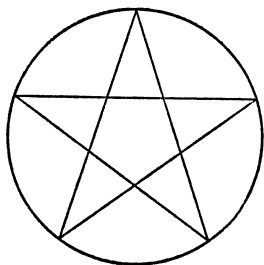


**NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT**

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 11



OSLO 1963

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.
Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.
Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.
Matemaattisten aineiden opettajien liitto – Finlands matematik-, fysik-
och kemilärarförbund.
Íslenska stærðfræðafélagið.
Norsk matematisk forening.
Norsk lektorlags matematikkseksjon.
Svenska matematikersamfundet.
Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.
Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.
Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

REDAKSJON:

David Fog, Carl-Erik Fröberg, G. af Hällström,
Bo Kjellberg, Regnar Norgil, Bertil Nyman, Ragnar J. Solvang,
B. L. Stara, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.
Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSER:

Redaksjon: Matematisk Institutt, Allégt. 34, Bergen.
Ekspedisjon: Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

ON A COMBINATORIAL PROBLEM

P. ERDÖS

Let $\mathfrak{F}$ be a family of sets. $\mathfrak{F}$ is said by E. W. Miller [3] to possess property B if there exists a set B such that

$$\begin{array}{ll} F \cap B \neq \emptyset & \text{for every } F \in \mathfrak{F}, \\ F \not\subset B & \text{for every } F \in \mathfrak{F}. \end{array}$$

Miller used the letter B in honour of Felix Bernstein, who in the early years of this century proved that the perfect sets have property B and using this "constructed" a totally imperfect set of power continuum (that is, a set of power continuum which does not contain a perfect set). I put constructed in quotation mark, since he used the axiom of choice (in fact, without the axiom of choice the existence of a totally imperfect set has never been proved).

Several other well known theorems can be formulated in terms of property B. For example, a well known theorem of van der Waerden states that if we split the integers into two classes, then at least one class contains for every k an arithmetic progression of k terms. This theorem can be formulated as follows: The family of all arithmetic progressions of k terms does not have property B.

Hajnal and I [2] recently published a paper on the property B and its generalizations. One of the unsolved problems we state asks: What is the smallest integer $m(p)$ for which there exists a family $\mathfrak{F}$ of finite sets $A_1, \dots, A_{m(p)}$, each having p elements, which does not possess property B?

For $p=1$ there is no problem since $m(p)=1$. Trivially $m(2)=3$ and by trial and error we showed $m(3)=7$. $m(3) \leq 7$ is shown by the set of Steiner triplets $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 7)$, $(2, 5, 6)$, $(3, 4, 6)$, $(3, 5, 7)$. It is easy to see that every set which has a non-empty intersection with each of these sets must contain at least one of them. By a somewhat longer trial and error method we showed $m(3) > 6$. Thus $m(3)=7$. The value of $m(p)$ is not known for $p > 3$ and it does not seem easy to determine $m(p)$ even for $p=4$. We further observed that $m(p) \leq \binom{2p-1}{p}$ by

defining the family $\mathfrak{F}$ as the set of all subsets taken p at a time of a set of $2p-1$ elements.

We shall now show that for all $p \geq 2$:

$$(1) \quad m(p) > 2^{p-1},$$

and for every $\varepsilon > 0$ if $p > p_0(\varepsilon)$:

$$(2) \quad m(p) > (1-\varepsilon)2^p \log 2.$$

$\overline{A}_k$ will denote the number of elements of A_k , and $A_i \setminus A_j$ will denote the set of those elements of A_i which are not contained in A_j . Instead of (1) and (2) we shall prove the following

THEOREM 1. Let $\{A_i\}$, $1 \leq i \leq k$ be a family $\mathfrak{F}$ of finite sets, $\overline{A}_i = \alpha_i \geq 2$. If

$$(3) \quad \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{\alpha_i}} \leq \frac{1}{2}$$

or

$$(4) \quad \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \geq \frac{1}{2}$$

holds, then $\mathfrak{F}$ has property B.

(1) clearly follows from (3) and (2) from (4). In fact (4) clearly implies (3), and we include (3) only because its proof is very simple.

I do not know the order of magnitude of $m(p)$ and cannot even prove that

$$(5) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} m(p)^{1/p}$$

exists. Quite possibly the limit in (5) is 2.

Put $\bigcup_{i=1}^k A_i = T$, $\overline{T} = n$. If $\mathfrak{F}$ is a family of sets, $\overline{\mathfrak{F}}$ will denote the number of sets in the family. Denote by $\mathfrak{F}_T$ the family of sets S for which

$$(6) \quad S \subset T, A_i \cap S \neq \emptyset, A_i \not\subset S, 1 \leq i \leq k.$$

We have to show that if (3) holds then $\overline{\mathfrak{F}_T} > 0$ (since this implies that the family of sets A_i , $1 \leq i \leq k$ satisfying (3) has property B). Denote by $\mathfrak{F}_i$ the family of sets S satisfying

$$(7) \quad S \subset T, A_i \subset S \text{ or } A_i \cap S = \emptyset.$$

Clearly an $S \subset T$ is in the family $\mathfrak{F}_T$ if it is in none of the families $\mathfrak{F}_i$, $1 \leq i \leq k$ (that is, it satisfies (6) if it does not satisfy (7) for any i , $1 \leq i \leq k$). By a simple sieve process we thus have

$$(8) \quad \overline{\mathfrak{F}_T} \geq 2^n - \sum_{i=1}^k \overline{\mathfrak{F}_i} + 1.$$

The proof of (8) is indeed easy. 2^n is the number of all subsets of T , and to obtain $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_T$ we have to subtract away all the sets of $\mathfrak{F}_i$, $1 \leq i \leq k$. But the sets which contain $A_1 \cup A_2$ have been subtracted away twice and there is at least one such set (namely T), which explains the summand $+1$ on the right hand side of (8). We evidently have

$$(9) \quad \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_i = 2^{n-\alpha_i+1},$$

since clearly there are $2^{n-\alpha_i}$ sets $S \subset T$ satisfying $A_i \subset S$ and $2^{n-\alpha_i}$ sets satisfying $A_i \cap S = \emptyset$. From (8) and (9) we have $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_T \geq 1$ if (3) is satisfied. This proves the first statement of Theorem 1.

To prove the second statement we need the following

LEMMA. Let $T \subset T_1$, $\overline{\overline{T}}_1 = m \geq n$. The number of subsets $S \subset T_1$ which do not contain any of the sets A_i , $1 \leq i \leq k$ is greater than or equal to

$$(10) \quad 2^m \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_i}}\right),$$

with equality if and only if the sets A_i are pairwise disjoint.

We use the set $T_1 \supset T$ only to make our induction proof easier. Denote by $f(A_1, \dots, A_j; T_1)$ the number of subsets S of T_1 not containing any of the sets A_i , $1 \leq i \leq j$, and by $f(A_1, \dots, A_j; A_{j+1}, T_1)$ the number of sets $S \subset T_1$ which contain A_{j+1} , but do not contain any of the sets A_i , $1 \leq i \leq j$.

If the sets A_i are pairwise disjoint, we evidently have

$$(11) \quad f(A_1, \dots, A_k; T_1) = 2^{m-n} \prod_{i=1}^k (2^{\alpha_i} - 1) = 2^m \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_i}}\right),$$

since we obtain the sets $S \subset T_1$, $A_i \subset S$, $1 \leq i \leq k$ by taking the unions of all the proper subsets of the sets A_i with any subset of $T_1 \setminus T$. Thus there is equality in (10).

Assume next that the sets A_i are not pairwise disjoint, say $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. If $k=2$, a simple argument shows that

$$f(A_1, A_2; T_1) = 2^m - 2^{m-\alpha_1} - 2^{m-\alpha_2} + 2^{m-n} > 2^m \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_1}}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_2}}\right),$$

where $n = \overline{\overline{A_1 \cup A_2}} < \alpha_1 + \alpha_2$. Thus for $k=2$ (10) holds with the sign of inequality. Assume next that if we have any $k-1$ ($k \geq 3$) sets which are not pairwise disjoint, then (10) holds with the sign of inequality. We shall show that the same is true for k sets $A_1, \dots, A_k$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

By a simple argument we have

$$(12) \quad f(A_1, \dots, A_k; T_1) = f(A_1, \dots, A_{k-1}; T_1) - f(A_1, \dots, A_{k-1}; A_k, T_1).$$

By our induction hypothesis we have

$$(13) \quad f(A_1, \dots, A_{k-1}; T_1) > 2^m \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_i}}\right).$$

Further clearly

$$(14) \quad f(A_1, \dots, A_{k-1}; A_k, T_1) = f(A_1 \setminus A_k, \dots, A_{k-1} \setminus A_k; T_1 \setminus A_k).$$

To every subset S' of $T_1 \setminus A_k$ which does not contain any of the sets $A_i \setminus A_k$, $1 \leq i \leq k-1$, we make correspond 2^{α_k} subsets S of T_1 which do not contain any of the sets A_i , $1 \leq i \leq k-1$. It suffices to consider the sets

$$(15) \quad S' \cup S'', \quad S'' \subset A_k.$$

Clearly if two subsets S_1' and S_2' of $T_1 \setminus A_k$ are distinct, all the sets (15) are distinct. Thus we have

$$(16) \quad f(A_1 \setminus A_k, \dots, A_{k-1} \setminus A_k; T_1 \setminus A_k) \leq \frac{f(A_1, \dots, A_{k-1}; T_1)}{2^{\alpha_k}}.$$

From (12), (13), (14), and (16) we obtain

$$f(A_1, \dots, A_k; T_1) \geq f(A_1, \dots, A_{k-1}; T_1) \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_k}}\right) > 2^m \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_i}}\right),$$

which proves the Lemma.

The Lemma in fact follows immediately from the following special case of a theorem of Chung [1]: Let E_i , $1 \leq i \leq k$ be k events of probability β_i , $\bar{E}_i$ denoting the event (of probability $1 - \beta_i$) that E_i does not happen. Assume that for every i , $2 \leq i \leq k$:

$$(17) \quad P(E_1 \cup \dots \cup E_{i-1} \mid E_i) \geq P(E_1 \cup \dots \cup E_{i-1}),$$

where $P(E \mid F)$ denotes the conditional probability of E happening if we know that F has happened. (17) implies

$$(18) \quad P(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_k) \geq \prod_{i=1}^k (1 - \beta_i),$$

with equality only if there is equality in (17) for every i , $2 \leq i \leq k$. We obtain our Lemma by defining the event E_i as the event that $S \subset T_1$ contains A_i .

To complete the proof of Theorem 1 we have to show that if A_i , $1 \leq i \leq k$ satisfies (4), then $\bar{\mathfrak{F}}_T > 0$ (see the proof of (3)). Clearly $2^n - f(A_1, \dots, A_k; T)$ equals the number of subsets S of T for which $A_i \subset S$ holds for some i , $1 \leq i \leq k$, and it also equals the number of subsets

$S \subset T$ for which $A_i \subset T \setminus S$ for some i , $1 \leq i \leq k$. Denote by L the number of subsets $S \subset T$ for which $A_{i_1} \subset S$ and $A_{i_2} \subset T \setminus S$ for some i_1 and i_2 .

A simple argument shows that

$$(19) \quad \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_T = 2^n - 2(2^n - f(A_1, \dots, A_k; T)) + L.$$

If the sets A_i are not pairwise disjoint, then (4), (19) and our Lemma implies $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_T > 0$. If the sets A_i are pairwise disjoint (in fact if $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), then $L > 0$ since $A_1 \subset A_1$, $A_2 \subset T - A_1$. Thus in any case (4) implies $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_T > 0$ and hence Theorem 1 is proved.

By slightly more complicated arguments we could prove the following

THEOREM 2. *Let $A_1, A_2, \dots$ be a finite or infinite sequence of finite sets satisfying*

$$\overline{A}_i \geq 2 \quad \text{and} \quad \prod_i \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \geq \frac{1}{2},$$

and $A_1', A_2', \dots$ a finite or infinite sequence of infinite sets. Then the family $\{A_i\} \cup \{A_i'\}$ has property B.

Now one can ask the following problem which I cannot answer: Let $\{A_i\}$ be a finite or infinite family of finite sets which does not have the property B and for which $\overline{A}_i \geq p \geq 2$ for all i . What is the upper bound $C^{(p)}$ of $\prod_i (1 - 2^{-\alpha_i})$ and the lower bound C_p of $\sum_i 2^{-\alpha_i}$? Very likely $C^{(2)} = \frac{27}{64}$ and $C_2 = \frac{3}{4}$. Probably

$$\lim_{p \rightarrow \infty} C^{(p)} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} C_p = \infty.$$

If $f(A_1, \dots, A_k; T) > 2^{n-1}$, our proof immediately shows that the family $\{A_i\}$, $1 \leq i \leq k$ has property B, but if $f(A_1, \dots, A_k; T) = 2^{n-1}$, the family $\{A_i\}$, $1 \leq i \leq k$ does not have to have property B, for instance if it consists of the subsets taken p at a time of a set of $2p-1$ elements.

A family of sets $\mathfrak{F}$ is said to have property B(s) if there exists a set B such that $F \cap B \neq \emptyset$ and $\overline{F} \cap B < s$ for every F of $\mathfrak{F}$.

Hajnal and I asked [2] what is the smallest integer $m(p, s)$ for which there exists a family $\mathfrak{F}$ of sets A_i , $1 \leq i \leq m(p, s)$ not having property B(s) and satisfying $\overline{A}_i = p$, $1 \leq i \leq m(p, s)$. Clearly $m(p, p) = m(p)$, and we remarked that $m(p, s) \leq \binom{p+s+1}{s}$.

Using the methods of this note we can show that positive absolute constants c_1 and c_2 exist so that

$$(1 + c_1)^s < m(p, s) < (1 + c_2)^s.$$

REFERENCES

- [1] K. L. CHUNG: *On mutually favorable events*. Annals of Math. Stat. 13 (1942), pp. 338–349.
- [2] P. ERDŐS and A. HAJNAL: *On a property of families of sets*. Acta Math. Acad. Hung. Sci. 12 (1961), pp. 87–123; see in particular problem 12 on p. 119.
- [3] E. W. MILLER: *On a property of families of sets*. Comptes Rendus Varsović 30 (1937), pp. 31–38.

EN SETNING OM MULTILINEÆRE POLYNOMER

HELGE TVERBERG

Et multilineært polynom P i n variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ er et polynom som er lineært i hver av de variable, d. v. s. at for hvert $i = 1, 2, \dots, n$ skal vi kunne sette $P = A_i x_i + B_i$, der A_i og B_i er polynomer i $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Eller sagt på en annen måte: er $cx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ et ledd i polynomet, skal alle α_i være lik 0 eller 1.

I det følgende skal vi vise en enkel sats om multilineære polynomer, og vi skal gi et par enkle anvendelser av denne satsen. Vi skal bare bevege oss i de reelle talls område, og så kan leseren selv generalisere der han synes det kan generaliseres. Satsen er:

La det være gitt to multilineære polynomer $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ med følgende egenskap: P forsvinner for et vilkårlig tallsett $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ hvis og bare hvis Q forsvinner for det samme tallsettet. Da vil det finnes et tall $c \neq 0$ slik at $P = cQ$.

Beviset føres ved induksjon etter n . Polynomet $ax + b$ forsvinner for enten ingen, alle eller én verdi x_0 av x , ettersom $a = 0$, $b \neq 0$; $a = b = 0$; eller $a \neq 0$, og i siste tilfelle er $x_0 = -b/a$. Dette viser at satsen er riktig for $n = 1$.

Anta så at $n > 1$. Vi skriver P og Q som $Ax_n + B$ og $Cx_n + D$. Settes $x_n = 0$, ser en at B og D er to multilineære polynomer i $n - 1$ variable som oppfyller betingelsen i satsen. Altså er $B = cD$ med $c \neq 0$. Multipliseres Q med c , noe som ikke influerer på »nullpunktene« for Q , og heller ikke på konklusjonen i satsen, ser en at vi kan anta $D = B$. Settes $x_n = 1$, og $x_n = -1$, får en på samme måte identitetene

$$\begin{aligned} A + B &= c_1(C + B) \\ -A + B &= c_2(-C + B), \end{aligned}$$

som gir

$$(c_2 - c_1)C = (c_1 + c_2 - 2)B.$$

Er nå $c_1 = c_2$, må enten $B = 0$ eller $c_1 = c_2 = 1$. Er $B = 0$ har vi $Q = Cx_n$, $P = c_1 Cx_n = c_1 Q$. Er $c_1 = 1$ blir $A = C$ og altså $P = 1 \cdot Q$. Dersom $c_1 \neq c_2$, finner vi C og A som multipler av B , og kan sette $P = B(1 + \alpha x_n)$,

$Q = B(1 + \beta x_n)$. Nå er nullpolynomet multilinear i $n-1$ variable og forsvinner for alle verdsett $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Det vil si at hvis B forsvinner for alle verdsett må B være lik $c \cdot 0 = 0$, altså $P = Q = 0$, og vi kan f. eks. sette $P = 1 \cdot Q$. Hvis $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ er et verdsett slik at $B(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = B_0 \neq 0$, settes disse verdiene inn i P og Q , og en ser av tilfellet $n=1$ at $\alpha = \beta$ og at $P = 1 \cdot Q$, altså $c_1 = c_2 = 1$, som gir en selvmotsigelse.

Så var det anvendelsene. Er $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ 3-dimensjonale vektorer, gjelder som kjent at

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ut fra koordinatfremstillingene av skalar- og vektorprodukt er det klart at venstresiden av denne ligningen er multilinear i de 9 variable $a_1, \dots, c_3$, og en ser også at høyresiden er det. Fra determinantlæren vet vi at høyresiden forsvinner bare når de tre vektorene er koplanare, og den geometriske definisjonen av venstresiden sier at den er null bare når $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er koplanare. Satsen kan altså anvendes, og et spesielt valg av vektorer viser at konstanten c i dette tilfelle er lik 1, altså at ligningen ovenfor er riktig.

Den andre anvendelsen er på satsen om multiplikasjon av determinanter av samme orden. La oss betrakte to n -te ordens kvadratiske matriser $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$, og la $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ betegne n -dimensjonale vektorer. Ut fra teorien for lineære ligningssett er det da lett å verifisere den følgende kjede av ekvivalenser:

$$\begin{aligned} |\mathbf{AB}| = 0 &\Leftrightarrow (\exists \mathbf{x})(\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \ \& \ \mathbf{ABx} = \mathbf{0}) \\ &\Leftrightarrow (\exists \mathbf{x})(\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \ \& \ \mathbf{Bx} = \mathbf{0}) \vee (\exists \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})(\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \ \& \ \mathbf{Ay} = \mathbf{0} \ \& \ \mathbf{Bx} = \mathbf{y}) \\ &\Leftrightarrow |\mathbf{B}| = 0 \vee |\mathbf{B}| \neq 0 \ \& \ |\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{B}| = 0 \vee |\mathbf{A}| = 0 \\ &\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 0. \end{aligned}$$

En ser dessuten umiddelbart ut fra definisjonen av matriseproduktet $\mathbf{AB}$ og av determinanten at både $|\mathbf{AB}|$ og $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ er multilineære polynomer i $2n^2$ variable (elementene i $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$). Settes f. eks. $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{E}$ (enhetsmatrisen), ser en også her at konstanten c blir lik 1.

MATRIX-SYMBOLIK ANVENDT PÅ DIFFERENTIALREGNING

PETER KIERKEGAARD-HANSEN

Ved problemer, som skal løses ved hjælp af differentialregning, som for eksempel ekstremabestemmelse, kan man komme ud for at skulle differentiere med hensyn til mange variable. Dette medfører et stort skrivearbejde, og beregningerne bliver ofte uoverskuelige. Ved sådanne opgaver vil man med fordel kunne anvende matrixregningens symbolik.

I professor K. W. Johansens hæfte »Matricer, Teori·Praksis« er for vektorer og matricer anvendt symboler, som kan benyttes såvel i håndskrevne som i maskinskrivne beregninger. Man har der valgt at skrive en vektor som et lille bogstav med én streg over og en matrix som et stort bogstav med to streger over. Anføres for en matrix eller en vektor alle dens elementer, indrammes disse af en kantet parentes []. Af typografiske grunde skrives en søjlevektors elementer dog i reglen ved siden af hinanden. Dens karakter af søjlevektor markeres da ved anvendelse af parentesens { }, således at den f. eks. kan have udseendet

$$\bar{y}_n = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right] = \{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n\}.$$

Idet en stjerne betegner transponering, skrives den transponerede søjlevektor, rækkevektoren,

$$\bar{y}_n^* = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n].$$

Har samtlige elementer i vektoren $\bar{y}_n$ værdien 1, skrives den

$$(1) \quad \bar{e} = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}.$$

Ved hjælp af vektorer kan en produktsum $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ skrives på formen $x = \bar{a}_n^* \bar{b}_n$. Kvadratet på denne størrelse bliver

$$(2) \quad x^2 = (\bar{a}_n^* \bar{b}_n)(\bar{b}_n^* \bar{a}_n) = \bar{a}_n^* (\bar{b}_n \bar{b}_n^*) \bar{a}_n.$$

Ved differentiation af en vektor med hensyn til én variabel skal hvert af vektorens elementer differentieres med hensyn til den variable. For søjlevektoren $\bar{y}_n$ får man således

$$(3) \quad \frac{d\bar{y}_n}{dx} = \left\{ \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} \cdots \frac{dy_n}{dx} \right\},$$

idet differentialkvotienten atter opfattes som en søjlevektor. På lignende måde skrives differentialkvotienten af en rækkevektor påny som en rækkevektor. Mere almindeligt differentieres en vilkårlig matrix ved differentiation af alle dens elementer, og hvert elements differentialkvotient skrives på den plads i den nye matrix, som svarer til elementets plads i den oprindelige. (Det er naturligvis her som i det følgende forudsat, at alle omtalte differentialkvotienter eksisterer.)

I overensstemmelse med (3) skrives differentialet af en søjlevektor $\bar{y}_n$ som søjlevektoren

$$(4) \quad d\bar{y}_n = \{dy_1 \ dy_2 \ \dots \ dy_n\},$$

og differentialet af en rækkevektor $\bar{y}_n^*$ som rækkevektoren

$$(5) \quad d\bar{y}_n^* = [dy_1 \ dy_2 \ \dots \ dy_n].$$

Det skal herefter vises, hvorledes symbolikken kan udvides til også at omfatte differentiation med hensyn til en vektor.

Betragtes en funktion i m variable,

$$(6) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

kan disse opfattes som elementer i en søjlevektor $\bar{x}_m = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m\}$, hvorfor (6) kort kan skrives

$$y = f(\bar{x}_m).$$

Differentialet af funktionen (6), der udtrykkes ved

$$(7) \quad dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_m} dx_m,$$

kan ved hjælp af vektorsymboler skrives

$$dy = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y}{\partial x_m} \right] \{dx_1 \ dx_2 \ \dots \ dx_m\},$$

eller, jfr. (4),

$$(8) \quad dy = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y}{\partial x_m} \right] d\bar{x}_m.$$

Indføres i (8) symbolet

$$(9) \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y}{\partial x_m} \right]$$

for rækkevektoren, gradienten, kan differentialet skrives på formen

$$(10) \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} d\bar{x}_m.$$

Indførelse af symbolet (9) er ensbetydende med

REGEL A: En skalær størrelse differentieret med hensyn til en søjlevektor opfattes som en rækkevektor, hvis enkelte elementer er den skalære størrelses partielle differentialkvotienter.

Ved hjælp af denne regel opnår man altså at kunne skrive differentialet (7) på den korte form (10).

Opfattes de variable $x_1, x_2, \dots, x_m$ i (6) som elementerne i en rækkevektor $\bar{x}_m^* = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]$, kan (6) skrives $y = f(\bar{x}_m^*)$. Indføres analogt med (9) symbolet

$$(11) \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m^*} = \left\{ \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y}{\partial x_m} \right\},$$

kan differentialet (7) også skrives, jfr. (5),

$$(12) \quad dy = d\bar{x}_m^* \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m^*}.$$

Skrivemåden (11) er ensbetydende med

REGEL B: En skalær størrelse differentieret med hensyn til en rækkevektor opfattes som en søjlevektor, hvis enkelte elementer er den skalære størrelses partielle differentialkvotienter.

Det bemærkes, at

$$(13) \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m^*} = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} \right)^*$$

i overensstemmelse med, at (10) ved transponering giver

$$(dy)^* = dy = d\bar{x}_m^* \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} \right)^*.$$

Betragtes herefter n funktioner $y_1, y_2, \dots, y_n$, skrevet på formen

$$\bar{y}_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ f_2(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

er lig med det i 'te element $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ i rækkevektoren på venstre side.

Kan vektoren $\bar{u}_k$ deles i subvektorer, f. eks.

$$\bar{u}_k = \{a_1 a_2 \dots a_\alpha b_1 b_2 \dots b_\beta c_1 c_2 \dots c_\gamma \dots\} = \{\bar{a}_\alpha \bar{b}_\beta \bar{c}_\gamma \dots\},$$

får man

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} = \frac{\partial y}{\partial \bar{u}_k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{x}_m} = \left[\frac{\partial y}{\partial \bar{a}_\alpha} \frac{\partial y}{\partial \bar{b}_\beta} \frac{\partial y}{\partial \bar{c}_\gamma} \dots \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{a}_\alpha}{\partial \bar{x}_m} \\ \frac{\partial \bar{b}_\beta}{\partial \bar{x}_m} \\ \frac{\partial \bar{c}_\gamma}{\partial \bar{x}_m} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

eller

$$(16) \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} = \frac{\partial y}{\partial \bar{a}_\alpha} \frac{\partial \bar{a}_\alpha}{\partial \bar{x}_m} + \frac{\partial y}{\partial \bar{b}_\beta} \frac{\partial \bar{b}_\beta}{\partial \bar{x}_m} + \frac{\partial y}{\partial \bar{c}_\gamma} \frac{\partial \bar{c}_\gamma}{\partial \bar{x}_m} + \dots$$

Eksempel 2. Ved differentiation med hensyn til $\bar{x}_m$ af den skalære størrelse

$$y = \bar{a}_k^* \bar{A}_{kl} \bar{b}_l = \bar{b}_l^* \bar{A}_{lk}^* \bar{a}_k,$$

hvor $a_i = f_i(\bar{x}_m)$, $b_j = g_j(\bar{x}_m)$, og elementerne i $\bar{A}_{kl}$ alle er konstanter, får man, jfr. (16),

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} = \frac{\partial y}{\partial \bar{a}_k} \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial \bar{x}_m} + \frac{\partial y}{\partial \bar{b}_l} \frac{\partial \bar{b}_l}{\partial \bar{x}_m} = \bar{b}_l^* \bar{A}_{lk}^* \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial \bar{x}_m} + \bar{a}_k^* \bar{A}_{kl} \frac{\partial \bar{b}_l}{\partial \bar{x}_m}.$$

Er specielt $\bar{a} = \bar{b} = \bar{x}_m$, dvs. $y = \bar{x}_m^* \bar{A}_{mm} \bar{x}_m$, og er $\bar{A}$ symmetrisk, bliver

$$(17) \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} = \bar{x}_m^* (\bar{A}_{mm}^* + \bar{A}_{mm}) = 2\bar{x}_m^* \bar{A}_{mm}.$$

Eksempel 3. Praktisk anvendelse for symbolikken får man f. eks. ved udledning af fejlphobningsloven [2, side 117]. Middelværdien af en lineær funktion

$$y = c + \bar{a}_m^* \bar{x}_m,$$

kan skrives

$$\mathcal{M}\{y\} = c + \mathcal{M}\{\bar{a}_m^* \bar{x}_m\} = c + \bar{a}_m^* \mathcal{M}\{\bar{x}_m\}.$$

Variansen på funktionen bliver, jfr. [2, side 106], og (2),

$$\begin{aligned}
 v\{y\} &= m\{(y - m\{y\})^2\} = m\{(\bar{a}_m^*(\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\}))^2\} \\
 &= m\{\bar{a}_m^*(\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\})(\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\})^* \bar{a}_m\} \\
 &= \bar{a}_m^* m\{(\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\})(\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\})^*\} \bar{a}_m = \bar{a}_m^* \bar{M}_{x \cdot mm} \bar{a}_m,
 \end{aligned}$$

hvor

$$\bar{M}_{x \cdot mm} = \begin{bmatrix} v\{x_1\} & v\{x_1, x_2\} & \dots & v\{x_1, x_m\} \\ v\{x_2, x_1\} & v\{x_2\} & \dots & v\{x_2, x_m\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v\{x_m, x_1\} & v\{x_m, x_2\} & \dots & v\{x_m\} \end{bmatrix}$$

er momentmatricen for $\bar{x}_m$, jfr. [1, side 295].

En ikke lineær funktion, $y = f(\bar{x}_m)$, omskrives ved hjælp af Taylors formel til

$$y = f(\bar{x}_m) \simeq f(m\{\bar{x}_m\}) + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} (\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\}),$$

når der ikke medtages led af højere orden end første. Ved anvendelse af dette lineære udtryk bliver variansen

$$(18) \quad v\{y\} \simeq \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_m^*}.$$

Herefter betragtes n funktioner, der ved hjælp af Taylors formel kan skrives på den lineære form

$$\bar{y}_n \simeq \bar{f}_n(m\{\bar{x}_m\}) + \frac{\partial \bar{y}_n}{\partial \bar{x}_m} (\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\}).$$

Kovariansen på elementerne y_i og y_j er

$$\begin{aligned}
 v\{y_i, y_j\} &= m\{(y_i - m\{y_i\})(y_j - m\{y_j\})\} \\
 &= m\left\{\frac{\partial y_i}{\partial \bar{x}_m} (\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\})(\bar{x}_m - m\{\bar{x}_m\})^* \frac{\partial y_j}{\partial \bar{x}_m^*}\right\} = \frac{\partial y_i}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_j}{\partial \bar{x}_m^*},
 \end{aligned}$$

således at momentmatricen $\bar{M}_{y \cdot nn}$ for $\bar{y}_n$ bliver

$$\bar{M}_{y \cdot nn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_m^*} & \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_m^*} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_n}{\partial \bar{x}_m^*} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_m^*} & \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_m^*} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_n}{\partial \bar{x}_m^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_m^*} & \frac{\partial y_n}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_m^*} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \frac{\partial y_n}{\partial \bar{x}_m^*} \end{bmatrix},$$

der kan omskrives til

$$\bar{M}_{y \cdot nn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial \bar{x}_m} \end{bmatrix} \bar{M}_{x \cdot mm} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_m^*} & \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_m^*} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \bar{x}_m^*} \end{bmatrix}$$

eller, jfr. (14),

$$\bar{M}_{y \cdot nn} = \frac{\partial \bar{y}_n}{\partial \bar{x}_m} \bar{M}_{x \cdot mm} \left(\frac{\partial \bar{y}_n}{\partial \bar{x}_m} \right)^*.$$

Er specielt de m variable $\bar{x}_m$ indbyrdes uafhængige, og har de samme varians $\mathcal{V}\{x\}$, bliver $\bar{M}_{x \cdot mm} = \mathcal{V}\{x\} \bar{E}_{mm}$, og

$$(19) \quad \bar{M}_{y \cdot nn} = \frac{\partial \bar{y}_n}{\partial \bar{x}_m} \left(\frac{\partial \bar{y}_n}{\partial \bar{x}_m} \right)^* \mathcal{V}\{x\}.$$

Eksempel 4. Som praktisk eksempel fra udjævnningsteorien kan betragtes den lineære regressionsanalyse med m uafhængige variable $\bar{x}_m$, for hvilke der foreligger n valgte værdisæt. For hvert af disse forudsættes, at den afhængige variable y er normalfordelt med middelværdien

$$\mathcal{M}\{y \mid \bar{x}_m\} = \alpha + \bar{\beta}_m^*(\bar{x}_m - g\{\bar{x}_m\}),$$

hvor, jfr. (1),

$$g\{\bar{x}_m\} = \begin{bmatrix} g\{x_1\} \\ g\{x_2\} \\ \dots \\ g\{x_m\} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \bar{e}$$

angiver gennemsnittene af henholdsvis $x_1, x_2, \dots, x_m$ over de n værdisæt. Endvidere forudsættes, at variansen af y er den samme for alle $\bar{x}_m$:

$$\mathcal{V}\{y \mid \bar{x}_m\} = \sigma^2.$$

Som skøn for $\mathcal{M}\{y \mid \bar{x}_m\}$ anvendes

$$Y = a + \bar{b}_m^*(\bar{x}_m - g\{\bar{x}_m\}) = a + \bar{b}_m^* \bar{z}_m = a + \bar{z}_m^* \bar{b}_m,$$

hvor $\bar{z}_m = \bar{x}_m - g\{\bar{x}_m\}$. Parametrene, $\{a \ b_1 \ b_2 \dots b_m\} = \{a \ \bar{b}_m\}$, bestemmes således, at summen af kvadraterne på de observerede værdiers afvigelser fra den empiriske regressionsplan bliver minimum. Indføres vektoren¹

¹ Af hensyn til symbolikken i [2] er der her anvendt et stort bogstav med én streg over som symbol for en vektor.

hvor

$$\bar{Y}_n = a\bar{e} + \bar{Z}_{nm}\bar{b}_m,$$

$$\bar{Z}_{nm} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{1 \cdot m}^* \\ \bar{z}_{2 \cdot m}^* \\ \vdots \\ \bar{z}_{n \cdot m}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nm} \end{bmatrix},$$

kan summen af afvigelsernes kvadrater skrives

$$q = (\bar{y}_n - \bar{Y}_n)^*(\bar{y}_n - \bar{Y}_n).$$

For at bestemme ekstremum, der kun kan være et minimum, sættes differentialkvotienterne af q med hensyn til de indgående parametre lig 0. Først bestemmes parameteren a ved differentiation med hensyn til a , jfr. (17):

$$\frac{dq}{da} = \frac{\partial q}{\partial(\bar{y}_n - \bar{Y}_n)} \frac{d(\bar{y}_n - \bar{Y}_n)}{da} = 2(\bar{y}_n - \bar{Y}_n)^*(-\bar{e}) = 0.$$

Idet $\sum_{i=1}^n z_{ri} = 0$, dvs. $\bar{e}^* \bar{Z}_{nm} = \bar{o}_m^*$, omskrives ligningen til

$$\bar{y}_n^* \bar{e} - a \bar{e}^* \bar{e} - \bar{e}^* \bar{Z}_{nm} \bar{b}_m = \bar{y}_n^* \bar{e} - a n = 0,$$

hvoraf man bestemmer

$$a = \frac{\bar{y}_n^* \bar{e}}{n} = g\{y\}.$$

Derefter bestemmes parameteren $\bar{b}_m$ ved differentiation med hensyn til $\bar{b}_m$, jfr. (17):

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{b}_m} = \frac{\partial q}{\partial(\bar{y}_n - \bar{Y}_n)} \frac{\partial(\bar{y}_n - \bar{Y}_n)}{\partial \bar{b}_m} = 2(\bar{y}_n - \bar{Y}_n)^*(-\bar{Z}_{nm}) = \bar{o}_m^*,$$

der omskrives til

$$(\bar{y}_n - g\{y\}\bar{e} - \bar{Z}_{nm}\bar{b}_m)^* \bar{Z}_{nm} = \bar{o}_m^*.$$

Sættes $\bar{u}_n = \bar{y}_n - g\{y\}\bar{e}$, får man ved transponering

$$\bar{Z}_{mn}^* (\bar{u}_n - \bar{Z}_{nm} \bar{b}_m) = \bar{o}_m,$$

hvoraf parameteren $\bar{b}_m$ bestemmes,

$$(20) \quad \bar{b}_m = (\bar{Z}_{mn}^* \bar{Z}_{nm})^{-1} \bar{Z}_{mn}^* \bar{u}_n.$$

De to produkter i dette udtryk er, jfr. [2, side 73 og 86],

$$\bar{Z}_{mn}^* \bar{Z}_{nm} = \begin{bmatrix} SSD_{x_1} & SPD_{x_1 x_2} & \dots & SPD_{x_1 x_m} \\ SPD_{x_2 x_1} & SSD_{x_2} & \dots & SPD_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ SPD_{x_m x_1} & SPD_{x_m x_2} & \dots & SSD_{x_m} \end{bmatrix},$$

der er symmetrisk, og

$$\bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{u}_n = \{SPD_{x_1y} SPD_{x_2y} \dots SPD_{x_my}\}.$$

Variansen på parameteren a er

$$v\{a\} = v\{g\{y\}\} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Indføres $\bar{u}_n = \bar{y}_n - g\{y\}\bar{e}$ i (20), får man, da $\bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{e} = \bar{o}_m$,

$$\bar{b}_m = (\bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{\bar{Z}}_{nm})^{-1} \bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{y}_n.$$

Momentmatricen for parameteren $\bar{b}_m$ bliver derfor ifølge (19)

$$\begin{aligned} \bar{\bar{M}}_{b..mm} &= \frac{\partial \bar{b}_m}{\partial \bar{y}_n} \left(\frac{\partial \bar{b}_m}{\partial \bar{y}_n} \right)^* v\{y\} \\ &= (\bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{\bar{Z}}_{nm})^{-1} \bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{\bar{Z}}_{nm} (\bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{\bar{Z}}_{nm})^{-1} v\{y\} = (\bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{\bar{Z}}_{nm})^{-1} v\{y\}, \end{aligned}$$

og variansen på $Y = a + \bar{b}_m^* (\bar{x}_m - g\{\bar{x}_m\})$ kan, da a og $\bar{b}_m$ er uafhængige, udtrykkes ved, jfr. (18)

$$v\{Y\} = v\{a\} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{b}_m} \bar{\bar{M}}_{b..mm} \frac{\partial Y}{\partial \bar{b}_m^*} = \frac{\sigma^2}{n} + (\bar{x}_m - g\{\bar{x}_m\})^* (\bar{\bar{Z}}_{mn}^* \bar{\bar{Z}}_{nm})^{-1} (\bar{x}_m - g\{\bar{x}_m\}) \sigma^2.$$

LITTERATUR

- [1] H. CRAMÉR: *Mathematical methods of statistics*. Princeton University Press, 1961.
- [2] A. HALD: *Statistical theory with engineering applications*. John Wiley & Sons, New York 1957.

BOKMELDINGER

HARVEY COHN: *A second course in number theory*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 13 + 276 pp. sh. 60/-.

(Innehållsförteckning i NMT 10 (1962), s. 154.)

I matematiska läroböcker är stoffet alltför sällan infogat i sitt historiska och evolutionella sammanhang. Att så är fallet beror väl dels på bristande pedagogisk blick hos författaren, dels på svårigheterna att förena kravet på sådant sammanhang med kravet på systematik. Därför antecknar man med glädje Cohns försök att supplera den algebraiska talteorin med redogörelser för dennas uppkomst och utveckling. Detta sker dock här på bekostnad av systematiken, varför struktureringen av ämnet verkar otillfredsställande och framställningen onödigt rörig. Av företalet framgår att förf. rentav förutsätter korrelation mellan kronologi och svårighetsgrad: en first-semester course *skall* nå fram till 1900-talet, nu i denna kurs skall studenten föras till »the twentieth century by motivating some heroic nineteenth-century developments in algebra and analysis«.

Förutom inledande och avslutande översikter omfattar boken tre delar. I den första, Background material, behandlas talteoretiska, grupp-teoretiska och algebraiska begrepp som kongruens, kvadratisk reciprocitet, restklasser, abelska grupper, representation genom kvadratiske former, kvadratiske talkroppar och heltal. Dessutom upptas bas- och gitter-teori och i ett med två stjärnor markerat avsnitt geometrisk talteori (Minkowski-gitter). Förklaring till de olika stjärnorna har jag inte funnit, de anger troligen en överkurs, omfattande generaliseringar (kroppar av högre grad) eller svårare moment, såsom förekomsten av euklideisk algoritm, »Pells« ekvation, klassnummerformler o. dyl.

Del 2, som ägnas idealteorin för kvadratiske talkroppar, ger en avancerad framställning av entydig upplösning i ideal, av idealklasser och av klasstrukturen i kvadratiske talkroppar. I anslutning härtill ges en förträfflig tabell över sådan struktur för $\sqrt{m}$, $|m| < 100$, tagen ur Sommers *Introduction à la théorie des nombres algébriques* (1911). Tabellen upptar för såväl imaginära som reella kroppar basen $[1, \omega]$, diskriminantens faktorer, idealen och idealklasserna samt genusstrukturen (klass och karaktär). Den är därför värdefull oavsett att texten och uppgifterna ofta hänvisar till den. Del 2 avslutas med de »berömda polynomen« $x^2 + x + q$, $0 \leq x \leq q - 2$,

vilka som bekant för lämpliga q (t. ex. 41, Euler) antar enbart primtalsvärden. Här bevisas att så är fallet, om och endast om $R(\sqrt{1-q})$ har klassnumret 1 — ett vackert resultat.

De vunna resultaten tillämpas sedan i del 3 på de djupgående sambanden mellan primfaktorisering i talkroppar och primtal i aritmetiska serier (Dirichlet), liksom på sambandet mellan kvadratiske former och ideal. I bokens märkliga och märkligt korta (6 sidor!) »introductory survey» ger förf. en snabbskiss just av de här sambanden. Den är elegant, också om valet av de två objekten kanske inte är signifikativt för boken i sin helhet. Avsnittet om kvadratiske former i del 3 omfattar kompletta mängder av formklasser och representationsproblem, bägge genomförda medelst skisserande exempel. Den kvadratiske reciprociteten fördjupas förtjänstfullt och sist kommer ett stjärnat avsnitt Compositions, orders and genera, vilket anknyter till inledningens eleganta demonstration av kompositionsteorem för kvadratiske former. Denna teori utvecklade Gauss 75 år före idealteorin till stor allmängiltighet och med en intuitiv kraft, som anses ha få motstycken.

Cohns text kompletteras med hundratals uppgifter, de flesta av dem enligt min mening alltför krävande för den årskurs det här är fråga om. Likaså kräver texten, om också beskuren på överkursen, rätt mycket av läsaren. Framställningen är svårfattlig och osystematisk med hänvisningar kors och tvärs. Induktionen saknas ofta och upptagna trådar lämnas liggande. Det avslutande registret är bristfälligt: ord som class number, group, Eulers lemma och ideal class saknas.

För övrigt är boken emellertid en utmärkt vägvisare i den algebraiska talteorins labyrint, denna värld av hopplös oregelbundenhet och mystisk regelbundenhet. Talteorins roll av urkälla för algebra och analys är denna boks centrala idé.

Clas-Olof Selenius

BERNHARD EPSTEIN: *Partial differential equations. An introduction.* (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1962. 10 + 273 pp. sh. 74/—.

(Innehållsförteckelse i NMT 10 (1962), s. 155.)

Denne boken skal, i følge forfatterens forord, »help fill a serious need for introductory texts on the graduate level». Det vil den nok også gjøre; men før man går til anskaffelse av boken, bør man merke seg en annen passus fra samme forord: »the stress has been on existence theory rather than on the effective determination of solutions of specific classes of problems». Dette er meget konsekvent gjennomført.

Kapitlet om første ordens ligninger er kort, men godt, bortsett fra at

beviset for satsen om eksistens av en integralflate gjennom en gitt romkurve bare gjelder lokalt, mens denne innskrenkningen ikke fremgår klart av bokens tekst. I neste kapitel er derimot det tilsvarende faktum angående hyperbolske annen ordens ligninger behørig kommentert.

Bokens svakeste del er de to kapitler (vel 60 sider) som brukes til å bygge opp teorien for Banach- og Hilbertrom fra grunnen av og frem til Fredholms alternativ for komplett kontinuerlige operatorer. De virker avgjort malplasererte; resultatene de gir, brukes ikke ofte i de følgende kapitler, og leseren ender med å spekulere over om ikke det hele med fordel kunne vært erstattet med en fremstilling som sto mer i stil med resten av boken.

De to neste kapitlene, om elliptiske ligninger, er imidlertid riktig bra. Det første gir potensialteorien frem til Harnack's satser og de viktigste resultatene om Poissons ligning; i det neste har forfatteren samlet de fem »vanligste» bevisene for eksistens av en løsning av Dirichlet's problem. Dette er både morsomt og instruktivt, men skjer selvsagt på bekostning av annet stoff. Konforme avbildninger og »Riemann mapping theorem» er nokså utførlig behandlet.

Varmeledningsligningen har fått en noe kort, men bra behandling ved Fourier- og Laplace-transformasjoner; og boken avsluttes med et meget instruktivt kapittel om Green's funksjoner, atskillelse av de variable, og egenverdiutviklinger.

Bortsett fra i kapitlene om vektorrom, der det ser ut til at forfatteren har kjedet seg like grundig som leseren antagelig vil gjøre, er stilen klar og inspirerende, og viser utpreget evne til å få frem hovedlinjene i teorien. Dette skjer delvis, og etter min mening litt for ofte, ved at detaljer, både utregninger og enkelte resonnementer, blir »left to the reader as exercise 3». Jeg er heller ikke alltid enig med forfatteren i hans bruk av »obviously», »it is readily seen» osv., men også her kan vel meningene være delte.

En sproglig innvending: at en Cauchyfølge i et normert rom betegnes som »convergent in norm», og så rommet defineres som komplett hvis alle slike følger også er »convergent», virker unødig forvirrende.

Alt i alt synes jeg, tross enkelte innvendinger, at boken er riktig bra, og jeg vil ikke betenke meg på å anbefale den til studenter (og andre) som er interessert i de emner som behandles.

Papir, sats og innbinding er meget tiltalende. *Bent Birkeland*

MORTON HAMERMESH: *Group theory and its application to physical problems*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London; Pergamon Press, London, Paris 1962. 11 + 509 pp. sh. 25/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT 10 (1962), s. 156.)

Gruppeteorien representerer uten tvil en av de mest fruktbare ideer i matematikken. I motsetning til mange andre områder innen matematikken, f. eks. analysen, har gruppeteorien opprinnelig utviklet seg uten impulser fra fysikken, men er likevel blitt et redskap som en fysiker idag må kunne beherske. Dette henger sammen med at det gruppeteorien egentlig behandler er symmetri og invariansegenskaper, begreper som også spiller en fundamental rolle i moderne fysikk. En fysiker vil imidlertid finne at et grundig studium av gruppeteorien er vanskelig, også på grunn av det faktum at den del av læreboklitteraturen som behandler anvendelsene ikke er særlig rikholdig. En ny bok i gruppeteori som særlig har fysikkens behov for øye, vil derfor alltid bli mottatt med stor interesse.

Forfatterens hensikt med denne bok har vært å gjøre gruppeteoretiske metoder til et nyttig redskap istedenfor til et esoterisk studium, uten derved å slå av på kravet til matematisk stringens. Boken gir en grundig fremstilling av de deler av gruppeteorien som er spesielt viktige for fysiske anvendelser, slik som krystallografi, faste stoffers fysikk, atom-, molekylar- og kjernespektroskopi, og elementærpartikkelfysikk.

Forbindelsen mellom gruppeteorien og fysikken består i at egenfunksjonene for en fysikalsk operator, f. eks. Hamiltonoperatoren, danner en basis for en representasjon for den gruppe av transformasjoner av konfigurasjonsrommet til det fysikalske system som lar denne operator invariant. Et av hovedproblemene i denne bok er derfor å vise hvordan man konstruerer representasjoner ut fra fysikalske betraktninger. Et annet hovedproblem er å vise hvordan representasjoner leder til klassifisering av egenfunksjoner, som igjen leder til utvalgsregler av de forskjellige slag. Den sentrale rolle den symmetriske gruppe spiller både i den abstrakte gruppeteori og i anvendelsene, kommer med rette klart frem i forfatterens fremstilling.

Det er en glede å kunne konstatere at det har lyktes forfatteren å skape en bok på et høyt pedagogisk nivå som er av stor betydning for fysikken, og som utvilsomt vil bli meget benyttet som referanseverk. Forfatteren forutsetter kjennskap til kvantemekanikken, men ikke til gruppeteorien. Det vil imidlertid være en stor fordel om grunntrekkene av gruppeteorien var kjent fra mer elementære fremstillinger. Kjennskap til lineær algebra, og en viss ferdighet i algebraiske manipulasjoner er nødvendige for lesning av en bok av denne type.

Alf Lofthus

J. E. HOFMANN: *Frans van Schooten der Jüngere*. Franz Steiner Verlag, Wiesbaden 1962. 54 S. DM 12.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 28.)

Etter de store skapende genier må som regel begeistrede og trofaste mellommenn rydde plass for og hegne om de nye idéer. Ikke alle var så heldige som Leibniz da hans differensialregning festet rot i Basel hos eminente matematikere som brødrene Bernoulli. Til gjengjeld fant Leibniz i samtiden liten eller ingen forståelse for sin matematiske logikk og sine »determinanter«. Englenderen Harriotts koordinatgeometri døde med ham, fordi ingen elev var begavet og energisk nok til å kommentere og utgi hans verk. Derfor ble Descartes' analytiske geometri den rådende. Han hadde formidleren Mersenne som venn og traff tidlig den unge Schooten (1615–60) som seinere gjorde *La Géométrie* lett tilgjengelig for alle matematikere.

Schooten virket direkte som lærer på elever som Hudde og Huygens, og gjennom sine latinske Descartes-utgaver på mange fler, bl. a. på den unge Newton. I Newtons notatbøker kan hans studium av Schooten-Descartes følges så å si side for side. Utenom Descartes bearbeidet Schooten også skrifter av Viète. Schooten døde relativt ung men hadde allerede sett og gledet seg over at det grodde omkring ham. Hans mest begavede elever kom til orde med vektige tillegg til Descartes-utgavene. Schootens mer selvstendige verk *Organica Descriptio* virket også befruktende, på Newton for eksempel, og boken er den dag i dag å anbefale for interesserte gymnasiaster når de skal til med analytisk geometri.

Ingen ringere enn J. E. Hofmann har nå gitt Schooten den biografi han fortjener. De første 25 sider er en lettlest framstilling av Schootens verk og vita. I det rike kritiske apparat i bokens siste halvdel kan en alltid stole på at hver minste detalj er nøyaktig kontrollert. Med sin enestående oversikt over datidens matematiske litteratur kan Hofmann presist angi hvilke idéer opptrer for første gang og hva de antagelig er spiret fram av. Boken har 28 diagrammer til teksten og fire helsides portretter.

Johs. Lohne

MARK KAC: *Statistical independence in probability, analysis and number theory*. (The Carus Mathematical Monographs 12.) John Wiley & Sons, New York 1959. 14 + 93 pp. \$ 3.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 8 (1960), s. 44.)

Forfatteren sier i forordet at hans hovedhensikt med boken er å vise (a) at veldig enkle observasjoner ofte kan være utgangspunkt for rike og fruktbare teorier; (b) at mange tilsynelatende ubeslektede utviklinger i virkeligheten er variasjoner av det samme enkle tema.

Gennomgangstemaet i de fire første kapitlene er den stokastiske uavhengighet. Den statistiske modellen som behandles mest i de tre første kapitlene illustrerer forfatteren ved kast med en mynt. Han får fram sammenhenger med mål og integraler på den reelle tallinjen ved følgende avbildning: Hver av de 2^n mulige sekvenser av krone og mynt i en serie på n kast avbildes ved et intervall av lengde 2^{-n} i intervallet fra 0 til 1. Forfatteren betrakter videre et spill hvor en spiller vinner eller taper en dollar etter som kastet gir krone eller mynt. På avbildningen svarer dette til at vi betrakter de såkalte Rademacher-funksjoner. I kapittel 2 og 3 beviser forfatteren den svake store talls lov, den sterke store talls lov og den sentrale grenseverdisetning for den nevnte statistiske modellen, og i bevisene bruker han Rademacher-funksjoner og Fourier-transformerte.

I kapittel 4 behandles forskjellige sammenhenger mellom sannsynlighetsteori og tallteori. Forfatteren beviser en rekke tallteoretiske setninger angående »tettheter« som er definert som grenseverdier for relative hyppigheter i den naturlige tallrekken, og middelverdier som på tilsvarende måte er definert som grenseverdier. Sannsynlighetsteorien kan ikke anvendes direkte da tetthetene i alminnelighet bare er endelig additive, ikke numererbart additive som det forutsettes at sannsynlighetene er, men en god del av bevisene kan føres i analogi med sannsynlighetsteoretiske beviser.

Boken behandler også forskjellige andre temaer og har mange øvelsesoppgaver. Den er meget pedagogisk skrevet. Deler av boken er meget lettleste. Andre steder er teksten så kortfattet at det er mere anstrengende å arbeide seg gjennom bevisene.

Anmelderen vil til slutt peke på en sammenheng som ikke er omtalt av forfatteren, nemlig sammenhengen mellom det emne som behandles i kapittel 4 og diskusjonene omkring sannsynlighetsregningens grunnlag. Reichenbach og Tornier argumenterte i forskjellige avhandlinger og bøker i 30-årene for at en sannsynlighet bør defineres som grenseverdien for en relativ hyppighet. En av de begrunnelsene Tornier har for denne definisjon er anvendeligheten av sannsynlighetsteorien i tallteorien. Renyi publiserte i 1955 en generalisering av Kolmogorovs aksiomsystem hvor begrepet »betinget sannsynlighet« er det fundamentale begrep. Renyi nevner en rekke anvendelsesområder hvor en trenger denne generalisering, og ett av de områder han nevner er tallteorien.

Olav Reiersøl

MOTTATTE BØKER

Richard Courant — Herbert Robbins: *Was ist Mathematik?* Aus dem Englischen übersetzt. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962. 16 + 399 S., 287 Abb. DM 36.00.

Die natürlichen Zahlen 1–41 * Das Zahlensystem der Mathematik 42–92 * Geometrische Konstruktionen. Die Algebra der Zahlkörper 93–129 * Projektive Geometrie. Axiomatik. Nichteuklidische Geometrien 130–179 * Topologie 180–206 * Funktionen und Grenzwerte 207–250 * Maxima und Minima 251–301 * Die Infinitesimalrechnung 302–372 * Ergänzungen, Probleme und Übungsaufgaben 373–391 * Hinweise auf weiterführende Literatur 392–393 * Namen- und Sachverzeichnis 394–399.

J. E. Hofmann: *Franz van Schooten der Jüngere*. Franz Steiner Verlag, Wiesbaden 1962. 54 S. DM 12.00.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 25–26.)

Aus Leben und Wirken 1–8 * Auswahl aus den mathematischen Schriften 9–25 * Anmerkungen 26–45 * Register 46–54.

Henning E. Jensen — Bent Rasmussen: *Syvende classes regnebog*. Gyl-dendal, København 1962. 194 s. D. kr. 14.75.

Hele tal 5–19 * Decimaltal 20–33 * Brøker 34–54 * Procentregning 55–63 * Rentes-regning 64–70 * Værdipapirer 71–79 * Forholdsregning 80–89 * Delingsregning 90–97 * Fremmed mønt 98–104 * Handelsregning 105–116 * Areal og rumfang 117–131 * Grafisk afbildning 132–134 * A- og B-opgaver 134–159 * Stof til supplerende timer 160–177 * Bogstavregning 178–194.

Erik Kristensen — Ole Rindung: *Matematik I*. G. E. C. Gads Forlag, København 1962. 9 + 341 s. D. kr. 48.50.

Mængder og udsagn 1–23 * Talmængder 24–51 * Vektorer 52–92 * Den rette linies analytiske fremstillinger 93–109 * Afbildninger 110–131 * Reelle funktioner 132–181 * Ligninger og uligheder 182–197 * Ækvivalensrelationer 198–203 * Induktion 204–213 * Hele tal 214–234 * Algebra 235–271 * Praktiske anvendelser af logaritme-funktioner 272–288 * Trigonometriske funktioner 289–318 * Geometriske anven-delser af trigonometriske funktioner 319–334 * Sagregister 335–339 * Symbolliste 340–341.

Erik Kristensen — Ole Rindung: *Opgaver til matematik I*. G. E. C. Gads Forlag, København 1962. 140 s. D. kr. 19.50.

Opgaver til bogens enkelte afsnit 7–111 * Blandede opgaver 111–138 * Appendix 138–140.

Serge Lang: *Diophantine geometry*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 11.) Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1962. 10 + 170 pp. sh. 57/-.

Absolute values 1-18 * Product formula 19-41 * Heights 43-59 * Properties of heights 61-70 * The Mordell-Weil theorem 71-90 * The Thue-Siegel-Roth theorem 91-119 * Siegel's theorem 122-140 * Hilbert's irreducibility theorem 142-162 * Bibliography 163-165 * Table of notation 167 * Index 169-170.

Serge Lang: *Introduction to differentiable manifolds*. Interscience Publ. (John Wiley & Sons), New York, London 1962. 10 + 126 pp. sh. 53/-.

Differential calculus 1-15 * Manifolds 16-33 * Vector bundles 34-52 * Vector fields and differential equations 53-78 * Differential forms 79-89 * The theorem of Frobenius 90-96 * Riemannian metrics 97-111 * The spectral theorem 112-118 * Local coordinates 119-122 * Bibliography 123 * Index 125-126.

Lloyd L. Lowenstein: *Beginning algebra for college students*. Third edition. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 9 + 266 pp. sh. 38/-.

The natural numbers; addition and multiplication 1-22 * Verbal problems 23-28 * Powers and exponents 29-37 * The integers; addition and subtraction 38-63 * The integers; multiplication and division 64-80 * Fractions 81-105 * The rational number system 106-119 * Polynomials 120-143 * Polynomials and the rational operations 144-159 * The real number system 160-176 * Functions and graphs 177-195 * Equations 196-219 * The complex number system 220-228 * The quadratic formula 229-239 * Answers 241-260 * Index 261-266.

Yudell L. Luke: *Integrals of Bessel functions*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1962. 15 + 419 pp. sh. 97/-.

Basic formulas 1-41 * Integrals of the type $\int^z t^\nu W_\nu(t) dt$ 42-72 * Representations of $\int^z t^\nu W_\nu(t) dt$ in terms of Lommel functions 73-94 * $\int^z e^{-t} t^\nu K_\nu(t) dt$ and an associated Bessel function 95-119 * Reduction formulas for $\int^z e^{-\nu t} W_\nu(\lambda t) dt$ 120-126 * Airy functions 127-143 * Incomplete gamma function and related functions 144-194 * Repeated integrals of Bessel functions 195-222 * Integrals involving Struve functions 223-233 * Schwarz functions and generalizations 234-252 * Integrals involving products of Bessel functions and Struve functions 253-270 * Miscellaneous indefinite integrals involving Bessel functions 271-289 * Definite integrals 290-348 * Tables of Bessel functions and integrals of Bessel functions 349-385 * Bibliography 386-403 * Index of notation 404-409 * Author index 410-413 * Subject index 414-419.

Georg Polya: *Mathematik und plausible Schliessen*. Band I: Induktion und Analogie in der Mathematik. Ins Deutsche übersetzt von Lulu Bechtolsheim. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart 1962. 403 S. S.fr. 38.00.

Winke an den Leser 19-20 * Induktion 21-32 * Verallgemeinerung, Spezialisierung, Analogie 33-65 * Induktion in der Geometrie des Raumes 66-99 * Induktion

in der Zahlentheorie 100–122 * Diverse Induktionsbeispiele 123–142 * Eine allgemeinere Formulierung 143–166 * Vollständige Induktion 167–184 * Maxima und Minima 185–214 * Physikalische Mathematik 215–251 * Das isoperimetrische Problem 252–282 * Weitere Arten plausibler Argumente 283–310 * Schlussbemerkung 311 * Lösungen 313–401 * Bibliographie 402–403.

Hans Sagan: *Integral and differential calculus: an intuitive approach*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 13 + 329 pp. sh. 45/-.

Functions 1–72 * Areas 73–160 * Rates 161–252 * Volumes 253–289 * Appendix 291–318 * Answers to even-numbered problem 319–324 * Index 325–329.

Selected numerical methods. Editor: Christian Gram. Regnecentralen, København 1962. 12 + 308 pp. D. kr. 70.00. (Distribueres av Jul. Gjellerup, København.)

Chr. Andersen — T. Krarup, *Linear equations*: Direct methods 1–17 * Iterative methods 17–28.

Chr. Gram — P. Naur — E. Thue Poulsen, *Partial differential equations*: Linear elliptic equations of the second order 30–66 * The heat equation 67–100 * Hyperbolic equations 100–105 * Key. Technical terms 106–113.

Chr. Andersen — S. E. Christiansen — O. Møller — H. Tornehave, *Conformal mapping*: General theory 114–145 * Integral equation methods 145–232 * The application of the Lichtenstein — Gershgorin integral equation 232–245 * Conformal mapping of nearby circular regions onto the unit disc using expansion in powers of a "small parameter" 245–261.

Th. Busk — B. Svejgaard, *Polynomial equations*: Iterative methods 263–281 * Direct methods 282–295.

References 297–305 * Index 306–308.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 236–240 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i Bind 11, hefte 3, være sendt innen 1. august 1963.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

236. Det er gitt tre punkter A , B og C på en rett linje, slik at B ligger midt mellom A og C . Del linjestykket AB i n like store deler med bare linjalkonstruksjoner.

Per Roar Andenæs

237. a) Bestem den mindste trekant af given form »indskrevet« i en given trekant, således at hver af den søgte trekants vinkelspidser ligger på een af den givne trekants sider.

b) Bestem den største trekant af given form »omskrevet« om en given trekant, således at hver af den søgte trekants sider går igennem een af den givne trekants vinkelspidser.

Helge Harboe

238. Låt O vara en punktformig ljuskälla inuti ett speglande klot (medelpunkt C). Visa att alla från O utgående ljusstrålar som ligger på en från C vänd regelbunden kon med en diameter i sfären som axel efter varje reflexion tangera ett och samma klot fullständigt bestämt av O :s avstånd från C och ljuskonens öppningsvinkel.

Torsten Ström

239. Visa att talen k_i^p (Ove J. Munch: Om potensproduktsummer, NMT 7 (1959), s. 14) kan framställas genom

$$k_n^p = \frac{p!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right)^{p+1} e^{-nz} dz,$$

där $c \leq 0$ är godtyckligt. Härled med hjälp härav den asymptotiska formeln i uppgift 174.

Gerhard Arfwedson

240. La p , q og r ($q \neq r$) være naturlige tall. Sett

$$S(p; q, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn+q)(pn+r)},$$

og finn $S(p; q, r)$ uttrykt ved endelige summer. Bruk resultatet til å vise at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(4n+1)} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 3 \ln \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

R. Tambs Lyche

LØSNINGER

228. La $\mathfrak{H}$ bety klassen av alle funksjoner $w(z)$, regulære og med positiv realdel i $|z| < 1$. La videre $\mathfrak{H}_R$ og $\mathfrak{H}_1$ bety de delklasser av $\mathfrak{H}$ som er karakterisert ved at henholdsvis $w(0)$ er reell og at $|w(0)| = 1$.

Bestem i $\mathfrak{H}_R$ og $\mathfrak{H}_1$ best mulige universelle (d. v. s. gyldige i hele $\mathfrak{H}_R$ resp. $\mathfrak{H}_1$) skrankeområder for $w(z)$, uttrykt ved $|z|$.

Haakon Waadeland

Løsning: Genom transformationen

$$w_1(z) = \frac{w(z) - w(0)}{w(z) + \overline{w(0)}}$$

avbildas $\operatorname{Re} w > 0$ på cirkelskivan $|w_1(z)| < 1$ med $w_1(0) = 0$. Schwarz' lemma ger då att $|w_1(z)| \leq |z|$ i $|z| < 1$ d. v. s.

$$\left| \frac{w(z) - w(0)}{w(z) + \overline{w(0)}} \right| \leq |z| \quad \text{i} \quad |z| < 1,$$

vilket ger

$$|w(z)| - |w(0)| \leq |w(z) - w(0)| \leq |z| \cdot |w(z) + \overline{w(0)}| \leq |z| \cdot (|w(z)| + |w(0)|)$$

d. v. s.

$$(1) \quad |w(z)| \leq |w(0)| \cdot \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

I $\mathfrak{H}_1$ är $|w(0)| = 1$ och i $\mathfrak{H}_R$ är $|w(0)| = w(0)$ vilket tillsammans med (1) löser problemet.

Torsten Ström

229. Find summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n+1)}.$$

Per W. Karlsson

Lösning: För $k > 0$ visas enkelt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(kn+1)} = k \left(1 - \int_0^1 \frac{1-x^{k-1}}{1-x^k} dx \right).$$

Abels kontinuitetssats rättfärdigar integrationen. Med $k=4$ fås

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n+1)} = 4 - 3 \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Torsten Ström

Også löst av M. Michael Brady, Åke Kjellström, Lennart Lindskog og Andrzej Mąkowski.

PROBLEMTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Också 1962 har Svenska Matematikersamfundet i samarbete med Svenska Dagbladet arrangerat en stort upplagd tävling med en försöksomgång vid de olika läroverken följt av final i Stockholm. Med vederbörlig tillåtelse publicerar vi härmed uppgifterna i finalomgången.

1. Bestäm alla polynom $f(x)$, sådana att

$$f(2x) = f'(x) \cdot f''(x).$$

2. På en sida i en kvadrat med sidolängden 1 ligger två variabla punkter och på motstående sida en tredje variabel punkt. Punkterna utgör hörn i en triangel. Mellan vilka gränser varierar radien till triangelns omskrivna cirkel?

3. Bestäm alla par (x, y) av heltal x och y som satisfierar ekvationen

$$y^2 - 3xy + x - y = 0.$$

4. Vilka av följande påståenden är sanna? Svaren måste motiveras.

a) Åtminstone ett av påståendena

»linjerna l_1, l_2 och l_3 ligger i ett plan« och »linjerna l_1, l_2 och l_3 är sådana att varje linjepar har en skärningspunkt«

är en följd av det andra. (Linjerna är linjer i rummet.)

b) Det finns ett tal N så att varje heltal $\geq N$ är summan av två fjärdepotenser av heltal.

c) Det finns tal $a_1, a_2, \dots, a_n$ så att

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx > 0$$

för alla x .

5. En regelbunden tetraeder med kantlängden 1 är given. I dess inre ligger en rörlig kub med sidan a . Kuben kan förflyttas inom tetraedern så att *vilken som helst* av dess sidoytor kan fås att vila mot tetraederns basyta. Bestäm något a för vilket detta är möjligt. (Ju större värde på a som bestämmes, desto högre blir poängutdelningen.)

Första pris tilldelades Börje Leander, Kristianstads läroverk. Andra och tredje pris delades mellan Torgny Tholerus, Norrköpings läroverk och Tore Persson, Linköpings tekniska läroverk.

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1962 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 19.2 Bj. Svejgaard: *Den elektroniske regnemaskine GIER.*
12.3 N. E. Nørlund: *Den hypergeometriske differentiaalligning.*
22.3 H. Tornehave: *Om aksiomatisk indførelse af reelle tal.*
26.3 E. Artin, Hamburg: *Jordanalgebren.*
9.4 P. Civin, Oregon: *Algebras associated with a group.*
30.4 C. Halberg, University of California, Riverside: *On linked operators and their spectra.*
16.5 P. Erdős, Budapest: *Problems and results in set theory.*
24.9 R. Kadison, Columbia University: *Certain aspects of operator theory.*
15.10 Chr. Gram: *Elektronregnemaskinens anvendelse til løsning af varmeledningsproblemer.*
5.11 R. Sikorski, Warszawa: *Determinants in Banach spaces.*
19.11 H. Zieschang, Göttingen: *Ebene diskontinuierliche Gruppen.*
6.12 Chr. Gram: *Motiveringen for og udviklingen af det internationale algoritmiske sprog ALGOL.*
10.12 P. Naur: *Analyse af ALGOL tekster og udførelse af de gennem ALGOL definerede processer med automatiske cifferregnemaskiner.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

- 16.10 T. Gutmann Madsen: *Udsagnskalkylen.*
17.10 F. Handest: *Lidt om determinant.*
Endvidere arrangerede foreningen i samarbejde med undervisningsinspektionen og Aarhus Universitet matematiklærerkursus på Jonstrup Statsseminarium 30. juli -10. august.

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 14.2 P. J. Myrberg: *Analyttisistä funktioista, jotka toteuttavat toisen asteen kerto-säännön [Om analytiska funktioner, som uppfylla en multiplikationsregel av andra graden].*
14.3 R. Nevanlinna: *Lukurenkaista ja niiden alueilla määritellyistä funktioista [Om talringar och funktioner med definitionsområden i dessa].*
4.4 B. Maissen, Zürich: *Über Lie-Gruppen mit verallgemeinerten Parameter-räumen.*
19.9 P. J. Myrberg: *Eräs Abelin funktionaalilyhtälön yleistys [En generalisation av en funktionalekvation av Abel].*

- 17.10 M. Tienari: *Kvasikonformitetsvirkens fortsettelse i Jordankaaren* [Fortsättning av en kvasikonform avbildning över en Jordan-båge].
- 6.11 H. Rikonen: *Ilmatorjuntatykin kinetiikasta* [Om luftvärnskanonens kinetik].
- 5.12 P. S. Alexandroff, Moskva: *Einige neuere Resultate aus der allgemeinen Topologie*.
- 12.12 Y. Kilpi, Åbo: *Kvanttimekaniikan vaihtorelaatioista* [Om kvantmekanikens utbytesrelationer].

FINLANDS MATEMATIK-, FYSIK- OCH KEMILÄRARFÖRBUND.

- 25.2 Årsmöte. Diskussion om förslag till nya kurser i fysik och kemi. Demonstrationer i fysik. Föredrag av Y. Juve: *Riktlinjer för en modernisering av matematikundervisningen*.
- 18- Kurs i ekonomisk fostran. Föredrag av matematiskt innehåll:
- 20.6 A. Nyberg: *Inledning till sannolikhetskalkyl och statistik, samt: Hur undervisa statistik i läroverk?*
- M. Kaikkonen: *Om Booles algebra*.
- H. Saarikoski: *Reformkursen i geometri för mellanskolan*.
- U. Kuuskoski: *Samhällsmatematik i mellanskolan*.
- 2- Föreläsnings- och exkursionsdagar i Alavus. Föredrag och demonstrationer
- 5.8 i fysik och kemi. Oberstudiendirektor Hans Heise: *Matematik- och fysikundervisning i Väst-Berlin*.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

- 28.3 A. T. Lonseth, Oregon: *The impact of computers on mathematical education*.
- 9.5 A. T. Lonseth: *Parallel lines*.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 15.1 K. E. Aubert: *Dedekindske ringer og x -idealer*.
- 6.3 N. A. Barricelli: *Utviklingslære og tallmagi*.
- 14.5 A. Magnus, University of Colorado: *Kjedebrøk og rasjonale approksimasjoner av potensrekker*.
- 4.6 O. Njåstad: *Generaliserte uniforme strukturer*.
- 24.8 E. Hewitt, University of Washington: *Some multiplicative linear functionals on the measure algebra of a locally compact abelian group*.
- 25.9 K. E. Aubert: *Noen nye resultater om x -idealer*.
- 23.10 I. Fleischer: *Ikke-arkimediske matematikk*.
- 11.12 E. Alfsen: *Et generelt Radon-Nikodym teorem*.

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

- 20.3 *Matematikken på gymnastlinjene*. Innledning til diskusjon ved S. Hansen, J. Andersen og O. Orheim. (Bergen.)
- 22.3 K. Dahlen: *Nye begreper i vektoralgebra*. (Oslo.)
- 1.4 R. Solvang: *Nytt pensum i matematikk på reallinjen*. (Hamar.)
- 22.9 R. Solvang: *Nye veier i skolematematikken*. (Bodø.)
- 11.10 T. Holm: *Det generelle konvergensbegrep*. (Oslo.)

- 15.11 *Resultatene av forsøkene med matematikk på reallinjen. Innledning til diskusjon ved K. Piene, I. Jahr og O. Ytrehus. (Oslo.)*

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

- 24.3 Möte i Stockholm:
 L. Nystedt: *Fortsättning av polyharmoniska funktioner.*
 H. Brolin: *Undantagsmängder vid iteration av andragradspolynom.*
 K. Haliste: *Uppskattningar av harmoniska mått.*
 A. Persson: *En generalisering av 2-normala rum.*
- 2.6 Möte i Stockholm:
 S. Lyttkens: *Resttermsproblem vid Taubersatser.*
 H. O. Kreiss: *Ett perturbationsproblem vid ett system av partiella differentialekvationer.*
- 24.11 Möte i Stockholm:
 J. Odhnoff: *Existens och entydighet av fria ränder.*
 F. A. Haight, Los Angeles: *The problem of crossing a road.*
 G. Aronsson: *Interpolation med minimal gradient, dvs. hur kan en sandhög se ut?*
 C. Lech: *Noetherska moduler.*
Modernisering av skolans matematikundervisning. Inledning av M. Håstad.
 Diskussion.

FÖRENINGEN I LUND FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG
UNDERSVNING.

- 15.4 Vårmöte:
 L. Sandgren: *Modernisering av matematikundervisningen.*
 I. Leden: *Vilka krav ställer universitet och högskolor på studenternas kemikunskaper?* Redogörelse för en liten enkät.
 O. Lundquist: *Några fysikaliska demonstrationsexperiment.*
- 25.11 Höstmöte:
 B.-A. Lindblad: *Raketer för rymdfart.*
 G. Lindner: *Högenergetiska drivmedel för rymdfärder.*
 E. Ehnmark: *Veckans dagar.*
 O. Eklöf: *Astrofysikkursen på gymnasiet.*
 C. Schalén: *Rymdforskningens betydelse för astronomin.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERSVNING
I STOCKHOLM.

- 3-4.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 10, s. 101.

VÄSTSVENSKA FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG
UNDERSVNING.

- 29.1 O. Rindung: *Den nye danske læseplan i matematik.*
 M. Håstad: *Orientering om den Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen.*
 G. Holmström: *Fysikundervisningen i sammanhållna klasser.*

- 19.11 Årsmöte i Göteborg.
 B. Englund: *Klassisk och modern stereokemi.*
 K. G. Friskopp: *Vad är PSSC-fysik?*
- 20.11 O. Eklöf: *Astrofysik, ett nytt moment i gymnasiets fysikkurs.*
 J. Klein: *Grundskolans kursplan i fysik.*
 A. Elfving: *Grundskolans kursplan i kemi.*

FORENINGSNYTT

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

Vid årsmötet 14.2.1962 valdes styrelse: Ordförande prof. Olli Lehto, viceordf. prof. G. Elfving, skattmästare bitr. prof. O. Tammi, sekr. fil.kand. K. Suominen, medlem docent I. S. Louhivaara.

Årsmötet kallade till föreningens *hedersmedlemmar* kansler P. J. Myrberg, prof. Frithiof Nevanlinna och ledamoten av Finlands Akademi professor Rolf Nevanlinna.

På grund av i utlandet uttalad önskan arrangerade föreningen i anslutning till världskongressen i Stockholm, efter densamma, ett kollokvium över Analys i Helsingfors. Kollokviet hölls den 24–25 augusti 1962 och samlade 73 deltagande matematiker. Vid detsamma hölls 20 föredrag om 45 minuter och 2 om 20 minuter.

NORSK MATEMATISK FÖRENING.

På generalforsamlingen 4.6.1962 ble det besluttet at medlemskontingenten f.o.m. 1963 skal settes til kr. 10 pr. år. Ved samtidig abonnement på NMT betales ialt kr. 20 pr. år. Kontingenten kan betales til foreningens postgirokonto nr. 139 91 eller sammen med abonnementet på NMT til tidsskriftets postgirokonto nr. 164 52.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING I STOCKHOLM

höll årsmöte i samband med skolveckan 2–5 januari 1963, anordnad med anledning av Läroverkslärarnas Riksförbunds 50-årsjubileum. Till föreningens ordförande resp. vice ordförande omvaldes lektor Ernst Knave och rektor Walter Ekman samt till sekreterare resp. kassaförvaltare adjunkterna Jan O. Unenge och Jacob Isander.

Under årsmötet hölls följande föredrag och demonstrationer:

- G. Nilheden: *Poängbedömningar av skrivningar i fysik.*
 T. R. Gerholm: *Fysikkurserna på det nya gymnasiet.* Diskussion.
 S. Hilding: *Hur kan matematikundervisningen moderniseras?* Diskussion.
 S. Andersson: *Undervisningsexperiment i kemi.*
 U. Sinnerstad: *Astrofysikkursen på gymnasiet.*
 I. Lindqvist: *Kemiundervisningen på gymnasiet.*

FORENINGENES FORMENN

Nedenfor angis navn og adresse til formennene i de utgivende foreninger:

Dansk matematisk forening: Professor Hans Tornehave, Tornebakken 45, Virum.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark:
 Lektor Henrik Meyer, Bakkedraget 15, Birkerød.

Finlands matematiska förening: Professor Olli Lehto, Ådvägen 13 A 9, Helsingfors — Drumsö.

Finlands matematik-, fysik- och kemilärarförbund: Dr. Urpo Kuuskoski, Linnankoskenkatu 12 A, Helsinki.

Íslenska stærðfræðafélagið: Professor Steingrímur Baldursson, Glaðheimar 18, Reykjavík.

Norsk matematisk forening: Professor Karl Egil Aubert, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

Norsk lektorlags matematikkseksjon, Oslo krets: Lektor Torjus I. Engelskjøn, Nadderud h. skole, Bekkestua.

Svenska matematikersamfundet: Professor Åke Pleijel, Matematiska institutionen, Sölvegatan 14, Lund.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning: Rektor Johan Hemmingsson, Kronborgsvägen 8 B, Malmö V.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm: Lektor Ernst Knave, Näckrosvägen 14, Solna.

Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning: Rektor Arne Pleijel, Hjortmossegatan 160, Trollhättan.

UTNEVNELSER

Til professor i statistikk ved Københavns Universitet: Lektor, dr. phil. G. Rasch.

Til professor i matematisk statistikk og operationsanalyse ved Danmarks tekniske Højskole: Lektor, dr. phil. Arne Jensen.

Til professor i teoretisk statistikk ved Handelshøjskolen i København: Amanuensis, lektor E. Lykke Jensen.

Til professor i tillämpad matematik vid Åbo Akademi: Lektor, docent Bertil Qvist.

Til professor i tillämpad matematik vid Tekniska Högskolan i Helsingfors: Biträdande professor Olli Lokki.

Til professor i matematik vid Tekniska Högskolan i Helsingfors: Professor Pentti Laasonen.

Til professor ved Verkfræðideild Háskóla Íslands: Loftur Þorsteinsson verkfræðingur.

Til professor i anvendt matematikk ved Universitetet i Oslo: Professor, dr. philos. Enok Palm.

Til professor i anvendt matematikk ved Universitetet i Bergen: Dosent, dr. philos. Sigve Tjøtta.

Til professor i matematik vid Uppsala Universitet: Laborator, Fil. dr. Yngve Domar.

Til laborator i tillämpad matematik vid Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg: Fil. dr. Vidar Thomée.

MÆNGDELÆRE OG TRANSFINITE KARDINALTAL

Det er inngått en avtale mellom NMT og Universitetsforlaget, Oslo, om at forlaget skal utgi i bokform den artikkelserie av Heiede og Helms som under ovenstående tittel ble publisert i NMT, bind 10, 1962. Artiklene vil bli supplert med en oppgavesamling, og boken (som utgis i serien Scandinavian University Books) vil foreligge i 1963.

SUMMARY IN ENGLISH

P. ERDÖS: *On a combinatorial problem.* (English.)

A family $\mathfrak{F}$ of sets is said to possess property B if there exists a set B such that $F \cap B \neq \emptyset$ and $F \not\subset B$ for every $F \in \mathfrak{F}$. The main result of the paper (Th. 1 p. 6) concerns conditions for property B when $\mathfrak{F}$ is a finite family of finite sets. The results are generalized to infinite families in Th. 2 p. 9.

HELGE TVERBERG: *A theorem on multilinear polynomials.* (Norwegian.)

Let two multilinear polynomials $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ and $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vanish for exactly the same n -tuples $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. It is then shown that $P = cQ$, where $c \neq 0$ is a constant. As an application, a very simple proof of the multiplication rule for determinants is given.

PETER KIERKEGAARD-HANSEN: *The application of matrix symbolism in differential calculus.* (Danish.)

When it is wanted to differentiate functions with respect to several variables, application of matrix symbolism can be useful. For this purpose, the author introduces the symbols (9) and (11) p. 15, and the Jacobian matrix notation p. 16. (Vectors and matrices are denoted by one and two bars, respectively.) Applications are made to problems of statistics, in particular to linear regression in several variables.