

EN DEFINITION AV EXPONENTIALFUNKTIONEN

HARALD BERGSTRÖM

1. **Inledning.** Medan det neperska talet e i regel införes såsom gränsvärdet för talföljden $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $n = 1, 2, \dots$, synes man mera sällan definiera exponentialfunktionen direkt såsom gränsvärdet för följden $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$, $n = 1, 2, \dots$, ehuru en sådan definition kan vara motiverad t. ex. när man betraktar sammansatt ränta och låter kapitaliseringen ske med allt kortare intervall. I det följande skall jag visa hur exponentialfunktionen kan införas mycket elementärt som gränsvärde för följden $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$ och hur exponentiallagen kan härledas och derivatan av exponentialfunktionen kan beräknas. Denna metod är dessutom så allmän att den kan användas för att på samma sätt definiera exponentialfunktionen för komplexa argument och även exponentialfunktionen på mera allmänna kroppar (och även ringar) än kroppen av komplexa tal. På dessa allmänna frågeställningar skall jag emellertid endast gå in i förbigående. Sålunda behandlar jag först exponentialfunktionen för reella argument och ger utvidgningen till komplexa argument i ett särskilt avsnitt.¹

Mitt huvudsakliga hjälpmedel är identiteten

$$(1) \quad a^n - b^n = (a - b)[a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}],$$

¹ Redaktionen har gjort mig uppmärksam på att W. Fenchel också föreslagit definitionen av exponentialfunktionen, som gränsvärdet för $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, nämligen i uppsatsen »Om indførelsen av eksponentialfunktionen», NMT, 1958, s. 109–113. Fenchels metod för beviset av existensen av exponentialfunktionen och för härledningen av funktional-ekvation för den skiljer sig dock väsentligt från min. Dessutom behandlar Fenchel endast exponentialfunktionen för reella argument. Må min uppsats bli ytterligare ett belägg för att man i grundläggande kurser bör indföra exponentialfunktionen på nyssnämnda sätt.

vilken inte bara består för tal a och b utan även för element a och b i en godtycklig kommutativ ring. Jag använder denna identitet konsekvent och utnyttjar den därför även i stället för binomialteoremet, där detta likaväl skulle kunna ha begagnats.

2. Några elementära olikheter. Låt a och b vara positiva tal och $a \geq b$. Av (1) få vi då omedelbart dubbelolikheten

$$(2) \quad n(a-b)b^{n-1} \leq a^n - b^n \leq n(a-b)a^{n-1};$$

för $b=1$ få vi av (1) identiteten

$$(3) \quad a^n - 1 - n(a-1) = (a-1)\{[a^{n-1}-1] + [a^{n-2}-1] + \dots + [a-1]\}.$$

Om $a \geq 1$, finna vi på grund av (2):

$$0 \leq a^p - 1 \leq p(a-1)a^{p-1}$$

för $p=1, 2, \dots, n-1$, och av (3) följer då för $n \geq 1$:

$$0 \leq a^n - 1 - n(a-1) \leq (a-1)^2[(n-1) + (n-2) + \dots + 1]a^{n-2}.$$

På grund av identiteten $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ är då

$$(4) \quad 0 \leq a^n - 1 - n(a-1) \leq \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2 a^{n-2}.$$

För godtyckliga reella eller komplexa tal a och b välja vi ett positivt tal α så att $|a| \leq \alpha$, $|b| \leq \alpha$. Av identiteten (1) få vi då olikheten

$$(5) \quad |a^n - b^n| \leq n|a-b|\alpha^{n-1}$$

för $n=1, 2, \dots$. Om $|a| \leq \alpha$, $1 \leq \alpha$ gäller på grund av denna olikhet och identiteten (3)

$$(6) \quad |a^n - 1 - n(a-1)| \leq \frac{n(n-1)}{2} |a-1|^2 \alpha^{n-2}$$

för $n=1, 2, \dots$.

3. Exponentialfunktionen för reella argument. När vi bevisa existensen av gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

för $x \geq 0$, stödja vi oss på satsen att en monotont växande uppåt begränsad talföljd har ett gränsvärde, en sats som på skolestadiet får accepteras utan bevis.

Först visa vi att följden $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ är monotont växande för $x \geq 0$.

Sätta vi $a = 1 + \frac{x}{n-1}$, $b = 1 + \frac{x}{n}$ i högra olikheten (2) få vi olikheten

$$0 \leq \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq n \left(\frac{x}{n-1} - \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{x}{n-1} \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1},$$

som också kan skrivas

$$(7) \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^n - \frac{x}{n-1} \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Denna olikhet visar att talföljden $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ är monotont växande för $x \geq 0$. För att visa att den är uppåt begränsad betrakta vi först fallet $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Om vi i högra olikheten (2) insätta $a = 1 + \frac{x}{n}$, $b = 1$, få vi olikheten

$$0 \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \leq x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1},$$

vilken också kan skrivas

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Emedan $1+x \leq 2$ för $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, få vi därav genom fullständig induktion:

$$(8) \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq 2, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Om x är ett godtyckligt positivt tal, välja vi det naturliga talet m så att $x \leq \frac{1}{2}m$ och få enligt (8):

$$\left(1 + \frac{x}{mn}\right)^{mn} \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{mn} = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n\right]^m \leq 2^m.$$

Eftersom talföljden $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ enligt (7) är monotont växande, följer av denna olikhet:

$$(9) \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq 2^m, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{m}{2},$$

för naturliga tal m och n .

Sedan vi visat att talföljden $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ är monotont växande och

uppåt begränsad för varje tal $x \geq 0$, draga vi slutsatsen att den har ett bestämt gränsvärde för $x \geq 0$ och detta beteckna vi med $\exp x$:

$$(10) \quad \exp x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Genom denna relation blir sålunda en funktion, $\exp x$, definierad för $x \geq 0$. Observera att

$$(11) \quad \exp x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

för $x \geq 0$ (jfr. (7)).

Vi visa nu att gränsvärdet i högra ledet av (10) existerar även för negativa x och att sålunda $\exp x$, definierad genom (10), har en betydelse för alla reella tal x .

Tydligt är

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

och alltså för $0 < x < n$:

$$(12) \quad 0 < \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < 1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Men av högra olikheten (2) få vi för $a=1$, $b=1 - \frac{x^2}{n^2}$ olikheten

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{x^2}{n}.$$

Högra ledet av denna olikhet går mot 0 då n växer mot ∞ . Således följer av (12):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\exp x}.$$

Därmed ha vi visat att $\exp x$ är definierad för alla reella tal x och visat exponentlagen

$$\exp x = \frac{1}{\exp(-x)}.$$

Den allmänna exponentlagen

$$(13) \quad \exp(x+y) = (\exp x) \cdot (\exp y)$$

för godtyckliga reella tal x och y , visa vi på följande sätt: Först observera vi identiteten

$$\left(1 + \frac{x+y}{2n}\right)^2 - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(\frac{x-y}{2n}\right)^2.$$

Av olikheten (5) få vi sedan för $a = \left(1 + \frac{x+y}{2n}\right)^2$, $b = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right)$, $|x| < n$, $|y| < n$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \left(1 + \frac{x+y}{2n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right| \\ &\leq n \left| \left(1 + \frac{x+y}{2n}\right)^2 - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) \right| \left(1 + \frac{|x|+|y|}{2n}\right)^{2(n-1)} \\ &= n \frac{|x-y|^2}{4n^2} \left(1 + \frac{|x|+|y|}{2n}\right)^{2(n-1)} \leq \frac{|x-y|^2}{4n} \exp(|x|+|y|) \end{aligned}$$

(jfr. (11)). Av denna olikhet följer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x+y}{2n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right\} = 0$$

och alltså identiteten (13).

Sätta vi $\exp 1 = e$ finna vi med hjälp av exponentlagen

$$\exp q = (\exp 1)^q = e^q$$

för varje heltal q och $e^p = \exp p = \exp \left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \left(\exp \frac{p}{q}\right)^q$. Sålunda är

$$\exp \frac{p}{q} = e^{p/q}.$$

4. Derivatan av exponentialfunktionen. Välja vi $a = 1 + \frac{x}{n}$ i olikheten

(6), kunna vi där välja $\alpha = 1 + \frac{|x|}{n}$ och få då

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 - x \right| \leq \frac{n(n-1)}{2n^2} |x|^2 \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^{n-2} \leq \frac{1}{2} |x|^2 \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n.$$

Vid gränsövergång $n \rightarrow +\infty$ följer

$$|\exp x - 1 - x| \leq \frac{1}{2}|x|^2 \exp |x|$$

och

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = 0.$$

Alltså har $\exp x$ derivatan 1 i punkten $x=0$. Derivatan av $\exp x$ i en godtycklig punkt x finna vi sedan med hjälp av exponentiallagen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \exp x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x.$$

Vi betrakta här endast reella tal x men deduktionerna bestå även för komplexa tal x sedan exponentialfunktionen definierats för sådana argument och exponentiallagen verifierats för komplexa argument. Denna komplettering ge vi i nästa avsnitt.

5. Exponentialfunktionen för komplexa argument. Vi visa att gränsvärdet

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

existerar även för komplexa argument x . Därvid stödja vi oss på satsen, att en talföljd $\{a_n\}$, $n=1, 2, \dots$, som uppfyller det s. k. Cauchy villkoret

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} |a_n - a_m| = 0$$

och därför kallas en Cauchyföljd, är konvergent.

För att visa att följden $\left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right\}$ är en Cauchyföljd jämföra vi först $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$ och $\left(1 + \frac{x}{mn} \right)^{mn}$ (m och n naturliga tal). Vi väljer $a = \left(1 + \frac{x}{mn} \right)^m$,

$b = 1 + \frac{x}{n}$ i olikheten (5) och observera att

$$\left(1 + \frac{|x|}{mn} \right)^m \geq 1 + \frac{|x|}{n}$$

på grund av vänstra olikheten (4). Alltså består olikheten (5) med ovannämnda a och b om vi väljer $\alpha = \left(1 + \frac{|x|}{mn} \right)^m$ och vi få av denna olikhet:

$$\left| \left(1 + \frac{x}{mn} \right)^{mn} - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| \leq n \left| \left(1 + \frac{x}{mn} \right)^m - \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right| \left(1 + \frac{|x|}{mn} \right)^{m(n-1)}.$$

På grund av olikheten (6) är vidare

$$\left| \left(1 + \frac{x}{mn} \right)^m - 1 - \frac{x}{n} \right| \leq \frac{m(m-1)}{2} \frac{|x|^2}{m^2 n^2} \left(1 + \frac{|x|}{mn} \right)^{m-2}.$$

De sistnämnda olikheterna kombineras till olikheten

$$\left| \left(1 + \frac{x}{mn} \right)^{mn} - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| \leq \frac{1}{2n} |x|^2 \left(1 + \frac{|x|}{mn} \right)^{mn-2}.$$

Eftersom

$$\left(1 + \frac{|x|}{mn} \right)^{mn-2} \leq \left(1 + \frac{|x|}{mn} \right)^{mn} \leq \exp |x|,$$

gäller då också

$$\left| \left(1 + \frac{x}{mn} \right)^{mn} - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| \leq \frac{1}{2n} |x|^2 \exp |x|.$$

Analogt är

$$\left| \left(1 + \frac{x}{mn} \right)^{mn} - \left(1 + \frac{x}{m} \right)^m \right| \leq \frac{1}{2m} |x|^2 \exp |x|.$$

Kombinera vi dessa två olikheter, få vi

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - \left(1 + \frac{x}{m} \right)^m \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) |x|^2 \exp |x|.$$

Därav framgår att följden $\left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right\}$ är en Cauchyföljd och sålunda är konvergent, varför exponentialfunktionen är definierad genom (10) även för komplexa tal x . Beviset för exponentiallagen i 3 består även för komplexa argument x . Som vi tidigare anmärkt består även härledningen av derivatan i 4 för komplexa argument.

Definitionen av exponentialfunktionen öppnar vägen för flera intressanta samband i den analytiska funktionsteorien. De trigonometriska funktionerna definieras genom relationerna

$$\sin x = \frac{1}{2i} (\exp ix - \exp(-ix)), \quad \cos x = \frac{1}{2} (\exp ix + \exp(-ix)),$$

varav relationen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ framgår. Analogt finner man andra kända trigonometriska samband. På grund av de enkla relationerna mellan funktionerna $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$ och deras derivata erhåller man lätt Taylorutvecklingarna för dessa funktioner o. s. v.

6. Exponentialfunktionen på ringar. Den som har kännedom om normerade ringar med enhetselement inser lätt hur metoden i det föregående kan användas för att införa exponentialfunktionen

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e + \frac{x}{n} \right)^n$$

på en sådan ring. Här betecknar e enhetselementet i ringen och gränsvärde betyder gränsvärde i den tillhörande normen varvid vi förutsätta att normen av e är 1.

Observera att en normerad ring i allmänhet definieras som en ring för vilken man har en norm, d. v. s. en funktion $\|x\|$ på ringen som antager icke negativa värden och som satisfierar villkoren

$$1^\circ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad 2^\circ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad 3^\circ \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Om ringen är en algebra över en talkropp (t. ex. den reella eller komplexa) skall vidare relationen

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

gälla för varje ringelement och varje tal α , varvid $|\alpha|$ betecknar absoluta beloppet av α . Emellertid kan metoden i det föregående tillämpas även om normen icke allmänt uppfyller villkoret 3° . Genom en enkel modifikation kan metoden även användas för att finna konvergensvillkor för följder av formen $\{a_n^{k_n}\}$, då $\{a_n\}$ är en följd av ringelement och k_n en följd av naturliga tal.

UTDANNING AV LÆRERE I MATEMATIKK

KAY PIENE

For øyeblikket opplever vi at skolen i mange land reformerer sitt matematikkpensum. Det som skjer er at stoff som før bare har vært behandlet ved universitetene nå flyttes ned i skolen. Dette er i og for seg ikke noe nytt. Vi kan tenke på infinitesimalregningen som for ikke så mange år siden kom inn i skolen, men som da lenge hadde hatt en plass ved universitetene.

I dag er det igjen nye disipliner som skal inn i skolen (mengdelære, logikk osv.), og det blir derfor en vesentlig oppgave både å gi eldre lærere som alt er i stilling, det de mangler, og dessuten å gi de vordende lærere en utdanning som harmonerer med de nye programmer i skolen.

Det er særlig med tanke på den siste oppgaven jeg i det følgende skal behandle utdanningen av lærere i matematikk.

En finner rundt om i landene skoler fra det 6. eller 7. år opp til det 18. eller 19. Vi kan gå ut fra en modell som denne:

1. Først en grunnskole eller primærskole med den samme undervisning for alle i de første årene. Her finner en for det første undervisning i *regning*, men det har i det siste vært tendenser til også å innføre matematikk, spesielt elementær plangeometri, bokstavregning og mengdelære på dette trinn.

2. Dernest en sekundærskole som bygger på hele eller en del av grunnskolen, og som på første trinn gir den samme matematikkundervisning til alle elever.

3. Til slutt har sekundærskolen noen klasser som fører til høgskole eller universitetet (gymnas, lycée el. lign.), og som er delt i forskjellige linjer med en vekslende mengde matematikk.

En finner i enkelte land gymnaslinjer uten matematikk, men etter min mening bør alle som går i et gymnas ha noe matematikk. Jeg opererer derfor med tre muligheter: Et maksimalt, et midlere eller et minimalt matematikkpensum. Jeg går ut fra at det ikke kan bli tale om den samme utdanning for lærere på hvert enkelt av disse nivåene.

Utdanning av lærere for grunnskolen kommer i en særstilling, idet den ofte foregår i egne institusjoner, ikke ved universitetene. Om det i slike

lærerskoler i dag blir undervist i matematikk, skjer det uten tanke på undervisning i faget i skolen. Annerledes blir stillingen dersom matematikk rykker inn i regneundervisningen i grunnskolen, spesielt dersom det skal skje i en av de første fem klassene.

Jeg tror ikke alle de lærere vi har her idag uten videre kan overta en slik begynnende matematikkundervisning. Lærerskolene (lærerseminarene) må legge om sin matematikkundervisning dersom det skal bli slik at en hver lærer i grunnskolen skal kunne påta seg en slik undervisning.

Det er imidlertid et spørsmål om ikke — i hvert fall i en overgangstid — den første matematikkundervisning bør overtas av lærere som har fått særskilt utdanning til det. Det betyr altså at en her forlater klasse-læreren til fordel for faglæreren.

Det er interessant å konstatere at de danske grunnskoleseminarer har dels obligatoriske fag, blant dem regning, dels valgfrie, blant dem matematikk. Hver velger ett såkalt *linjefag*. Det er her undervisning i 6 uketimer i 2 år. Pensum er delt i 3 emnegrupper: A-stoff, B-stoff og C-stoff. A-stoffet er rent faglig gymnasstoff, spesielt slikt stoff som er viktig i elementærundervisningen. B-stoffet består i en dyperegående behandling av visse spørsmål fra det elementære pensum. C-stoffet skal gi faglig innsikt og dyperegående forståelse. Det er uten eksamen. Læreren kan i en friere form gjennomgå slikt som logikk, mengdelære, algebra (gruppe — ring — kropp), geometriens grunnlag.

A-stoffet er obligatorisk og ens for alle, mens seminarlæreren kan velge program i B- og C-stoffet.

En slik ordning virker på papiret svært fornuftig, men er sterkt avhengig av hvordan organiseringen av undervisningen skjer. Under alle omstendigheter tror jeg at en i de første årene ikke bør starte for tidlig med (virkelig) matematikk i grunnskolen (jeg er klar over at en nå i visse land bruker ordet som fellesnavn for regning og matematikk), og at en til å begynne med bør overlate undervisningen til utvalgte lærere som føler seg kallet til å ta den på seg.

Men det var utdanning av matematikklærere for videregående skoler jeg særlig tenkte å behandle, og målet er greit, det gjelder å skaffe disse skoler »gode« matematikklærere.

Hva en slik »god« lærer er, lar seg ikke angi slik at alle godtar det. Men vi har ikke et helt udefinert begrep. Vi vet alle at noen lærere er bedre enn andre. Om det ikke er mulig å gi tilstrekkelige betingelser for utdanning av en god lærer, kan vi gi noen mer eller mindre nødvendige betingelser, og jeg deler disse i 4 grupper:

I. Matematikklæreren må ha en viss *allmenndanning*. Vi kan ikke ha lærere med gode kunnskaper i matematikk, men som nærmest er ignoranter utenfor dette området. De bør ha kjennskap til minst to fremmede språk, til historie, samfunnskunnskap og politikk, til minst en kunstart og i det hele tatt kunne dele eller forstå sine elevers interesser utenfor matematikken. Det bør være *skolens* sak å gi bakgrunnen for en slik allmenndanning, men ved *universitetet* må studentene ha et åpent sinn og være villige til å vide ut alle sine kunnskapsområder. Likevel kunne jeg tenke meg ved begynnelsen av universitetsstudiet å ha en forelesningsrekke i filosofi, spesielt i erkjennelses- eller kunnskapsteori, og en i psykologi som også kunne gi innsikt i lærings- og studie-metoder ved universitetet.

II. Vi kommer så til det vi kunne kalle den *akademiske* utdanning, som gjelder den stofflige delen av studiet. Det er nødvendig at matematikklærerne ikke bare behersker det stoff de skal presentere for sine elever, men de må gå videre og de må gå dypere.

Da dr. Sjöstedt for en tid siden sluttet i Skolöverstyrelsen i Sverige, sa han: »En lærer må ikke bare være den beste i klassen, han må være suveren i lærebøkene.« Han må kunne svare på videregående spørsmål fra elevene, kjenne grunnlaget i faget så vel som oppbygningen, han må kjenne fagets arbeidsmetoder, ha sikker kjennskap om slikt som definisjoner og bevis. Vi forstår derfor at de akademiske kurser må innta en stor plass i utdanningen. Samtidig er det klart at kravene varierer etter det trinn undervisningen skal skje på.

Vanligvis skjer den akademiske opplæring på universiteter, men det er også land som har egne utdanningsanstalter for lærere, som Polen. Dette betyr at studenter alt i ung alder må velge karriere. Men jeg tror at de som studerer matematikk med tanke på å gå inn i forskning eller industri i grunnen har de samme behov som vordende lærere, de trenger alle mer eller mindre den samme matematikk.

Det som er viktig er at den akademiske undervisning blir gitt av matematikere som er virkelige vitenskapsmenn. Heldig er det om de også har vært lærere i skolen og kjenner klasserommenes problemer.

Det kunne også være gunstig om den vitenskapelige framstilling i en forelesning ble supplert med praktiske merknader fra en erfaren, dyktig skolelærer som f. eks. kunne vise hvordan en best utnytter materialet i skolen. (F. eks. innføring av positive og negative tall, av komplekse tall etc.)

I enkelte land finner en ved universitetene forelesninger av mer skolemessig art. I Italia har slike vært basert på Kleins Elementarmathema-

tik vom höheren Standpunkt aus og Enriques' l'Enciclopedia delle matematiche elementare. Her må naturligvis foreleseren ha erfaring fra skolen.

Ved mange universiteter er matematikkstudiet delt opp i mindre kurser som hver ender med eksamen. I andre land kan det også være mindre kurser, men bare en, to eller tre eksamener som dekker flere kurser.

For våre problemer er det likegyldig hva for et system en har. Vesentlig er det at vi går ut fra en universitetsmodell som gjør det mulig å ta prøver i matematikk på flere nivåer. Vi kunne tenke oss tre nivåer: En A-prøve for lærere i de laveste klasser i sekundærskolen pluss de linjer i gymnaset som har minimum matematikk; en B-prøve for de linjer i gymnaset som har et middels stort pensum; og en C-prøve for linjen med maksimum av matematikk. Jeg går ut fra at det til C-prøven blir knyttet et større personlig arbeid i form av en mer eller mindre vitenskapelig avhandling, løsning av en større regneoppgave el. lign. og som krever uker eller måneder til utarbeidelsen.

Det vanlige er at det akademiske studium omfatter et eller flere fag ved siden av matematikken. Jeg tror at et studium som utelukkende behandlet matematikk ville bli for ensidig. På den andre siden er matematikk et så stort fag at det vanskelig kan bli plass til mer enn ett fag til, helst et fag som bruker matematikk, som f. eks. fysikk, biologi, sosiologi, psykologi osv. Men jeg ville gjerne la studentene ha frihet til å kombinere faget med f. eks. filosofi eller med et fremmed språk.

I B-prøven blir matematikk et bifag, slik at en her kan ha et hovedfag som fysikk eller to andre bifag.

I A-prøven vil matematikk få en beskjedne plass, og hovedinteressen vil da ligge på andre områder. Det er ikke nødvendig å drøfte hvordan studiet her kan organiseres.

Det er kanskje å gå for langt å si at det til hver matematisk deldisiplin i skolen skal svare et tilsvarende, men større kurs ved universitetet. Naturligvis vil en lærer som har hatt et kurs i determinanter kunne undervise i matriser uten et kurs i dette emnet. Men noen kurser i skolen er så spesielle at et ekvivalent kurs ved universitetet er nødvendig. Dette gjelder f. eks. infinitesimalregning og sannsynlighetsregning. Det som er viktig er at en har et fullstendig kurs i én disiplin, der en kan se hele systemet med definisjoner, aksiomer, setninger, bevis osv.

Jeg har ellers sett en amerikansk bok som kan gi ideer til et kurs som alle matematikklærere bør ta. Kapitlene i den var disse: Språk, symboler, utsagn, argumenter, bevis, den aksiomatiske metode, mengder, logikk og mengder, mengders struktur, tallmengder, krav til mengder,

problemløsning, funksjoner, telling, sannsynlighet. Også et kurs i matematikkens historie bør alle vordende lærere ta.

For lærere som skal undervise på det laveste trinn, A-nivået, ville jeg ha to kurser, ett i geometri og ett i algebra, som skal gi bakgrunnen for elementærundervisningen på dette nivået. I geometrikurset må det bli gjennomgått aksiomatikk, deduksjoner i geometrien, ikke-euklidisk geometri, måling, vektorer, transformasjoner, geometriske konstruksjoner. Algebrakurset må bl. a. behandle mengder, utsagn, tallsystemer (rasjonale tall, reelle tall osv.), sannhetsmengder, grupper, ringer, kroppar osv. (Det forutsettes at ikke disse emner er behandlet i andre kurser.)

Jeg nevner at den siste studieplanen for matematikk ved Universitetet i Bergen opererer med disse disiplinene i den kombinasjonen som er beregnet for vordende lærere: 1) Støttekurs i matematikk (elementær infinitesimalregning, ikke-stringent framstilling), 2) teoretisk analyse, 3) lineær algebra, 4) algebra, tallteori og gruppeteori, 5) elementære geometriske emner. Kursene 4) og 5) svarer langt på vei til de to kursene jeg nettopp nevnte.

Ved Universitetet i Oslo utgjør analysen en relativt større del. Til gjengjeld er det flere emner spesielt i kurs 4) men også i 5) i Bergen som ikke blir behandlet der.

For lærere på B-nivået trengs for det første de kursene som en har for A-nivået. Dernest et kurs i infinitesimalregning (funksjoner, tallfølger og rekker, grenser, derivasjon, de to slags integraler og noen differensialligninger). Videre et kurs i geometri (vektorer, topologi, projektiv geometri). Endelig et kurs i lineær algebra, som fortsetter behandlingen av mengder, grupper, ringer, integritetsområder, kroppar med reelle og komplekse tall, lineære ligninger, determinanter og matriser.

Ved siden av disse kursene bør det være noen valgfrie, f. eks. partielle differensialligninger, sannsynlighetsregning og statistikk, gruppeteori, tallteori, numerisk analyse, mål- og integralteori, rasjonell mekanikk, lineær programmering, spillteori osv.

For lærere på C-nivået må kurser i statistikk og sannsynlighetsregning være obligatoriske. Her kommer også videregående kurser i matematisk analyse, analytiske funksjoner, differensialligninger og tallteori, foruten kanskje andre kurser.

Jeg forutsetter at de forelesninger som gir stoffet skal være grundige og korrekte og bli gitt av matematikere som er vitenskapsmenn. Men det skal ikke bare være opplesning fra en bok. Studentene skal få gi kommentarer og komme med spørsmål. En må ha oppgaveregning til alle kurser. Eksamensoppgavene skal ikke bare be om at stoffet blir memorert, men kreve virkelig forståelse og stoffbeherskelse.

Som kjent er for tiden lærersituasjonen vanskelig fordi vi i de fleste land har lærermangel og dernest fordi endringene i skolematematikken stiller nye krav til lærerne. Professor Øystein Ore har sagt at en universitetsutdanning som er mer enn 20 år gammel må suppleres og fornyes.

Det er ganske klart at matematikklærere trenger »oppfriskningskurser«, og i mange land er en nå gått i gang med slike. Staten må organisere kursene og lærerne må få økonomisk støtte til å følge dem. Til gjengjeld kan de gjøres obligatoriske for dem som underviser i matematikk i skolen.

III. Vi har til nå vesentlig behandlet det vi kunne kalle den faglige eller akademiske utdanning av lærerne. Lenge trodde en at denne var tilstrekkelig, slik at dersom universitetseksamener var bestått, hadde en garanti for evner til å undervise.

Dette er imidlertid slett ikke sant. Svært få er »fødte lærere«, men de fleste vil kunne dra nytte av et pedagogisk kurs, og gjennom det få innsikt i hvordan en best kan bringe matematikkstoffet til elevene i en klasse og få dem til å forstå det og kunne bruke det.

I flere og flere land forlanger en derfor at den vordende lærer skal gjennomgå et kurs i praktisk og teoretisk pedagogikk. Det er ikke her stedet til i detalj å angi hva et slikt kurs skal bestå av. Ved siden av en viss mengde stoff må det under alle omstendigheter gi studentene anledning til å studere erfarne læreres undervisning, og siden under ledelse av lærerne selv å overta undervisningen for en tid. Til slutt bør de også få en uttalelse, en attest eller en karakter, som gir en vurdering av deres dyktighet i undervisningsarbeid. Mye taler for at de i det første året etter at de begynner som lærere ved en skole, bør få rettleiing av eldre lærere, og at de kanskje først da bør bli endelig vurdert.

Den teoretiske del må omfatte emner som generell undervisningslære, pedagogikkens historie, skolelovgivning, komparativ pedagogikk, hygiene, pedagogisk psykologi, hjelpemidler i undervisningen foruten de enkelte fags undervisningsmetodikk.

Metodikkundervisningen i matematikk må begynne med fagets plass i skolen, timetall, pensa, planer, aktuelle problemer osv., og videre gi en oversikt over de eksisterende lærebøker samt eventuelle nye forsøks-tekster. Ellers må det legges særlig vekt på en gjennomgåing av begynnerundervisningen i matematikk. Her har en hele elevmassen og her blir der et særlig problem å få alle med, mens høyere oppe i skolen blir problemene snarest av matematisk-faglig art. Problemer fra begynnerundervisningen som må drøftes er f. eks. regning med tilnærmete tall, behandlingen av definisjoner, postulater og aksiomer, spesielt Euklids

5. postulat, setning og omvendt setning, beviset og det indirekte bevis, geometriske konstruksjoner, areal osv. Videre innføring av begreper fra mengdelæren og av bokstavtall, innføring av tall med fortegn, potenser, ligninger og ulikheter. Endelig utvalgte emner fra de øvre trinn, spesielt en drøfting av matematikkundervisningen i de klasser der faget er et bifag, et bifag som mange elever kan ha en viss animositet mot. Til slutt må en behandle oppgaveregning hjemme og på skolen og vurderingen av denne ved karakterer («betyg»). Under hele kurset bør det være små foredrag av studentene, som f. eks. kan få i oppdrag å sammenligne og vurdere en utenlandsk lærebok og en tilsvarende fra eget land. Det må også bli gitt orientering om eksisterende håndbøker til matematikkundervisningen.

Idag har de pedagogiske institusjoner først og fremst den oppgaven å gi undervisning, men det er klart at de i framtiden også må ta opp visse forskningsoppgaver. For det første må det bli tale om en kartlegning av den eksisterende matematikkundervisning, dernest om eksperimenter for å finne en bedre undervisning, vurdering av nye læremetoder osv. Videre må en i samarbeid med psykologien prøve å finne ut hvordan barn lærer matematikk, hvorfor enkelte barn har vansker med faget, og en må prøve å finne den optimale alder for innføring av visse begreper og prosesser. En må i det hele prøve å finne fram til en bedre og i ordets beste forstand mer effektiv matematikkundervisning enn den vi har idag.

IV. Den fjerde gruppen krav til den gode lærer er vanskeligere å definere. Vi har personlige egenskaper som ikke er så lette å utvikle eller å forbedre ved hjelp av instruksjon eller læring. Det jeg tenker på er at den gode lærer må *forstå* sine elever, må kunne følge dem, være på bølglengde med dem, må være åpen og uavhengig og verken redd for lærebok eller elever. Dette er for en stor del medfødte egenskaper, men jeg har sett mange forandre seg under det pedagogiske kurset, og mer kan sikkert gjøres.

Akkurat idag er det mange vansker fordi skolene nå får nye planer, mens det på samme tid i nesten alle land er mangel på matematikklærere. Det blir derfor nødvendig både å øke antallet lærere og gi merutdanning til de lærere som alt er i tjeneste. Heldigvis er tilstrømmingen til matematikkstudiet økende rundt om i verden, og jeg tror vi kan være relativt optimistiske når vi ser på forholdene på lengre sikt.

OM DELBARHETSREGLER

HANS RIESEL

Alla känner nog till de enkla reglerna för tals delbarhet med 9 och med 11: Ett tal $N = \sum_{v=0}^k a_v \cdot 10^v$ med de decimala siffrorna $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ är jämnt delbart med 9 om och endast om $\sum_{v=0}^k a_v$ är jämnt delbart med 9. N är jämnt delbart med 11 om och endast om $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$ är jämnt delbart med 11.

Bevis för reglerna fås genast ur ovanstående framställning för decimala tal och kongruensteorin; den första beror på förhållandet att $10 \equiv 1 \pmod{9}$, och därför även $10^v \equiv 1 \pmod{9}$, den andra på att $10 \equiv -1 \pmod{11}$ och därför $10^v \equiv (-1)^v \pmod{11}$.

Mindre välbekant är kanske följande regel för tals delbarhet med 7, 11 eller 13: Dela in siffrorna i talet N från slutet i grupper om 3 siffror. Låt alltså

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 = s_0, \quad a_3 + 10a_4 + 100a_5 = s_1 \text{ osv.}$$

Då är talet $N = \sum_{v=0}^{[k/3]} 1000^v s_v$, och N är jämnt delbart med 7, 11 eller 13 om och endast om talet $s_0 - s_1 + s_2 - \dots$ är jämnt delbart med 7, 11 resp. 13. Denna regel, som ibland kallas 1001-regeln, bevisas enkelt på följande sätt: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Alltså är $1000 \equiv -1 \pmod{p}$, där p är något av talen 7, 11 eller 13. Därav följer

$$N = \sum_{v=0}^{[k/3]} 1000^v s_v \equiv \sum_{v=0}^{[k/3]} (-1)^v s_v \pmod{p},$$

vilket genast ger vår regel.

Hur kan nu detta generaliseras? Dels, naturligtvis, genom att man betraktar en annan 10-potens än just 1000. För indelning av tal i grupper om t. ex. 4 siffror från slutet skulle man få en motsvarande delbarhetsregel för faktorerna i $10001 = 73 \cdot 137$. En annan generalisering får man genom att betrakta andra moduler, lämpligen de tal, som ligga nära små heltalsmultipler av 10-potenser, alltså talen $M = l \cdot 10^m + n$, där l är litet och positivt, och n har litet absolutbelopp. Låt p vara en godtycklig faktor i M , så att alltså

$$l \cdot 10^m + n \equiv 0 \pmod{p}.$$

Avdela de m sista siffrorna i talet N , så att

$$N = a \cdot 10^m + b, \quad 0 \leq b \leq 10^m - 1.$$

Om $(l, p) = 1$, äro N och Nl delbara med p samtidigt, och man finner, att

$$Nl = al \cdot 10^m + bl \equiv bl - an \pmod{p}.$$

Man finner alltså i detta fall, att N är jämnt delbart med p om och endast om $bl - an$ är det. I regel är $|bl - an| \ll N$, och i regel kan proceduren upprepas tills man får ett tal med (om $l < 10$) m eller högst $m + 1$ siffror.

EXEMPEL: $201 = 3 \cdot 67$. Är 315637 delbart med 67? Ja, ty 315637 ger ($l = 2, n = 1$):

$$3156 \cdot 1 - 37 \cdot 2 = 3082;$$

$$30 \cdot 1 - 82 \cdot 2 = -134 = -2 \cdot 67.$$

På detta sätt kan man lätt bilda ett antal för huvudräkning användbara delbarhetsregler för de lägsta primtalen. Om man först nöjer sig med mycket blygsamma krav på skicklighet i huvudräkning, får man regler ur de fall där l och n båda äro högst förslagsvis 3 ($m = 2$ och 3):

97 = primtal; ger regel för 97: $3a + b$

98 = $2 \cdot 7 \cdot 7$; ger regel för 7: $2a + b$

99 = $9 \cdot 11$ (ointressant)

101 = primtal

102 = $2 \cdot 3 \cdot 17$; ger regel för 17: $2a - b$

103 = primtal

197 = primtal

198 = $2 \cdot 99$ (ointressant)

199 = primtal

201 = $3 \cdot 67$; ger regel för 67: $a - 2b$

202 = $2 \cdot 101$ (ointressant)

203 = $7 \cdot 29$; ger regler för 7 och 29: $3a - 2b$

297 = $3 \cdot 99$ (ointressant)

298 = $2 \cdot 149$

299 = $13 \cdot 23$; ger regler för 13 och 23: $a + 3b$

301 = $7 \cdot 43$; ger regler för 7 och 43: $a - 3b$

302 = $2 \cdot 151$

303 = $3 \cdot 101$ (ointressant)

997 = primtal
 998 = $2 \cdot 449$
 999 = $3^3 \cdot 37$; ger regler för 37: $a + b$
 1001 = $7 \cdot 11 \cdot 13$; ger regler för 7, 11 och 13: $a - b$
 1002 = $2 \cdot 3 \cdot 167$
 1003 = $17 \cdot 59$; ger regler för 17 och 59: $3a - b$

1997 = primtal
 1998 = $2 \cdot 999$ (ointressant)
 1999 = primtal
 2001 = $3 \cdot 23 \cdot 29$; ger regler för 23 och 29: $a - 2b$
 2002 = $2 \cdot 1001$ (ointressant)
 2003 = primtal

2997 = $3 \cdot 999$ (ointressant)
 2998 = $2 \cdot 1549$
 2999 = primtal
 3001 = primtal
 3002 = $2 \cdot 19 \cdot 79$; ger regler för 19 och 79: $2a - 3b$
 3003 = $3 \cdot 1001$ (ointressant).

Här ha de delbarhetsregler antytts, som låta sig bildas för de primtal mellan 6 och 100, som äro faktorer i ovanstående tal.

För de läsare som äro vana att multiplicera med en ensiffrig faktor i huvudet, har nedan givits en utökning av denna tabell, som för $m = 3$ täcker området

$$l \cdot 10^m + n, \quad 1 \leq l \leq 9, \quad 1 \leq |n| \leq 9 \text{ samt } l = 10, \quad -9 \leq n \leq -1.$$

Endast de tal, som ge den »enklaste» delbarhetsregeln för en innehållen primfaktor < 100 ha medtagits i tabellen med motsvarande primfaktor eller primfaktorer och regelns form angivna. Lustigt nog behöver man då inte tillgripa större värden på l och n än 7.

994	71	$6a + b$	2993	73	$7a + 3b$
996	83	$4a + b$	3002	19, 79	$2a - 3b$
999	37	$a + b$	3007	97	$7a - 3b$
1001	7, 11, 13	$a - b$	3995	47	$5a + 4b$
1003	17, 59	$3a - b$	3999	31, 43	$a + 4b$
1005	67	$5a - b$	4005	89	$5a - 4b$
1007	53	$7a - b$	5002	41, 61	$2a - 5b$
2001	23, 29	$a - 2b$			

N. H. ABEL UND ALEXANDER VON HUMBOLDT

KURT-R. BIERMANN¹

Die Beziehungen zwischen N. H. Abel und A. von Humboldt scheinen bisher noch nicht mit der wünschenswerten Gründlichkeit untersucht worden zu sein. Bei einer ersten Betrachtung ergeben sich folgende, vielleicht nicht ganz des Interesses entbehrenden Gesichtspunkte:

1. »Unter Humboldts Schutze hätte Abels Pariser Aufenthalt anders ausfallen können.« Dieser zweifelsohne richtigen Feststellung von V. Bjerknes [3] ist nichts hinzuzufügen, aber seine Begründung, es sei in Paris zu keinem persönlichen Zusammentreffen gekommen, weil Humboldt während Abels Aufenthalt in Paris verreist gewesen sei, kann nicht unwidersprochen bleiben.

Alexander von Humboldt verließ Paris im September 1826, um nach 18-jährigem Aufenthalt in dieser Stadt seine dann 1827 erfolgende Rückkehr nach Berlin vorzubereiten. Abel war aber bereits seit dem 10. Juli 1826 in Paris; er hätte ihm also sehr gut vorher seine Aufwartung machen können. Dies wäre auch insofern ganz besonders angebracht gewesen, als Humboldt auf dem Wege nach Berlin Gauß in Göttingen besucht hat. Wir gehen wohl in der Vermutung nicht fehl, daß Abel von Humboldt in seinem ursprünglichen Vorsatz, Gauß zu besuchen, bestärkt worden wäre. Ja, sicher hätte Humboldt die Anmeldung Abels in Göttingen übernommen und eine bessere Einführung hätte sich Abel gar nicht wünschen können. Warum aber hat Abel Ende Juli oder im August Humboldt in Paris nicht aufgesucht? Die Antwort ist sehr einfach: Abel besaß keinen einführenden Empfehlungsbrief, mit dem er sich Humboldt hätte nähern können. Es ist nur ein Versehen, wenn Oystein Ore [4b] aus Abels Brief an Hansteen vom 29. März 1826 übersetzt: »I have received letters of recommendation from Professor Dirksen in Berlin to Alexander von Humboldt and others in Paris.« In der früheren norwegischen Ausgabe [4a] hat sich Ore ganz richtig an den Originaltext [1] angelehnt, der lautet: »Til sidstnævnte Sted [Paris] faaer jeg Anbefalingsbreve af Professor Dirksen i Berlin til Humboldt og Flere.«

¹ Aus einem Brief an Prof. Viggo Brun, Drøbak.

Den Grund, warum Abel keinen Brief für Humboldt erhalten hat, erfahren wir aus Crelles Brief an Abel vom 24. November 1826 [1]:

»Sie erinnern sich vielleicht noch, daß man Ihnen hier Briefe für Paris versprochen hatte, die Sie aber nicht erhalten haben. Die Ursache des Ausbleibens war, daß Herr Dirksen, der sie besorgen wollte, sich mehrere Monate lang nicht hier befand. Die Briefe waren an Herrn von Humboldt. Derselbe ist jetzt in Berlin und ich habe Gelegenheit gehabt, ihm auch über Sie zu sprechen, und Sie können denken, mit welchem Eifer. Vielleicht ersetzt dies schon einigermaßen die Briefe. Herr von Humboldt kehrt in wenigen Tagen nach Paris zurück. Versuchen Sie doch, ihn zu sprechen, und sagen ihm, daß ich ihm von Ihnen gesprochen hätte. Vielleicht erinnert er sich dessen. Er kann Ihnen nützlicher sein als vielleicht irgend ein Anderer. Können Sie ihn aber nicht zu sprechen bekommen, was sehr schwer sein soll, so will ich Ihnen dann noch die Briefe zu besorgen suchen.«

Es erhebt sich die Frage, warum Crelle erst dann die Briefe zu beschaffen versuchen wollte, wenn Abel nicht zu Humboldt vordringen konnte. Weshalb fügte er nicht einfach einen ostensiblen Brief bei, um Abel die Vorstellung bei Humboldt zu erleichtern? Man muß berücksichtigen, daß Crelle zu dieser Zeit noch nicht den engen Kontakt zu Humboldt haben konnte, den er nach dessen Übersiedlung nach Berlin bald fand. Erst am 23. August 1827 wurde Crelle als Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften Kollege Humboldts und erst am 8. November 1828 erhielt Crelle die Stellung eines mathematischen Beraters des preußischen Kultusministers von Altenstein. Humboldt ist am 21. Dezember wieder in Paris eingetroffen; Abel hat am 29. Dezember 1826 Paris verlassen. Daß er von Crelles gutem Rat keinen Gebrauch mehr gemacht hat, ist wohl einerseits auf seine schüchterne Bescheidenheit und zum anderen auf seine durch die Pariser Mißerfolge gedrückte Stimmung zurückzuführen. Er hatte den Glauben verloren, in Paris noch irgendeinen Erfolg erringen zu können.

Noch ein anderer Gesichtspunkt muß zur Sprache kommen. Abel hatte zwar keinen Empfehlungsbrief für Humboldt, aber er hatte doch in Paris Lejeune Dirichlet kennengelernt [1], allerdings zu einer Zeit, da Humboldt bereits nach Berlin abgereist war. Der 21-jährige Dirichlet hatte erst ein halbes Jahr zuvor Humboldts wärmste Unterstützung bei der Berliner Akademie [8] und beim preußischen Kultusminister [6] für eine Anstellung in Preußen gefunden. Sollte im Gespräch zwischen den beiden jungen Männern nicht die Rede von Humboldts selbstloser Hilfe,

die er Dirichlet ebenso wie jedem anderen jungen Talent angedeihen ließ [7], gewesen sein? Das ist kaum glaublich, zumal Abel betont [1], Dirichlet »ansaae mig for sin Landsmand«! Sollte Dirichlet, dessen schüchtern-sympathischer Charakter vielfach bezeugt ist, dem Fachgenossen nicht erzählt haben, was Humboldt für ihn in Berlin erreichen wollte (und auch erreicht hat) [6], nämlich eine besoldete Privatdozentur in Preußen? Wenn also Abel vorher nicht gewußt hat, wie wichtig Humboldt für ihn sein könnte und wie hilfreich dieser jedem entgegenkam, der sich an ihn wandte [7], so sollte er es doch von Dirichlet erfahren haben. Ein Grund mehr für ihn, Crelles Hinweis zu nutzen und alles zu versuchen, Humboldt noch nach dessen Ankunft in Paris, vor der eigenen Abreise zu sprechen. Die Ursachen dafür, daß er dies nicht getan und damit eine große Chance versäumt hat, liegen in erster Linie in seinem Charakter; wir sind nicht berechtigt, ihm daraus einen Vorwurf zu machen. Womöglich hat er, ganz von seinen eigenen Reisevorbereitungen in Anspruch genommen, gar keine Kenntnis mehr von Humboldts Wiedereintreffen erhalten, weil er sich nicht nachdrücklich genug darum bekümmert hat. Abels Pariser Aufenthalt hat wahrhaftig unter einem Unstern gestanden!

2. Es ist bis heute nicht geklärt, wodurch Crelle am 11. Juli 1828 veranlaßt wurde, Abel mitzuteilen, seine Versuche, für ihn eine Anstellung in Berlin zu erlangen, seien im Moment nicht zu verwirklichen, da ein anderer von Crelle nicht namentlich erwähnter Mathematiker zunächst versorgt werden müsse [1]. Sollte dieser »vom Himmel gefallene« [1] Konkurrent etwa Dirichlet gewesen sein, der, natürlich ganz unbeabsichtigt, Crelles Pläne für Abel störte? In einem Brief des Vorsitzenden der Studiendirektion der Berliner Kriegsschule, Generalmajor Rühle von Lilienstern, an den Kultusminister Frh. von Altenstein vom 4. Juli 1828 [6] wird die Bitte ausgesprochen, Dirichlet aus Breslau unter Fortgewährung seiner Besoldung zu beurlauben, damit ihm und einem Dr. Unger aus Erfurt als neuen Lehrern der mathematische Unterricht an der Kriegsschule übertragen werden könne. Aus der Berufung dieses Ephraim Salomon Unger (1788–1870), Direktors einer von ihm selbst in Erfurt errichteten mathematischen Lehranstalt, ist nichts geworden. Aber am 27. Juli 1828 hat das Kultusministerium in Berlin, nicht zuletzt auf Betreiben Humboldts, Dirichlet (seit dem 1. April 1827 an der Universität Breslau, und zwar seit dem 1. April 1828 als a. o. Prof.) einen außerordentlichen Urlaub vom 1. Oktober 1828 bis zum 31. Juli 1829 unter Beibehaltung seiner Bezüge zwecks Unterrichtserteilung an der Allgemeinen Kriegsschule in Berlin und mit Genehmi-

gung, während dieser Zeit an der Berliner Universität Vorlesungen zu halten, erteilt [6]. Die Vermutung ist also nicht ohne weiteres von der Hand zu weisen, daß Dirichlets, wenn auch zunächst vorläufiger Ruf nach Berlin Crelles Absichten für Abel durchkreuzt hat. Sie wird noch dadurch verstärkt, daß Humboldt am 12. Dezember 1828 in einem Brief an F. W. Bessel (Archiv der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) Dirichlet und Abel unmittelbar hintereinander, gewissermaßen in einem Atemzuge, auf folgende Weise erwähnt: »Dirichlet wirkt schon praktisch in der Kriegsschule [...] Abel wird hoffentlich berufen.«

3. Gauß hat am 19. Mai 1829 nach Abels Tod Schumacher mitgeteilt, daß er mit Humboldt über Abel gesprochen habe und daß dieser den Wunsch gehabt hätte, alles zu tun, um Abel nach Berlin zu ziehen [2]. Da bei dem kurzen Zusammentreffen im Herbst 1826 in Göttingen zwischen Gauß und Humboldt schwerlich von Abel die Rede gewesen sein kann, so dürfte die Besprechung, auf die Gauß Bezug nimmt, Ende September 1828 in Berlin stattgefunden haben. Damals wohnte Gauß dort anläßlich der großen Naturforscher-Versammlung bei Humboldt als dessen persönlicher Gast. Es zeigt sich auch hieran, wie grundfalsch Abel gehandelt hat, als er, seinen anfänglichen Vorsatz aufgebend, während seiner Studienreise Gauß und Göttingen gemieden hat. Humboldt, obwohl mitten in den Vorbereitungen für seine russisch-sibirische Reise (26. März bis 28. Dezember 1829) stehend, vergaß seine Gauß gegebene Zusage keineswegs. Als er etwa Anfang Dezember 1828 von Legendre den bekannten Brief erhielt, mit dem sich Legendre so nachhaltig und überzeugend für Abel einsetzte [5], gab er ihn sogleich an Crelle, damit dieser ihn zu einer neuen Eingabe an den Kultusminister benutzen konnte. Crelle hat denn auch diesen Brief in Abschrift seinem Gesuch vom 28. Dezember 1828 beigelegt [5].

Humboldt hat höchstwahrscheinlich Abel für das Polytechnische Institut, dessen Errichtung er betrieb, vorgesehen [5], und zwar zusammen mit C. G. J. Jacobi (seit Ostern 1826 an der Universität Königsberg, seit dem 28. November 1827 dort als a. o. Prof.). Aber Kriegsschule und Universität waren vorhanden, während das Polytechnikum erst gegründet werden sollte. Da die Einrichtung dieser Anstalt gar nicht zustande kam, kann man nur annehmen, daß die Besoldung, die Abel als Privatdozent zunächst in Berlin erhalten sollte, auf Humboldts Betreiben zusätzlich zu den von Dirichlet in Anspruch genommenen Mitteln bewilligt worden ist. Aber Crelles Botschaft von der glücklichen Wendung der Dinge traf Abel nicht mehr unter den Lebenden. So mußte

denn Humboldt am Rand des Originals des genannten Legendreschen Briefes vom November 1828 (heute in der Univ.-Bibl. Leipzig, Autogr.-Smlg. K. K. Falkenstein) für spätere Leser des denkwürdigen Dokuments vermerken: »Abel starb ehe seine Versetzung nach Berlin zu stande kam.«

LITERATUR

- [1] *Niels Henrik Abel*. Mémorial publié à l'Occasion du Centenaire de sa Naissance, Kristiania 1902.
- [2] *Briefe zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*. Bd. 2, Altona 1860.
- [3] C. A. BJERKNES: *N. H. Abel*. Herausgegeben von V. Bjerknes, Berlin 1930.
- [4a] OYSTEIN ORE: *N. H. Abel*. Oslo 1954.
- [4b] OYSTEIN ORE: *N. H. Abel*. Minneapolis 1957.
- [5] WILHELM LOREY: Norsk Matem. Tidsskrift 11 (1929), S. 2–13.
- [6] KURT-R. BIERMANN: *J. P. G. Lejeune Dirichlet*. Berlin 1959.
- [7] KURT-R. BIERMANN: *Über die Förderung deutscher Mathematik durch A. von Humboldt*. A. von Humboldt Gedenkschrift, Berlin 1959, S. 83–159.
- [8] KURT-R. BIERMANN: Mon. Ber. Dt. Akad. Wiss. 2 (1960), S. 383–389.

BOKMELDINGER

W. T. FISHBACK: *Projective and Euclidean geometry*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 9 + 244 pp. sh. 57/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 71.)

Denne bok behandler emner som er trådt sterkt i bakgrunnen i våre dagers matematikk-undervisning ved de fleste universiteter: Den projektive geometri og den dypere innsikt den gir i den vanlige euklidske geometri.

Det er flere årsaker til denne tilbakegangen: 1) Den projektive geometri har svært liten direkte praktisk anvendelse. 2) Den er nokså »utforsket«, så den byr ikke unge matematikere problemer de tør gi seg i kast med. 3) De moderne teorier for vektor-rom har overtatt rollen som disipliner som gir dypere geometrisk innsikt, skjønt de gjør det på en helt annen måte enn den projektive geometri gjorde det.

En rekke geometriske betraktninger som gikk betydelig ut over Euklid, og som bl. a. skyldtes Pappus, Kepler, Desargues, Pascal og de la Hire, ble i begynnelsen av forrige århundre satt i system under ledelse av Poncelet under betegnelsen »den projektive geometri«, som godt kan betegnes som den tids »abstrakte« matematikk. Sammen med Cantors mengdelære og den gruppeteori som går tilbake til Abel og Galois, danner den den historiske bakgrunn for våre dagers aksiomatiske teorier. Den bør derfor ikke gå helt i glemmeboken, og det er godt at våre dagers store flom av matematiske lærebøker på alle nivåer av og til bringer med seg en bok som denne.

Med utgangspunkt i Euklids elementer og Hilberts aksiomsystem blir først en såkalt syntetisk projektivgeometri bygget opp ved innføring av uendelig fjerne elementer. Dette er den letteste adkomstvei til de projektive betraktningsmåter, fordi den bygger direkte på våre skolekunnskaper. Derpå blir projektivgeometrien gjort analytisk ved hjelp av homogene koordinater, og man får presentert de projektive transformasjoners egenskaper, samt kjeglesnittenes teori i lys av dem. Og så betraktes leseren som moden for en aksiomatisk fremstilling av projektivgeometrien og for generaliseringen til imaginær geometri.

Til slutt blir det vist hvordan en rekke forskjellige geometrier kan

betraktes som *avleggere* av den projektive. I overensstemmelse med Felix Kleins »Erlanger Programm« blir den affine, den flatetro-affine, den formtro-affine, den euklidske (flatetro-formtro-affine) og de to ikke-euklidske geometriene alle betraktet som invariante-teorier for forskjellige undergrupper av den projektive transformasjonsgruppen, og det blir vist hvordan man behersker alle disse geometriene ved hjelp av den projektive.

I. Johansson

CARL-ERIK FRÖBERG: *Lärobok i numerisk analys*. Svenska Bokförlaget/Bonniers (Scandinavian University Books), Stockholm 1962. 4+277 s. Sv. kr. 37.00, inb. sv. kr. 43.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 10 (1962), s. 217.)

ANNA LYSEGÅRD: *Problemsamling i numerisk analys*. Lunds Studentkårs Interessebyrå, Lund 1963. 51 s. Sv. kr. 8.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 73.)

Den eksplosive utvikling av de elektroniske regnemaskiner har medført et sterkt oppsving i interessen for numerisk analyse, både som undervisningsemne ved universiteter og høyskoler og som forskningsområde. Man må vel si at elektroingeniørene har klart å holde et forsprang på matematikerne, slik at maskinenes muligheter ofte ikke er blitt ordentlig utnyttet. I dette kappløp gjelder det derfor å stimulere den numeriske analyse, og en ny stimulans foreligger nå i Fröbergs lærebok.

Boken er en utvidet og fullstendig omarbeidet utgave av forfatterens foreløpige kompendium fra 1959. Den er et resultat av Fröbergs mangeårige erfaringer ved Lunds Universitet, og tar bl. a. sikte på å dekke undervisningsbehovet ved universiteter og høyskoler. De matematiske forutsetninger som kreves er ikke særskilt store: et rimelig kjennskap til analyse og til determinanter. Derimot forutsettes ikke matriser, men bokens »lynkurs« på dette felt er svært konsentrert. Det samme gjelder innføringen i lineær operatorregning.

Fröberg står selv midt oppe i arbeidet med de elektroniske regnemaskiner, og boken har til en viss grad tatt farge av dette. En del »klassisk« stoff fra bordmaskinenes tidsalder er forsvunnet til fordel for metodikk og problemer som er mer aktuelle i dagens situasjon. Siden denne situasjon er så flytende, vil det kanskje være delte meninger om noe av stoffvalget i boken. Beregning av funksjoner er f. eks. nokså svakt dekket, og de få avsnitt om feiloppkattninger er meget tynne. Det virker av og til som om forfatteren har sett mer på den estetiske

side ved en elegant metode enn på metodens »matnyttighet« i den daglige rutine ved et regneanlegg.

Nettopp i dette forhold ligger bokens styrke — og dens svakhet. Fröberg lever med i sitt stoff, og har i høy grad evnen til å formidle sin entusiasme for stoffet til leseren. Den personlige og frie stil bidrar også til å holde interessen fanget, og gjør lesningen til en fornøyelse.

Men nettopp det personlige preg boken har fått, gjør det kanskje litt vanskelig å innpasse den som lærebok i en regulær universitets- eller høyskoleundervisning. Jeg taler her av erfaring, idet vi ved Universitetet i Bergen satte i gang vår første undervisning i numerisk analyse etter nyttår 1963, og valgte å bruke Fröbergs bok. Jeg har ikke selv undervist etter boken, men deltok i planleggingen av kurset.

Hvis man sammenligner med andre lærebøker innen numerisk analyse, kan man vel si at Fröbergs bok ofte krever mer av læreren og av hans undervisning. Det er ikke en bok man gir en fersk student med beskjed om at »dette kan du lese på egen hånd«. På den annen side gir boken den dyktige lærer store muligheter for å gjøre stoffet interessant og levende for studentene.

Nå tror jeg nok at noen av våre problemer var alminnelige begynner-vanskeligheter som ville ha meldt seg med samme styrke ved enhver lærebok; numerisk analyse er nå engang et meget vanskelig stoff fra en pedagogisk og didaktisk synsvinkel. Et ekstra problem for oss var at vi startet undervisningen i Bergen uten en oppgavesamling som var tilpasset Fröbergs bok (som selv ikke inneholder en eneste oppgave). Dette savn ble imidlertid godt avhjulpet i løpet av våren, da Anna Lysegårds oppgavesamling utkom. Den inneholder i alt vesentlig eksamensoppgaver fra Lund, oppgaver som derfor — om de ikke er utarbeidet av Fröberg selv — i hvert fall er nøye tilpasset hans undervisning. Oppgavesamlingens hovedavsnitt er nøyaktig de samme som i Fröbergs bok (med unntak av Monte Carlo-metoden, men med et tillegg om nomografi). Det er derfor nokså overraskende at læreboken ikke er nevnt i forordet til oppgavesamlingen.

Både lærebok og oppgavesamling foreligger i nydelig trykk, men det er enkelte detaljer man kan kritisere i typografien. Tegnsetning i formler er ikke helt konsekvent gjennomført; fet null for matriser brukes bare sporadisk; øvre og nedre indices for fete typer er selv satt i fetstil (ikke i oppgavesamlingen); og noe system i bruken av de tre tegn $\sim$, $\simeq$ og $\cong$ var i hvert fall ikke jeg i stand til å oppdage.

Et forfriskende innslag i boken er de ofte treffende sitater som innleder hvert kapittel. Personlig var jeg mest sjarmert av den limerick som innleder avsnittet om numerisk kvadratur:

*There was an old fellow of Trinity
who solved the square root of infinity
but it gave him such fidgets
to count up the digits
that he chucked math and took up divinity.*

Av det jeg ovenfor har sagt om Fröbergs lærebok skulle det fremgå at den neppe vil forårsake noen masseflukt av matematikere over til teologien.

Ernst S. Selmer

JOHAN C. H. GERRETSEN: *Lectures on tensor calculus and differential geometry*. P. Noordhoff, Groningen 1962. 12 + 204 pp. Cloth D.fl. 25.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 10 (1962), s. 155.)

Det er i grunnen påfallende hvor stor forskjell det er på de mange lærebøkene i differensialgeometri som er kommet de siste årene. Jeg tenker da på forskjell i plan og opplegg, i de mål som forfatterne setter seg, og i de hensikter de har. For noen tiår tilbake kunne man sånn omtrent gjette seg til innholdet i en differensialgeometri, enten det nå var Blaschke, Levi-Civita eller Eisenhart som skrev. Men sammenlikner vi slike bøker som den av Pogorelov (Groningen 1959), Haack (Basel 1955), og nå sist Gerretsen (Groningen 1962), springer det straks i øynene at disse forfatterne betoner svært ulike sider ved faget, enda alle til slutt fører fram til den samme flateteorien. Veiene de går er meget varierte, og det henger nettopp sammen med at de velger å begrunne sin oppbygging så forskjellig.

Det er nettopp i denne begrunnelsen at Gerretsen inntar et markert standpunkt, som han gjennomfører konsekvent. Hos ham har vektorregningen fått en så framtrædende plass at en nesten kan si at det spesielt differensialgeometriske kunnskapsstoffet framstår vesentlig som anvendelser av vektorregningen. Vektorene innføres aksiomatisk (mengde- og gruppebegrepet forutsettes kjent). De første 50–60 sidene går med til lineær algebra, lineære vektorrom, lineære operatorer osv. Så innføres det metriske vektorrommet, og vi merker oss at nå først innføres punktrommet, som altså avledes av vektorrommet. Framstillingen er noe knapp for en leser som ikke er litt orientert i dette stoffet på forhånd, men for den som har noen kunnskaper annet sted i fra, gir forfatteren en klar og grei oversikt over nettopp det som er nødvendig for å bygge opp differensialgeometrien slik som han ønsker.

Med et slikt opplegg følger det helt naturlig at det ikke er noen grunn

til å begrense dimensjonstallet til 3. Derfor gjennomføres alt med det generelle dimensjonstallet n . Videre blir alle Riemannske mangfold i denne boka ikke betraktet som selvstendige n -dimensjonale punktrom, men forfatteren behandler dem alltid som liggende i ett eller annet lineært rom av høyere dimensjonstall med eulidsk metrikk. Et slikt synspunkt kan man like eller ikke like. Den spesielt Riemannske tanken om det selvstendige krumme rommet kan bli borte for leseren på denne måten, men på den annen side kan forfatterens framstilling ha store fordeler rent geometrisk. Det er lettere å forestille seg, og man arbeider med klare geometriske bilder istedenfor en abstrakt formalisme. Forfatteren har i alle fall oppnådd at boka hans blir konsekvent og sammenhengende fra første til siste blad.

Et lite hjertesukk til sist: Når vil vi oppleve at bruken av bokstaver og symboler innenfor differensialgeometrien skal festne seg så noenlunde? Med dette vil jeg ikke ha sagt noe nedsettende om forfatterens symboler. De er greie nok.

Ottar Ytrehus

OSKAR PERRON: *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1962. 134 S., 70 Fig. Leinen DM 21.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 10 (1962), s. 158.)

Først blir man overrasket. Her venter man seg den vanlige abstraksjonen: matematikken arbeider med begreper, disse skapes ved definisjoner, grunnbegrepene kan ikke defineres, bestemmelsen av dem er bare inneholdt implisitt i grunnsetningene = aksiomene. Derfor er det tillatt å knytte hvilke forestillinger som helst til grunnbegrepene, så lenge disse forestillingene ikke strider mot det som aksiomene sier. Dette er jo det vanlige, og er velkjent.

Men så møter vi her en forfatter som bevisst bygger på våre forestillinger. »Was ist ein Punkt? Definition: Ein Punkt ist genau das, was der intelligente, aber harmlose, unverbildete Leser sich darunter vorstellt. — Noch einfacher ist die Definition der Ebene. Unsere Ebene ist einfach die Schultafel oder das Blatt Papier, worauf wir die Figuren zeichnen.« (!) Dette er nær samme standpunktet som vi står på i den mest elementære skoleundervisningen. Boka er da også skrevet for skolefolk, og vi må bedømme den ut fra pedagogiske hensyn.

Hvordan løper så dette av? Det viser seg at det går aldeles framifrå, for nå følger hos forfatteren hele aksiomsystemet, og her er han for så vidt stringent nok; også aksiomene om anordning, aksiomet til Pasch

(når en linje går inn i en trekant, må den også gå ut et sted), og aksiomene om måling er med. Men hele veien er synspunktet dette: at disse aksiomene nærmest virker til å rense, presisere, tydeliggjøre og systematisere de forestillinger som leseren allerede har på forhånd. En viss forvirring i logikken kan man vel frykte for med et slikt standpunkt, men når leseren forutsettes å stå der hvor forfatteren har valgt, da vil i alle fall ikke aksiomsystemet bli et tomt skjema for ham. Som objekter for tanken har vi stadig våre vanlige forestillinger. En skolemann kjenner seg på kjent og hjemlig grunn, fordi stoffet er det samme som i elementærgeometrien.

Men det er velsignet å se dette stoffet ordnet og bygd opp på en måte som er logisk så klar. Ta f. eks. en slik hovedpillars i byggverket som kongruenssetningene. (Det er som kjent mulig med kongruente figurer i den euklidske og i den ikke-euklidske geometri, men ikke i alle plangeometrier.) Først definerer forfatteren hva kongruente trekanten skal bety, uten å vite om disse overhodet er mulige, og derpå fører han opp, som et særskilt *aksiom*, den setningen som vi på skolen kaller for den annen kongruenssetning.

Dette må jo være overraskende for skolefolk. Her innbiller vi oss at vi beviser kongruenssetningene på skolen, og så kan (og må!) en av dem føres opp som aksiom. Så lettvinnt kan man altså komme fra det. — Men saken er jo den at hver lærer som tenker litt over det stoffet han behandler, alltid har hatt anfektelser når han skal begynne å flytte en trekant bortover tavla, og legge den oppå en annen. Flytte en trekant, hva skulle nå det være? Flytte et begrep? Flytte en forestilling? Eller flytte den reale trekanten med kritt-molekylene? På en eller annen måte må det naturligvis fastslås i aksioms form at slik flytting — eller noe som er likeverdig med det — skal være mulig.

Mange med meg kan heller ikke like all den bretteing og dreining av planet, som vi har fått inn i skolen. Jeg tror vi kan ha stort utbytte av å studere Perrons oppbygging av elementærgeometrien.

Så er vi da kommet til det punktet der veiene skilles, og videre skal vi nå gå den veien som utpekes av det ikke-euklidske parallell-aksiomet. Men like klart som at forestillingene våre er til stor hjelp under utledningen av den euklidske geometri, like klart er det at de er en *hindring* når den ikke-euklidske skal bygges opp. For våre forestillinger er nå engang euklidske; for så vidt mener jeg at Kant har rett: vi er av naturen utstyrt med en Anschauungsform som er euklidsk. Så lenge vi beveger oss på forestillingsplanet, er den euklidske geometri den naturlige. Det er først når vi gjennom abstraksjon flytter til det logiske plan at begge geometrier blir likeverdige. Når derfor forfatteren ønsker å bygge opp

den ikke-euklidske geometri ved en liknende framgangsmåte som i skoleundervisningen, må vi ustanselig *gjøre vold* på våre forestillinger. Vi tegner figurer med linjaler, men vi må stadig tenke at figurene lik-som skal være annerledes enn vi ser dem, og annerledes på en egen måte, som leseren må leve seg inn i.

Da måtte det være mye enklere å ta for seg en av de euklidske *modellene* til den ikke-euklidske geometrien, f. eks. Poincaré's halvplan. Der kan man jo lettvinnt se alle ting. Men slikt betrakter Perron som juks. Det er jo også egentlig bare en spesiell del av den euklidske geometrien, hvor man innfører nye navn, og så hokus pokus! har man den ikke-euklidske. Bare på det logiske planet kan en slik framgangsmåte rettferdiggjøres. Når nå forfatteren engang har valgt å bruke forestillingene, da blir vi nødt til å arbeide med dem, og så må vi tøyse og vri dem. Han vil ha fram den *egentlige* ikke-euklidske geometrien.

På slutten behandler Perron spørsmålet om den ikke-euklidske geometrien er motsigelsesfri, og da må han likevel innføre euklidske modeller. Ved slike logiske spørsmål blir det jo nødvendig med en større grad av abstraksjon enn forfatteren har ønsket å bruke i sin øvrige framstilling.

Jeg fant noe uheldige småting. Innenfor § 13 brukes samme bokstaver i to forskjellige betydninger på en forvirrende måte.

Til slutt vil jeg enda en gang på det varmeste anbefale skolefolk å gjøre seg kjent med denne boka.

Ottar Ytrehus

MOTTATTE BØKER

P. O. Andersen — S. Bülow — H. J. Helms: *Matematik for gymnasiet I*. Gyldendal, København 1963. 103 s. D. kr. 48.00.

Elementær aritmetikk 7–9 * Numeriske metoder 10–13 * Mængdebegrebet og funktionsbegrebet 14–33 * Reelle tal 34–43 * Ligninger 44–49 * Koordinatsystemet 50–54 * Vektorer 55–58 * Den rette linie 59–65 * Uligheder 66–72 * Talfølger 73–77 * Logaritmefunktionen 78–81 * Cirkelbuer og vinkler 82–83 * Transformationer af planen 84–88 * Trigonometri 89–101 * Grafiske metoder 102–103.

Kenneth W. Anderson — Dick Wick Hall: *Sets, sequences, and mappings, the basic concepts of analysis*. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 10 + 191 pp. sh. 38/–.

Introduction to sets and mappings 1–29 * Sequences 30–39 * Countable, connected, open, and closed sets 40–72 * Convergence 73–96 * Continuity and uniform continuity 97–141 * Metric spaces 142–184 * Index of axioms and key theorems 185–186 * Index 187–191.

F. M. Arscott — I. M. Khabaza: *Tables of Lamé polynomials*. (Mathematical Tables Series 17.) Pergamon Press, New York, Oxford, London, Paris 1962. 29 + 526 pp. £ 7.

Summary of the theory of Lamé polynomials ix–xvii * The method of computation xviii–xxi * The Ferranti programme xxii–xxviii * References xxviii * How to use the tables xxix * Tables 1–526.

Raymond A. Barnett — John N. Fujii: *Vectors*. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 8 + 132 pp. sh. 25/–.

Introduction 1–21 * The scalar product, base vectors 22–43 * The vector product, triple products, vector identities 44–67 * Vector equations, curves and surfaces 68–86 * Vector functions 87–99 * References 101 * Answers to problem sets 103–130 * Index 131–132.

Heinrich Behnke — Friedrich Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Zweite, veränderte Auflage. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 77.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962. 12 + 603 S. Ganzl. DM 79.00.

Analysis der komplexen Zahlen 1–112 * Die Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen 112–177 * Die analytischen Funktionen, ihre singulären Stellen und ihre Entwicklungen 177–309 * Konforme Abbildungen 310–399 * Der Gesamtverlauf der analytischen Funktionen und ihre Riemannschen Flächen 399–511 * Funktionen auf Riemannschen Flächen 512–592 * Namen- und Sachverzeichnis 593–603.

Charles W. Curtis — Irving Reiner: *Representation theory of finite groups and associative algebras*. (Pure and applied mathematics 11.) John Wiley & Sons, New York, London 1963. 14 + 685 pp. sh. 150/–.

Notation xiii–xiv * Background from group theory 1–24 * Representations and modules 25–90 * Algebraic number theory 91–155 * Semi-simple rings and group algebras 157–206 * Group characters 207–264 * Induced characters 265–311 * Induced representations 313–365 * Non-semisimple rings 367–408 * Frobenius algebras 409–452 * Splitting fields and separable algebras 453–492 * Integral representations 493–581 * Modular representations 583–654 * Bibliography 655–671 * Index 673–685.

W. T. Fishback: *Projective and Euclidean geometry*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 9 + 244 pp. sh. 57/–.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 64–65.)

Euclid reexamined 1–8 * Hilbert's axioms 9–23 * The growth of geometry 24–28 * Projective geometry 29–41 * Fundamentals of synthetic projective geometry 42–67 * Natural homogeneous coordinates 68–82 * Vectors and matrices 83–99 * Fundamentals of analytic projective geometry 100–138 * Conics 139–169 * Axio-

matic projective geometry 170–202 * Descendents of real projective geometry 203–222 * Appendix 223–231 * Answers and hints for exercises 233–239 * Index 241–244.

Paul Funk: *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 94.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962. 16 + 676 S. Ganzl. DM 98.00.

Begründung der Variationsrechnung durch Euler, Lagrange und Hamilton 1–132 * Begründung der Theorie der zweiten Variation durch Legendre und Jacobi 132–193 * Die Kritik von Weierstrass und Du Bois-Reymond und die Aufstellung hinreichender Bedingungen durch Weierstrass 193–253 * Probleme mit Nebenbedingungen 253–329 * Die Verwendung der Quasikoordinaten 329–357 * Zusätze zur Theorie der Variationsprobleme mit mehreren Veränderlichen 358–452 * Die direkten Methoden der Variationsrechnung 452–497 * Das Prinzip von Friedrichs und seine Anwendung auf elastostatische Probleme 498–542 * Finslersche Geometrie 542–580 * Zusätze und spezielle Probleme 581–613 * Historische Bemerkungen 614–631 * Anmerkungen 632–668 * Namenverzeichnis 669–672 * Sachverzeichnis 673–676.

Gunnar Hansen — Arne Porsager (under medvirken af F. Barker Jørgensen): *Tal og tekst*. Regnebog 7. Gyldendal, København 1963. 190 s. D. kr. 15.75.

Håndboldklubben THOR 9–13 * Hr. Petersen fylder halvtreds 14–18 * Danmarks rejseforbindelser 19–26 * Klasser skal til Sverige 27–31 * Bondegården 32–39 * Inderdrenge Kangali 40–46 * De gode gamle dage 47–51 * Ny cykel 52–57 * Kaffe 58–64 * Hjemmet i tal 65–72 * Ferie i Tyskland 73–81 * Knallertfabrikken DANA S/S 82–89 * Fra Kuwait til Danmark 90–97 * Huset på Paradisvej 98–105 * Lars får eget værelse 106–116 * Fællesøvelser, 164 trin 117–157 * Byggesættet Kombi (aritmetik) 158–163 * Et svævefly (geometri) 164–169 * På rejsefangst (aritmetik) 170–173 * Sommerhusplaner (geometri) 174–181 * Fællesøvelser, 36 trin 182–190.

David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. Neunte Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1962. 7 + 271 S., 129 Abb. DM 16.80.

Die fünf Axiomgruppen 2–33 * Die Widerspruchsfreiheit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome 34–50 * Die Lehre von den Proportionen 51–68 * Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene 69–82 * Der Desarguessche Satz 83–103 * Der Pascalsche Satz 104–114 * Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I–IV 115–124 * Schlusswort 124–125 * Anhang I. Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte 126–132 * Anhang II. Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck 133–158 * Anhang III. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschevskyschen Geometrie 159–177 * Anhang IV. Über die Grundlagen der Geometrie 178–230 * Anhang V. Über Flächen von konstanter Gauss'scher Krümmung 231–240 * Supplement I–V 241–268 * Verzeichnis der Begriffsnamen 269–271.

Anna Lysegård: *Problemsamling i numerisk analys*. Lunds Studentkårs Intressebyrå, Lund 1963. 51 s. Sv. kr. 8.50.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 65-67.)

244 uppgifter 5-41 * Svar 42-51.

Herbert Meschkowski: *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion*. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 113.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962. 8+256 S. Ganzl. DM 58.00.

Einleitung 1-6 * Allgemeine Eigenschaften der Hilbertschen Räume 6-42 * Der reproduzierende Kern 42-62 * Beispiele von Hilbertschen Räumen mit reproduzierendem Kern 62-95 * Die Hilbert-Räume positiver Matrizen 96-113 * Orthornormalsysteme mit speziellen Eigenschaften 114-126 * Normalabbildungen 126-148 * Die Darstellung von Funktionen 148-170 * Extremalprobleme 170-185 * Doppelte Orthogonalität 186-212 * Hilbert-Räume aus Lösungen elliptischer Differentialgleichungen 212-220 * Kernfunktionen in der Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen 220-250 * Literaturverzeichnis 251-254 * Namen- und Sachregister 255-256.

Masayoshi Nagata: *Local rings*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 13.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1963. 13+234 pp. sh. 83/-.

General commutative rings 1-47 * Completions 49-66 * Multiplicities 67-89 * Theory of syzygies 91-102 * Theory of complete local rings and its application 103-126 * Geometric local rings 127-177 * Henselian rings and Weierstrass rings 179-202 * Appendix 203-222 * References 223-228 * Table of notation 229 * Index 231-234.

Sture Nydell: *Hur man konstruerar ett nomogram*. Biblioteksförlaget, Stockholm 1963. 70 s. Sv. kr. 9.75.

Skalor 1-13 * Enkla syftlinjenomogram 14-33 * Sammansatta syftlinjenomogram 34-45 * Rätlinjenomogram 46-54 * Några teoretiska förklaringar 55-61 * Övningsuppgifter 62-68 * Sakregister 69 * Tillägg 70.

Elliott I. Organick: *A Fortran primer*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), Palo Alto, London 1963. 186 pp. \$ 3.95.

A quick look at digital computers 3-5 * Use of computers 6-8 * Approach to computer use with Fortran 9-12 * Some highlights of the Fortran language 13-15 * Arithmetic expressions and substitution statements 20-30 * Conditional control (decision making) 31-42 * Unconditional transfer and other control statements 43-52 * Input-output 53-80 * The comment, dimensions and equivalence declarations 82-85 * Defining and calling internal and external functions 86-101 * Preparation of punch card program decks 102-105 * Example problems 110-155 * The advantages of Fortran IV 159-167 * Appendices 169-175 * Answers to selected exercises 176-183 * Index 184-186.

Israel H. Rose: *Algebra, an introduction to finite mathematics*. John Wiley & Sons, New York, London 1963. 16 + 489 pp. sh. 52/-.

Sets and their numbers 1-22 * Functions, operations, and relations 23-64 * Reason and irrationality 65-81 * The real number system 82-131 * Complex numbers and the unary operation $\sqrt{}$ 132-153 * Exponential and logarithmic functions 154-182 * Polynomials and fractional expressions 183-204 * Equations and inequalities 205-262 * Progressions and the mathematics of finance 263-288 * Statistics and probability 289-354 * Matrices and determinants 355-410 * Logic 411-438 * Groups 439-449 * Appendix 451-457 * Selected answers 458-479 * Index 481-489.

Friedrich Sommer: *Einführung in die Mathematik für Studenten der Wirtschaftswissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 8 + 232 S., 53 Abb. Ganzl. DM 29.80.

Einleitung 1-2 * Zahlen und Zahlenrechnen 2-17 * Determinanten 17-41 * Matrizen 41-74 * Lineare Ungleichungen 75-104 * Folgen und Reihen 104-126 * Zinsrechnung 127-143 * Differentialrechnung 143-176 * Anwendungen der Differentialrechnung 176-196 * Das Integral 196-213 * Grundbegriffe der Statistik 213-224 * Literatur 225-226 * Sachverzeichnis 227-232.

Gösta Wahde: *Ett-betygskurs i matematik, geometri och lineär algebra*. Hermods brevkurs 231 R. Hermods, Stockholm 1963. 385 s.

Brev 1: Vektorer 36 s. * Brev 2: Parallellkoordinater. Räta linjer 39 s. * Brev 3: Lineär algebra 40 s. * Brev 4: Lineär algebra med geometriska tillämpningar. Plan 36 s. * Brev 5: Plan och räta linjer i rummet 32 s. * Brev 6: Skalär produkt, vinklar, avstånd. Ortonormerade system 39 s. * Brev 7: Koordinatbyte. Avbildningar 53 s. * Brev 8: Orientering, yta, volym. Kongruensavbildningar 39 s. * Brev 9: Andragradskurvor 40 s. * Brev 10: Differentialekvationer 31 s.

R. Zurmühl: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Vierte, verbesserte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963. 16 + 542 S., 125 Abb. Ganzl. DM 36.00.

Einführung, Hilfsmittel 2-5 * Gleichungen 5-90 * Lineare Gleichungen und Matrizen 90-188 * Interpolation und Integration 189-244 * Statistik und Ausgleichsrechnung 244-319 * Darstellung willkürlicher Funktionen 319-365 * Differentialgleichungen: Anfangswertaufgaben 366-425 * Differentialgleichungen: Rand- und Eigenwertaufgaben 425-535 * Namen- und Sachverzeichnis 536-542.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 241–244 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i Bind 11, hefte 4, være sendt innen 1. oktober 1963.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

241. Bevis, at

$$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$$

er nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at trekant ABC er retvinklet.

Fr. Fabricius-Bjerre

242. Konstruer en trekant af en vinkel, den modstående side samt halveringslinien til den givne vinkel.

P. W. Karlsson

243. Genom att uppskatta

$$s = \sum_{v=2}^n \frac{1}{(x+v)^2}$$

med en integral erhålles $s < 1 + (x+1)^{-1} - (x+n)^{-1} - (x+1)^{-2}$. Visa, att en bättre uppskattning är

$$s < \ln \frac{1 + (1+x)^{-1}}{1 + (n+x)^{-1}}.$$

Henrik Almström

244. En har gitt 6 punkter i planet, $P_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \dots, 6$, slik at dog to eller flere kan falle sammen. Av koordinatene dannes den 6-radede matrise M som i i -te linje har elementene

$$(x_i^2, x_i y_i, y_i^2, x_i, y_i, 1).$$

Finn den innbyrdes beliggenhet av punktene P_i etter som matrisen M har rang henholdsvis 1, 2, 3, 4, 5 eller 6.

R. Tambs Lyche

LÖSNINGER

226. Givet i planen to linier a og b samt et punkt P udenfor disse.

a) Konstruer igennem P to på hinanden vinkelrette linier, hvis skæringspunkter M og N med a og b er således beliggende at $PM=PN$.

b) Bestem beliggenheden af punktet P på en given ret linie C , når $PM=PN$ skal være minimum eller maximum ($PM \perp PN$).

Helge Harboe

Lösning: Problemet löses då linjerna är icke-parallella. Analoga konstruktioner kan tillämpas i det parallella fallet men flertydighet uppstår.

Välj linjernas skärningspunkt O till origo och deras riktningar $\mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_2$ (enhetsvektorer) så att P 's Ortsvektor $\mathbf{r}_P = \alpha \cdot \mathbf{n}_1 + \beta \cdot \mathbf{n}_2$ där $\alpha, \beta > 0$ och så att $\mathbf{n}_2$ och $\mathbf{n}_1$ i nämnd ordning definiera vanlig positiv vridningsriktning. Då $\mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_2$ sålunda fixerats betecknas området $\alpha, \beta > 0$ med Ω .

a) Inför

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1|}.$$

Då fås (se fig.) $\vec{OM} = t_1 \mathbf{n}_1$ och $\vec{ON} = t_2 \mathbf{n}_2$ ur villkoret $PN=PM$ och $PN \perp PM$ som kan skrivas

$$\vec{NP} = \mathbf{r}_P - t_2 \mathbf{n}_2 = \mathbf{z} \times (\mathbf{r}_P - t_1 \mathbf{n}_1) = \mathbf{z} \times \vec{MP}$$

dvs

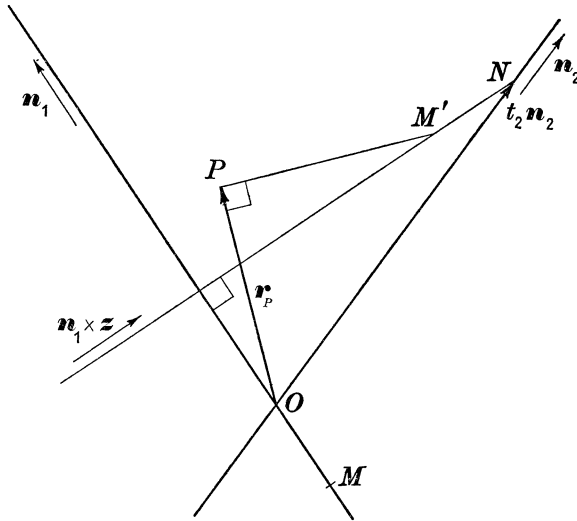
$$(1) \quad \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_P \times \mathbf{z} = t_2 \mathbf{n}_2 + t_1 \mathbf{n}_1 \times \mathbf{z}.$$

Eftersom $\mathbf{r}_P \times \mathbf{z}$ endast innebär en vridning 90° i negativ riktning av $\mathbf{r}_P$ (analogt för $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{z}$) så konstrueras vänsterledet enkelt. Om $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \neq 0$ fås t_1 och t_2 genom uppdelning av $\mathbf{r}_P + \mathbf{r}_P \times \mathbf{z}$ efter riktningarna $\mathbf{n}_2$ och $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{z}$ (se fig.). Härmed ha punkterna M (Obs. att $NM' = OM$) och N konstruerats. Om $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ fås ur (1) det nödvändiga villkoret $\mathbf{r}_P \parallel \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ dvs bisektrisriktningen vilket elementära fall ej vidare behandlas.

b) Det gäller med ovanstående beteckningar att $\vec{NP} = \mathbf{r}_P - t_2 \mathbf{n}_2$ där $t_2 \mathbf{n}_2$ enkelt konstrueras såsom beskrivits under a). Eftersom enl. (1)

$$t_2 = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{r}_P + \mathbf{r}_P \times \mathbf{z})}{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}$$

inses att om $\mathbf{r}_P$ är av formen $\mathbf{r}_P = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ så har $\vec{NP}$ samma form. Varje punkt på en rät linje i Ω avbildas alltså enentydigt på ett sammanhängande segment av en rät linje i det givna systemet ($\vec{NP}$ avsättes

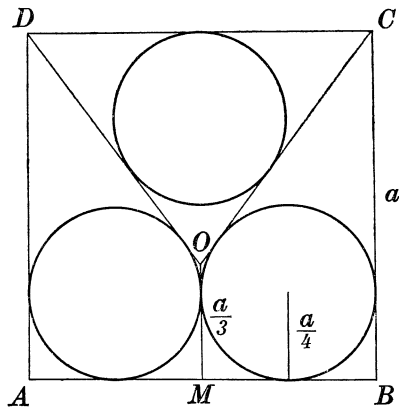


alltså som Ortsvektor från O). Detta segment konstrueras enligt ovan angivna principer. (Man måste med denna metod hålla sig inom Ω och så snart man går utanför Ω omdefiniera $\mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_2$. Detta ger upphov till de omtalade segmenten.) Infimum och supremum av $|\vec{NP}|$ fås nu direkt ur avbildningen och motsvarande P i Ω genom en parallellflyttning.

Torsten Ström

231. En kvadrat skall delas i tre rätliniga figurer så, att de i dessa inskrivna cirklarna blir lika stora.

A. V. Peljo



Lösning: I kvadratet $ABCD$ finner vi mittpunktet M av siden AB

($=a$) og reiser der en normal $MO = \frac{1}{3}a$. Delingslinjene for kvadratet blir OM , OC og OD , og radien i de innskrevne sirkler blir $\frac{1}{4}a$.

(Med delingslinjer fra ett av hjørnene i kvadratet kan en nok også få like innskrevne sirkler, men de kan bare bestemmes ved en ligning av 4. grad.)

Johs. Lohne

Også løst av A. de Leeuw van Weenen.

232. Vis geometrisk at

$$3 \sum_{k=1}^n k^5 = 4 \left(\sum_{k=1}^n k \right)^3 - \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Gunnbjørg Gismarvik

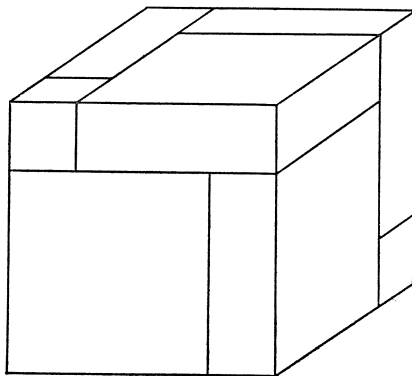
Løsning: Et kvadrat med side $n(n+1)$ bygges gradvis opp av rektangler. I hver omgang tas 4 rektangler med areal k^3 (bredde k og lengde k^2), $k=1, 2, \dots, n$. Derav (NMT 4 (1956), s. 86) får vi arealformelen

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = [n(n+1)]^2 = 4 \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

En kubus bygges opp analogt, i hver omgang av 6 kvadratiske plater med volum k^5 (tykkelse k og side k^2). Dessuten trenges nå en terning k^3 i hvert av to diametralt motsatte hjørner. Volumformelen blir

$$6 \sum_{k=1}^n k^5 + 2 \sum_{k=1}^n k^3 = [n(n+1)]^3,$$

hvorav satsen.



Johs. Lohne

234. Antag $\int_0^\infty f^2(t) dt$ konvergent samt $f(x) \geq 0$ för $x \geq 0$. Visa att

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt$$

är begränsad för alla $x \geq 0$.

Torsten Ström

Lösning: Anvendes Schwarz' ulighed på de reelle funktioner 1 og $f(t)$, fås

$$\left(\int_0^x 1 \cdot f(t) dt \right)^2 \leq \int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x (f(t))^2 dt.$$

Da $f(t)$ er reel, fås

$$\int_0^x (f(t))^2 dt \leq \int_0^\infty (f(t))^2 dt,$$

d.v.s.

$$|g(x)| \leq \sqrt{\int_0^\infty (f(t))^2 dt} \quad (x \geq 0),$$

der, da integralet forudsattes at eksistere, udsiger, at $g(x)$ er begrænset.

Forudsætningen $f(x) \geq 0$ kan altså svækkes til: $f(x)$ reel.

P. W. Karlsson

Også løst av A. de Leeuw van Weenen.

RESULTAT AF PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIASTER

(Opgaverne i NMT 10 (1962), s. 228–229.)

Der indkom 24 besvarelser. Præmier på kr. 150 tildeltes Hans Burkal Jensen, III mn Lyngby Statsskole og Bjarne Toft, III mn Thisted Gymnasium. Bogpræmier blev tildelt Ellinor Bolbjerg, III mn Øregaard Gymnasium, Hellerup, Jørgen Moth, III mn St. Knuds Gymnasium, Odense og Eigil Rasmussen, III mn Gladsaxe Gymnasium.

SUMMARY IN ENGLISH

HARALD BERGSTRÖM: *A definition of the exponential function.* (Swedish.)

The exponential function is introduced as

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

The existence of this limit, and the rules of multiplication and differentiation of exponential functions, can then be settled by means of elementary inequalities. The method also applies to complex exponents.

KAY PIENE: *The education of teachers of mathematics.* (Norwegian.)

With particular emphasis on secondary school teachers, the author discusses how to educate "good" teachers of mathematics. The following four aspects are considered: General education, academic training, pedagogical training and "personality".

HANS RIESEL: *On divisibility rules.* (Swedish.)

The author extends the well known "1001-rule" for divisibility by 7, 11 or 13 to other moduli of the form $l \cdot 10^m \pm n$ with small values of l , m and n .

KURT-R. BIERMANN: *N. H. Abel and Alexander von Humboldt.* (German.)

The author discusses the relations between Abel and von Humboldt, and between Abel and Dirichlet. In particular, several reasons are pointed out why Abel did not meet von Humboldt during Abel's stay in Paris 1826. It is made probable that Dirichlet's appointment protracted the call of Abel to Berlin.