_{k+1} - \zeta_k > x \mid \zeta_k = y) = P(\zeta_{k+1} > x + y \mid \zeta_k = y)$.

Händelsen $\{\zeta_{k+1} > x + y \mid \zeta_k = y\}$ innebär att vid tidpunkten y återstår $n-k$ elektronrör, som samtliga lever i åtminstone x timmar. På grund av att något åldrande ej föreligger, så är

$$P(\zeta_{k+1} - \zeta_k > x \mid \zeta_k = y) = (e^{-\lambda x})^{n-k} = e^{-\lambda(n-k)x}.$$

Men då detta uttryck ej beror av y , så är den härledda betingade sannolikheten lika med motsvarande obetingade. Vi har alltså

$$P(\zeta_{k+1} - \zeta_k > x) = e^{-\lambda(n-k)x}.$$

Detta innebär att $(\zeta_{k+1} - \zeta_k)$ är exponentialfördelad med parametern $\lambda(n-k)$. Om vi sätter $\zeta_{k+1} - \zeta_k = \delta_{k+1}/(n-k)$ eller $\delta_{k+1} = (n-k)(\zeta_{k+1} - \zeta_k)$, så är den stokastiska variabeln δ_{k+1} exponentialfördelad med parametern λ . För $k = 1, 2, \dots, n$ har vi alltså

$$\zeta_k = \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) + \dots + (\zeta_k - \zeta_{k-1}) = \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \dots + \frac{\delta_k}{n-k+1},$$

där de stokastiska variablerna $\{\delta_k\}_1^n$ alla är exponentialfördelade med parametern λ . Vi visar nu att dessa, eller ekvivalent $\{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)\}_0^{n-1}$, är oberoende:

$$\begin{aligned} & P(\zeta_{k+1} - \zeta_k > x \mid \zeta_1 = y_1, \zeta_2 - \zeta_1 = y_2, \dots, \zeta_k - \zeta_{k-1} = y_k) \\ &= P(\zeta_{k+1} - \zeta_k > x \mid \zeta_1 = y_1, \zeta_2 = y_1 + y_2, \dots, \zeta_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k) \\ &= e^{-\lambda(n-k)x}. \end{aligned}$$

Den sista relationen får vi med analogt resonemang som ovan. Tidsintervallen $(\zeta_{k+1} - \zeta_k)$ är alltså oberoende, då den här betraktade betingade sannolikheten ej beror av $y_1, y_2, \dots, y_k$. Vi har därmed bevisat följande sats:

SATS 2. Om $\{\zeta_k\}_1^n$ är ett ordnat stickprov på en stokastisk variabel, som är exponentialfördelad med parametern λ , så är

$$\zeta_k = \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \dots + \frac{\delta_k}{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

där $\{\delta_k\}_1^n$ är oberoende och exponentialfördelade med parametern λ .

Av sats 2 framgår att ordnade stickprov för exponentialfördelade variabler har en mycket enkel struktur. Då vi här kan framställa ζ_k som en summa av oberoende stokastiska variabler, kan vi tillämpa alla satser om sådana. Vi får t. ex. omedelbart att för medelvärdet $E[\zeta_k]$ och variansen $\text{Var}[\zeta_k]$ gäller

$$E[\zeta_k] = \frac{1}{\lambda} \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{v}, \quad \text{Var}[\zeta_k] = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{v^2},$$

ty medelvärdet av en summa av stokastiska variabler är alltid lika med summan av variablernas medelvärden, och för en summa av oberoende stokastiska variabler är variansen lika med summan av variablernas varianser.

Vi kommer att i fortsättningen få användning för följande lemma:

LEMMA 1. Låt $\{\xi_k\}_1^n$ vara likafördelade, oberoende och positiva stokastiska variabler och $\{\alpha_k\}_1^n$ godtyckliga konstanter. Då är

$$E \left[\frac{\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n} \right] = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

BEVIS. Enligt kända satser om medelvärden gäller

$$E \left[\frac{\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n} \right] = \sum_{k=1}^n \alpha_k E[\eta_k],$$

där $\eta_k = \xi_k / (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$. Av uppenbara skäl har variablerna η_k samma medelvärde och då $\sum_{k=1}^n \eta_k = 1$, så är $E[\eta_k] = 1/n$. Härav följer lemmat.

Om vi här speciellt väljer $\alpha_k = 1$ för $1 \leq k \leq p$ och $\alpha_k = 0$ för $p < k \leq n$, så finner vi

$$E \left[\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_p}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n} \right] = \frac{p}{n}, \quad p \leq n.$$

Minoritetsprincipen. Vi låter som förut $\{\zeta_k\}_1^n$ vara ett ordnat stickprov på en stokastisk variabel, som vi antar vara positiv. Vi skall betrakta följande stokastiska variabel:

$$\eta = \frac{\zeta_{n-p+1} + \zeta_{n-p+2} + \dots + \zeta_n}{\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n}.$$

Vi betraktar med andra ord kvoten mellan summan av de p största variablerna och totala summan i ett stickprov. Variabeln η anger alltså hur stor del av summan, som kan tillskrivas de p största variablerna. För η gäller uppenbarligen $p/n \leq \eta \leq 1$. Den undre gränsen erhålles för $\zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_n$ och den övre för $\zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_{n-p} = 0$.

Det är en empirisk erfarenhet, att de största termerna i en summa av positiva stokastiska variabler svarar för en mycket stor del av den totala summan. Vi kan uttrycka detta så, att en liten minoritet av termerna svarar för en majoritet av summan. För denna princip använder vi här beteckningen minoritetsprincipen. I [4] ges flera praktiska exempel på minoritetsprincipen. Företag har t. ex. funnit att kanske 20% av deras kunder köper 80% av företagets produktion eller att några få av deras artiklar svarar för en mycket stor del av deras omsättning.

Vi skall här belysa minoritetsprincipen genom att betrakta variabeln η under förutsättning att $\{\zeta_k\}_1^n$ är ett ordnat stickprov på en exponentialfördelad stokastisk variabel.

SATS 3. Låt $\{\zeta_k\}_1^n$ vara ett ordnat stickprov på en exponentialfördelad stokastisk variabel. Om $\eta = (\sum_{k=n-p+1}^n \zeta_k) / (\sum_{k=1}^n \zeta_k)$, så gäller att medelvärdet av η är

$$E[\eta] = \frac{p}{n} \left(1 + \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Om vi sätter $p = [\alpha n]$ (heltalsdelen), $0 < \alpha < 1$, så är

$$E[\eta] = \alpha(1 - \ln \alpha) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

BEVIS. Om vi använder det i sats 2 för ζ_k härledda uttrycket, kan vi skriva η under formen

$$\eta = \frac{\frac{p}{n}\delta_1 + \frac{p}{n-1}\delta_2 + \dots + \frac{p}{p+1}\delta_{n-p} + \delta_{n-p+1} + \dots + \delta_n}{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{n-p} + \delta_{n-p+1} + \dots + \delta_n}.$$

Då variablerna $\{\delta_k\}_1^n$ är oberoende, kan vi tillämpa vårt lemma 1, som omedelbart ger den först angivna formeln för $E[\eta]$.

Vi väljer nu α så att $0 < \alpha < 1$ och sätter $p = [\alpha n]$, där $[\alpha n]$ är heltalsdelen av αn . Med användande av den välkända uppskattningen

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad C = \text{Eulers konstant},$$

får vi satsens andra del.

Följande tabell ger värden på $E[\eta]$ för några värden på α och n :

n	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$
10	0.293	0.486	0.629	0.738	0.548
100	0.326	0.518	0.658	0.764	0.844
1000	0.330	0.521	0.661	0.766	0.846
∞	0.330	0.522	0.661	0.767	0.847

Vi ser av denna tabell att redan för $\alpha = 0.2$ och $n \geq 100$ så är $E[\eta] > 0.5$. Man kan alltså vänta sig att redan 20% av termerna i genomsnitt skall svara för mer än hälften av totala summan. Asymptotiskt svarar 30 och 40% av termerna för 66 respektive 77% av summan.

Vi härleder nu även $\text{Var}[\eta]$. Vid beviset använder vi elementära egenskaper hos χ^2 - och betafördelade stokastiska variabler¹. Vi bevisar först följande lemma:

LEMMA 2. Låt $\{\xi_k\}_1^n$ vara oberoende lika exponentialfördelade stokastiska variabler. Då är

$$E\left[\left(\frac{\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}\right)^2\right] = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right)^2}{n(n+1)}.$$

BEVIS. Om vi sätter $\eta_k = \xi_k / (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$ så får vi, om vi kallar det sökta medelvärde för μ_2 , att

¹ En stokastisk variabel, som är χ^2 -fördelad med r frihetsgrader, har frekvensfunktionen

$$f(x) = \frac{2^{-r/2}}{\Gamma(r/2)} x^{(r-2)/2} e^{-x/2}, \quad x \geq 0,$$

och en stokastisk variabel, som är betafördelad (p, q) , har frekvensfunktionen

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad 0 < x < 1.$$

I det senare fallet är

$$E[\xi] = \frac{p}{p+q} \quad \text{och} \quad E[\xi^2] = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}.$$

Se t. ex. [1], sid. 243.

$$\mu_2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 E[\eta_k^2] + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_k \alpha_i E[\eta_k \eta_i].$$

På grund av symmetri är medelvärdena $E[\eta_k^2]$ inbördes lika. Detsamma gäller för medelvärdena $E[\eta_k \eta_i]$, $k \neq i$. Om vi dessutom använder att

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \alpha_k \alpha_i = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k^2,$$

så får vi

$$\mu_2 = E[\eta_k^2] \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + E[\eta_k \eta_i] \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right\}.$$

Enligt lemma 1 är $E[\eta_k] = 1/n$. Medelvärdena $E[\eta_k^2]$ och $E[\eta_k \eta_i]$ får vi på följande sätt:

Vi kan utan inskränkning anta att variablerna $\{\xi_k\}_1^n$ är exponentialfördelade med parametern $\lambda = \frac{1}{2}$. Detta innebär emellertid att $\{\xi_k\}_1^n$ är χ^2 -fördelade med två frihetsgrader och att η_k är betafördelad $(1, n-1)$. (Se [1], sid. 243.) Men då är $E[\eta_k^2] = 2/n(n+1)$. Vidare är summan av variablerna $\{\eta_k\}_1^n$ lika med 1. Då gäller också

$$\eta_1 \eta_k + \eta_2 \eta_k + \dots + \eta_k^2 + \dots + \eta_n \eta_k = \eta_k.$$

Om vi här bildar medelvärdet av vardera ledet, får vi

$$(n-1)E[\eta_i \eta_k] + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

eller

$$E[\eta_i \eta_k] = \frac{1}{n(n+1)}, \quad i \neq k.$$

Det sökta medelvärdet blir då

$$\mu_2 = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^2}{n(n+1)}$$

som anföres i lemma 2.

Om vi speciellt väljer $\alpha_k = 1$ för $1 \leq k \leq p$ och $\alpha_k = 0$ för $p < k \leq n$, så får vi

$$E \left[\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_p}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n} \right)^2 \right] = \frac{p(p+1)}{n(n+1)}.$$

Vi beräknar nu lätt variansen för variabeln η :

SATS 4. Låt $\{\xi_k\}_1^n$ vara ett ordnat stickprov på en exponentialfördelad stokastisk variabel. Om $\eta = (\sum_{k=n-p+1}^n \xi_k) / (\sum_{k=1}^n \xi_k)$, så gäller för variansen för η att

$$\text{Var}[\eta] = \frac{p}{n(n+1)} \left\{ 1 + p \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{p}{n} \left(1 + \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \right\}.$$

BEVIS. Då $\text{Var}[\eta] = E[\eta^2] - E[\eta]^2$ följer satsen omedelbart av sats 3 och lemma 2 med $\alpha_k = p/(n-k+1)$ för $1 \leq k \leq n-p$ och $\alpha_k = 1$ för $n-p+1 \leq k \leq n$. Jämför med beviset för sats 3.

Av uttrycket för $\text{Var}[\eta]$ ser vi, att om $p = [\alpha n]$ med $0 < \alpha < 1$, så gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[\eta] = 0$. Av kända satser inom sannolikhetkalkylen följer då, att η konvergerar sannolikt mot $\alpha(1 - \ln \alpha)$ då $n \rightarrow \infty$, d. v. s. för varje $\varepsilon > 0$ gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\eta - \alpha(1 - \ln \alpha)| > \varepsilon) = 0.$$

Sluppmässig delning av ett intervall. Antag att vi sluppmässigt väljer $n-1$ punkter $\{x_k\}_1^{n-1}$ i intervallet $0 \leq x \leq 1$, d. v. s. låt $\{x_k\}_1^{n-1}$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel, som har en likformig sannolikhetsfördelning i $[0, 1]$. Vi delar då in intervallet $[0, 1]$ i n delintervall, vars längder vi kallar $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Det råder ett intimt samband mellan denna problemställning och stickprov på exponentialfördelade variabler. Man kan nämligen visa, att variablerna $\{\eta_k\}_1^n$ har exakt samma sannolikhetsfördelning som $\{\xi_k/(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)\}_1^n$, där $\{\xi_k\}_1^n$ är ett stickprov på en exponentialfördelad variabel.

Den ovan betraktade variabeln

$$\eta = \frac{\xi_{n-p+1} + \xi_{n-p+2} + \dots + \xi_n}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}$$

kan vi då tolka på följande sätt: Dela en stav av längden 1 i n delar. Variabeln η anger då sammanlagda längden av de p största delarna. Enligt det föregående vet vi att t. ex. 20% av delarna asymptotiskt skall utgöra mer än halva staven.

Slutkommentar. Problemet att sluppmässigt dela intervallet $[0, 1]$ i n delar har många tillämpningar inom olika områden av sannolikhetkalkylen och statistiken. Det har behandlats utförligt i litteraturen. Se t. ex. [2], [3] och [5].

Problemet tycks ha omnämnts första gången i Whitworths [8] klassiska arbete *Choice and Chance* från år 1897. Problem nr. 680 i denna bok lyder nämligen:

En stav delas sluppmässigt i tre delar.

Jag tar den största delen, min fru den näst största och mitt barn den minsta. Visa att våra förväntningar förhåller sig som 11:5:2.

Detta resultat verifieras lätt med sats 3 ovan. Whitworth använder en geometrisk metod för att lösa problemet.

Avsikten med denna artikel har ej varit att ge några egentligen nya resultat utan att referera några lättillgängliga frågeställningar inom ett aktuellt område av den matematiska statistiken. Behandlingen av ordnade stickprov på exponentialfördelade variabler bygger på Rényi [6]. Lemma 1 är en obetydlig generalisering av hans problem 40 på sid. 202. Minoritetsprincipen har diskuterats rent praktiskt i [4] under namnet 80-20-regeln. Någon matematisk motivering för den har ej förut givits. Medelvärdet $E[\eta]$ i sats 3 har härletts av bl. a. Mauldon [5], men med en annan metodik än här. Mauldon härleder i själva verket sannolikhetsfördelningen för η . Se även [2].

LITTERATUR

- [1] H. CRAMÉR: *Mathematical methods of statistics*. Princeton University Press 1946.
- [2] D. A. DARLING: *On a class of problems related to the random division of an interval*. Am. Math. Stat. 24 (1953), sid. 239–253.
- [3] L. FLATTO — A. G. KONHEIM: *The random division of an interval and the random covering of a circle*. SIAM Review 41 (1962), sid. 211–222.
- [4] N. A. HÖGBERG — B. SJÖGREN: *80-20-regeln, ett administrativt hjälpmedel*. Sveriges Mekanförbund, 1960.
- [5] J. G. MAULDON: *Random division of an interval*. Proc. Cambr. Phil. Soc. 47 (1951), sid. 331–336.
- [6] A. RÉNYI: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.
- [7] A. E. SARHAN — B. G. GREENBERG: *Contributions to order statistics*. John Wiley & Sons, New York, London 1962.
- [8] W. A. WHITWORTH: *Choice and Chance*. Cambridge University Press 1897.

NYE MATEMATIKBØGER TIL NYT MATEMATIKPENSUM¹

DAVID FOG

ERIK KRISTENSEN — OLE RINDUNG: *Matematik I*. G. E. C. Gads Forlag, København 1962. 10 + 341 s., 156 fig. D. kr. 48.50.

POUL O. ANDERSEN — STIG BÜLOW — HANS JØRGEN HELMS: *Matematik for gymnasiet I*. Gyldendal, København 1963. 390 s., 289 fig. D. kr. 48.00.

(Innholdsfortegnelser i NMT, denne årgang, s. 28 og s. 70.)

Ved anmeldelse af bøger kommer man let ud for følgende problemstilling: Skal anmelderen give en lidenskabsløs oplysning om en bogs indhold, altså — sat på spidsen — bare gengive bogens indholdsfortegnelse i lidt fyldigere og kommenteret form, eller skal han lade sig personligt engagere i sagen og dermed skrive en anmeldelse, der er farvet af hans eget syn på tingene? Svaret er naturligvis i almindelighed, at han skal søge en passende mellemvej. I det foreliggende tilfælde melder problemet sig imidlertid ligesom i forstærket grad, da det som følge af den nye læseplans bestemmelser ikke blot drejer sig om fremstillingen af traditionelt stof. Her gælder det bøger, der på gymnasieniveau behandler ting, der aldrig før har været genstand for undervisning i det danske gymnasium.

I denne situation har anmelderen (selvfølgelig!) sat sig for at være saglig, men dog ikke anderledes, end at han vil søge at give sin egen vurdering. Da fremstillingen af et stof og selve dette stof jo hører uadskilleligt sammen, vil han ikke kunne undgå samtidig også at tilkendegive sin mening om valget af det nye pensums indhold og omfang.

Begge de anførte lærebøger er beregnet på det matematiske gymnasiums første klasse. Der må altså fra begge sæt forfattere kunne forventes

¹ På grunn av de mange viktige prinsipielle spørsmål som reises i den foreliggende anmeldelse, har redaksjonen funnet det riktig å publisere den i artikkels form. Hvis noen lesere skulle føle seg uenige med anmelderen i hans vurderinger og synspunkter, vil NMT i rimelig omfang stå åpent for innlegg i saken.

endnu to bøger, til brug på den matematisk-fysiske gren, og en eller to for den samfundsfaglige og den naturfaglige gren. Derudover vides det, at der er andre lærebogssystemer på vej. Det kunne derfor synes naturligt at vente med anmeldelse, til de forskellige lærebogssystemer forelå fuldt færdige; men da dette kan være 2–3 år, kan det være rimeligere allerede nu at anmelde de to ovennævnte bøger, så meget desto mere som det må formodes, at forskellen mellem gammelt og nyt giver sig stærkere til kende i de nu foreliggende 1. bind end i dem, der senere fremkommer til brug i 2. og 3. gymnasieklasse.

Inden for 1. gymnasieklases pensum består det nye i første række i, at der fremtidig skal undervises i elementær mængdelære, herunder bl. a. afbildning af en mængde »ind i« og »på« en mængde (det generelle funktionsbegreb), samt i vektorregningens begyndelsesgrunde (indbefattet skalært produkt), og det er derfor de hertil svarende kapitler af bøgerne, som fortrinsvis vil blive omtalt. Imidlertid smitter det nye stof i en vis forstand af på det gamle, idet dette nu kan behandles med nyt værktøj og betragtes fra nye synspunkter, hvilket også kan give anledning til bemærkninger. Til gengæld for det tilkomne stof bortfalder visse dele af det tidligere, således bl. a. noget af trigonometrien og af den analytiske geometri.

De to bøger vil nedenfor blive anmeldt hver for sig. Anmeldelserne vil i det væsentlige blive formet således, at de er paralleltløbende, for derved at lette mulighederne for sammenligning.

Jeg begynder med den først nævnte bog. Det skal indrømmes forfatterne uden betingelser, at bogen er godt skrevet. Fra et rent matematisk synspunkt er det en fornøjelse at læse den. Man kan mærke, at forfatterne har vidst, hvordan de ville have stoffet fremstillet, og jeg tror, det må siges at være lykkedes for dem. Også det formelle er i den bedste orden: Adskillelsen mellem hovedtekst og eksempler (og øvelser) står klart, og det hele virker typografisk overskueligt.

Noget anderledes forholder det sig efter min mening med det pædagogiske. At en bog er klart skrevet, er jo ikke ensbetydende med, at stoffet er fremstillet på den pædagogisk bedste måde overfor det alderstrin, der skal bruge den. Jeg tror, at bogen stiller for store krav til de 15–16-åriges evne (og lyst!) til abstraktioner og generelle synspunkter. Selv om forfatterne adskillige steder tager eleverne (og lærerne?) ved hånden for at hjælpe dem, er jeg bange for, at bogen er blevet meget svær. Skylden herfor ligger dog ikke hos forfatterne alene, men også i de pensabestemmelser, som kræver nyt og vanskeligt stof behandlet. Jeg skal nedenfor

uddybe disse kritiske bemærkninger nærmere, idet jeg går over til at omtale bogens forskellige afsnit.

I de to første kapitler behandles mængdelæren og den matematiske logik. Selve begrebet mængde optræder ganske stilfærdigt uden nogen egentlig definition; en sådan ville jo også kun bestå i en erstatning af ordet »mængde« med et andet ord som »samling« el. lgn. og derfor ikke være af megen værdi. De første symboler, som $\in$, $\subset$, $\subseteq$ og $\{x \mid \dots\}$, indføres smertefrit, og efter hvert symbol får man at vide, hvordan det »læses«. Senere kniber det. Det siges f. eks. klart nok, hvad $A \cap B$ og $A \cup B$ »betyder«, men ikke, hvordan disse udtryk »læses« eller »siges«. Det svarer til, om man nok vidste, at symbolet $+$ står for addition, men ikke kendte glosen »plus«. Hvordan skal man f. eks. læse den distributive lov

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)?$$

Man skulle dog gerne kunne læse den op uden at måtte sige: »Fællesmængden for A og foreningsmængden for B og C er lig foreningsmængden for fællesmængden for A og B og fællesmængden for A og C ! Jeg kan kun foreslå at læse $\cap$ som »fælles med« og $\cup$ som »forenet med«; men det er ikke særlig godt eller mundret. Et par korte (latinske?) gloser ville være bedre¹. Dette er forøvrigt ikke et problem, som specielt er knyttet til den her betragtede lærebog; det angår simpelthen mængdelæren som disciplin. Men jo lavere undervisningsniveau man arbejder på, desto vigtigere er det, at man ikke blot kan skrive, men også tale ubesværet.

Den tomme mængde $\emptyset$ introduceres side 6 med en bemærkning om, at det »har vist sig frugtbart at indføre en mængde uden elementer«. Man bliver ikke senere gjort opmærksom på, hvornår denne frugtbarhed indtræder, og hvori den består; men det er jo en let sag og kan overlades til læreren. På side 7 omtales den tomme mængde igen; jeg citerer:

Idet A betegner en vilkårlig mængde, kan følgende udtalelse anses for sand:

»Ethvert x , der tilhører $\emptyset$, tilhører også A «.

Af denne grund vedtager vi, at for en vilkårlig mængde A er

$$\emptyset \subseteq A.$$

Vendingen »anses for« virker ulden. Eleverne vil vente, at i hvert fald inden for matematikken er sandhedsbegrebet absolut. Men usikkerhedsfornemmelsen fortøner sig noget, da man får at vide, at formlen $\emptyset \subseteq A$ bygger på en vedtægt. Problemet dukker imidlertid op påny i mere generel form på side 11 i eks. 12.5 (som skulle hedde 12.4), der lyder:

¹ Det engelske »cap« og »cup« synes absolut uegnet.

Svarende til, at vi regner $\emptyset$ som delmængde til enhver mængde, regner vi en implikation

$$u(x) \Rightarrow q(x)$$

for korrekt, hvis $u(x)$ ikke er sand for noget x .

Er »korrekt« synonymt for »sand«? Eller er der en subtil nuance skjult mellem ordene? Det er hård kost for eleverne, og for at de ikke skal tabe modet, kommer bogen dem i møde med følgende bemærkning:

Denne vedtægt synes måske urimelig ved første øjekast.

Ja, men ikke måske! Jeg er desværre ikke tilstrækkelig kyndig i matematisk logik til fuldtud at kunne bedømme, hvor »frugtbar« den viser sig at være ved disciplinens videre udbygning; men ved en sådan vedtægt ændrer man jo i hvert fald den gængse betydning af visse sproglige vendinger, specielt af ordet »sandhed« (eller »korrekthed«). Dette kan man selvfølgelig gøre; men jeg tvivler stærkt på, at det på det her foreliggende niveau er nogen pædagogisk fordel, endsige nødvendighed. Forfatterne søger da også yderligere at mildne luften ved følgende tilføjelse:

Man må imidlertid tænke på, at implikationen kan læses:

»Ethvert x , der tilhører sandhedsmængden for $u(x)$, tilhører sandhedsmængden for $q(x)$ «.

Jeg ved ikke, om det hjælper så meget. Til belysning af sagen udleverer jeg et stykke af mit privatliv:

Hvergang jeg kommer fuld hjem, banker jeg min kone.

Dette er faktisk sandt (i ovennævnte betydning). Jeg vil dog sætte pris på, at udtalelsen ikke refereres ude af sin sammenhæng.

Ved indførelsen af intervaller (side 40–41) defineres »åbent« og »lukket« som i læren om generelle punktmængder, altså:

Et interval er åbent, når det kun består af indre punkter, og lukket, når det indeholder sine (eventuelle!) endepunkter. Efter disse definitioner udgør hele tallinien ($-\infty < x < +\infty$) et interval, som både er åbent og lukket. Dette må for eleverne »ved første øjekast« forekomme temmelig paradoxalt. Selvfølgelig opløser paradoxet sig ved nærmere eftersyn, d. v. s. ved erindring af definitionerne. Men hvortil denne chokbehandling? Hvorfor ikke nøjes med de »gamle« definitioner, hvor glosen »lukket« kun bruges i forbindelse med intervaller, der har endepunkter (og indeholder dem)? Vindes der noget? Hovedsætningerne om kontinuerte funktioner må da blive lidt tungere at formulere; men det vil jo vise sig.

I kapitel III indføres vektorbegrebet og den dertil knyttede algebra, og i kapitel IV anvendes vektorregningen derpå til behandling af den rette linie i analytisk plangeometri. Medens denne anvendelse foregår let og elegant, finder jeg, at selve indførelsen af vektorbegrebet sker unødvendig svært. Heri er forfatterne ifølge forordet nærmest enige med mig (naturligvis på nær ordet »unødvendig«).

Der startes side 52 med en bemærkning om, at det er »intuitivt klart«, hvad der menes med ensrettede halvlinier, hvorefter bogen »dækker det intuitive begreb« med en meget besværlig definition, der for mig indeholder andre lige så intuitive begreber. En sådan definition må naturligvis først og fremmest bruges til at bevise, at når to halvlinier er ensrettede med samme tredje, er de indbyrdes ensrettede; men her giver bogen blankt op og erklærer, at denne sætning »vil vi gå ud fra uden nærmere bevis«. Yderligere bruges definitionen, så vidt jeg har kunnet se, kun et eneste sted, ved beviset for sætning 7.1 på side 56.

Havde det ikke været meget lettere og naturligere at fastholde begrebet »ensrettethed« som intuitivt klart (altså anse det for et grundbegreb), at forudsætte det transitivt og så yderligere bygge på simple kendte parallellogramegenskaber (måske i lidt skærpet form ved medtagelse af orienteringer)? På et passende sådant grundlag har man straks alt om parallelforskydninger og deres sammensætning og kan opbygge vektorregningen.

En (egentlig) vektor defineres i bogen som mængden af indbyrdes ensrettede og lige lange liniestykker, og hvert enkelt af disse siges at »repræsentere« vektoren. For trænede matematikere lyder dette jo smukt, men for de mindre trænede elever i 1. gymnasieklasse er det da en belastning. Hvorfor dog ikke ligefrem definere en vektor som et orienteret liniestykke, suppleret med den oplysning, at to vektorer, som er ensrettede og lige lange, betragtes som »ens« eller som »to eksemplarer af samme vektor«? Dette er dog et langt naturligere grundlag for det første møde med vektorbegrebet.

Kapitlerne V og VI, der handler om afbildninger og funktioner, er heller ikke lige at løbe til. Det kan selvfølgelig være nyttigt at fremhæve afbildningsbegrebet (og symbolet $\hookrightarrow$); men hvorfor presse det gammeldags funktionsbegreb helt ind i denne ramme? Hvorfor blot i et eksempel (side 115) nævne, at man »også undertiden tillader sig« (med halvdårlig samvittighed?) at tale om »funktionen $f(x)$ «? Hvorfor ikke sige, at et »udtryk x «, $f(x)$, fastlægger en afbildning, og derefter bruge betegnelsen »funktionen $f(x)$ « både om udtrykket og den tilhørende afbildning? I realiteten er det jo dog alligevel det, der sker.

Helt barokt virker det, at et »polynomium« side 192 defineres ved

$$x \curvearrowright a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

når dog hele den følgende fremstilling (om polynomiers division) kun handler om udtrykket til højre for $\curvearrowright$, medens afbildningstanken helt er ude af billedet og også meget vanskelig vil kunne fastholdes. Hvad vindes der pædagogisk på det foreliggende niveau ved denne kunstige form?

Af de følgende kapitler må jeg begrænse mig til at fremdrage enkelte ting. Kapitel IX behandler induktion. Om dette emne siges i undervisningsinspektionens vejledende bestemmelser:

Under omtalen af naturlige tal bør induktionsaksiomet's fundamentale rolle og dets hyppige anvendelse som bevismiddel påpeges.

På dette punkt må vejledningen nok siges at være gået lidt over gevind. Da det jo ikke kan være meningen, at gymnasieundervisningen skal give en konstruktiv opbygning af de naturlige tal (Peano m. fl.), må disse altså netop opfattes som naturlige (eller måske endda overnaturlige?), d. v. s. som eksisterende fra begyndelsen. At man ved at gå skridtvis frem i talrækken kan nå til »alle« naturlige tal, bør eleverne have lov at betragte som en selvfølge og ikke som et fundamentalt (!) aksiom.

Kapitel XI, der handler om algebra, er heller ikke helt let. Hvorfor skal der bruges næsten en hel side (262) til at vise den simple ting, at isomorfi mellem to grupper er en gensidig egenskab? Og definitionen side 264 af en logaritmefunktion som en en-entydig, monoton og isomorf afbildning af mængden af positive tal på mængden af alle (reelle) tal, hvorved multiplikation svarer til addition, er næppe noget, som gymnasiaster labber i sig som kattekillinger sødmælk. — Hermed være ikke benægtet, at definitionen, hvis den bliver forstået, giver betydelig matematisk indsigt. Beviset for sådanne funktioners eksistens udsættes til senere.

De to her behandlede bøger vil, med benyttelse af initialerne i forfatterens efternavne, i det følgende blive betegnet henholdsvis KR og ABH; jeg går nu over til omtalen af den sidstnævnte. Også denne læser man med interesse. Jeg kan sige med det samme, at jeg tror, den på en del punkter vil være noget lettere tilgængelig for eleverne end KR, fordi den holder sig mere på det jævne og ikke vover sig så højt op i abstraktionernes tynde luft. Til gengæld når den i ren fremstillingskunst ikke op på højde med KR. Rækkefølgen for de forskellige emner er ikke nøjagtig ens i de to bøger; disse småforskelle lader jeg imidlertid ligge og tager nedenfor emnerne i samme orden som ved omtalen af KR.

Om det formelle må jeg sige, at ABH virker ikke så overskuelig som KR. Alt, tekst, eksempler og øvelser fremtræder med samme slags typer. Bogstaverne med matematisk betydning er ikke sat med kursiv, ja end ikke de matematiske sætninger er kursiveret. Det hele løber derfor let i ét. Og endnu en lille, men væsentlig ting: Det er næsten utilgiveligt i en matematisk lærebog at bruge samme type for bogstavet l og tallet 1. Prøv f. eks. at læse eks. 19, side 223!

Ved mængdelæren vil jeg væsentlig holde mig til symbolerne og deres anvendelse. Om deres »udtale« gælder det samme som sagt under omtalen af KR. Det skal nævnes, at ABH indfører flere symboler end KR, således kvantorerne $\exists$ og $\forall$ samt R (»står i relation til«) og dens negation $\neg$.¹

I forbindelse med indførelsen af den tomme mængde $\emptyset$ følgende bemærkning: På side 42 »defineres« en mængde som »en samling genstande, der kaldes mængdens elementer«. Efter denne definition er det ulogisk på side 43 at tale om »en mængde helt uden elementer«. Den tomme mængde bør indføres ved en særdefinition. Efter omtale af begrebet delmængde på side 45 står:

Den tomme mængde $\emptyset$ er delmængde af enhver mængde.

Der medgives ingen kommentar. Skal eleven selv søge efter et bevis, eller er det et aksiom? Eller en vedtægt (som hos KR)?

Om brugen af symbolerne vil jeg iøvrigt principielt mene, at den bør indskrænkes til følgende to tilfælde:

- 1) en direkte indøvelse på lette eksempler (ligesom man på passende alderstrin indøver den lille tabel — eller bogstavregning),
- 2) som middel til at gøre en matematisk situation eller tankerække mere klar og overskuelig.

Lad os betragte eks. 20, side 57. Jeg citerer:

Hvis a er et positivt tal, findes et tal b , således at $b^2 = a$. Dette kan skrives:

$$a \in R \wedge a > 0 \Rightarrow \exists b \in R : b^2 = a.$$

Her har vi et typisk eksempel på tilfælde 1). Vel fylder symbolikken kun ca. halvt så mange cm på en linie som den sproglige tekst; men den virkelige berettigelse af eksemplet må ligge i indøvelsen af symbolerne. Et par yderligere bemærkninger til netop dette eksempel: Fremhævelsen (ved symboler) af a og b som reelle tal er vel egentlig her (som også ofte andre steder) overflødig, da eleverne jo ikke kender andre tal; den er jo heller ikke med i den sproglige tekst. Anvendelsen i symbolikken af kolon i betydningen »således at« er ikke forklaret noget sted i bogen.

¹ Symbolerne $\exists$ og $\forall$ indføres dog i KR, bind II, der er fremkommet, efter at denne anmeldelse er skrevet.

Den nævnte »indøvelse« af symbolerne forekommer mig imidlertid at blive ved alt for længe; det er jo ikke et mål i sig selv at omskrive så stor en del af matematikken som muligt til en art stenografi. Adskillige steder formuleres endda de forskellige matematiske sætninger og begreber kun i symbolsprog, hvorved man i høj grad savner en simpel fortolkning på modersmålet. Således synes det lidet rimeligt (side 109) kun at nævne Fermat's store sætning på formen

$$\{x, y, z \mid x^n + y^n = z^n, n \in N, n > 2\} = \emptyset,$$

når den let kan udtrykkes i ganske enkle sproglige vendinger som en egenskab ved ligningen $x^n + y^n = z^n$.

Eller for at nævne et særligt grelt eksempel: ABH definerer slet ikke »et« primtal p , men kun »primtalsmængden P «. Jeg citerer ord- og symbolret¹ (side 96):

Definition: Vi definerer mængden P af primtal på følgende måde:

$$p \in P \iff [p \notin \{0, 1, -1\} \wedge (a \mid p \Rightarrow a \in \{1, -1, p, -p\})].$$

Dette udlægges ikke nærmere; men det overlades til eleven selv at finde ud af, hvad der virkelig står, og om det kan bringes til at stemme med, hvad han måtte erindre om primtal fra tidligere undervisning. Hverken den givne »formel« for Fermat's sætning eller den lige anførte primtalsdefinition synes mig at kunne henregnes under noget af de nævnte tilfælde 1) og 2).

Induktionsaksiomet optræder selvfølgelig, men skrives her (side 87) med symboler på formen

$$[S \subseteq N \wedge 1 \in S \wedge (k \in S \Rightarrow k+1 \in S)] \Rightarrow S = N.$$

Herved bliver også dette temmelig indviklet – selv om sagen illustreres med tinsoldater, der vælter på stribe.

Efter disse kritiske bemærkninger vil jeg gerne fremhæve følgende:

1) Begrebet vektor defineres (kapitel 7) ligetil som et orienteret liniestykke, således at ensrettede og lige lange vektorer regnes for ens.

2) Funktionsbegrebet indføres (side 70ff.) generelt som en afbildning. Dersom mængden A afbildes på mængden B , skrives $A \curvearrowright B$ eller $B=f(A)$. I det vigtige tilfælde, hvor både A og B er talmængder, benyttes normalt skrivemåden $y=f(x)$.

3) Logaritmfunktionen (for grundtal 10) fastlægges umiddelbart (kapitel 11) ved nogle af sine simple egenskaber, og med ganske jævne

¹ De matematiske bogstaver er dog sat med kursiv.

ord, hvorefter den kan bruges til simplifikation af talregninger. Beviset for dens eksistens er (som hos KR) udskudt til et senere bind.

Alt dette vil en normalt begavet gymnasieelev nok kunne bringes til at forstå, og på disse væsentlige punkter synes ABH mig at komme gymnasiasterne i møde på en naturligere måde end KR. Dog må jeg tilføje, at trods den simple vektordefinition virker indførelsen af vektorregningen noget kompliceret. Det skyldes bl. a., at det skalære produkt (ligesom forøvrigt hos KR) optræder før de trigonometriske funktioner.

Det skal endnu nævnes, at man spredt i bogen finder diverse historiske oplysninger, suppleret med billeder af navnkundige matematikere samt faksimile-gengivelser af sider af deres berømte værker. Hermed søges efterkommet et ønske i den førnævnte officielle vejledning, og det må vel også virke som et oplivende og afvekslende element. Virkelig værdi får matematikkens historie dog nok først, når man lever sig ind i begrebernes udvikling gennem tiderne, og noget sådant har eleverne i gymnasiet vel normalt hverken tid eller modenhed til.

Til begge bøger er udgivet et fyldigt supplement med opgaver (henholdsvis 759 og 870 opgaver).

Som afslutning vil jeg gerne udtale, at man må påskønne det store arbejde, som begge sæt forfattere har udført — og formodentlig er i gang med at føre videre. Jeg har haft en del at kritisere. Måske nogle vil synes, at når man som jeg nærmer sig pensionsalderen, bør man være varsom med kritik af noget nyt, for man er ikke længere i pagt med fremtiden. Nuvel, kritik har man vel altid lov at rette, når den ikke er sårende i formen. Og over 40 års undervisning af unge mennesker, der lige er udgået fra gymnasiet, må vel have givet en sum af erfaring om gymnasieundervisningen, der kan veje noget op mod den konservatisme og mangel på åndelig bevægelighed, som siges at følge med alderen.

Samlet i en nøddeskal går min kritik ud på følgende: Indførelsen af det nye gymnasiepensum betyder i sig selv en vanskeliggørelse af faget for eleverne. Hertil kommer imidlertid, at det ikke i tilstrækkelig grad er lykkedes for forfatterne at lette overgangen til det nye, idet bøgerne er blevet for store af omfang (henholdsvis 341 og 390 sider) og på mange punkter for krævende i formen til at kunne kaperes af elever med det forhåndenværende timetal og på det foreliggende modenhedstrin.

Det er ikke let at skrive lærebøger i matematik, men det er dog en frivillig sag. For matematiklærerne, der skal undervise, er der derimod ingen frivillighed; de er i august i år blevet pånødet et meget vanskeligt job. De vil sikkert gøre, hvad de kan, for at redde det i land. Lad os håbe, at mængden af vellykkede resultater ikke bliver Ø.

BOKMELDINGER

SERGE LANG: *Introduction to differentiable manifolds*. Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1962. 10 + 126 pp. sh. 53/-.
(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 29.)

Den foreliggende bok er en interessant nykommer, foreløpig nok så enestående i sitt slag. Forfatteren annonserer at hensikten med den er å fylle den lakune i litteraturen som finnes mellom de tre differensialteoriene differensialtopologi, differensialgeometri og teorien for ordinære differensiallikninger. Mer presist kunne vi si at forfatteren ønsker å presisere det naturlige aktualitetsområde for disse teoriene samt å angi apparaturen felles for disse i sin mest generelle form. Herav skulle det fremgå at boken ikke er noen innføring i differensialgeometri i vanlig forstand. En finner ikke nevnt begreper som krumning, torsjon, affin sammenheng o. s. v. Vi presiserer dette for å unngå mulig misforståelse m. h. t. innholdet.

Som tittelen forteller er det de differensiabile mangfoldighetene som er det sentrale emnet i fremstillingen. I motsetning til vanlig betyr imidlertid differensiabel mangfoldighet i dette tilfelle også *uendeligdimensjonal* differensiabel mangfoldighet, altså slike hvor tangentrommet i hvert punkt er et Banachrom. At teorien for differensiabile mangfoldigheter lar seg utvikle for slike beror i det vesentlige på at eksistensteoremet for ordinære differensiallikninger og teoremet for implisitte funksjoner fra analysen også gjelder i Banachrom. Andre trekk ved boken som springer i øyet er den konsekvente bruk av begreper og teknikker hentet fra differensialtopologi og homologisk algebra. Vi nevner i fleng kategorier og funktorer, morfismer og eksakte sekvenser, vektorbunter og operasjoner på slike, »pull back's» o. a. Så langt fra å virke tyngende (merkelig nok) har disse gitt fremstillingen ualminnelig klarhet. Ellers nevner vi at integrasjonsteorien som er anvendt, begrenser seg til integrasjon av regulerte funksjoner (uniforme grenser av trappefunksjoner) og er som sådan meget enkel og oversiktlig (enklere enn vanlig Riemann-integrasjon).

La oss si litt om det nivå boken ligger på. I følge forfatterens intensjoner skulle boken sammen med et grunnkurs i derivasjon og integrasjon av vektorvaluerte funksjoner utgjøre et 1-semester kurs for første års

hovedfagsstudenter eller begavete 1.-avd. studenter. Anmelderen finner et slikt opplegg noe hardt. Det forutsetter i hvert fall at studentene er temmelig stø i lineær algebra og har godt kjennskap til de enklere delene av generell topologi. Dessuten bør en nok være motivert for stoffet fra minst en av de tre disiplinene nevnt først i anmeldelsen. For øvrig er boken selvforsynt, og stoffet har fått en elegant og sikker utforming av en kompetent matematiker.

Per Holm

M. M. POSTNIKOV: *Foundation of Galois theory*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 29.) Translated from the Russian by Ann Swinfen. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1962. 10 + 109 pp. sh. 42/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT 10 (1962), s. 219.)

Galoisteorien er utmerket som en innføring i algebra, den gir en introduksjon til så viktige områder som gruppeteori, og eksemplifiserer en betydningsfull teknikk, tilordning av en gruppe til en ligning, som leder til interessante og for en nybegynner lett forståelige resultater. Og hvem har ikke som ung elev hørt om Abel og uløsbarheten av femtegradsligningen!

Den foreliggende bok, av omfang vel 100 sider, er en usedvanlig grundig og vederheftig skrevet innføring i den elementære del av Galois-teorien. Sider av dette stoff som ofte i innføringsbøker får en litt suspekt behandling, blir her dratt frem i dagen og underkastet en klar og uttømmende diskusjon. La oss spesielt nevne to punkter. At enhver rotutvidelse K av en kropp P er inneholdt i en normal rotutvidelse, blir f. eks. i Birkhoff og MacLanes utmerkede innføringsbok avfeiet med noen få og høyst ufullstendige linjer. I Postnikovs bok får dette punkt en meget tilfredsstillende behandling, bygget på et lemma som gir en tilstrekkelig og nødvendig betingelse for »transitivitet av normalitet«. I van der Waerdens store lærebok er den generelle n -te grads ligning et formelt uttrykk sammenskrevet med »ubestemte« koeffisienter; hvilken matematisk eksistens et slikt begrep har, er høyst uklart. Postnikov gir i siste del av kapitel 3 og i kapitel 4 av del II en meget klargjørende diskusjon av hva den generelle n -te grads ligning er, og hva det vil si å løse den ved rotutdraging. Selv mer erfarne matematikere vil kunne ha glede av å lese disse bemerkninger.

Forutsetningene for å studere denne bok er meget små. For de resultater han ikke viser, gir Postnikov hele tiden referanser til en elementær lærebok av Kurosh. Som oftest er disse resultater av ganske triviell

karakter, men av og til vil en nybegynner, utelukkende med henvisninger til en på russisk skrevet lærebok, komme i vansker, f. eks. med å innse at et symmetrisk polynom kan skrives som et polynom i de elementærsymmetriske polynomer. Her kan man bebreide »translation editor« for utilstrekkelig bearbeidelse av den oversatte tekst. En lærebok i matematikk bør ikke være noe monument til forfatterens ære og derfor behandles med den største pietet. Den skulle nærmere være et forsøk på kommunikasjon mellom forfatter og leser, og da burde det enten, i tillegg til referansene til Kurosh, vært gitt henvisninger til lærebøker en vestlig leser lettere kunne slå etter i, eller, kanskje bedre, den vitenskapelige redaktør for oversettelsen kunne ha fått skrevet et lite appendiks hvor de nødvendige resultater ble gitt.

Det kan være av interesse å bemerke at dette er den tredje oversettelse av denne bok til engelsk; de andre to er kommet ut i Nederland og India. Man kunne ønske en bedre koordinering mellom forlagene i deres oversettelsesvirksomhet!

Utmerket som boken er, så vil det allikevel være vanskelig å innordne den i den regulære universitetsundervisning. Som innføring i algebra er boken for snever, til et spesialstudium av Galoisteori er den for elementær. Men for den entusiastiske student er den utmerket som en bok å »lese ved siden av«. Og den ville være meget velegnet til bruk f. eks. på et sommerkurs for matematikklektorer i den høyere skole. Galoisteori fører frem til interessante resultater, samtidig som den kan benyttes som en introduksjon til den moderne matematikks formalisme ved bl. a. å fremheve de underliggende mengdeteoretiske konstruksjoner, mens et kurs i ren mengdelære lett leder til en ørkenvandring i trivialiteter kledd i en drakt av nye og uvante symboler.

Jens Erik Fenstad

MOTTATTE BØKER

P. O. Andersen — S. Bülow — H. J. Helms: *Opgaver til matematik for gymnasiet I*. Gyldendal, København 1963. 103 s. D. kr. 9.75.

Opgaver til bogens enkelte afsnit 7–103.

A. F. Bermant: *A course of mathematical analysis*. Part II. (International series of monographs on pure and applied mathematics 30.) Translated from the Russian by D. E. Brown. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1963. 11 + 374 pp. sh. 60/–.

Functions of several variables. Differential calculus 1–65 * Applications of the differential calculus 66–121 * Multiple integrals and iterated integration 122–184 * Line and surface integrals 185–232 * Differential equations 233–319 * Trigonometric series 320–365 * Index 367–374.

V. M. Bradis — V. L. Minkovskii — A. K. Kharcheva: *Lapses in mathematical reasoning*. (The Commonwealth and International Library of Science, Technology, Engineering and Liberal Studies. Mathematics Division, Vol. 5.) Pergamon Press, Oxford, London, Paris, Frankfurt 1963. 14 + 201 pp. sh. 15/–.

Introduction 1–6 * Classification of exercises in refuting false mathematical arguments 6–37 * Arithmetic. Examples of false arguments 38–46 * Analysis of the examples 47–62 * Algebra. Examples of false reasoning 63–87 * Analysis of the examples 87–122 * Geometry. Examples of false arguments 123–144 * Analysis of the examples 145–162 * Stories, with explanations, of causes of erroneous reasoning 162–176 * Trigonometry. Examples of false arguments 177–184 * Analysis of the examples 184–188 * Approximate computations. Accounts explaining sources of erroneous reasoning 189–201.

Lamberto Cesari: *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. Second edition. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Bd. 16.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 8 + 271 S., 37 Fig. DM 36.00.

The concept of stability and systems with constant coefficients 1–33 * General linear systems 34–90 * Nonlinear systems 91–182 * Asymptotic developments 182–197 * Bibliography 197–266 * Index 267–271.

Ruel V. Churchill: *Fourier series and boundary value problems*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, San Francisco, Toronto, London 1963. 8 + 248 pp. sh. 52/6.

Partial differential equations of physics 1–22 * Superposition of solutions 23–48 * Orthogonal sets of functions 49–76 * Fourier series 77–101 * Further properties of Fourier series 102–112 * Fourier integrals 113–125 * Boundary value problems 126–163 * Bessel functions and applications 164–199 * Legendre polynomials and applications 200–225 * Uniqueness of solutions 226–242 * Bibliography 243–244 * Index 245–248.

H. S. M. Coxeter: *Unvergängliche Geometrie*. (Wissenschaft und Kultur, Bd. 17.) Ins Deutsche übersetzt von J. J. Burckhardt. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart 1963. 552 S. S. Fr. 55.00.

Dreiecke 15–42 * Regelmässige Vielecke 43–58 * Bewegungen in der Euklidischen Ebene 59–72 * Zweidimensionale Kristallographie 73–92 * Ähnlichkeit in der Euklidischen Ebene 93–103 * Kreise und Kugeln 104–127 * Bewegung und Ähnlichkeit im Euklidischen Raum 128–138 * Koordinaten 139–170 * Komplexe Zahlen 172–185 * Die fünf Platonischen Körper 186–198 * Goldener Schnitt und Phylloxaxis 199–213 * Anordnungsgeometrie 214–232 * Affine Geometrie 233–279 * Projektive Geometrie 279–319 * Absolute Geometrie 320–348 * Hyperbolische Geometrie 349–369 * Differentialgeometrie der Kurven 370–394 * Tensoren 395–411 * Differentialgeometrie der Flächen 412–438 * Geodätische Linien 439–455 * Topologie der Flächen 455–474 * Vierdimensionale Geometrie 475–493 * Tabellen 494–495 * Literaturverzeichnis 496–500 * Antworten zu den Übungen 501–539 * Register 541–552.

C. J. Eliezer: *Concise vector analysis*. (The Commonwealth and International Library of Science, Technology, Engineering and Liberal Studies. Mathematics Division, Vol. 8.) Pergamon Press, Oxford, London, Paris, Frankfurt 1963. 7 + 153 pp. sh. 15/–.

Vectors and vector addition 1–15 * Products of vectors 16–37 * Vector calculus 38–57 * Vector calculus (continued) 58–102 * Some applications 103–150 * Index 151–153.

Wolfgang Giloi — Rudolf Lauber: *Analogrechnen*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 16 + 423 S., 336 Fig. Ganzl. DM 68.00.

Abgrenzung der Aufgabenbereiche für den Analogrechner 1–5 * Die Rechenelemente und ihre Anwendung 5–19 * Geräte zur Ein- und Ausgabe 19–24 * Grundsätzliches Verfahren der Programmierung 24–32 * Normierung und Massstabsfaktoren 32–41 * Die Organisation eines Analogrechenprogramms 41–54 * Potentiometer und ihre Einstellung 55–59 * Der Rechenverstärker und seine Schaltungen 59–77 * Dioden und Relais, Komparatoren 77–81 * Multiplizierer 81–95 * Koordinatenwandler (Resolver) 95–98 * Funktionsgeber und ihre Einstellung 98–109 * Sonstige Rechenelemente: Totzeitglieder und Rauschgeneratoren 109–112 * Ge-

samtaufbau und Steuerung des Analogrechners 112–118 * Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 119–137 * Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 137–159 * Schaltungen für Rechenoperationen, die nicht unmittelbar durch ein Rechenelement ausgeführt werden können 160–182 * Erzeugung analytischer Funktionen ohne Funktionsgeber 182–194 * Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten 194–204 * Spezielle Schaltungen zur Erzeugung nichtanalytischer Funktionen 204–220 * Nichtlineare Differentialgleichungen 221–241 * Randwertaufgaben 241–255 * Partielle Differentialgleichungen 255–275 * Optimierungsprobleme 275–287 * Behandlung von Übertragungssystemen 288–316 * Die Lösung regelungstechnischer Aufgaben 316–325 * Die Behandlung elektrischer Netzwerke 326–339 * Die Behandlung mechanischer Systeme 340–356 * Systeme mit regellosen Eingangsgrößen 357–385 * Die Ausprüfung einer Rechenschaltung 386–394 * Die Fehler der Rechenelemente und ihre Auswirkung 394–408 * Nachprüfung der Genauigkeit der Rechenelemente 408–417 * Namen- und Sachverzeichnis 418–423.

R. L. Goodstein: *Boolean algebra*. (The Commonwealth and International Library of Science, Technology, Engineering and Liberal Studies. Mathematics Division, Vol. 6.) Pergamon Press, Oxford, London, Paris, Frankfurt 1963. 7 + 140 pp. sh. 12/6.

The informal algebra of classes 1–20 * The self-dual system of axioms 21–48 * Boolean equations 49–75 * Sentence logic 76–93 * Lattices 94–121 * Solutions to examples 122–136 * Bibliography 137 * Index 139–140.

Helmut Hasse: *Höhere Algebra*. Lineare Gleichungen. (Sammlung Götschen 931.) Fünfte, neubearbeitete Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1963. 150 S. DM 3.60.

Literaturverzeichnis 4 * Die Grundaufgabe der Algebra 5–7 * Ringe, Körper, Integritätsbereiche 7–47 * Gruppen 47–66 * Determinantenfreie lineare Algebra 66–103 * Lineare Algebra mit Determinanten 103–146 * Schluss. Abhängigkeit vom Grundkörper 146–147 * Namen- und Sachverzeichnis 148–150.

Guido Hoheisel: *Integralgleichungen*. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. (Sammlung Götschen 1099.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1963. 112 S. DM 3.60.

Literaturverzeichnis 4 * Einleitung 5–6 * Lineare Räume 6–8 * Normierte Räume 8–14 * Der Hilbertraum 14–21 * Der Raum L_2 21–27 * Operatoren 27–36 * Vollstetige Operatoren 36–41 * Lineare Integralgleichungen 41–48 * Lösungsverfahren mit Beispielen 48–57 * Die Resolvente 57–65 * Normale und hermitesche Kerne 65–71 * Entwicklungen nach Eigenfunktionen 71–78 * Anwendungen auf nicht-hermitesche Kerne 78–85 * Die Fredholmschen Determinanten 86–96 * Verteilung von charakteristischen Werten 96–98 * Anleitung zu den Aufgaben 98–101 * Ergänzungen 102–111 * Sachverzeichnis 111–112.

Adele Leonhardy: *Introductory college mathematics*. Second edition. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 487 pp. sh. 57/-.

Introduction to the student 1-3 * What is mathematics 4-36 * The algebra of numbers 37-98 * Numbers in exponential form 99-124 * Measurement and computation 125-161 * The comparison of quantities 162-183 * Functions, relations and their graphs 184-243 * Variation 244-259 * The rate of change of a function 260-310 * Exponential and logarithmic functions 311-332 * Periodic functions 333-396 * Simple statistical methods 397-426 * Probability 427-448 * Appendix 449-454 * Tables 455-458 * Answers 459-476 * Index 479-487.

Paul Lorenz: *Anschaunungsunterricht in mathematischer Statistik*. (Mittelwertvergleich, Beilage zum Band III.) S. Hirzel Verlag, Leipzig 1962. 24 S. DM 1.90.

Einfach gegliederte Statistiken 5-8 * Mehrfach gegliederte Statistiken 8-24.

Saunders MacLane: *Homology*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 114.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 10+422 S. Cloth DM 62.00.

Introduction 1-8 * Modules, diagrams, and functors 8-34 * Homology of complexes 34-63 * Extensions and resolutions 63-103 * Cohomology of groups 103-138 * Tensor and torsion products 138-172 * Types of algebras 173-200 * Dimension 200-220 * Products 220-248 * Relative homological algebra 248-279 * Cohomology of algebraic systems 280-318 * Spectral sequences 318-358 * Derived functors 358-403 * Bibliography 404-412 * List of standard symbols 413-414 * Index 415-422.

Hans Robert Müller: *Kinematik*. (Sammlung Götschen 584/584a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1963. 171 S., 75 Fig. DM 5.80.

Schrifttum 5 * Einleitung 6 * Punktbahnen und Geschwindigkeiten 7-27 * Hüllbahnen 27-33 * Drehpolpläne 33-38 * Krümmungseigenschaften von Punktbahnen 38-56 * Beschleunigungen 56-62 * Krümmungseigenschaften von Hüllbahnen 62-69 * Kreisrollungen 69-82 * Kurvengetriebe und Verzahnungen 82-95 * Globale Eigenschaften und ihre Anwendungen 95-109 * Gelenkwerke 110-130 * Eigenschaften höherer Ordnung 131-145 * Fernpolstellungen 146-147 * Räumliche Kinematik 148-167 * Register 168-171.

Ivan Niven: *Diophantine approximations*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 14.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1963. 9+68 pp. sh. 36/-.

Notation and conventions viii * The approximation of irrationals by rationals 1-15 * The product of linear forms 16-22 * The multiples of an irrational number 23-45 * The approximation of complex numbers 46-53 * The product of complex linear forms 54-62 * Index 67-68.

O. T. O'Meara: *Introduction to quadratic forms*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 117.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 11 + 342 S., 10 Fig. Cloth DM 48.00.

Prerequisites and notation xi * Valuated fields 1–41 * Dedekind theory of ideals 41–54 * Fields of number theory 54–81 * Quadratic forms and the orthogonal group 82–112 * The algebras of quadratic forms 112–153 * The equivalence of quadratic forms 154–189 * Hilbert's reciprocity law 190–207 * Quadratic forms over Dedekind domains 208–239 * Integral theory of quadratic forms over local fields 239–284 * Integral theory of quadratic forms over global fields 284–335 * Bibliography 336 * Index 337–342.

John A. Peterson — Joseph Hashisaki: *Theory of arithmetic*. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 14 + 303 pp. sh. 53/–.

The origin of numerals and systems of numeration 1–19 * Sets 20–36 * Relations and their properties 37–58 * Systems of numeration 59–80 * The system of whole numbers 81–111 * The system of integers 112–150 * The system of rational numbers 151–192 * The system of real numbers 193–225 * Topics from geometry 226–270 * Answers to selected exercises 271–298 * Index 299–303.

Pihl og Ring: *Regnebog for 2. real*. Ved Bernhard Andersen og Holger Salfelt. Gyldendal, København 1963. 160 s. D. kr. 13.75.

Hele tal og decimalbrøker 9–21 * Fremmed mønt 22–28 * Ligninger I 29–33 * Værdipapirer 34–39 * Afbildninger 40–66 * Kvadratrod 67–77 * Areal og rumfang 78–87 * Statistik og regnskabsføring 88–93 * Ligninger II 94–107 * Ligefremt og omvendt proportionale størrelser 108–120 * Forsikringer 121–126 * Blandede opgaver. Aritmetik 127–131 * Regning 132–160.

Georg Polya: *Mathematik und plausible Schliessen*. Bd. 2: Typen und Strukturen plausibler Folgerung. (Wissenschaft und Kultur, Bd. 15.) Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart 1963. 282 S. Ganzl. S. Fr. 34.00.

Winke and den Leser 11–12 * Die nächstliegenden Strukturen 13–33 * Weitere Strukturen und erste Zusammenhänge 34–86 * Zufall, die immer gegenwärtige Konkurrenzvermutung 87–166 * Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Logik plausiblen Schliessens 167–217 * Plausibles Schliessen in Entdeckung und Unterricht 218–256 * Lösungen 257–279 * Bibliographie 280–282.

Herbert John Ryser: *Combinatorial mathematics*. (The Carus Mathematical Monographs 14.) Published by The Mathematical Association of America. John Wiley & Sons, London, New York 1963. 14 + 154 pp. sh. 30/–.

Fundamentals of combinatorial mathematics 1–16 * The principle of inclusion and exclusion 17–28 * Recurrence relations 29–37 * Theorem of Ramsey 38–46 * Systems of distinct representatives 47–60 * Matrices of zeros and ones 61–78 * Orthogonal latin squares 79–95 * Combinatorial designs 96–130 * Perfect difference sets 131–141 * List of notation 143–145 * Index 147–154.

OPPGAVER TIL LØSNING

Det har i den senere tid vist seg meget vanskelig å holde oppgaveseksjonen gående med passende problemer, da det er kommet meget få brukbare forslag fra leserne. Redaksjonen ser seg derfor nødt til — i hvert fall inntil videre — å *avvikle oppgaveseksjonen*, på en slik måte at det blir publisert løsninger av de hittil stilte oppgaver, men at nye oppgaver foreløpig ikke vil bli gitt.

Hvis det skal være mulig å gjenoppta oppgaveseksjonen senere, må redaksjonen ha nye forslag til oppgaver fra leserne. Slike forslag, helst ledsaget av forslagsstillerens egen løsning, kan sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

LØSNINGER

221. I samme plan har man fire cirkler C_A , C_B , C_C og C_D . Enhver af cirklerne berører de andre udvendig, og systemerne $C_A C_B C_C$ og $C_B C_C C_D$ er ligedannede. C_A har radien $a=1$. Hvor store er de andre radier?

B. Thoroddsen

Løsning: Radierne betegnes 1, r , r^2 og r^3 . Ved benyttelse af formelen (29) i NMT 8, side 167 fås (for $n=4$)

$$\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)^2 - 2 \left(1 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6}\right) = 0,$$

der umiddelbart reduceres til

$$r^6 - 2r^5 - r^4 - 4r^3 - r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Dette er en såkaldt reciprok ligning, hvor man (efter division med r^3) kan indføre $z = r + 1/r$ som ny ubekendt. Da

$$r^2 + \frac{1}{r^2} = z^2 - 2, \quad r^3 + \frac{1}{r^3} = z^3 - 3z,$$

får man

$$z^3 - 2z^2 - 4z = 0.$$

Idet kun $z > 1$ kan benyttes, giver dette

$$z = 1 + \sqrt{5},$$

således at

$$r + \frac{1}{r} = 1 + \sqrt{5}.$$

Heraf finder man de to reciproke løsninger

$$r = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{5}} \right).$$

At eventuelle løsninger måtte være parvis reciproke, følger allerede af opgavens formulering.

David Fog

Også løst af Bernhard Andersen.

213. Man har fem klot K_A , K_B , K_C , K_D och K_E . Varje klot tangerar de fyra andra utantill, och klotkonfigurationerna $K_A K_B K_C K_D$ och $K_B K_C K_D K_E$ är likformiga. K_A har radien $R_A = 1$ cm. Hur stora är radierna i de övriga kloten?

Harry Björk

Lösning: Denne opgave kan løses ved ganske samme metode som ovenstående nr. 221. Den ovennævnte formel giver her (med $n=5$)

$$\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} \right)^2 - 3 \left(1 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^8} \right) = 0,$$

der reduceres til

$$r^8 - r^7 - 2r^5 - r^4 - 2r^3 - r + 1 = 0.$$

Indførelse af $r + 1/r = z$ giver i dette tilfælde

$$z^4 - z^3 - 4z^2 + z + 1 = 0,$$

der omformes til

$$(z^2 - 2z - 1)(z^2 + z - 1) = 0.$$

Da som før kun $z > 1$ kan bruges, fås

$$z = 1 + \sqrt{2},$$

altså

$$r + \frac{1}{r} = 1 + \sqrt{2}.$$

Heraf findes de to reciproke løsninger

$$r = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}} \right).$$

David Fog

236. Det er gitt tre punkter A , B og C på en rett linje, slik at B ligger midt mellom A og C . Del linjestykket AB i n like store deler med bare linjalkonstruksjoner.

Per Roar Andenæs

Løsning: 1) Konstruktion af en linie parallel med den givne linie AC gennem et punkt D uden for AC (fig. 1).

DA tegnes, E vælges; EB , EC og CD tegnes; CD skærer EB i F ; AF tegnes, den skærer EC i G . Da er DG parallel med AC .

2) Deling af AB i lige store dele (fig. 2).

Der konstrueres en linie parallel med AC . På denne vælges to punkter P_1 og P_2 , hvorefter man umiddelbart kan konstruere punkter $P_3, P_4, \dots$, så $P_1P_2 = P_2P_3 = \dots$. Når man har punkterne $P_1, \dots, P_{n+1}$, kan man let dele AB i n lige store dele.

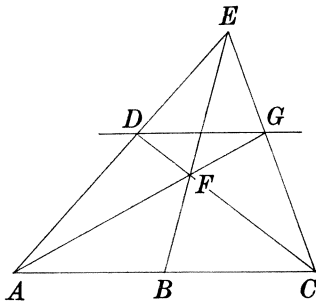


Fig. 1

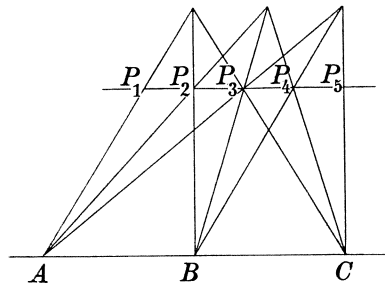


Fig. 2

P. W. Karlsson

Også løst av Bernhard Andersen, Inge-Lise Hansen og Torsten Ström.

238. Låt O vara en punktformig ljuskälla inuti ett speglade klot (medelpunkt C). Visa att alla från O utgående ljusstrålar som ligger på en från C vänd regelbunden kon med en diameter i sfären som axel efter varje reflexion tangera ett och samma klot fullständigt bestämt av O 's avstånd från C och ljuskonens öppningsvinkel.

Torsten Ström

Løsning: Det er nok at se på strålen i et diametralsnit af kuglen. Strålerne tangerer en kugle med centrum i C og radius $a \sin \alpha$, hvor $a = OC$ og α = den halve topvinkel af keglen.

Bolli Thoroddsen

239. Visa att talen k_n^p (Ove J. Munch: Om potensproduktsummer, NMT 7 (1959), s. 14) kan framställas genom

$$k_n^p = \frac{p!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right)^{p+1} e^{-nz} dz,$$

där $c \leq 0$ är godtyckligt. Härled med hjälp härav den asymptotiska formeln i uppgift 174.

Gerhard Arfwedson

Lösning: Integranden kan skrivas

$$\sum_{\nu=0}^{p+1} e^{z(\nu-n)} (-1)^{p+1-\nu} \binom{p+1}{\nu} z^{-p-1}.$$

De termer där $\nu \geq n$ försvinner om integrationsvägen kompletteras med en halvcirkel i vänstra halvplanet (över vilken integralen försvinner då radien växer). Betrakta alltså

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{z(\nu-n)} (-1)^{p+1-\nu} \binom{p+1}{\nu} z^{-p-1} = \sum_{\nu=1}^n e^{-\nu z} (-1)^{p+1-n+\nu} \binom{p+1}{n-\nu} z^{-p-1}.$$

Serieutveckling och integration över den angivna vägen kompletterad med en halvcirkel i högra halvplanet samt ev. nödvändiga övriga kompletteringar ger enligt residuesatsen

$$\begin{aligned} \frac{p!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z) dz &= -p! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} \frac{\nu^p}{p!} (-1)^{p+1-n+\nu} \binom{p+1}{n-\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^n \nu^p (-1)^{n-\nu} \binom{p+1}{n-\nu} = k_n^p, \text{ v.s.b.} \end{aligned}$$

Den ursprungliga integranden kan för $z=iy$ skrivas

$$\left(\frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \right)^{p+1} \cdot e^{\frac{1}{2}iy(p+1-2n)}$$

vilket visar att maximitermen fås för $n = [\frac{1}{2}(p+1)]$. Elementära uppskattningar visar att integranden för stora p kan ersättas av sin serieutveckling kring origo dvs.

$$\left(\frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \right)^{p+1} \approx e^{-\frac{1}{24}y^2(p+1)},$$

alltså

$$\text{Max}_n k_n^p \sim \frac{p!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2(p+1)} dy$$

vilket med Stirlings formel ger

$$\text{Max}_n k_n^p \sim p^p e^{-p} \sqrt{12}.$$

Torsten Ström

240. La p , q og r ($q \neq r$) være naturlige tall. Sett

$$S(p; q, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn+q)(pn+r)},$$

og finn $S(p; q, r)$ uttrykt ved endelige summer. Bruk resultatet til å vise at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(4n+1)} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 3 \ln \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

R. Tambs Lyche

Løsning: Omedelbart fås med hjelp av Abels kontinuitetssats

$$S(p; q, r) = \frac{1}{q-r} \int_0^1 \frac{x^{r-1} - x^{q-1}}{1-x^p} dx.$$

Ett sätt att uttrycka integralen som summan av ändliga summer är att utföra division så långt som möjligt i integranden, därefter partialbråksutveckla den brutna rationella funktionen, sammanslå konjugerade termer och integrera termvis. De numeriska detaljerna är elementära och redovisas ej. Metoden ger

$$S(p; q, r) = -\frac{1}{q-r} \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{1}{r-vp} - \sum_{v=1}^m \frac{1}{q-vp} + \frac{1}{2} (1 + (-1)^p) ((-1)^{r-np} - (-1)^{q-mp}) \ln 2 \right. \\ \left. + 2 \sum_{v=1}^{[\frac{1}{2}(p-1)]} \left[\left(\cos \frac{2\pi vr}{p} - \cos \frac{2\pi vq}{p} \right) \ln \left(2 \sin \frac{\pi v}{p} \right) + \left(\sin \frac{2\pi vq}{p} - \sin \frac{2\pi vr}{p} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi v}{p} \right) \right] \right\}.$$

Ytterligare komprimering av summan kan ske men har ej ansetts behövlig. Nödvändigt för ovanstående uttrycks giltighet är att $\sum_{v=1}^0$ definieras $= 0$; n är det största heltal för vilket $r-1-np \geq 0$ (motsvarande för m och q).

Den givna summan är $12 \cdot S(12; 4, 3)$ vilket ger det önskade uttrycket.

Torsten Ström

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1963 på de matematiske gymnaslinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. Vis, at der findes et komplekst tal t , så polynomiet

$$x^2 - (1 + 2i)x + (1 - 5i)$$

går op i polynomiet

$$P(x) = x^5 - (1 + 2i)x^4 + (1 - 5i)x^3 - tx^2 + (t^2 + t)x - 10 - t.$$

Løs for denne værdi af t ligningen

$$P(x) = 0.$$

Løsningerne ønskes angivet på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I en a-klasse er der 7 drenge og 1 pige, og i en b-klasse er der 6 drenge og 4 piger.

På hvor mange måder kan der dannes et udvalg bestående af 3 elever fra a-klassen og 3 elever fra b-klassen,

- 1) når der kan vælges frit mellem eleverne inden for hver af de to klasser?
- 2) når det skal indeholde pigen fra a-klassen, 1 pige fra b-klassen og 4 drenge?
- 3) når det skal indeholde 3 piger og 3 drenge?

3. Givet et liniestykke m , et liniestykke p og en vinkel v . Konstruer en trekant ABC således, at siden $AC = m$, vinkel $C = v$ og liniestykket $OM = p$, hvor M er midtpunktet af AC , og O er skæringspunktet mellem BM og vinkelhalveringslinien fra C .

Diskussion kræves.

Beregn de ubekendte sider og vinkler i trekant ABC , når $m = 2$, $p = \sin 33^\circ, 67$ og vinkel $v = 77^\circ, 34$.¹

¹ Her var indløbet en trykfejl, idet der skulle have stået $v = 67^\circ, 34$. I den anledning resolverede undervisningsministeriet, at der skulle afholdes en ny prøve, og at begge sæt matematik I skulle bedømmes, men kun det bedste danne grundlag for karaktergivningen.

Matematik I (ny prøve).

1. Find ligningerne for de to rette linier, der fremstilles ved ligningen

$$2x^2 + xy - y^2 + 3x + 1 = 0.$$

Løs derefter ligningssystemet

$$2x^2 + xy - y^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x^2 + xy + 2x + y + 1 = 0.$$

2. I en given kugle med radius R er indskrevet et legeme, der består af en omdrejningscylinder, hvis endefladers periferier ligger på kuglefladen, og to omdrejningskegler, hvis grundflader falder sammen med hver sin af cylinderens endeflader, og hvis toppunkter ligger på kuglefladen.

Bestem cylinderens højde, så legemets rumfang bliver så stort som muligt.

3. Der er givet en stump vinkel v og to liniestykker p og q . Konstruer en trekant ABC , hvori vinkel A er lig med v , siden AB lig med p og vinkel B 's halveringslinie lig med q .

Diskussion kræves (stadig under forudsætning af, at den givne vinkel er stump).

Beregn de ubekendte vinkler og sider i trekanten, når $v = 102^\circ,37$, $p = 1,261$ og $q = 1,666$.

Matematik II.

1. En hyperbel går gennem punktet $M(-4, 6)$, og dens asymptoter har ligningerne

$$x\sqrt{3} + y = 0 \quad \text{og} \quad x\sqrt{3} - y = 0.$$

Find hyperblens ligning.

Hyperblens tangent i M betegnes m , og det brændpunkt, der har positiv absisse, betegnes F .

Find koordinaterne til det punkt, der ligger symmetrisk med F med hensyn til m .

2. Givet en pyramide $T-ABCD$, hvori grundfladen $ABCD$ er et trapez (AD parallel med BC) med siderne $AB = BC = CD = a$ og $AD = 2a$. Linien TC er vinkelret på grundfladen, og $TC = a$.

Find toplansvinklerne langs grundfladens kanter.

Vis, at pyramiden har en omskrevet kugle, og find dennes radius.

3. Undersøg og tegn den kurve, hvis ligning er

$$y = \frac{2x}{1-2x}.$$

Beregn arealet af den figur, der begrænses af kurven, x -aksen samt linierne $x = -2$ og $x = -1$.

FINLAND

Längre kursen.

1. Kärlen A och B innehåller samma saltlösning. Från A borttages $\frac{1}{5}$ av lösningen i kärlet och den avlägsnade mängden ersättes med vatten. På detta sätt förfäres sammanlagt fem gånger. Från B avlägsnas på motsvarande sätt tio gånger $\frac{1}{10}$ av lösningen. Huru många procent starkare är lösningen i B än lösningen i A efter den sista vattenpåfyllningen?

2. Första termen i en viss serie är två tredjedelar av den andra, den andra är $\frac{3}{4}$ av den tredje, denna i sin tur $\frac{4}{5}$ av den fjärde o. s. v. Seriens n :te term är u . Uttryck summan av de n första termerna medels n och u .

3. Lös ekvationen $(\frac{3}{4})^x - (\frac{4}{3})^x = 1$. Ange resultatet med tre decimalers noggrannhet.

4. Till parabeln $y = x^2 + 1$ dras tangenterna från origo. Beräkna arean av den figur, som begränsas av tangenterna och parabelbågen mellan tangeringspunkterna. Rita figur.

5. Härled formeln för derivering av en kvot.

6. En likbent triangel har basen a och benen b . Beräkna längden av den del av en basvinkels bissektris, som faller inom triangeln.

7. Genom en godtycklig inre punkt P i en triangel dras paralleller till dennas sidor. Härvid uppkommer tre mindre trianglar med P som gemensam hörnpunkt. Uttryck den ursprungliga triangelns area A medels de små triangelarnas areor A_1 , A_2 och A_3 .

8. I en rät cirkelkon är en halvsfär inskriven så, att dess yta tangerar konens mantel och dess bas ligger i konens basplan. Beräkna förhållandet mellan halvsfärens och konens volymer, då i konens axelsektion toppvinkeln är $2v$. För vilket värde på v är nämnda förhållande störst? Motivera extremvärdets art.

9. Lös fullständigt ekvationen $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

10. Beräkna maximi- och minimivärdena för funktionen $y = \frac{x^2}{x-2}$. Bestäm ekvationerna för kurvans asymptoter. Rita figur.

ÍSLAND

I.

1. På parabeln $y = x^2/p$ ligger punkterna $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$, hvor $x_1 < x_2$. Gennem midtpunktet M af korden AB trækkes en linie parallel med y -aksen til skæring med parabeln i C . Længden af $CM = h$.

1) Beregn h .

2) Beregn arealet af det segment, som AB afskærer af parabeln, og vis, at det har værdien $\frac{2}{3}hk$, hvor $k = x_2 - x_1$.

3) Punkterne A og B tænkes nu bevægelige på en sådan måde, at parabelkorden AB 's projektion på toppunktstangenten holder sig konstant. Hvad viser beregningerne i 1) og 2) om arealet af segmenterne, som begrænses af korden AB og parabelbuen AB under bevægelsen af A og B ?

4) Find det geometriske sted for midtpunktet M af korden AB , når dennes projektion på toppunktstangenten er k .

2. 1) Beregn rødderne i ligningen

$$x^2 + (2i + 2)x + 2i = 0.$$

2) Ligningen

$$x^4 + 2(1 + i)x^3 + (3 + 2i)x^2 + (6 + 6i)x + 6i = 0$$

har en rent imaginær rod $x = ib$. Bestem de værdier, som b kan have, og derpå alle ligningens rødder.

3. Givet $f(x) = \sin x + \cos 2x$; $0 \leq x \leq 2\pi$.

1) Find funktionens nulpunkter.

2) Find dens maksima og minima.

3) Tegn kurven $y = f(x)$.

4) Beregn arealet af det område, som begrænses af kurven og akserne i intervallet $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$.

5) Dette område drejes nu en omgang om x -aksen. Beregn omdrejningslegemets rumfang.

II.

1. En kasse har de lodrette kanter $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 16$, hvor $A_1B_1C_1D_1$ er grundfladen. Kassens længde er $AB = 24$, bredden $AD = 9$. Midtpunktet af kanten BB_1 er P , midtpunktet af DC er Q og midtpunktet af AB er R .

1) Tegn en figur, som viser kassen. Træk også liniestykkerne A_1R og PQ , og beregn deres længde.

2) Bestem den vinkel, som linien PQ danner med grundfladen.

3) Bestem vinklen mellem linierne A_1R og PQ .

4) Bestem vinklen mellem planen PQR og grundfladen.

5) Beregn rumfanget af tetraedret A_1PQR .

2. Givet punktet $A(a, 0)$ og parablen $y^2 = px$, hvor p er et fast tal mellem 0 og $2a$.

1) Find de punkter P_1 og P_2 på parablen, hvis afstand fra A er den mindst mulige.

2) Påvis, at AP_1 og AP_2 er parablens normaler i P_1 og P_2 .

3) Når vi nu lader p gennemløbe hele intervallet $0 < p \leq 2a$, vil P_1 og P_2 blive bevægelige punkter. Bestem deres geometriske sted, og gør rede for dets art og beliggenhed.

3. 1) Givet funktionen

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^2+2}}.$$

Beregn $f(2 + \sqrt{6})$ med 3 decimaler og påvis, at dette er den største værdi, som $f(x)$ antager.

2) Løs ligningen

$$(\ln x)^2 - \ln x = \ln(e^2).$$

3) Beregn integralet

$$\int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx.$$

NORGE

Reallinjen.

1. En rett kjele med grunnflateradius r og høyde lik $2r$ blir skåret av en kuleflate. Kjeleleghøyden er en diameter i kula.

Regn ut overflaten av den delen av kjeleleghøyden som ligger utenfor kula.

Kula og kjeleleghøyden blir skåret av et plan som er parallelt med kjeleleghøyden og som har avstanden x fra toppunktet i kjeleleghøyden.

Vi tenker oss først at skjæringsplanet ligger mellom toppunktet i kjeleleghøyden og snittsirkelen for kuleleghøyden og kjeleleghøyden. Finn, uttrykt ved r og x , arealet av den sirkelringen som ligger mellom kjeleleghøyden og kuleleghøyden. Finn den største verdien dette arealet kan ha og den tilsvarende verdien av x .

Vi tenker oss så at planet kan skjære kula og kjeleleghøyden både ovenfor og nedenfor snittsirkelen. Finn de verdiene av x som da gjør arealet av sirkelringen lik arealet av snittsirkelen.

2. Sirkelen $x^2 + y^2 = R^2$ og punktet $(a, 0)$ på den positive x -aksen er gitt. Sirkelen skjærer y -aksen i punktene A og B .

Finn likningen for en parabel som har toppunkt i $(a, 0)$ og som går gjennom A og B . Hva blir brennpunktet og parameteren i parabellen, og hva blir likningen for styrelinjen?

Når $a > R$, har parabellen, foruten skjæringspunktene A og B to andre skjæringspunkter med sirkelen, C og D . Finn koordinatene til C og D uttrykt ved a og R .

Vi tenker oss nå at $(a, 0)$ er et fast punkt, mens R varierer. Punktene C og D vil da følge en kurve. Finn likningen for denne kurven og forklar hva likningen betyr geometrisk. Lag figur på millimeterpapiret for $R=3$ og $a=5$. Bruk 1 cm til enhet.

Vis at parabeltangenten i punktet C skjærer x -aksen mellom $(a, 0)$ og $(2a, 0)$.

3. Forklar uten bevis hvordan funksjonen a^x varierer med x når x er et reelt tall og a er et positivt tall. Støtt forklaringen med en enkel skisse.

Vi har gitt funksjonen

$$y = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{\sin x}{1-2\sin x}}.$$

Her er x en vinkel i området $0 \leq x < 2\pi$. Finn de x -områdene der $y > 1$ og de x -områdene der $y < \frac{1}{8}$. Gjør greie for hvordan det går med y når x nærmer seg $\frac{1}{6}\pi$.

Vi setter

$$z = \frac{\sin x}{1 - 2 \sin x}.$$

Regn ut den deriverte av z og bruk den til å finne maksimal- og minimalverdiene av z og de tilsvarende verdiene av x .

Bruk det du har funnet om funksjonen z til å finne maksimal- og minimalverdiene av funksjonen y . Regn ut disse verdiene av y .

SVERIGE

Matematisk gren.

1. Undersök kurvan $y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ med avseende på asymptoter, maximi-, minimi- och inflexionspunkter, samt opprita den i dess huvuddrag.

2. Kurvan $y = \sin 2x$ för $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ begränsar tillsammans med x -axeln ett ändligt område. Beräkna förhållandet mellan ytorna av de delar, i vilka området delas av kurvan $y = \sin x$.

3. En hyperbel har i ett rätvinkligt koordinatsystem ekvationen $x^2 - y^2 = 2$. F är den brännpunkt, som ligger på positiva x -axeln. Tangenten till hyperbeln i en punkt P på kurvan skär den räta linjen $x = 1$ i punkten S . Visa, att vinkeln PFS är rät.

4. I funktionen $y = a \cdot e^{kx^2}$ är a och k konstanter. Det finns ett värde på k sådant, att funktionen, oberoende av a , satisfierar differentialekvationen $\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$. Bestäm detta k -värde. — Det förutsättes bekant, att $\frac{de^x}{dx} = e^x$.

5. I en rät cirkulär kon är toppvinkeln rät. Ett plan genom konens spets bildar vinkeln v med basytan. Planet skär vidare mantelytan utefter två generatriser, som med varandra bildar vinkeln u . Visa, att $\cos u = \cot^2 v$.

6. I ett rätvinkligt koordinatsystem oppritas kurvan $y = x^2$. Normalen till kurvan i punkten $A (-1; 1)$ råkar kurvan ytterligare i punkten B . Var på kurvan kan en punkt P ligga, om kurvans normal i P skall skära den först nämnda normalen mellan A och B ?

7. I ekvationen $x^2 + 2y^2 + 2ax + 1 = 0$ är a en konstant. Ange, för vilka värden på a ekvationen betyder en ellips, utanför vilken punkten $(1; 1)$ är belägen.

8. Undersök, hur många reella rötter ekvationen

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = 0$$

har för $n = 1, 2, 3$ resp. 4. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man utsträcker undersökningen till det fall, då n är ett godtyckligt positivt heltal.

SUMMARY IN ENGLISH

FOLKE ERIKSSON: *The positive integers.* (Swedish.)

The treatment of the arithmetic of positive integers in for example Landau's "Foundations of analysis" pays no attention to the fundamental use of numbers in counting (as "Anzahl"). This seems artificial and unsatisfactory. A more natural approach is found in older works of Dedekind, Helmholtz and others. The present paper is intended to give this natural theory of the positive integers in a stringent form, based on Peano's axioms. The plan is in brief the following:

First the relation of order $<$ is introduced recursively. Then the notion of "Anzahl" is defined in connection with the "fundamental theorem of arithmetic (or counting)": The number of elements in any finite set is uniquely determined. This is used in the treatment of addition and multiplication. The sum $a+b$ is defined as by Peano, and Landau's criticism against this definition is rejected.

AIMO TÖRN: *Application of the Monte Carlo method on multi-dimensional integrals.* (Swedish.)

After a short survey of the general problem, including mathematical methods for the generation of random numbers, the author discusses an application on a 9-dimensional integral arising in the theory of many-body systems.

SIGBJØRN HALVORSEN: *A generalization of L'Hospital's rule.* (Norwegian.)

"L'Hospital's theorem" for the determination of so-called indeterminate expressions is given the following generalization:

$$\liminf_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

It is most probable that this theorem is not new; however, it seems to have escaped the attention of authors of textbooks in differential calculus. The ordinary theorem is mostly proved through the use of Cauchy's extended mean-value theorem. This is avoided in the present proof, which is very elementary.

LENNART RÅDE: *Order statistics for exponentially distributed stochastic variables with application to the minority principle.* (Swedish.)

A simple representation, due to Rényi, of order statistics for an exponentially distributed stochastic variable is derived. As an application, the mean and variance are calculated for the quotient of the sum of the p greatest and the sum of all the order statistics in a random sample for an exponentially distributed stochastic variable. The connection with the problem of random division of an interval is given.

DAVID FOG: *New textbooks of mathematics for a new curriculum.* (Danish.)

With the beginning of the new school year, extensive changes in the Danish plans for the high school teaching of mathematics came into force. In this connection, several new textbooks have been published or are in preparation. The two first published textbooks are reviewed in the present paper.