

MÆNGDELÆRE OG TRANSFINITE KARDINALTAL, III¹

TORKIL HEIEDE og HANS JØRGEN HELMS

19. Kardinaltallet $\aleph_0$. Til udregning af summer og produkter af kardinaltal kan man dels benytte definitionerne, altså bestemme kardinaltal af forenings- og produktmængder af passende valgte mængder, dels udnytte allerede beviste sum- og produktformler, det sidste ofte med fordel i forbindelse med ulighedsregning, altså ved hjælp af kardinaltallenes ordning.

Vi betragter i denne paragraf summer og produkter, der har med kardinaltallet $\aleph_0$ at gøre, og beviser til indledning:

$$(19.1) \quad n + \aleph_0 = \aleph_0 \text{ for ethvert endeligt kardinaltal } n.$$

Beviset forløber således: Vi sætter

$$A = \{1, 2, \dots, n\}, \quad B = \{n+1, n+2, \dots\},$$

og har da $\text{card} A = n$, $\text{card} B = \aleph_0$, $A \cap B = \emptyset$ og dermed

$$n + \aleph_0 = \text{card}(A \cup B) = \text{card} \aleph = \aleph_0.$$

På lignende måde viser vi:

$$(19.2) \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0;$$

idet vi sætter

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, \dots\},$$

får vi nemlig $A \cap B = \emptyset$ og $A \cup B = \aleph$.

Formlerne (19.1) og (19.2) er begge indeholdt i

$$(19.3) \quad \mathfrak{k} + \mathfrak{l} = \mathfrak{l}, \text{ hvis } \mathfrak{k} \leq \aleph_0 \text{ og } \mathfrak{l} \geq \aleph_0,$$

der bevises således: Lad A og B være mængder med $\text{card} A = \mathfrak{k}$, $\text{card} B = \mathfrak{l}$ og $A \cap B = \emptyset$. Ifølge sætning 15.iv har B en numerabel delmængde C ; vi sætter $B \setminus C = D$ og har da

$$B = C \cup D, \quad C \cap D = \emptyset, \quad \text{card} C = \aleph_0$$

og dermed $\mathfrak{l} = \aleph_0 + \text{card} D$. Deraf får vi nu:

¹ Første og anden del stod i NMT, denne årgang, s. 11-51 og 108-136.

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{l} = \mathfrak{k} + (\mathfrak{n}_0 + \text{card } D) = (\mathfrak{k} + \mathfrak{n}_0) + \text{card } D = \mathfrak{n}_0 + \text{card } D = \mathfrak{l},$$

idet vi benytter, at $\mathfrak{k} + \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_0$ ifølge (19.1) eller (19.2).

Ifølge (17.11) kan (19.2) også skrives således:

$$(19.4) \quad \mathfrak{n}_0 \cdot 2 = \mathfrak{n}_0.$$

Videre får vi

$$(19.5) \quad \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_0,$$

idet vi anvender (19.2) to gange:

$$\mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_0 = (\mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_0) + \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_0;$$

og ifølge (17.11) kan (19.5) også skrives således:

$$(19.6) \quad \mathfrak{n}_0 \cdot 3 = \mathfrak{n}_0.$$

Ved induktion generaliseres (19.2) og (19.5) til

$$(19.7) \quad \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_0 + \dots + \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_0,$$

gældende for en endelig sum af n addender, og dette omskrives ved (17.11) til

$$(19.8) \quad \mathfrak{n}_0 \cdot n = \mathfrak{n}_0,$$

gældende for ethvert endeligt kardinaltal $n \geq 1$ (idet man får $n=1$ med ved hjælp af (17.3)).

Rigtigheden af følgende sætning er en umiddelbar konsekvens af de beviste formler i det tilfælde, at de i sætningen betragtede mængder er parvis disjunkte:

SÆTNING 19.1. *Foreningsmængden af mængderne i et endeligt system af højst numerable mængder er numerabel, hvis mindst én af mængderne er det.*

Hvis de betragtede mængder ikke vides at være parvis disjunkte, knytter vi til enhver af de givne mængder A_k , $k \in K$, en med den (ifølge (11.1)) ækvivalent mængde, nemlig produktmængden $A_k^* = A_k \times \{k\}$. Mængderne A_k^* er parvis disjunkte, og der findes en enetydig afbildning af $\bigcup_{k \in K} A_k$ ind i $\bigcup_{k \in K} A_k^*$, nemlig f. ex. en, der til ethvert element $a \in \bigcup_{k \in K} A_k$ knytter et af de elementer $(a, k) \in \bigcup_{k \in K} A_k^*$, for hvilke det gælder, at $a \in A_k$ (der findes til ethvert a mindst ét sådant element (a, k)). Vi har da:

$$\text{card} \bigcup_{k \in K} A_k \leq \text{card} \bigcup_{k \in K} A_k^* = \sum_{k \in K} \text{card } A_k^* \leq \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_0 + \dots + \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_0,$$

og vi har vurderet foreningsmængdens kardinaltal opad. En vurdering nedad får vi således: Lad A_1 være den (eller en af de) numerable blandt

mængderne A_k ; af $\bigcup_{k \in K} A_k \supseteq A_1$ følger det da, at

$$\text{card} \bigcup_{k \in K} A_k \geq \text{card} A_1 = \aleph_0,$$

og dermed er sætningen bevist.

Formlerne (19.3) og (19.8) giver os sætningerne:

SÆTNING 19.II. *Foreningsmængden af en uendelig mængde og en højst numerabel mængde er ækvivalent med den førstnævnte.*

SÆTNING 19.III. *Produktmængden af en numerabel og en endelig mængde er numerabel.*

Rigtigheden af sætning 19.II fremgår i det tilfælde, at de betragtede mængder B og A ikke vides at være disjunkte, af følgende bemærkning: Mængderne B og $A \setminus B$ er disjunkte, $A \setminus B$ er som delmængde af A højst numerabel, og $B \cup (A \setminus B) = B \cup A$.

For et numerabelt system af endelige kardinaltal n_k gælder formen

$$(19.9) \quad \sum_{k \in K} n_k = \aleph_0.$$

Ifølge additionens kommutative lov s. 132 kan vi nøjes med at betragte specialtilfældet $K = \mathfrak{N}$, i hvilket formen ifølge (17.14) kan skrives:

$$(19.10) \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k + \dots = \aleph_0,$$

og vi behøver da blot at bemærke, at mængderne

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, \dots, n_1\}, \\ A_2 &= \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2\}, \\ A_3 &= \{n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

er parvis disjunkte og har foreningsmængden $\mathfrak{N}$.

Som eksempler til (19.10) nævner vi

$$(19.11) \quad 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \aleph_0,$$

$$(19.12) \quad 2 + 2 + \dots + 2 + \dots = \aleph_0,$$

og almindeligt (for et vilkårligt endeligt kardinaltal $n \geq 1$)

$$(19.13) \quad n + n + \dots + n + \dots = \aleph_0.$$

Da venstresiderne ifølge (17.11) også kan skrives $1 \cdot \aleph_0$, $2 \cdot \aleph_0$ og almindeligt $n \cdot \aleph_0$, kunne disse resultater også fås af (19.8) og multiplikationens kommutative lov s. 130.

Lad os også nævne eksemplet

$$(19.14) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = \aleph_0.$$

Af (19.9) får man:

SÆTNING 19.IV. *Foreningsmængden af mængderne i et numerabelt system af endelige mængder er højst numerabel.*

Sætningen følger umiddelbart af formlen i det tilfælde, at de betragtede mængder er parvis disjunkte, og man kan i så fald endog hævde, at foreningsmængden er numerabel. Hvis mængderne ikke vides at være parvis disjunkte, går man frem på lignende måde som i beviset for sætning 19.I. At foreningsmængden ikke behøver at være numerabel, ser man af det eksempel, at alle mængderne er den samme endelige mængde.

Hvis det om et numerabelt system af kardinaltal m_k , $k \in K$, gælder, at $m_k \leq \aleph_0$ for ethvert $k \in K$, og at $m_k = \aleph_0$ for mindst ét $k \in K$, så er

$$(19.15) \quad \sum_{k \in K} m_k = \aleph_0.$$

Ved ulighedsregning ser man, at det er nok at bevise formelen i det tilfælde, at $m_k = \aleph_0$ for ethvert $k \in K$, og ifølge additionens kommutative lov s. 132 kan man nøjes med at betragte specialtilfældet $K = \mathfrak{N}$, i hvilket formelen ifølge (17.14) kan skrives:

$$(19.16) \quad \aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0 + \dots = \aleph_0.$$

Et par andre skrivemåder er:

$$(19.17) \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

$$(19.18) \quad \aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Beviset for (19.16) kan føres således: Mængderne

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ 1, 3, 6, 10, 15, \dots \}, \\ A_2 &= \{ 2, 5, 9, 14, 20, \dots \}, \\ A_3 &= \{ 4, 8, 13, 19, 26, \dots \}, \\ A_4 &= \{ 7, 12, 18, 25, 33, \dots \}, \\ A_5 &= \{ 11, 17, 24, 32, 41, \dots \}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

der er valgt ved en anvendelse af Cantors første diagonalmetode (se s. 47 og s. 49), er numerable og parvis disjunkte, og de har foreningsmængden $\mathfrak{N}$.

Af (19.15) får man følgende udvidelse af sætning 19.I:

SÆTNING 19.V. *Foreningsmængden af mængderne i et højest numerabelt system af højest numerable mængder er numerabel, hvis mindst én af mængderne er det.*

Det tilfælde, at de betragtede mængder ikke vides at være parvis disjunkte, kræver igen en særlig overvejelse analog med den i beviset for sætning 19.I gennemførte. Det bemærkes, at sætningen også kan bevises direkte ved hjælp af Cantors første diagonalmetode.

Formlerne (19.17) og (19.18) giver sætningerne:

SÆTNING 19.VI. *Produktmængden af to numerable mængder er numerabel.*

SÆTNING 19.VII. *Mængden af afbildninger af en mængde bestående af to elementer ind i en numerabel mængde er numerabel.*

F. ex. er mængden af alle par af hele eller rationale tal (altså også mængden af alle de intervaller på en abscisseakse, hvis endepunkter har hele eller rationale abscisser) numerabel, og det samme gælder mængden af alle punkter med hele eller rationale koordinater i planen.

Ved hjælp af (19.11) og sætning 17.II giver (19.16) os et nyt bevis for (19.14): For ethvert endeligt kardinaltal $n > 0$ har vi $1 \leq n < \aleph_0$ og dermed

$$\begin{aligned}\aleph_0 &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \leq 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots \\ &\leq \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0 + \dots = \aleph_0.\end{aligned}$$

Vi møder her et eksempel af den i kommentaren til sætning 17.II omtalte art: Selv om $n < \aleph_0$ for ethvert n , så er $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ alligevel lig med $\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0 + \dots$.

Videre får vi, idet vi anvender (19.17) to gange:

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = (\aleph_0 \cdot \aleph_0) \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

altså

$$(19.19) \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

og dette kan også udtrykkes således:

$$(19.20) \quad \aleph_0^3 = \aleph_0.$$

Ved induktion generaliseres (19.17) og (19.19) til

$$(19.21) \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

gældende for et endeligt produkt af n faktorer, og dette kan også udtrykkes således:

$$(19.22) \quad \aleph_0^n = \aleph_0,$$

gældende for ethvert endeligt kardinaltal $n \geq 1$ (idet man får $n = 1$ med ved hjælp af (18.3)).

Af (19.21) og (19.22) aflæses sætningerne:

SÆTNING 19.VIII. *Produktmængden af mængderne i et endeligt system af højst numerable mængder er numerabel, hvis mindst én af mængderne er det.*

SÆTNING 19.IX. *Mængden af afbildninger af en endelig mængde ind i en numerabel mængde er numerabel.*

F. ex. er mængden af alle n -sæt af hele eller rationale tal numerabel, og det samme gælder mængden af alle punkter med hele eller rationale koordinater i det n -dimensionale euklidiske talrum.

Lad os give endnu et eksempel: En cykelås med et endeligt antal (≥ 1) taster, der hver kan indstilles på $\aleph_0$ måder, kan indstilles på ialt $\aleph_0$ forskellige måder.

20. Kardinaltalsbestemmelse for et par talmængder. Som tidligere nævnt (s. 122) er følgende sætning en konsekvens af et s. 49 gennemført ræsonnement:

SÆTNING 20.I. *Mængden $\mathbb{Q}$ af de rationale tal er numerabel.*

Vi vil ved hjælp af det i 19 udviklede give endnu et bevis for denne sætning. At et tal er rationalt, er ensbetydende med, at det er rod i et polynomium $P(x)$ af første grad med hele koefficienter:

$$P(x) = h_1x + h_0, \quad h_0, h_1 \in \mathfrak{J}, \quad h_1 \neq 0.$$

Mængden M af sådanne polynomier er åbenbart ækvivalent med mængden af talpar $(h_0, h_1) \in \mathfrak{J} \times (\mathfrak{J} \setminus \{0\})$, og derfor er

$$\text{card } M = \text{card } \mathfrak{J} \cdot \text{card } (\mathfrak{J} \setminus \{0\}) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Hvert sådant polynomium har netop én rod, men denne kan godt være rod i andre polynomier også; derfor er $\text{card } \mathbb{Q} \leq \text{card } M = \aleph_0$. På den anden side fås det af $\mathbb{Q} \supset \mathfrak{J}$, at $\text{card } \mathbb{Q} \geq \text{card } \mathfrak{J} = \aleph_0$, og alt i alt har man da $\text{card } \mathbb{Q} = \aleph_0$.

Ved en tilsvarende fremgangsmåde skal vi nu bevise denne sætning af Cantor:

SÆTNING 20.II. *Mængden $\mathfrak{A}$ af de algebraiske tal er numerabel.*

Et (reelt) algebraisk tal er et reelt tal, der er rod i et polynomium $P(x)$ af mindst første grad med hele koefficienter:

$$P(x) = h_nx^n + h_{n-1}x^{n-1} + \dots + h_1x + h_0, \quad h_0, h_1, \dots, h_{n-1}, h_n \in \mathfrak{J}, \quad h_n \neq 0;$$

et rationalt tal er altså et meget specielt algebraisk tal. Mængden M_n af sådanne polynomier af en bestemt grad n er åbenbart ækvivalent med

mængden af n -talsæt $(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}, h_n) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{S} \times (\mathfrak{S} \setminus \{0\})$, og derfor er

$$\text{card } M_n = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^{n+1} = \aleph_0.$$

Hvert sådant polynomium af n 'te grad har højst n rødder, og nogle af (eller alle) disse kan godt være rødder i andre polynomier også; derfor gælder det om mængden $\mathfrak{A}_n$ af de tal, der er rødder i sådanne polynomier af n 'te grad, at

$$\text{card } \mathfrak{A}_n \leq \text{card } M_n \cdot n = \aleph_0 \cdot n = \aleph_0.$$

Mængderne $\mathfrak{A}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) er ikke nødvendigvis disjunkte, men af $\mathfrak{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ får man dog

$$\text{card } \mathfrak{A} = \text{card } \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{card } \mathfrak{A}_n \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

På den anden side fås det af $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{S}$, at

$$\text{card } \mathfrak{A} \geq \text{card } \mathfrak{S} = \aleph_0,$$

og alt i alt har man da $\text{card } \mathfrak{A} = \aleph_0$.

Sætningerne 20.I og 20.II giver umiddelbart, at man i eksemplerne til sætningerne 19.VI–IX kan erstatte de hele eller rationale tal med de algebraiske tal.

Man kunne ved betragtning af resultaterne i denne og den foregående paragraf fristes til at tro, at enhver uendelig mængde er numerabel, altså at der ikke findes andre transfinite kardinaltal end $\aleph_0$. Hvis dette var rigtigt, ville størstedelen af det i paragrafferne 11–20 udviklede være helt trivielt. I næste paragraf skal vi imidlertid se, at der findes uendelige mængder, som ikke er numerable, og dermed transfinite kardinaltal, som er større end $\aleph_0$. I den følgende paragraf skal vi endog se, at der findes uendeligt mange transfinite kardinaltal.

21. Kardinaltallet $\aleph$. Vi skal bevise følgende sætning af Cantor (1873):

SÆTNING 21.I. *Der findes kardinaltal større end $\aleph_0$.*

Cantor viste rigtigheden af denne sætning ved at bevise:

SÆTNING 21.II. *Om mængden $\Re$ af reelle tal gælder det, at*

$$\text{card } \Re > \aleph_0.$$

Ifølge sætning 16.VIII kan vi bevise denne sætning ved at angive en delmængde M af $\Re$, der opfylder $\text{card } M > \aleph_0$, og det gør vi nu på følgende måde:

Enhver uendelig decimalbrøk fremstiller et entydigt bestemt, positivt, reelt tal. Der findes reelle tal (nemlig visse rationale tal), som frem-

stilles af to forskellige, uendelige decimalbrøker; men vor mængde M vil ikke komme til at indeholde sådanne tal, idet vi bestemmer M som mængden af de reelle tal, hvis uendelige decimalbrøksfremstilling har et 0 foran kommaet og ellers udelukkende består af cifrene 6 og 7. Det er klart, at M er uendelig; vi skal i det følgende vise, at M ikke er numerabel. Hertil betragter vi en helt vilkårlig følge af forskellige elementer af M . Hvis vi kan angive blot et enkelt element af M , der umuligt kan forekomme i den betragtede følge, er målet nået, thi i så fald er det klart, at ingen følge kan indeholde ethvert element af M .

Vi skaffer os decimalbrøksfremstillingen af et sådant element ud fra decimalbrøksfremstillingerne af elementerne i følgen ved hjælp af følgende konstruktion: Foran kommaet anbringer vi et 0; hvis den første decimal i decimalbrøksfremstillingen af det første tal i følgen er 6, henholdsvis 7, vælger vi som første decimal i decimalbrøksfremstillingen af vort tal 7, henholdsvis 6; derved sikrer vi os, at vort tal bliver forskelligt fra det første tal i følgen. På samme måde sikrer vi os ved valget af den anden decimal, at vort tal bliver forskelligt fra det andet tal i følgen, og således videre: som n 'te decimal i decimalbrøksfremstillingen af vort tal vælger vi 6, henholdsvis 7, efter som den n 'te decimal i decimalbrøksfremstillingen af det n 'te tal i følgen er 7, henholdsvis 6, og opnår derved, at vort tal bliver forskelligt fra det n 'te tal i følgen.

Det er klart, at det herved bestemte tal tilhører M , men ikke findes i følgen.

Den anvendte fremgangsmåde kaldes Cantors anden diagonalmetode: opskriver man den pågældende følge af decimalbrøker som en »lodret« følge, begyndende foroven, kan man konstruere den ønskede decimalbrøk ved at læse ned ad det fremkomne skemas hoveddiagonal (fra øverste venstre hjørne). Hvis decimalbrøksfølgen eksempelvis ser således ud:

```

0, 7 6 6 6 7 7 ...
0, 6 7 7 6 7 6 ...
0, 7 7 6 6 7 7 ...
0, 6 7 6 7 7 6 ...
0, 6 6 6 7 6 7 ...
0, 7 7 6 7 6 6 ...
.....
.....
.....,

```

vil tallet med decimalbrøksfremstillingen 0,667677... ikke forekomme i talfølgen.

På grund af den fundamentale betydning af sætning 21.II vil vi be-

lyse den nærmere ved at give endnu et bevis for den, nemlig Cantors oprindelige. Lad os betragte en helt vilkårlig følge $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ af reelle tal. Hvis vi kan bevise, at der findes blot et enkelt reelt tal, som umuligt kan forekomme i følgen, er sætningen bevist, thi i så fald er det klart, at ingen følge kan indeholde ethvert reelt tal. Lad nu I_1 være et lukket interval, der ikke indeholder a_1 , og I_2 et lukket delinterval af I_1 , der ikke indeholder a_2 , og således videre: for ethvert naturligt tal n er I_{n+1} et lukket delinterval af I_n , der ikke indeholder a_{n+1} . Fællesmængden af disse intervaller er ifølge en kendt sætning om reelle tal ikke tom, og det ses, at ethvert element af den er et reelt tal, som ikke findes i den betragtede følge $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Som standardbetegnelse for $\text{card}\aleph$ indførte Cantor bogstavet $\aleph$ (vi nævner, at man også møder betegnelsen c), og sætning 21.11 giver os altså formelen:

$$\aleph > \aleph_0.$$

På grund af transitiviteten af kardinaltallenes ordning får man straks, at $\aleph > n$ for ethvert endeligt kardinaltal n , og af (19.3) aflæses det, at

$$(21.1) \quad n + \aleph = \aleph_0 + \aleph = \aleph.$$

Vi nævner to særligt bemærkelsesværdige delmængder af $\aleph$, der begge har kardinaltallet $\aleph$, eller som man også siger: har *kontinuets mægtighed*. Mængden $\aleph \setminus \aleph_0$ af irrationale tal er klart uendelig, og ifølge (19.3) gælder det dermed, at

$$\aleph_0 + \text{card}(\aleph \setminus \aleph_0) = \text{card}(\aleph \setminus \aleph_0),$$

og af

$$\text{card}\aleph = \text{card}(\aleph_0 \cup (\aleph \setminus \aleph_0)) = \text{card}\aleph_0 + \text{card}(\aleph \setminus \aleph_0) = \aleph_0 + \text{card}(\aleph \setminus \aleph_0)$$

fås da

$$\text{card}(\aleph \setminus \aleph_0) = \aleph.$$

På tilsvarende måde fås det om mængden $\aleph \setminus \aleph_1$ af (reelle) transcendentet tal, at

$$(21.2) \quad \text{card}(\aleph \setminus \aleph_1) = \aleph.^1$$

Vi har altså bevist:

¹ Existensen af transcendentet tal sikredes i 1851 af Liouville; resultatet (21.2), der skyldes Cantor (1874), siger, at de fleste reelle tal er transcendentet. Det er værd at bemærke, at det kan være en endog særdeles vanskelig opgave at afgøre, om et forelagt reelt tal er algebraisk eller transcendent. Hermite viste i 1873–1874, at e er transcendent, og i 1882 viste Lindemann, at π er transcendent (og gjorde dermed en ende på det gamle spørgsmål om cirkelns kvadratur). Senere er det vist, at e^π er transcendent, mens det stadig ikke vides, om f. ex. 2^π og π^π er det.

SÆTNING 21.III. *Mængden af irrationale tal og mængden af (reelle) transcendentale tal er begge ækvivalente med mængden af reelle tal.*

I tilknytning til disse resultater beviser vi en sætning, der givet et slående indtryk af, hvor lidt de rationale (eller de algebraiske) tal »fylder« blandt de reelle tal.

SÆTNING 21.IV. *Til ethvert selv nok så lille, positivt tal ε er det muligt at bestemme en følge af intervaller, så at ethvert rationalt (eller algebraisk) tal tilhører mindst ét af disse intervaller og intervallerne samlede længde er ε .*

Beviset forløber således: De rationale (eller algebraiske) tal kan opstilles i en følge $(r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$. Med r_1 som midtpunkt lægger vi nu et interval af længden $\frac{\varepsilon}{2}$, med r_2 som midtpunkt lægger vi et interval af længden $\frac{\varepsilon}{4}$ og så videre: med r_n som midtpunkt lægger vi et interval af længden $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Ethvert rationalt (eller algebraisk) tal tilhører så i hvert fald »sit eget« interval, og intervallerne samlede længde er $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \dots = \varepsilon$ ifølge en elementær sætning om kvotientrækker.

Ifølge s. 110 er et vilkårligt åbent interval ækvivalent med hele $\aleph$, og det samme må da ifølge (21.1) gælde for et vilkårligt halvåbent eller lukket interval. Af

$$\{x \mid 0 \leq x < 1\} \cup \{x \mid 1 \leq x < 2\} = \{x \mid 0 \leq x < 2\}$$

får vi da

$$\aleph + \aleph = \aleph,$$

der ifølge (17.11) også kan skrives

$$\aleph \cdot 2 = \aleph.$$

Heraf får vi ved at gå frem nøjagtigt, som da vi ud fra (19.2) beviste (19.5) og (19.6):

$$\aleph + \aleph + \aleph = \aleph \cdot 3 = \aleph.$$

Ved induktion får vi videre

$$(21.3) \quad \aleph + \aleph + \dots + \aleph = \aleph,$$

gældende for en endelig sum af n addender, og dermed

$$\aleph \cdot n = \aleph,$$

gældende for ethvert endeligt kardinaltal $n \geq 1$.

Iøvrigt følger (21.3) også direkte af

$$\bigcup_{k=1}^n \{x \mid k-1 \leq x < k\} = \{x \mid 0 \leq x < n\},$$

og på samme måde får vi af

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid k-1 \leq x < k\} = \{x \mid 0 \leq x\},$$

idet $\{x \mid 0 \leq x\}$ ifølge s. 110 og (21.1) også er ækvivalent med $\aleph$, at

$$\aleph + \aleph + \dots + \aleph + \dots = \aleph,$$

eller ifølge (17.11):

$$(21.4) \quad \aleph \cdot \aleph_0 = \aleph.$$

Af de beviste formler får man de følgende tre sætninger, idet man for den sidstes vedkommende tillige benytter multiplikationens kommutativitet:

SÆTNING 21.V. *Foreningsmængden af mængderne i et højest numerabelt system af mængder, der højest har kontinuets mægtighed, har kontinuets mægtighed, hvis mindst én af mængderne har det.*

SÆTNING 21.VI. *Produktmængden af en mængde af kontinuets mægtighed og en højest numerabel mængde har kontinuets mægtighed.*

SÆTNING 21.VII. *Foreningsmængden af mængderne i et system af kontinuets mægtighed af højest numerable mængder har højest kontinuets mægtighed.*

Ligesom tidligere må man gennemføre en supplerende overvejelse for at sikre gyldigheden af sætningerne 21.v og 21.vii i det tilfælde, at de betragtede mængder ikke vides at være parvis disjunkte. Er mængderne parvis disjunkte, kan man i sætning 21.vii udelade det sidste »højest«.

Hvis det om et system af kontinuets mægtighed af kardinaltal m_k , $k \in K$, gælder, at $m_k \leq \aleph$ for ethvert $k \in K$, og at $m_k = \aleph$ for mindst ét $k \in K$, så er

$$(21.5) \quad \sum_{k \in K} m_k = \aleph.$$

Ved ulighedsregning ser man, at det er nok at bevise formelen i det tilfælde, at $m_k = \aleph$ for ethvert $k \in K$. Vi skal altså vise:

$$(21.6) \quad \aleph \cdot \aleph = \aleph$$

eller anderledes udtrykt:

$$(21.7) \quad \aleph^2 = \aleph.$$

Man kan bevise disse formler ved at etablere en enentydig afbildning af intervallet $A = \{t \mid 0 < t \leq 1\}$ på talparmængden $B = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$, idet jo $\text{card } A = \aleph$ og $\text{card } B = \aleph \cdot \aleph$ (se fig. 23). Cantor gennemførte i 1878 dette ved hjælp af kædebrøker; hans første bevis (1877), i hvilket

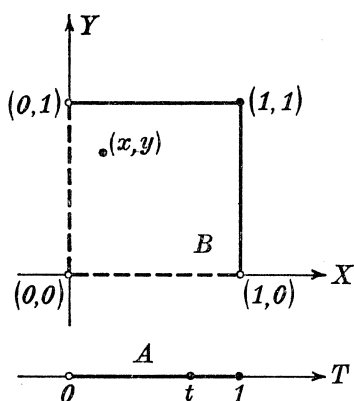


Fig. 23

han brugte decimalbrøker, var ikke helt fuldstændigt, men er senere bragt i orden af D. König, og det er dennes bevis, vi her vil gengive.

Ethvert af de betragtede tal t, x og y kan på enentydig måde fremstilles ved en uendelig decimalbrøk, der har et 0 foran kommaet og ikke ender på lutter 0'er. Vi inddeler decimalerne i decimalbrøksfremstillingen af et vilkårligt $t \in A$ i blokke, idet vi begynder forfra og tager så mange cifre med i hver blok, at det sidste ciffer i den ikke er et 0. Til det pågældende t knytter vi nu det par $(x, y) \in B$, som er bestemt

ved, at decimalbrøksfremstillingerne af x og y er opbygget af henholdsvis den første, den tredje, den femte o. s. v. og den anden, den fjerde, den sjette o. s. v. af de nævnte blokke. Eksempelvis får vi til

$$t = 0, 2 \ 8 \ 3 \ 0 \ 0 \ 7 \ 0 \ 4 \ 3 \ 6 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 3 \ \dots$$

knyttet

$$\begin{cases} x = 0, 2 \ 3 \ 0 \ 4 \ 6 \ 0 \ 9 \ 0 \ 0 \ 3 \ \dots \\ y = 0, 8 \ 0 \ 0 \ 7 \ 3 \ 9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ \dots \end{cases}$$

Hermed har vi angivet en enentydig afbildning af A på B .

Den anvendte blokinddeling af decimalerne skyldes König; Cantor benyttede decimalerne enkeltvis, og for visse t får man da et x eller y , hvis decimalbrøksfremstilling ender på lutter 0'er.

Af (21.5) får man følgende udvidelse af sætningerne 21.v og 21.vii:

SÆTNING 21.viii. *Foreningsmængden af mængderne i et system, der højst har kontinuets mægtighed, af mængder, der højst har kontinuets mægtighed, har kontinuets mægtighed, hvis mindst én af mængderne har det.*

Det tilfælde, at de betragtede mængder ikke vides at være parvis disjunkte, må igen behandles særskilt.

Formlerne (21.6) og (21.7) giver sætningerne:

SÆTNING 21.ix. *Produktmængden af to mængder af kontinuets mægtighed har kontinuets mægtighed.*

SÆTNING 21.x. *Mængden af afbildninger af en mængde bestående af to elementer ind i en mængde af kontinuets mægtighed har kontinuets mægtighed.*

F. ex. har mængden af alle par af reelle tal (altså også mængden af alle intervaller på en abscisseakse) kontinuets mægtighed, og det samme gælder mængden af alle punkter i planen, der altså er ækvivalent med mængden af punkter på en ret linie (eller endog på et vilkårligt lille liniestykke). Da Cantor i 1877 meddelte Dedekind dette resultat, var han selv så overrasket, at han skrev: *Je le vois, mais je ne le crois pas.*

Af (21.6) får vi ved at gå frem nøjagtigt, som da vi ud fra (19.17) beviste (19.19) og (19.20):

$$\aleph \cdot \aleph \cdot \aleph = \aleph^3 = \aleph.$$

Ved induktion får vi videre

$$(21.8) \quad \aleph \cdot \aleph \cdot \dots \cdot \aleph = \aleph,$$

gældende for et endeligt produkt af n faktorer, og dette kan også udtrykkes således:

$$(21.9) \quad \aleph^n = \aleph,$$

gældende for ethvert endeligt kardinaltal $n \geq 1$ (idet man får $n=1$ med ved hjælp af (18.3)).

Af (21.8) og (21.9) aflæses sætningerne:

SÆTNING 21. XI. *Produktmængden af mængderne i et endeligt system af mængder, der højst har kontinuets mægtighed, har kontinuets mægtighed, hvis mindst én af mængderne har det.*

SÆTNING 21. XII. *Mængden af afbildninger af en endelig mængde ind i en mængde af kontinuets mægtighed har kontinuets mægtighed.*

F. ex. har mængden af alle n -sæt af reelle tal kontinuets mægtighed, og ligeså mængden af alle punkter i det n -dimensionale euklidiske rum. Der findes altså for vilkårlige endelige kardinaltal m og n (≥ 1) en enentydig afbildning af det m -dimensionale rum på det n -dimensionale, og man spørger naturligt, på hvilken måde mon dimensionsbegrebet kan komme til at spille en rolle i denne forbindelse. Allerede Dedekind formodede, at det havde noget at gøre med afbildningens kontinuitet — den ovenfor betragtede afbildning af A på B er jo ikke kontinuert. I 1890 lykkedes det Peano at give et eksempel på en kontinuert afbildning af $\{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ på $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, altså geometrisk fortolket en kontinuert kurve, som går igennem alle punkterne i et kvadrat; men afbildningen var netop ikke enentydig, kurven havde dobbeltpunkter. I 1911 viste Brouwer, at hvis en afbildning af det m -dimensionale rum på det n -dimensionale er enentydig og kontinuert, så er $m=n$;

specialtilfælde af denne sætning (for $m \leq 3$ og $n \leq 3$) bevistes i årene 1878–1907 af Lüroth.

Lad os slutte denne paragraf med endnu et eksempel til sætning 21. II: En cykelås med et endeligt antal (≥ 1) taster, der hver kan indstilles på $\aleph$ måder, kan indstilles på ialt $\aleph$ forskellige måder.

22. Cantors sætning og kontinuumshypotesen. De i det foregående udregnede summer, produkter og potenser, i hvilke der indgik kardinaltal, som højst var $\aleph_0$, har hele tiden givet resultater, der også højst var $\aleph_0$, og på tilsvarende måde er det gået, når de forekommende kardinaltal højst var $\aleph$. De to transfinite kardinaltal, som vi hidtil har mødt, har altså stået isoleret fra hinanden i den forstand, at vi ikke ved at operere med kardinaltal op til og med $\aleph_0$ har fået $\aleph$ som resultat.

Men de produkter, som vi har beregnet, har også kun haft endeligt mange faktorer og potenserne kun endelige eksponenter. I det følgende skal vi først og fremmest beskæftige os med potenser med transfinite eksponenter, og derved vil vi meget snart få den ønskelige forbindelse mellem $\aleph_0$ og $\aleph$ og desuden stifte bekendtskab med nye transfinite kardinaltal.

Den enkleste potens med transfinit eksponent er $1^{\aleph_0}$, og ifølge (18.3) har vi

$$(22.1) \quad 1^{\aleph_0} = 1.$$

Vi har allerede tidligere uden udtrykkeligt at nævne det beskæftiget os med en mængde med kardinaltallet $2^{\aleph_0}$, nemlig den i beviset for sætning 21. II betragtede mængde M , som ifølge sin definition er ækvivalent med mængden af alle følger af tallene 6 og 7, altså mængden $\{6, 7\}^{\aleph}$ af alle afbildninger af $\aleph$ ind i $\{6, 7\}$ (se sætning 18. II). Da M er en uendelig, men ikke numerabel delmængde af $\aleph$, har vi straks, at $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} \leq \aleph$.

Vi skal nu vise, at det for ethvert endeligt kardinaltal $n > 2$ gælder, at

$$(22.2) \quad 2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}.$$

Vi betragter mængden $A = \{1, 2\}^{\aleph}$ af alle følger af elementer fra $\{1, 2\}$ (vi kunne iøvrigt lige så godt have brugt M), mængden $B = \{1, 2, \dots, n\}^{\aleph}$ af alle følger af elementer fra $\{1, 2, \dots, n\}$ samt mængden $C = \aleph^{\aleph}$ af alle følger af elementer fra $\aleph$. Om disse tre mængder gælder det ifølge sætning 18. II, at

$$\text{card } A = 2^{\aleph_0}, \text{ card } B = n^{\aleph_0} \quad \text{og} \quad \text{card } C = \aleph_0^{\aleph_0},$$

og af $A \subset B \subset C$ får vi da $2^{\aleph_0} \leq n^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$.

På den anden side kan vi etablere en enentydig afbildning af C på en

(endog ægte) delmængde af A ved til en vilkårlig følge $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ af naturlige tal at knytte den følge af tallene 1 og 2, der er opbygget således: først så mange gange tallet 1 som angivet ved tallet a_1 , dernæst så mange gange 2 som angivet ved a_2 , dernæst så mange gange 1 som angivet ved a_3 o. s. v. Exempelvis knytter vi til følgen

$$(2, 4, 1, 3, 2, 12, 5, 2, \dots)$$

denne følge:

$$(1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, \dots).$$

Vi har da også $\aleph_0^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0}$, og dermed den ønskede formel (22.2).

Dernæst beviser vi

$$(22.3) \quad 10^{\aleph_0} = \aleph.$$

Mængden P af alle de decimalbrøker, som har et 0 foran kommaet, er ækvivalent med mængden $\{0, 1, \dots, 9\}^{\aleph}$ af alle følger af elementer fra mængden $\{0, 1, \dots, 9\}$, og da denne sidste mængde har kardinaltallet 10, har vi ifølge sætning 18.II, at $\text{card } P = 10^{\aleph_0}$. Ethvert tal i intervallet $E = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$ fremstilles på enentydig måde ved en decimalbrøk fra $P \setminus Q$, hvor Q er mængden af de decimalbrøker, der har et 0 foran kommaet og ender på lutter 0'er. Da $(P \setminus Q) \cup Q = P$ og $(P \setminus Q) \cap Q = \emptyset$, har vi, idet decimalbrøkerne i Q fremstiller rationale tal:

$$\text{card } P = \text{card}(P \setminus Q) + \text{card } Q = \text{card } E + \text{card } Q = \aleph + \aleph_0 = \aleph$$

og dermed formelen (22.3).

Af (22.2) og (22.3) får vi nu det vigtige resultat, at det for et vilkårligt endeligt kardinaltal $n > 1$ gælder, at

$$(22.4) \quad n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph.$$

Dette kan også udtrykkes således:

$$(22.5) \quad n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot \dots = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0 \cdot \dots = \aleph.$$

Ved hjælp af (18.4) aflæser vi af (22.4) (for $n=2$) følgende sætning:

SÆTNING 22.I. *Mængden af delmængder af en numerabel mængde har kontinuets mægtighed.*

Videre bemærker vi, at den i det foregående betragtede mængde M er ækvivalent med hele $\aleph$, og endelig aflæser vi af (22.4) også:

SÆTNING 22.II. *Mængden af afbildninger af en numerabel mængde ind i en højst numerabel mængde, som indeholder mindst to elementer, har kontinuets mægtighed.*

F. ex. har mængden af alle følger af elementer fra mængden $\{1, 2, \dots, n\}$ kontinuets mægtighed, og det samme gælder mængden af alle følger af naturlige, hele, rationale eller endog algebraiske tal.

Lad os nævne endnu et eksempel: En cyklelås med $\aleph_0$ taster, der hver kan indstilles på to måder, kan indstilles på ialt $\aleph$ måder; og det samme resultat får man, hvis hver tast kan indstilles på et vilkårligt andet endeligt antal (> 1) måder eller på $\aleph_0$ måder.

Vi har tidligere (i formlen (19.14)) angivet summen af samtlige naturlige tal; vi kan nu beregne produktet: Af

$$\begin{aligned}\aleph &= 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot \dots \leq 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots \\ &\leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0 \cdot \dots = \aleph\end{aligned}$$

får vi

$$(22.6) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots = \aleph.$$

Ved en ulighedsregning analog med den her gennemførte får man af (22.4) sætningen:

SÆTNING 22.III. *Produktmængden af mængderne i et numerabelt system af højst numerable mængder, der hver indeholder mindst to elementer, har kontinuets mægtighed.*

Ved hjælp af (22.4) vil vi nu give et nyt bevis for (21.9), idet vi benytter potensregnerreglen (18.2) og formlen (19.8):

$$\aleph^n = (2^{\aleph_0})^n = 2^{\aleph_0 \cdot n} = 2^{\aleph_0} = \aleph.$$

Vi ser her det første eksempel på anvendelsen af en metode, som reducerer arbejdet ved udregning af produkter og potenser af transfinite kardinaltal meget væsentligt: I stedet for at gennemføre de ofte noget besværlige operationer med mængder omskriver man de indgående kardinaltal til potenser, og hele arbejdet foregår så i eksponenterne ved hjælp af potensregnerregler og tidligere beviste formler. Vi skal straks se denne som man kunne sige logaritmiske regnemetode i brug igen: Idet vi denne gang benytter (19.17), får vi

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph,$$

og vi har bevist:

$$(22.7) \quad \aleph^{\aleph_0} = \aleph,$$

eller anderledes udtrykt:

$$(22.8) \quad \aleph \cdot \aleph \cdot \dots \cdot \aleph \cdot \dots = \aleph.$$

Sætningerne 21.IX og 22.III indgår nu som specialtilfælde i følgende mere omfattende sætning:

SÆTNING 22.IV. *Produktmængden af mængderne i et system af mængder, der højest har kontinuets mægtighed, har kontinuets mægtighed, hvis systemet er højest numerabelt, og mindst én af mængderne har kontinuets mægtighed; og også, hvis systemet er numerabelt, og hver af mængderne indeholder mindst to elementer.*

Thi (22.8) kan opfattes som en udvidelse af både af (21.8) og (22.5). Da (22.7) på samme måde er en udvidelse af både (21.9) og (22.4), indgår sætningerne 21.XII og 22.II som specialtilfælde i:

SÆTNING 22.V. *Mængden af afbildninger af en mængde A ind i en mængde B har kontinuets mægtighed, hvis A er højest numerabel, og B har kontinuets mægtighed; og også, hvis A er numerabel, og B højest har kontinuets mægtighed og indeholder mindst to elementer.*

Som eksempler til disse sætninger nævner vi, at mængden af alle følger af reelle tal har kontinuets mægtighed, og det samme gælder mængden af alle punkter i det hilbertske talrum (se s. 43).

Ved hjælp af (22.8) vil vi endnu en gang bevise (22.6): Da $n < \aleph$ for ethvert endeligt kardinaltal, har vi

$$\begin{aligned}\aleph &= 2^{\aleph_0} \leq 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots \\ &\leq \aleph \cdot \aleph \cdot \aleph \cdot \dots \cdot \aleph \cdot \dots = \aleph.\end{aligned}$$

Vi møder her endnu et eksempel af den i kommentaren til sætning 17.II omtalte art: Selv om $n < \aleph$ for ethvert n , så er $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots$ alligevel lig med $\aleph \cdot \aleph \cdot \aleph \cdot \dots \cdot \aleph \cdot \dots$.

Før vi tager fat på spørgsmålet om existens af kardinaltal større end $\aleph$, vil vi berøre den såkaldte *kontinuumshypotese*, som opstilledes af Cantor i 1878. Den går ud på, at enhver delmængde af en mængde af kontinuets mægtighed er endelig, numerabel eller har kontinuets mægtighed, eller med andre ord, at der ikke findes noget kardinaltal mellem $\aleph_0$ og $\aleph$.¹ Der er ikke givet noget bevis for rigtigheden af kontinuumshypotesen, og man ved heller ikke, om den muligvis er forkert; vi skal senere nævne det væsentligste resultat, der i denne forbindelse er opnået i de forløbne 84 år.

Hidtil har vi kun mødt ét eksempel på et kardinaltal større end $\aleph_0$, nemlig $\aleph$, og kernepunktet i vort bevis for uligheden $\aleph > \aleph_0$ var, som

¹ Idet vi henviser til fodnoten s. 129, kan dette også udtrykkes således: $\aleph_1 = \aleph$.

vi nu vil foretrække at udtrykke det, en påvisning af, at $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Vi skal nu bevise, at denne ulighed gælder alment:

SÆTNING 22.VI. *For et vilkårligt kardinaltal $\mathfrak{k}$ gælder det, at*

$$2^{\mathfrak{k}} > \mathfrak{k}.$$

At sætningen er rigtig for $\mathfrak{k} \leq \aleph_0$, ved vi allerede, men det får vi iøvrigt ikke brug for under beviset, som forløber således: Lad A være en mængde med kardinaltallet $\mathfrak{k}$, og lad F være mængden af alle afbildninger af A ind i mængden $\{0, 1\}$. Vi har da $\text{card } F = \text{card}(\{0, 1\}^A) = (\text{card } \{0, 1\})^{\text{card } A} = 2^{\mathfrak{k}}$, og da man ved til ethvert element $a \in A$ at knytte den afbildning af A ind i $\{0, 1\}$, som afbilder a i tallet 1 og ethvert andet element af A i tallet 0, får en enentydig afbildning af A på en delmængde af F , har vi med det samme $\text{card } F \geq \text{card } A$ eller $2^{\mathfrak{k}} \geq \mathfrak{k}$. For at have bevist sætning 22.VI mangler vi altså nu at bevise, at $\text{card } F \neq \text{card } A$. Det gør vi på en måde, der er ganske den samme som den, der anvendtes i beviset for sætning 21.II (under påvisningen af, at $\text{card } M \neq \aleph_0$), idet vi beviser, at hvis en delmængde G af F er ækvivalent med A (sådanne delmængder eksisterer som lige påvist), så kan G ikke være F selv. Hertil er det nok at angive blot et enkelt element af F (d. v. s. en afbildning af A ind i $\{0, 1\}$), som ikke tilhører den betragtede mængde G .

At G er ækvivalent med A , vil sige, at der findes en enentydig afbildning f af A på G ; til ethvert element a af A er der altså på enentydig måde knyttet et element $f(a) \in G$, d. v. s. en afbildning φ_a af A ind i $\{0, 1\}$. Vi definerer nu en afbildning ψ af A ind i $\{0, 1\}$ ved at sætte

$$\psi(a) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } \varphi_a(a) = 0, \\ 0, & \text{hvis } \varphi_a(a) = 1, \end{cases}$$

og afbildningen ψ er da klart forskellig fra enhver af afbildningerne φ_a , eller sagt på en anden måde: $\psi \notin G$. Da det jo imidlertid er klart, at $\psi \in F$, har vi $\psi \in F \setminus G$ som ønsket, og sætningen er bevist.

Ifølge (18.4) er sætning 22.VI ensbetydende med følgende vigtige sætning, Cantors sætning:

SÆTNING 22.VII. *For en vilkårlig mængde A og mængden D af dens delmængder gælder det, at*

$$\text{card } D > \text{card } A.$$

Iøvrigt kan det givne bevis for sætning 22.VI omskrives til et direkte bevis for Cantors sætning, idet man benytter sig af, at elementerne i mængden F jo netop er de karakteristiske funktioner for delmængderne af A , altså for elementerne af D (se (11.3) og s. 37).

Af sætning 22.VI aflæser man umiddelbart følgende sætninger:

SÆTNING 22.VIII. *Der findes uendeligt mange forskellige transfinite kardinaltal.*

SÆTNING 22.IX. *Der findes intet største kardinaltal.*

Som et specialtilfælde af sætning 22.VI får vi:

$$2^{\aleph} > \aleph.$$

Som eksempler på mængder med kardinaltallet $2^{\aleph}$ kan nævnes mængden af delmængder af $\aleph$ (eller lige så godt mængden af delmængder af et interval, af $\aleph \times \aleph$ eller af $\aleph^{\aleph}$) og mængden af afbildninger af $\aleph$ ind i en mængde bestående af to elementer. Lad os også nævne, at en cykelås med $\aleph$ taster, der hver kan indstilles på to måder, kan indstilles på ialt $2^{\aleph}$ forskellige måder.

Ved hjælp af potensregnereglen (18.2) og formelen (21.4) gennemfører vi nu følgende beregning:

$$\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = 2^{\aleph},$$

og da det af $2 < n < \aleph_0 < \aleph$ følger, at $2^{\aleph} \leq n^{\aleph} \leq \aleph_0^{\aleph} \leq \aleph^{\aleph}$, har vi bevist, at det for ethvert endeligt kardinaltal $n > 2$ gælder, at

$$2^{\aleph} = n^{\aleph} = \aleph_0^{\aleph} = \aleph^{\aleph}.$$

Vi har ikke omtalt potensen $1^{\aleph}$, men af (18.3) får man umiddelbart $1^{\aleph} = 1$.

Vi kan af det foregående aflæse:

SÆTNING 22.X. *Mængden af afbildninger af en mængde af kontinuets mægtighed ind i en mængde, der højst har kontinuets mægtighed, har kardinaltallet $2^{\aleph}$.*

(Når vi her, ligesom vi har gjort det flere gange i det foregående, taler om en mængde af højst kontinuets mægtighed, udelukker vi naturligvis ikke den mulighed, at kontinuumshypotesen kunne være forkert, altså at mængden kunne have et kardinaltal mellem $\aleph_0$ og $\aleph$; heller ikke selv om de formler, som vi i begrundelsen for en sætning henviser til, ikke omtaler sådanne kardinaltal. Thi alle de pågældende formler kan ved ulighedsregning udvides til også at omfatte disse eventuelt eksisterende kardinaltal; således kan man af $\aleph_0^{\aleph} = \aleph^{\aleph}$ og $\aleph_0 < \aleph < \aleph$ slutte $\aleph_0^{\aleph} = \aleph^{\aleph} = \aleph^{\aleph}$.)

Vi kan nu nævne flere eksempler på mængder med kardinaltallet $2^{\aleph}$: mængden af alle afbildninger af $\aleph$ ind i $\{1, 2, \dots, n\}$, ind i $\aleph$, ind i $\aleph$

eller ind i $\aleph$ selv. Mængden af alle reelle funktioner af en reel variabel¹ har altså kardinaltallet $2^{\aleph}$, og man bruger derfor ofte for dette betegnelsen $\mathfrak{f}$. Vi kan gå videre: Mængden af alle afbildninger af $\aleph^2$, af $\aleph^3$, af $\aleph^n$ eller af $\aleph^{\aleph}$ ind i $\aleph$ har kardinaltallet $\mathfrak{f}$, eller med andre ord: Mængden af alle reelle funktioner af $2, 3, \dots, n, \dots$ op til og med $\aleph_0$ reelle variable har dette kardinaltal.

Lad os til sammenligning med dette vise, at mængden C af alle *kontinuerte*, reelle funktioner af f. ex. én reel variabel kun har kontinuets mægtighed.

For det første har vi, at en kontinuert funktion $f: \aleph$ ind i $\aleph$ er bestemt ved funktionsværdierne svarende til de rationale værdier af den uafhængige variable (og disse funktionsværdier kan endog ikke allesammen vælges frit); thi til ethvert $x \in \aleph$ kan vi vælge en følge $(r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$ af rationale tal, der konvergerer mod x , og funktionsværdien $f(x)$ er da bestemt som $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n)$. Heraf følger det, at

$$\text{card } C \leq \text{card}(\aleph^{\aleph}) = \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

På den anden side er enhver konstant funktion kontinuert, og vi har da også

$$\text{card } C \geq \aleph,$$

og dermed er påstandens rigtighed bevist.

Iøvrigt ses det, at også mængden D af alle *differentiable*, reelle funktioner af én reel variabel har kontinuets mægtighed, thi på den ene side er en differentiable funktion kontinuert, altså $\text{card } D \leq \aleph$, og på den anden side er en konstant funktion differentiable, altså $\text{card } D \geq \aleph$.

Nu kan man så gå videre med kardinaltallet $\mathfrak{f}$ og bevise

$$(22.9) \quad \mathfrak{f} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f},$$

idet man gennemfører følgende beregning:

$$2^{\aleph} + 2^{\aleph} = 2^{\aleph} \cdot 2 = 2^{\aleph+1} = 2^{\aleph}.$$

Formlen (22.9) kan også udtrykkes

$$\mathfrak{f} \cdot 2 = \mathfrak{f},$$

og dette er, idet n stadig betegner et vilkårligt endeligt kardinaltal (≥ 1), et specialtilfælde af

$$\mathfrak{f} \cdot n = \mathfrak{f},$$

som sammen med formlerne

¹ Her og i de følgende eksempler tænker vi for simpelhedens skyld (det er ikke nogen væsentlig indskrænkning) på funktioner, hvis definitions-mængde er *hele* $\aleph$, *hele* $\aleph^2$ o. s. v.

$$\mathfrak{f} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{f} \cdot \aleph = \mathfrak{f}^2 = \mathfrak{f}^n = \mathfrak{f}^{\aleph_0} = \mathfrak{f}$$

fås af

$$\mathfrak{f}^{\aleph} = \mathfrak{f}$$

ved ulighedsregning. Denne sidste bevises således:

$$\mathfrak{f}^{\aleph} = (2^{\aleph})^{\aleph} = 2^{\aleph \cdot \aleph} = 2^{\aleph} = \mathfrak{f}.$$

Derefter kan man tage fat på kardinaltallet $2^{\mathfrak{f}}$, der ifølge sætning 22.vi er større end $\mathfrak{f}$.

Mere alment kan man vise, at der for et vilkårligt transfinit kardinaltal $\mathfrak{f}$ gælder følgende formler:

$$\mathfrak{f} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f} \cdot n = \mathfrak{f} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{f}^2 = \mathfrak{f}^n = \mathfrak{f},$$

mens det ikke gælder alment, at $\mathfrak{f}^{\aleph_0} = \mathfrak{f}$. Det kan endog vises, at der til et vilkårligt kardinaltal m altid findes både et kardinaltal $\mathfrak{f} > m$, så at $\mathfrak{f}^{\aleph_0} = \mathfrak{f}$ og et kardinaltal $\mathfrak{f} > m$, så at $\mathfrak{f}^{\aleph_0} > \mathfrak{f}$.

Endelig er det værd at nævne, at det for vilkårlige transfinite kardinaltal $\mathfrak{f}$ og I , hvor $\mathfrak{f} \leq I$, gælder, at

$$\mathfrak{f} + I = \mathfrak{f} \cdot I = I.$$

Af $\mathfrak{f} \leq I < 2^I$ får man derefter

$$\mathfrak{f}^I \leq I^I \leq (2^I)^I = 2^{I \cdot I} = 2^I \leq \mathfrak{f}^I,$$

hvoraf man aflæser følgende vigtige formel, der skyldes Bernstein:

$$\mathfrak{f}^I = 2^I, \text{ når } \aleph_0 \leq \mathfrak{f} \leq I.$$

Alle disse resultater kan man imidlertid kun nå ved anvendelse af de i fodnoten s. 129 nævnte transfinite ordinaltal, så vi vil lade os nøje med disse antydninger og til afslutning kort omtale den såkaldte generaliserede kontinuumshypotese, som går ud på, at der for et vilkårligt transfinit kardinaltal $\mathfrak{f}$ ikke findes noget kardinaltal mellem $\mathfrak{f}$ og $2^{\mathfrak{f}}$. For $\mathfrak{f} = \aleph_0$ får man Cantors kontinuumshypotese: at der ikke findes noget kardinaltal mellem $\aleph_0$ og $2^{\aleph_0} = \aleph$ (se s. 185), og for $\mathfrak{f} = \aleph$ får man, at der ikke findes noget kardinaltal mellem $\aleph$ og $2^{\aleph} = \mathfrak{f}$. Man kan også formulere den generaliserede kontinuumshypotese således: De transfinite kardinaltal kan opstilles efter størrelse på følgende måde:

$$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{(2^{\aleph_0})}, \dots; \dots .^1$$

¹ Idet vi henviser til fodnoten s. 129, kan dette også udtrykkes således:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}, \aleph_2 = 2^{\aleph_1}, \dots; \dots .$$

Det i denne forbindelse hidtil væsentligste resultat skyldes Gödel. Han beviste i 1938, at hvis det af Zermelo og Fraenkel opstillede axiomssystem for mængdelæren efter fjernelse af udvalgsaksiomet er modsigelsesfrit (men det ved man ikke, om det er), så gælder det samme for det axiomssystem, som man får ved påny at tilføje udvalgsaksiomet og som et nyt axiom den generaliserede kontinuumshypotese. Det er imidlertid stadig et åbent spørgsmål, om kontinuumshypotesen kan bevises eller modbevises ud fra de øvrige aksiomer eller om den er uafhængig af dem. Hvis det sidste er tilfældet, har det ikke nogen mening at spørge, om den er rigtig eller forkert — ganske analogt med, at det i plangeometrien ikke har nogen mening at stille det tilsvarende spørgsmål om parallelaksiomet.

OM REGELBUNDNA KEDJEBRÅKS RELATIVA APPROXIMATION

CLAS-OLOF SELENIUS

1. Relativ approximation medelst konvergenter. I den regelbundna kedjebråksutvecklingen (jfr Pipping [3])

$$(1) \quad \xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \dots] = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}$$

av ett reellt tal ξ_0 är begynnelse termen b_0 ett helt tal och delnämnnarna b_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) naturliga tal. I det följande tänks ξ_0 i allmänhet vara irrationellt. Då är de fullständiga kvoterna (jfr Perron [2])

$$(2) \quad \xi_\nu = [b_\nu, b_{\nu+1}, \dots]$$

oändliga kedjebråk. Utvecklingens konvergenter

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = [b_0, b_1, \dots, b_\nu]$$

ger som känt de bästa rationella approximationerna av ξ_0 .

I det följande behandlar vi regelbundna kedjebråksutvecklingar (RK), som innehåller minst en (ändlig eller oändlig) följd av delnämnnare 1 (»ettor«)

$$(3) \quad \begin{array}{l} b_\kappa, 1, 1, \dots, 1, 1, b_{\kappa+k+1} \quad (\kappa \geq 0) \\ \text{resp. } b_\kappa, 1, 1, \dots, \end{array}$$

där

$$\begin{array}{ll} b_\kappa \geq 2 & (\kappa \geq 1); b_0 \text{ godtyckligt} \\ b_{\kappa+m} = 1 & (m = 1, 2, \dots, k \text{ resp. } m = 1, 2, \dots) \\ b_{\kappa+k+1} \geq 2. \end{array}$$

En sådan följd av delnämnnarettor kallar vi en *unisekvens*; k är unisekvensens *längd*.

I approximationsformeln

$$(4) \quad \left| \xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \right| = \frac{1}{\gamma_\nu B_{\nu-1}^2}$$

betraktar vi γ_v , som ett mått på den *relativa approximationsförmågan* hos konvergenten A_{v-1}/B_{v-1} . Vi kallar γ_v den till delnämnnaren b_v eller till index v hörande *approximationskonstanten*. Även konvergenten A_{v-1}/B_{v-1} säger vi hör till eller motsvarar b_v eller v .

Vi undersöker närmast de γ_v , som tillhör en unisekvens (3). Alltså är $v = \kappa + 1, \dots, \kappa + k$.

Som ett inledande *exempel* väljer vi $\xi_0 = \sqrt{2081}$. RK-utvecklingen

$$(5) \quad \xi_0 = 45(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 90)$$

är periodisk med perioden $b_1, \dots, b_{11}$. Denna innehåller unisekvensen $b_1, \dots, b_{10}$, alltså är $k = 10 \equiv 2 \pmod{4}$. Beräknas konvergenterna

$$\frac{45}{1}, \frac{46}{1}, \frac{91}{2}, \frac{137}{3}, \frac{228}{5}, \frac{365}{8}, \frac{593}{13}, \frac{958}{21}, \frac{1551}{34}, \frac{2509}{55}, \frac{4060}{89}, \frac{367909}{8065}, \dots,$$

så ger en uträkning med hjälp av (4) för unisekvensen i den 1:a perioden följande approximationskonstanter:

$$(6) \quad \gamma_1 \approx 1,618, \gamma_2 \approx 2,618, \gamma_3 \approx 2,119, \gamma_4 \approx 2,282, \gamma_5 \approx 2,225, \\ \gamma_6 \approx 2,226, \gamma_7 \approx 2,280, \gamma_8 \approx 2,122, \gamma_9 \approx 2,607, \gamma_{10} \approx 1,629.$$

Alltså är

$$(7) \quad \gamma_1 < \gamma_{10} < \gamma_3 < \gamma_8 < \gamma_5 < \gamma_6 < \gamma_7 < \gamma_4 < \gamma_9 < \gamma_2.$$

Konvergenttäljarna och -nämnnarna tillväxer snabbt. Beräknar man de γ_v ($v = 12, \dots, 21$), som hör till unisekvensen i den andra perioden, finner man

$$(8) \quad \gamma_{22-1} < \gamma_{22-10} < \gamma_{22-3} < \gamma_{22-8} < \gamma_{22-5} \\ < \gamma_{22-6} < \gamma_{22-7} < \gamma_{22-4} < \gamma_{22-9} < \gamma_{22-2}.$$

Av detta skrivsätt framgår, att storleksordningsföljderna för γ_v i de två unisekvenserna är motsatta. En fortsättning av den numeriska beräkningen gör sig allt besvärligare. För utvecklingen (5) gäller i varje fall allmänt

$$\gamma_{22n \pm 1} < \gamma_{22n \pm 10} < \gamma_{22n \pm 3} < \gamma_{22n \pm 8} < \gamma_{22n \pm 5} \\ < \gamma_{22n \pm 6} < \gamma_{22n \pm 7} < \gamma_{22n \pm 4} < \gamma_{22n \pm 9} < \gamma_{22n \pm 2},$$

där $n = 1, 2, \dots$ (samt $n = 0$, om icke minustecknen beaktas; jfr (7)).

Förf. har allmänt visat [4], att lagbundenheter hos den relativa approximationen av det slag, som exemplet uppvisar, är *allmänna egenskaper hos regelbundna kedjebråk*. Dessa lagbundenheter utgör grunden för nya upptäckter inom teorin för halvregelbundna kedjebråk ([4], § 6, § 8, jfr nedan 4) och teorin för den s. k. Pell'ska ekvationen ([4], § 10, nedan 4).

2. **Fördelningen av γ_v .** Vi skall kort skissera ett par allmänare resultat. Utgående från de grundläggande formlerna ([2], § 13)

$$\xi_0 = \frac{A_{v-1}\xi_v + A_{v-2}}{B_{v-1}\xi_v + B_{v-2}},$$

$$A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda = (-1)^{\lambda-1} \quad (\lambda = 0, 1, \dots)$$

härleder man lätt

$$\xi_0 - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} = \frac{A_{v-2}B_{v-1} - A_{v-1}B_{v-2}}{B_{v-1}(B_{v-1}\xi_v + B_{v-2})} = \frac{(-1)^{v-1}}{B_{v-1}^2 \left(\xi_v + \frac{B_{v-2}}{B_{v-1}} \right)}.$$

Av grundformeln ([3], s. 97)

$$(9) \quad B_v = b_v B_{v-1} + B_{v-2} \quad (B_0 = 1, B_{-1} = 0)$$

följer då

$$\left| \xi_0 - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} \right| = \frac{1}{\left(\xi_v + \frac{B_v}{B_{v-1}} - b_v \right) B_{v-1}^2},$$

varav i enlighet med (4)

$$(10) \quad \gamma_v = \xi_v + \frac{B_v}{B_{v-1}} - b_v \quad (v \geq 1).$$

På grund av

$$(11) \quad \frac{B_v}{B_{v-1}} = [b_v, b_{v-1}, \dots, b_1]$$

(jfr [2], § 4) antar (10) formen

$$\gamma_v = [0, b_{v-1}, b_{v-2}, \dots, b_1] + [b_v, b_{v+1}, \dots].$$

För de *symmetriska γ -differenserna*

$$\gamma_{\kappa+k+1-m} - \gamma_{\kappa+m}$$

erhålls då uttrycket

$$[0, b_{\kappa+k-m}, b_{\kappa+k-m-1}, \dots, b_1] + [b_{\kappa+k+1-m}, b_{\kappa+k+2-m}, \dots] \\ - [0, b_{\kappa+m-1}, b_{\kappa+m-2}, \dots, b_1] - [b_{\kappa+m}, b_{\kappa+m+1}, \dots]$$

eller efter lämplig omordning och tillämpning av (3):

$$(12) \quad \{[0, (1)^{k-m}, b_\kappa, b_{\kappa-1}, \dots, b_1] - [0, (1)^{k-m}, b_{\kappa+k+1}, b_{\kappa+k+2}, \dots]\} \\ + \{[0, (1)^{m-1}, b_{\kappa+k+1}, b_{\kappa+k+2}, \dots] - [0, (1)^{m-1}, b_\kappa, b_{\kappa-1}, \dots, b_1]\}.$$

Beteckningen $(1)^n$ anger en följd av n delnämnarettor.

Låt nu k vara jämnt. Är då uttrycket

$$(13) \quad [b_{\kappa}, b_{\kappa-1}, \dots, b_1] - [b_{\kappa+k+1}, b_{\kappa+k+2}, \dots]$$

positivt, så blir bägge klausuluttrycken i (12) positiva resp. negativa¹, beroende på om $m \equiv 1 \pmod{2}$ eller $m \equiv 0 \pmod{2}$. Är åter skillnaden (13) negativ, så är klausulernas förtecken det motsatta.

Vi kallar nu en unisekvens *rak* eller *omvänd*, allteftersom uttrycket (13) är positivt eller negativt ([4], s. 34). Uttrycket kan försvinna endast för vissa *ändliga* RK (unisekvensen har då obestämd »riktning»), men sådana har vi ju egentligen uteslutit. Vi har alltså funnit:

Är i unisekvensen (3) $k \equiv 0 \pmod{2}$, så gäller för dess symmetriska γ -differenser

$$(14) \quad (-1)^{m-1}(\gamma_{\kappa+k+1-m} - \gamma_{\kappa+m}) \geq 0,$$

allteftersom unisekvensen är rak eller omvänd.

Så är i exemplet (5) den första unisekvensen rak ($b_0 = M > b_{\kappa+k+1} = b_{11} = 90$). Enligt (14) är då

$$(15) \quad \gamma_{10} - \gamma_1 > 0, \gamma_9 - \gamma_2 < 0, \gamma_8 - \gamma_3 > 0, \gamma_7 - \gamma_4 < 0, \gamma_6 - \gamma_5 > 0,$$

vilket stämmer överens med (7). Den 3:e, 5:e, ... unisekvensen är också rak. Däremot är den andra (liksom den 4:e, 6:e osv.) unisekvensen i (5) omvänd, ty

$$[b_{11}, b_{10}, \dots, b_1] - [b_{22}, b_{23}, \dots] = [90, (1)^{10}, M] - [90, (1)^{10}, 90, \dots] < 0.$$

Vi observerar, att (14) inte förutsätter $m \leq k/2$.

Vårt första resultat förutsatte att $k \equiv 0 \pmod{2}$ liksom i exemplet. Det kan emellertid generaliseras. Beviset härför är dock mer komplicerat ([4], nr 22), varför vi utan bevis antecknar:

SATS 1. *Oberoende av längden k hos unisekvensen (3) gäller*

$$(-1)^{\mu-1}(\gamma_{\kappa+k+1-\mu} - \gamma_{\kappa+\mu}) \geq 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, [\tfrac{1}{2}k]),$$

beroende på om unisekvensen är rak eller omvänd.

I (5) gäller även (jfr (7))

$$(16) \quad \gamma_3 - \gamma_{10} > 0, \gamma_4 - \gamma_9 < 0, \gamma_5 - \gamma_8 > 0, \gamma_6 - \gamma_7 < 0.$$

¹ Av två icke-identiska RK som inleds med n st. ($n \geq 1$) gemensamma element är som känt det störst (jfr t.ex. [2], sats 2.8), vars n -te delnämnnare b_n för jämnt (udda) n är störst (minst).

Formel (13) förutsätter egentligen $\kappa > 0$. Formellt kan emellertid minuenden skrivas $(b_{\kappa}, \dots, b_1, M)$, M godtyckligt stort.

Dessa γ -differenser är *nästansymmetriska*. Med en sådan differens förstår vi

$$\text{antingen } \gamma_{x+m+2} - \gamma_{x+k+1-m} \text{ eller } \gamma_{x+k-1-m} - \gamma_{x+m}.$$

Förf. har visat ([4], sats 18):

SATS 2. *Oberoende av längden $k (\geq 4)$ och riktningen av unisekvensen (3) gäller*

$$\begin{aligned} (-1)^{\mu-1}(\gamma_{x+\mu+2} - \gamma_{x+k+1-\mu}) &> 0 \\ (-1)^{\mu-1}(\gamma_{x+k-1-\mu} - \gamma_{x+\mu}) &> 0. \end{aligned} \quad (\mu = 1, 2, \dots, [\tfrac{1}{2}(k-2)])$$

I vårt exempel medför detta (16) samt (jfr (8))

$$\gamma_{19} - \gamma_{12} > 0, \gamma_{18} - \gamma_{13} < 0, \gamma_{17} - \gamma_{14} > 0, \gamma_{16} - \gamma_{15} < 0.$$

3. Geometrisk tolkning av resultaten. De erhållna resultaten (ur [4]) kan nu ges en intressant geometrisk tolkning. Vi betraktar först RK-utvecklingen (5) och speciellt dess första unisekvens. De tillhörande γ_{x+m} numrerar vi efter storlek, så att storleksordningsnumret $g(m)$ för det minsta γ -värdet (γ_1) är $= 1$ och för det största (γ_2) $= k$ (alltså 10). Alltså enligt (7):

$$\begin{array}{cccccccccc} m = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ g(m) = & 1 & 10 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 & 2. \end{array}$$

På periferin av en cirkel (fig. 1) låter vi m -värdena $1, 2, \dots, k=10$ motsvaras av ekvidistanta punkter A_m . Olikteten $\gamma_{m_1} - \gamma_{m_2} > 0$ anger vi i cirkeln medelst en *riktad korda* från A_{m_2} till A_{m_1} . Olikteterna (15) motsvaras då geometriskt av de heldragna kordorna $A_1A_k, A_{k-1}A_2$, osv. och olikteterna (16) av de streckade kordorna A_kA_3, A_4A_{k-1} , osv. Vi ser att de $k-1$ riktade kordorna tillsammans bildar ett *kordatåg* $A_1A_kA_3 \dots A_{k-1}A_2$, som avbildar hela oliktetsräckan (7).

En sådan geometrisk lagbundenhet existerar för godtyckliga värden på k , vilket kan konstateras, om vi i enlighet med resultaten i 2 konstruerar $g(m)$ -följden och uppritar motsvarande kordor. Fig. 3 visar kordatåget i fallet $k=12 \equiv 0 \pmod{2}$. I fallen $k \equiv 1 \pmod{2}$ (se figg. 2 och 4) saknas dock kordan mellan $A_{(k+1)/2}$ och $A_{(k+3)/2}$. Denna kompletteras dock på följande sätt:

Vi sätter $k=2l+1$. Om l är jämnt, fås på grund av (11) och fotnoten:

$$\begin{aligned} \frac{B_{x+l+1}}{B_{x+l}} &= [(1)^{l+1}, b_x, b_{x-1}, \dots, b_1] < [(1)^\infty] = [\bar{1}] \\ \frac{B_{x+l+2}}{B_{x+l+1}} &= [(1)^{l+2}, b_x, b_{x-1}, \dots, b_1] > [\bar{1}] \end{aligned}$$

och på motsvarande sätt på grund av (2):

$$\xi_{x+l+1} = [(1)^{l+1}, b_{x+k+1}, b_{x+k+2}, \dots] < [\bar{1}] < \xi_{x+l+2}.$$

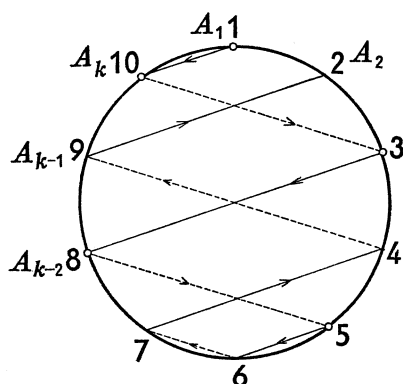


Fig. 1

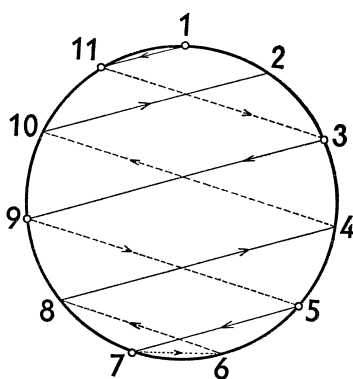


Fig. 2

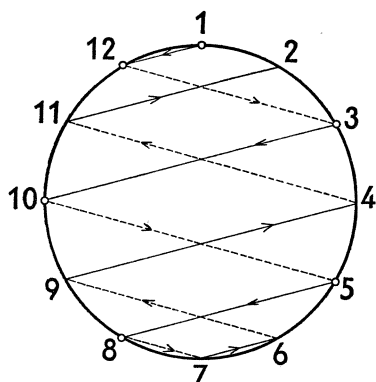


Fig. 3

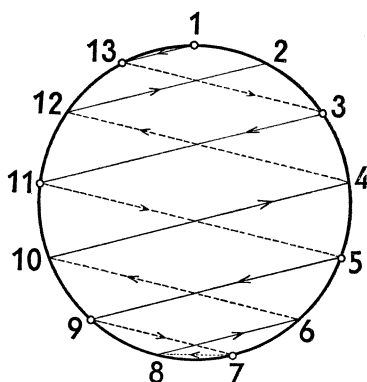


Fig. 4

Är l udda, fås motsvarande relationer med omvända tecken.

Av (10) följer då

$$\gamma_{\kappa+l+1} \leq \gamma_{\kappa+l+2},$$

allteftersom l är jämnt eller udda. Men detta betyder geometriskt, att de motsvarande kordorna till sin riktning passar in i kordatågen: i figg. 2 och 4 de punkterade kordorna A_7A_6 resp. A_7A_8 .

För omvända unisekvenser (t. ex. den 2:a i ex. (5)) erhålls kordatåg, som är kongruenta med de här angivna; figurerna bibehålls oförändrade, om m byts ut mot $k+1-m$. Vi har alltså funnit

SATS 3. *Det kordatåg, som karakteriserar fördelningen av approximationskonstanterna $\gamma_{\kappa+m}$ över en rak unisekvens (3) i en RK-utveckling, erhålls genom att man utgående från kordorna A_1A_k , A_kA_3 drar successiva kordor omväxlande parallellt med dessa. Är k udda, dras avvikande härifrån även sträckan mellan $A_{(k+1)/2}$ och $A_{(k+3)/2}$ som en korda i tåget.*

För en omvänd unisekvens fås motsvarande kordatåg genom permutationen $(m \ k+1-m)$.

Är $k_1 \equiv k_2 \pmod{4}$, så har de motsvarande kordatågen samma karaktär.

Är unisekvensen (3) oändlig, i vilket fall ξ_0 är ekvivalent med $[\bar{1}] = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, blir γ -fördelningen (jfr (10))

$$\gamma_{\kappa+1} < \gamma_{\kappa+3} < \gamma_{\kappa+5} < \dots < \sqrt{5} < \dots < \gamma_{\kappa+6} < \gamma_{\kappa+4} < \gamma_{\kappa+2}.$$

För de fyra fallen mod 4 observerar vi, att permutationerna

$$\begin{pmatrix} m \\ g(m) \end{pmatrix}$$

kan framställas som produkter av transpositioner:

$$\begin{aligned} k = 10: & (2 \ 10)(4 \ 8) \\ k = 11: & (2 \ 11)(4 \ 9)(6 \ 7) \\ k = 12: & (2 \ 12)(4 \ 10)(6 \ 8) \\ k = 13: & (2 \ 13)(4 \ 11)(6 \ 9). \end{aligned}$$

Allmänt erhålls

$$(2 \ k)(4 \ k-2) \dots (2\mu \ k+2-2\mu), \text{ där } \mu = [\tfrac{1}{4}(k+1)].$$

På motsvarande sätt får vi för en omvänd unisekvens med samma längd som ovan:

$$\begin{aligned} k = 10: & (1 \ 2 \ 9 \ 10)(3 \ 4 \ 7 \ 8)(5 \ 6) \\ k = 11: & (1 \ 2 \ 10 \ 11)(3 \ 4 \ 8 \ 9)(5 \ 6 \ 7) \\ k = 12: & (1 \ 2 \ 11 \ 12)(3 \ 4 \ 9 \ 10)(5 \ 6 \ 7 \ 8) \\ k = 13: & (1 \ 2 \ 12 \ 13)(3 \ 4 \ 10 \ 11)(5 \ 6 \ 8 \ 9). \end{aligned}$$

Vi har alltså

SATS 4. *Fördelningen av approximationskonstanterna $\gamma_{\kappa+m}$ över en unisekvens (3) är beroende blott av dennas längd k och bestäms genom permutationen $(m \ g(m))$, dvs.*

$$(2 \ k)(4 \ k-2) \dots (2\mu \ k+2-2\mu), \quad \mu = [\tfrac{1}{4}(k+1)]$$

om unisekvensen är rak resp.

$$(1 \ 2 \ k-1 \ k)(3 \ 4 \ k-3 \ k-2) \dots (2\mu-1 \ 2\mu \ k+1-2\mu \ k+2-2\mu),$$

$$\mu = [\tfrac{1}{4}(k+2)],$$

om unisekvensen är omvänd.

Denna sats är det kvantitativa uttrycket för vår första huvudsats ([4], § 5): I varje ändlig RK-unisekvens (3) är den inbördes storleks-

ordningsföljden för de tillhörande relativa approximationskonstanterna på ett mod 2 entydigt sätt bestämd genom sekvenslängden k och blott av denna.

4. Tillämpningar. Vi skall i största korthet beröra ett par viktiga tillämpningar av de vunna resultaten. Den ena ansluter sig för övrigt till en uppsats av Pipping [3] i denna tidskrift.

I cirkelarna i figuren har vi med omringade punkter markerat de $[\frac{1}{2}(k+1)]$ minsta γ -värdena. De ligger ingenstans successivt i unisekvensen, men ändå så tätt som möjligt.

Vi betraktar nu ett *halvregelbundet kedjebråk* ([2], § 38)

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \ddots}}$$

$$|a_v| = 1, \quad b_v \geq 1, \quad b_v + a_{v+1} \geq 1, \quad v \geq 1, \\ b_v + a_{v+1} \geq 2 \text{ oändligt ofta.}$$

Detta betecknar vi på liknande sätt som de regelbundna kedjebråken (1): avvikelserna blir den att då en deltaljare a_v är -1 kommatecknet före nämnaren b_v ersätts med semikolon.

Genom Lagrange's transformation (jfr [2], § 40)

$$(17) \quad [b_{v-1}, 1, b_{v+1}] \rightarrow [b_{v-1} + 1; b_{v+1} + 1]$$

kan en delnämnare $b_v = 1$ i RK-utvecklingen (1) elimineras, varigenom ett halvregelbundet kedjebråk uppstår. Flera (icke-successiva) ettor kan elimineras i tur och ordning eller på en gång.

Om vi i exemplet (5) streckar under de ettor i de två första periodernas unisekvenser, vilkas motsvarande γ -värden är minst (jfr fig. 1), så erhålls

$$\xi_0 = 45(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, 90, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, 90).$$

På grund av det i 2 sagda följer understreckningen denna dubbelperiodindelning. Tillämpas (17) på de understreckade etterna, uppstår den halvregelbundna kedjebråksutvecklingen (jfr [5], s. 6)

$$\xi_0 = \sqrt{2081} = 46(; 3; 3; 2, 2; 3; 92; 3; 2, 2; 3; 3; 92).$$

På motsvarande sätt erhålls övergångarna (jfr figg. 3 och 4 samt [5], s. 11, 31)

$$\xi_0 = \sqrt{106} = 10(3, 2, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, 2, 3, 20) \rightarrow 10(3, 3; 2, 2; 3, 3, 20)$$

$$\xi_0 = \sqrt{819} = 28(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, 56) \rightarrow 29(; 3; 3; 3; 3; 58).$$

I dessa två fall ($k \equiv 2 \pmod{4}$) har utvecklingarnas unisekvenser en och samma riktning i samtliga RK-perioder.

De erhållna halvregelbundna kedjebråken, »kedjebråk med ideal relativ approximation», vilka år 1959 konstruerades och undersöktes av förf. [4], kan för godtyckliga reella tal ξ_0 härledas ur talens RK-utvecklingar. Saknar en RK-utveckling delnämnnare $b_n = 1$, är den identisk med den nya utvecklingen, annars ej. Den »idealiskt approximerande» utvecklingen är i Tietze'sk mening ett kortaste kedjebråk. Jämförd med alla andra slag av halvregelbundna kedjebråk saknar den ett maximalt antal av de konvergenter, som ger den (relativt) sämsta approximationen av ξ_0 (andra huvudsatsen, [4], § 6). I detta hänseende är de nya kedjebråken oöverträffbara.

För det andra kan nämnas, att de nya kedjebråken i det fall ξ_0 är $= \sqrt{D}$ (D ett naturligt tal) motsvarar den metod att lösa Bhaskara's ekvation

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

(»Pell's ekvation«), som indierna utvecklade redan för 1500 år sedan. Denna metod, känd som *den cykliska metoden*, motsvarar ett utvecklande av $\sqrt{D}$ i ett kedjebråk, som angavs [1] och undersöktes av Krishnaswami Ayyangar. Dessa endast för kvadratrötter ur heltal definierade kedjebråk sammanfaller (på en oväsentlig avvikelse när) med författarens ur RK konstruerade helt allmänna kedjebråk i detta speciella fall ([4], § 10).

LITTERATUR

- [1] A. A. KRISHNASWAMI AYYANGAR: *A new continued fraction*. "Current science", a monthly journal of science, Bangalore, VI.12 (1938).
- [2] O. PERRON: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, I. Stuttgart 1954.
- [3] N. PIPPING: *Halvregelbundna kedjebråk*. NMT 3 (1955), pp. 96–106.
- [4] C.-O. SELENIUS: *Konstruktion und Theorie halbregelmässiger Kettenbrüche mit idealer relativer Approximation*. Acta acad. Aboensis, math. et phys. XXII.2 (1960).
- [5] C.-O. SELENIUS: *Tafel der Kettenbrüche mit idealer Approximation für Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen*. Acta acad. Aboensis, math. et phys. XXII.10 (1962).

NOTE ON THE DIFFERENCE BETWEEN CONSECUTIVE PRIMES

N. F. GJEDDEBÆK

To clarify considerations the following notations will be useful:

- A is some great prime number (say > 1000).
- $\mathcal{J}$ is an interval on the real axis of length $2 \cdot 3 \cdot 5 \dots A = \prod_{p=2}^A p$ (product over primes only).
- NDA denotes an integer not divisible by any of the primes $2, 3, 5, \dots, A$.
- r.f. denotes the relative frequency of some specified numbers referred to among the integers in $\mathcal{J}$.
- α is a number with certain qualifications.
- Gap means the difference between consecutive NDA's, that is two NDA's between which there is no other NDA. (Eventually, gap also refers to primes.)

Obviously, an NDA which is less than A^2 is a prime and vice versa. Within $\mathcal{J}$ there will be $\prod_{p=2}^A (p-1)$ integers which are NDA's. The r.f. of NDA's is therefore $h_1 = \prod_{p=2}^A \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. We may continue and find that when α and $\alpha + 2$ are both NDA's, the r.f. of α 's is $h_2 = \frac{1}{2} \cdot \prod_{p=3}^A \left(1 - \frac{2}{p}\right)$. Further the r.f. of α 's is $h_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \prod_{p=5}^A \left(1 - \frac{3}{p}\right)$ when α , $\alpha + 2$ and $\alpha + 6$ are all NDA's. And so on.

Consider now a number α , such that α and $\alpha + 6$ are NDA's, but $\alpha + 2$ and $\alpha + 4$ are not. The r.f. of such α 's will be $p(6) = 2h_2 - 2h_3$.

We may write

$$h_2 = 2 \cdot \prod_{p=3}^A \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \cdot \prod_{p=2}^A \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2,$$

$$h_3 = 6 \cdot \prod_{p=5}^A \frac{p(p-3)}{(p-1)(p-2)} \cdot \prod_{p=3}^A \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \cdot \prod_{p=2}^A \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3.$$

For brevity we shall here introduce the following constants:

[200]

$$G_2 = \prod_{p=3}^A \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}, \quad G_3 = \prod_{p=5}^A \frac{p(p-3)}{(p-1)(p-2)}, \quad G_4 = \prod_{p=5}^A \frac{p(p-4)}{(p-1)(p-3)},$$

$$G_5 = \prod_{p=7}^A \frac{p(p-5)}{(p-1)(p-4)}, \quad G_6 = \prod_{p=7}^A \frac{p(p-6)}{(p-1)(p-5)}, \quad G_7 = \prod_{p=11}^A \frac{p(p-7)}{(p-1)(p-6)}$$

and so on. Then we may write $p(6) = 4G_2h_1^2 - 12G_2G_3h_1^3$. To recapitulate, this $p(6)$ is the r.f. of gaps of length 6 between consecutive NDA's. These considerations may obviously be carried further and we obtain for the r.f. of gaps of length 2, 4, 6, ..., 18 and 20 the following formulas:

$$(1) \quad \begin{cases} p(2) = 2\gamma_2 \\ p(4) = 2\gamma_2 \\ p(6) = 4\gamma_2 - 12\gamma_3 \\ p(8) = 2\gamma_2 - 12\gamma_3 + 18\gamma_4 \\ p(10) = \frac{8}{3}\gamma_2 - 18\gamma_3 + 36\gamma_4 \\ p(12) = 4\gamma_2 - 42\gamma_3 + 180\gamma_4 - 135\gamma_5 \\ p(14) = \frac{12}{5}\gamma_2 - 30\gamma_3 + 168\gamma_4 - \frac{405}{2}\gamma_5 \\ p(16) = 2\gamma_2 - 30\gamma_3 + 216\gamma_4 - 405\gamma_5 + \frac{2025}{8}\gamma_6 \\ p(18) = 4\gamma_2 - 69\gamma_3 + 600\gamma_4 - 1485\gamma_5 + \frac{6075}{4}\gamma_6 \\ p(20) = \frac{8}{3}\gamma_2 - \frac{117}{2}\gamma_3 + 696\gamma_4 - 2700\gamma_5 + 6075\gamma_6 - \frac{70875}{32}\gamma_7. \end{cases}$$

(The series may be continued, but we have to stop somewhere.)

γ_j stands for $h_1^j \cdot \prod_{i=2}^j G_i$ (taken over usual integers), while we have

$$G_2 = 0.660, \quad G_3 = 0.721, \quad G_4 = 0.484, \\ G_5 = 0.650, \quad G_6 = 0.455, \quad G_7 = 0.712.$$

Up to this point all is simple algebra though a bit complicated. But let us now look at the situation in the neighbourhood of $x = A^{1.781}$. As suggested by Gauss the relative frequency of primes, $\varphi(x)$, in the neighbourhood of x is approximately equal to $\frac{1}{\log x}$. Mertens' formula

$$\prod_{p=2}^A \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log A} \quad \left(= \frac{e^{-C} \cdot 1.781}{\log x} = \frac{1}{\log x} \right)$$

shows, however, that $\varphi(x)$ is also approximately equal to $\prod_{p=2}^A \left(1 - \frac{1}{p}\right) = h_1$.

After this it lies near to make the conjecture that in the neighbourhood of x the relative frequency of gaps between consecutive primes is given by the formulas (1) if we replace h_1 by $\varphi(x)$ in the γ 's.

Let x be 9820000 and the neighbourhood of x be the interval from 9670000 to 9970000. By counting the gaps of size 2, 4, 6, ..., 18 and 20 between primes in this interval, we find the following:

Counts of gaps between primes in the interval from 9670 000 to 9970 000.

Gap	Found	Formulas	Difference
2	1524	1520	+ 4
4	1532	1520	+ 12
6	2629	2633	- 4
8	1113	1131	- 18
10	1489	1450	+ 39
12	1715	1787	- 72
14	961	968	- 7
16	693	705	- 12
18	1243	1246	- 3
20	646	642	+ 4
> 20	4997	4940	+ 57
Total	18542	18542	0

This result is strongly indicative of the correctness of the formulas (1) also when used for gaps between primes. The formula for $p(2)$ was set up in 1919 by Hardy and Littlewood [1]. Selmer [2] has given a probabilistic derivation of this formula. As yet, it has not been proved rigorously.

The proof of all formulas (1) for the relative frequency of gaps between primes in the neighbourhood of x should possibly be based on the fact that here all primes are NDA's and vice versa. What is needed is a demonstration of the validity of the formulas (1) for NDA's in the neighbourhood of x , in other words that the neighbourhood of x is in a certain sense representative of the whole interval $\mathcal{I}$. As to the r.f. of NDA's it is, indeed, representative so that if the formulas (1) are not valid for the neighbourhood of x , we shall have that the NDA's in this part of $\mathcal{I}$ are organized in a pattern inherently different from that of the rest of $\mathcal{I}$. The author is convinced that this can not be the case. At least, the argument may be given intuitively: If we let A go through the series of primes towards infinity, the neighbourhood of x will simultaneously move along on the real axis. The effect of possible irregularities in the shifting distributions of NDA's will be levelled out as every point on the real axis sooner or later will be covered by the neighbourhood of x when this interval is ranging for instance from $0.99x$ to $1.01x$. The problem is to give the argument a mathematical formulation.

REFERENCES

- [1] G. H. HARDY — J. E. LITTLEWOOD: *Note on Messrs Shah & Wilson's paper*. Proc. Cambr. Phil. Soc. 19 (1919), pp. 245–254.
- [2] E. S. SELMER: *En enkel summasjonsmetode i primtallsteorien, og dens anvendelse på »Bruns sum»*. Norsk Mat. Tidsskr. 24 (1942), pp. 74–81.

BOKMELDINGER

CARL-ERIK FRÖBERG — BENGT SIGURD: *Datamaskiner och deras användning inom vetenskap, administration och språköversättning*. (TEMA-serien 2.) Bibliotekstjänst, Lund 1962. 147 s. Sv. kr. 14.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 218.)

Skandinavisk litteratur om elektroniske datamaskiner har det hittil vært lite av, og det er grunn til å hilse ovennevnte bok med glede. Dens format er beskjedent, men som tittelen forteller har forfatterne satt seg som mål foruten å beskrive maskinene, også å vise hvorledes den elektroniske databehandling radikalt griper inn på mange områder i moderne samfunnsliv.

I bokens første del skisseres den historiske utvikling fra abacus til våre dagers gigantmaskiner. Men samtidig får leseren en innføring i prinsippene for den tekniske oppbygging og programmering av elektroniske regnemaskiner. Uten for meget rent teknisk stoff gis en klar og god introduksjon til moderne utstyr og metoder. Utviklingen av svenske maskintyper har fått en relativt bred plass som naturlig er; svenskene har grunn til å være stolte av sine bidrag til utviklingen på dette område.

Kapitlet om anvendelsesområder innleder med at det aldri før i historien har vært mulig å frembringe så mange feilaktige resultater på så kort tid. Sitatet er anført uten kildeangivelse, og om det er forfatternes egne erfaringer som kommer til uttrykk, deles de nok av de fleste brukere av elektroniske regnemaskiner.

Dagens datamaskiner har nådd et utviklingstrinn som gjør dem teknisk skikket til meget varierte anvendelser, og forfatterne nevner et rikt utvalg. En innvending er at det kanskje nevnes for mange og at gjennomgåelsen er svært summarisk. Leseren får liten hjelp til å se de store linjer i den utvikling som foregår på dette område. Elektronisk databehandling tilstreber vel i mange tilfeller noe mere enn bare problem-løsning. Slagordet er integrering, dvs. å la maskinene også foreta koordineringen mellom områder som har sammenheng med hverandre.

Kapitlet om språkoversettelse gir en meget interessant gjennomgåelse av problemer og metoder, og er en utmerket introduksjon til et emne som for mange sikkert står i et noe uklart lys.

Boken krever ingen spesialiserte forutsetninger, den inneholder utrolig meget stoff og er skrevet på en interesse-vekkende måte.

Kåre Fløisand

DONALD GREENSPAN: *Introduction to partial differential equations.* (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1961. 8+195 pp. sh. 58/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT 9 (1961), s. 182-183.)

Bogen er skrevet som en begynderbog for matematik-, fysik- og ingeniørstuderende og er beregnet til at kunne brukes i et halvårskursus. Fremstillingen, der er givet i en klar og inciterende stil, og samtidig i en moderne og eksakt form, gjør bogen letlæselig. Ved valget af stof inden for den ret begrensede plads har forfatteren ønsket at styre direkte mod nogle af fysikkens mest kendte differentiaalligninger (bølgeligningen, potentialligningen og varmeledningsligningen) og at illustrere, hvorledes man kan løse begynnelses- og randværdiproblemer inden for dette område både ved eksakte og numeriske metoder, de sidstnevnte især med henblik på bruk af elektronregnemaskiner.

De første to kapitler giver et forberedende grundlag i mengdelære, reelle og komplekse funksjoner, sædvanlige differentiaalligninger og Fourierrækker. Denne optakt udgør en tredjedel af hele bogen og begrænser derved omfanget af det egentlige emne unødvendig sterkt. Resten af bogen handler således udelukkende om 2. ordens differentiaalligninger med 2 uafhængige variable. I kap. 3 behandles sådanne ligninger generelt, herunder bl. a. begynnelsesværdiproblemet, karakteristikker, klassifikation og kanoniske former. Kap. 4, 5 og 6 omhandler de ovennævnte tre differentiaalligninger fra fysikken; især er bølgeligningen og potentialligningen (Laplace's ligning) godt og fyldigt behandlet, medens varmeledningsligningen kun drages frem i et ret spesielt tilfælde. Det følgende kapittel om approximative løsningsmetoder giver læseren et udmærket indblik i sådanne metoders natur og de vanskeligheter, der kan være knyttet til deres anvendelse. Det sidste kapittel (kap. 8), der kun er på ca. 5 sider, giver i det store og hele kun henvisninger til yderligere løsningsmetoder.

Litteraturfortegnelsen omfatter 50 monografier, hovedsakelig nyere bøker om emnet.

Til underbyggelse af forståelsen af teorien er bogen rigt utstyret med eksempler, hvilket må fremhæves som et stort fortrin for en bog af denne art. Dertil kommer en lang rekke af oppgaver ved slutningen af hvert

kapitel. Dette opgavemateriale består mest af lette opgaver, men også sværere opgaver er repræsenteret.

Skulle man anføre indvendinger vedrørende detaljer i stoffet, kunne der måske være grund til først og fremmest at hæfte sig ved de heuristiske betragtninger, der ganske vist nok kan have deres berettigelse, men ofte er alt for lange (op til et par sider) i forhold til udbyttet. Dette gælder f. eks. betragtningerne forud for definitionerne 3.5 og 3.6. Endvidere er en del af eksemplerne helt trivielle og kunne uden skade undværes, hvorimod finesserne som regel ikke bliver belyst. Enkelte af opgaverne er for uklart formuleret, det gælder således en del opgaver i kap. 7, hvor der hverken er angivet, hvilken nøjagtighed eller hvilken maskevidde der ønskes. Endelig er det et typografisk minus, at man ikke tydeligt kan se, hvor definitioner og sætninger slutter.

Helhedsindtrykket af bogen er dog absolut gunstigt, og der er ingen tvivl om, at de, der interesserer sig for dette emne og gerne på en lettilgængelig måde vil lære noget derom, vil læse bogen med udbytte og interesse.

Helge Skovgaard

TORD HALL: *Matematik för 1 betyg*. Analys I–II. (NKI-skolans akademiska kurser.) NKI-skolan, Stockholm 1961. Bind I 162 s. Bind II 214 s.

(Innehållsförteckning i NMT 9 (1961), s. 183.)

Föreliggande arbete är en NKI-kurs avsett som komplettering till Hyllén-Cavallius och Sandgrens lärobok *Matematisk Analys I* (nedan kallad HC-S).

Framställningen inleds med att de trigonometriska funktionerna definieras för godtyckliga reella variabelvärden varvid begreppet båg­längd accepteras. Man kan här möjligen ställa sig något tveksam mot att införa dels funktionen $\sin$, dels funktionen Sin ($\sin \frac{\pi}{2} = \text{Sin } 90 = 1$). Ett avsnitt om trigonometriska ekvationer förefaller oproportionerligt långt.

I ett kort avsnitt repeteras första ringens kurs i algebra. Därvid behandlas även rotekvationer, dock utan någon logisk analys av varför man måste »pröva rötterna».

Det därpå följande kapitlet om reella tal inleds med en undersökning av sambandet mellan rationella tal och periodiska decimalbråk. Därefter definieras ett reellt tal som en oändlig följd av siffror. (Genom en lapsus i formuleringen definieras härvid endast reella tal mellan 0 och 10.) Slutligen definieras olikhet mellan ett reellt tal (=sifferföljd) och ett

rationellt tal. Utgående från dessa definitioner *bevisas* därefter det som i HC-S kallas *axiomet* om övre gräns. I detta bevis använder förf. det psykologiska uttryckssättet »välj $\varepsilon \geq 10^{-n}$ » i stället för »välj n så att $\varepsilon \geq 10^{-n}$ «. Något förvirrande är också att förf. talar om *en* undre gräns till en mängd. — Det förefaller tveksamt om detta kapitel kan bidra till nybörjarens förståelse av motsvarande avsnitt i HC-S.

I kapitlet om funktionsbegreppet har det grafiska kriteriet för att en funktion skall ha en invers funktion fått en sådan formulering att den givna funktionen måste ha mängden av *alla* reella tal som värdeförråd för att kunna uppfylla kriteriet.

Vid behandlingen av gränsvärden påpekas att man ej bör använda uttrycket »gränsvärdet går mot A «. Motivering: Funktionsvärdena har uppnått sin gräns och stannat där. (!) — I ett exempel (ex 4, sid 5:6) utföres ett induktionsbevis på ett sätt som anmälaren aldrig sett förut i en lärobok.

I kapitlet om kontinuitet bevisas (i ex 2) att funktionen tg är kontinuerlig i intervallet $-\pi/2 + a < x < \pi/2 - a$ om $0 < a < \pi/2$, ett något förbryllande påstående som läsaren får förklarat först i ex 8 där likformig kontinuitet undersöks.

Därefter behandlas derivator. I ett avsnitt om olikheter av typen $f(x) > 0$ för $x > 0$ använder förf. den opraktiska (men tyvärr inte helt ovanliga) metoden att först visa att $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ för $x > 0$ och sedan med hjälp av begreppet »växande» komma fram till den önskade olikheten. Om man vill visa sträng olikhet är denna metod otymplig; åberopande av medelvärdessatsen blir enklare. — I ett exempel (sid 8:6) har man anledning kvadrera en viss ekvation som efter kvadrering visar sig ha två rötter x_1 och x_2 . Genom prövning visas att x_2 är en falsk rot. Alltså är x_1 en rot. (!)

I kapitlet om geometriska tillämpningar av differentialkalkylen behandlas konvexa funktioner (»konkava uppåt« i förf:s terminologi). Därvid behandlas endast deriverbara funktioner och konvexitet definieras först i en punkt (i en omgivning ligger tangenten under funktionen), därefter i ett intervall (konvexitet i varje punkt av intervallet). Sambandet mellan denna lokala definition och den gängse (kordan ligger över bågen), som används i HC-S, utreds ej. — Därefter följer ett mycket långt avsnitt med analytisk-geometriska problem hörande till gymnasiekursen. Tyvärr höjer sig inte behandlingen över den som brukar utföras i gymnasiet: andraderivatan utnyttjas flitigt, »förenklade andraderivatan» förekommer och läsaren uppmanas att genom derivering (!) bevisa att om f är en positiv funktion så har f och f^n extremvärde för samma variabelvärde. — Behandlingen av extremvärden uppvisar några dunkla

punkter. Av ingressen till avsnittet framgår att förf. avser att använda samma terminologi som HC-S. Därefter anmärkes att man i fortsättningen kommer att anta att den funktion f som skall undersökas är kontinuerlig och att man alltså får en annan definition (av vad? Anm:s fråga.) än HC-S. I en figur finns utritad en funktion som är diskontinuerlig och som i HC-S:s mening har extremvärde i två punkter som är diskontinuitetspunkter. Det anmärks att dessa punkter *inte* är extrempunkter. — I en sammanfattning av bland vilka punkter man skall söka extrempunkterna till en given funktion f har förf. tagit med diskontinuitetspunkterna till f' (vilket är onödigt ty om $f'(x_0)$ existerar och är $\neq 0$ kan x_0 ej vara extrempunkt även om f' är diskontinuerlig i punkten x_0) men utelämnat de punkter där $f'(x_0)$ ej existerar (vilket är fel såvida inte förf. använder den opedagogiska men juridiskt korrekta terminologien att en funktion är diskontinuerlig i de punkter där den inte är definierad).

I kapitlet om integraler har förf. valt att definiera integral på ett annat sätt än HC-S och detta avsnitt avser alltså att ersätta motsvarande punkter i HC-S snarare än att komplettera dem. Förf. definierar integralen som gränsvärdet av Riemannsummorna när indelningens finhet växer. Först sedan denna definition gjorts införes översummor, undersummor och övre gränsen till undersummorna. Slutligen visas att för en kontinuerlig funktion har Riemannsummorna denna övre gräns som gränsvärde.

Två därpå följande avsnitt om obestämda uttryck resp. serier innehåller många bra exempel samt en varning för l'Hospitals regel. Slutligen behandlas båg-längds-, yt- och volymberäkning.

Som ett sammanfattande omdöme om boken kan sägas att de teoretiska delarna inte torde vara någon studerande till större hjälp medan de avsnitt som innehåller många exempel kan vara till glädje för svagare elever.

Jan Lanke

WALTHER LIETZMANN: *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Dritte Auflage. Bearbeitet von Richard Stender. Quelle & Meyer, Heidelberg 1961. 255 S. DM 18.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 219.)

En matematikklærers utdanning består av en akademisk og en pedagogisk del, den omfatter det stoffet en skal undervise i (pluss selvsagt noe mer) og den måten matematikkundervisningen bør skje på. Vi kunne

kort si »hva for noe« og »hvordan«. For den siste delen bruker vi ofte betegnelsen matematikkundervisningens *metodikk*.

Det er vel først i dette århundret at denne metodikken har utviklet seg og funnet en viss form. En av dem som på en vesentlig måte har bidratt til dette er uten tvil tyskeren Walther Lietzmann. Han ble født i 1880, tok studenteksamen i 1899 og døde i 1959. Gjennom de første seksti årene av det 20. århundret har han skrevet lærebøker, artikler og metodikkbøker som er kommet i flere opplag, deltatt i komiteer og foreninger, holdt foredrag og forelesninger og på disse og mange andre måter arbeidet for en bedre matematikkundervisning. Det skal være vanskelig å finne noen som kan peke på en lignende innsats. Hans innflytelse rekker da også langt ut over Tysklands grenser, og fortsatt vil mye av det han skrev være til stor hjelp for matematikklærere både i hans eget og i andre land.

Det er over 40 år siden Lietzmann sendte ut den første utgaven av sin metodikk. Den var i to bind, det første behandlet »Organisation, allgemeine Methode und Technik des Unterrichts« og det andre »Didaktik der einzelnen Gebiete des mathematischen Unterrichts«. Det var et svært verk. I nye utgaver gikk noe stoff ut, annet kom til. Til sist kom en utgave visstnok i ett bind med U. Graf som medarbeider. Endelig kom det i 50-årene igjen en tobinds, noe tynnere utgave med undertitlene »Der Unterricht« og »Der Lehrstoff«.

Det som foreligger nå er en ny utgave i ett bind, bearbeidet av Oberstudienrat Richard Stender, en mann som har atskillig erfaring på de samme områder der Lietzmann virket.

Det var sikkert ingen lett oppgave Stender tok på seg. På den ene siden alt det nye som er kommet til i matematikken og de konsekvenser det må få for matematikkundervisningen, på den andre siden vanskene med å foreta endringer i en bok som er blitt klassisk.

Stender løser problemet på den måten at han presenterer nytt stoff i en særskilt Didaktik (jfr. egen bokmelding nedenfor), mens han ellers nokså nøye følger disposisjonen fra Lietzmanns bøker og så gjør de nødvendige endringer og tilføyelser. Når Lietzmann gir mer presise råd og vink, beholder Stender alt, men når Lietzmann kan hende bruker litt for mange ord, strammer han teksten inn, og der det trengs, føyer han inn nytt stoff. Etter min mening er revisjonen gjort på en utmerket, samvittighetsfull måte. Vi har fremdeles Lietzmanns bok, og kan glede oss over det i den som fremdeles har gyldighet, men samtidig er vi up to date overalt der det er skjedd noe nytt og vesentlig. Stender viser respekt og pietet, men han har sans for det aktuelle og for det nye som kommer.

Fra Lietzmanns 700 sider er det en stor overgang til Stenders 250.

Likevel er alt essensielt med. Vi har i samme bok fått behandlet både stoffet, sett med lærernes øyne, og undervisningen, begge deler naturlig nok særlig med tanke på nybegynnere.

Om en skulle peke på spesielle kapitler, er det ikke lett å gjøre et valg. Personlig liker jeg svært godt 4. kapitel der plangeometrien får en grundig behandling som sikkert mange matematikklærere vil lese med stort utbytte. Her har Stender beholdt det beste fra Lietzmann, skåret vekk det han nå finner er av mindre interesse og erstattet dette med nytt, verdifullt stoff.

Også kapitlet infinitesimalregning er blitt svært leseverdig.

De siste kapitler behandler stoff som en kunne si er på vei inn i skolen (vektorer, sannsynlighetsregning, mengdelære osv.) og gir faglig viten, men først og fremst drøfter forfatteren hvordan dette stoffet best kan innføres i skolen.

Lietzmann-Stenders bok inneholder i det hele så mye godt stoff at jeg på det beste anbefaler den også til nordiske matematikklærere.

Kay Piene

JACOB T. SCHWARTZ: *Introduction to matrices and vectors*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1961. 10 + 163 pp. sh. 43/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT 9 (1961), s. 184.)

Der skrives mange lærebøger om matrixregning i disse år, i reglen som indledning til den lineære algebra. Men få er som nærværende egnet og beregnet til undervisning på gymnasieniveau. Det er i denne forbindelse bemærkelsesværdigt, at skønt matrixbegrebet er godt hundrede år gammelt, og alle de oftest anvendte egenskaber ved vektorer og matricer blev udviklede i løbet af sidste halvdel af det 19. århundrede, trængte disse emner ved mange universiteter først i løbet af 1930'erne frem til en fast plads i begynderkurserne. Imidlertid har den sidste menneskealder også på dette område medført en overordentlig afklaring og forenkling af begreberne, hvilket i forbindelse med deres voksende anvendelsesområder længe har gjort det ønskeligt, at undervisningen i disse emner kunne starte før universitetskurserne. I Danmark vil denne mulighed foreligge, i hvert fald i det små, når den nye gymnasieordning træder i kraft i løbet af de næste år. Der vil da være god grund til at optage elementær matrixalgebra blandt de valgfri emner, som skal studeres ca. 2 måneder i løbet af gymnasiet. Såvel elever som lærere kan i denne forbindelse med fordel støtte sig til nærværende fremstilling.

Som rimeligt er i en så elementær behandling, er matrixbegrebet af-

grænset til kun at omfatte kvadratiske matricer, og bogen indledes med 3 kapitler, hvori regningsarterne addition og multiplikation indføres. Herunder fremhæves bestandig ligheder med analoge regler for de reelle tal og — netop heri ligger den pædagogiske værdi — afvigelser fra disse, som f. eks. vedrørende den kommutative regel for multiplikation og nulreglen. Allerede så tidligt i bogen indføres matrixpolynomier og matrixligninger. Cayley–Hamiltons sætning berøres uden bevis, mens entydigheden af Frobenius' minimums polynomium omtales udførligt; til forskel fra de gængse elementære fremstillinger benyttes netop minimumsligningen til beregning af den reciprokke matrix.

I kapitel 4 indføres vektorer som kvadratiske matricer med lutter nulsøjler højst med undtagelse af den første søjle, og forbindelsen med orienterede liniestykker i planen og rummet etableres. Skalarprodukt og længde af vektorer med n koordinater (i første søjle) indføres og Cauchy–Schwarz' ulighed bevises. I slutningen af kapitlet omtales i den indførte terminologi løsning af visse typer af systemer af lineære ligninger.

I kapitel 5 omtales matrixfremstillinger af komplekse tal og kvaternioner, mens kapitel 6 behandler transponering, spor og forbindelsen mellem på den ene side det vektorielle produkt af vektorer (kaldet »cap product«) og på den anden side Lie produktet af matricer (kaldet »cross product«); forbindelsesleddet er skævsymmetriske matricer af 3. orden.

Kapitlerne 7 og 8 behandler ganske kort begreberne egenverdier og egenvektorer samt uendelige rækker af matricer. Som man vil se, er der trods bogens beskedne omfang og let forståelige, brede stil omtalt en overraskende mængde af emner. Kun få trivielle trykfejl blev bemærket på følgende sider: p. 59, 108, 124, 130, 135, 148, 160.

Flemming P. Pedersen

RICHARD STENDER: *Didaktische Themen aus der neueren Mathematik*. Quelle & Meyer, Heidelberg 1962. 71 S. DM 7.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 221.)

Denne boka er faktisk »Høyere matematikk sett fra et elementært standpunkt« for å vende om titelen på Felix Kleins velkjente bok. Inspirert bl. a. av reformarbeidet i OECD's regi vil Stender som et supplement til sin metodikk (jfr. anmeldelse ovenfor av Lietzmanns bok) innføre matematikklærerne i disipliner som nå er på marsj inn i skolen, men som mange av dem neppe har støtt på i sitt universitetsstudium.

Boka er på 70 sider, så det er ikke så mye som blir sagt i hvert enkelt avsnitt; til gjengjeld er det mange litteraturhenvisninger. Avsnittene er godt valt, for det som behandles er: mengdelære, funksjonsbegrepet, matematikk og logikk, irrasjonale tall, infinitesimalregning, differensialligninger, hyperbelfunksjoner, matriser og determinanter samt moderne algebra.

Her er mange nyttige og verdifulle merknader. Helt riktig sier Stender at innføringen av den tomme mengde kan volde vansker. Men det faktum at denne mengden er undermengde av enhver mengde kunne nok ha trengt en grundigere omtale.

Jeg er helt enig med Stender når han bygger funksjonsbegrepet på mengdeteoretiske betraktninger. Dette er vel ment å være et mønster for undervisningen. Derimot synes avsnittet om matematikk og logikk mer beregnet på læreren enn eleven, jfr. det sitatet av Freudenthal som innleder § 3. Også avsnittet om irrasjonale tall gir mest bakgrunnsstoff. Hvordan reelle tall best skal innføres i skolen, er nok i det hele tatt et vrient spørsmål.

Jeg tror det er helt riktig at differensialligninger kommer inn i skolen, som et lite avrundet kapittel med eksistensbevis. (Dette ordet mangler hos Stender, såvidt jeg kan se.) Derimot ville jeg ikke ta med hyperbelfunksjonene i skolen. Determinanter og matriser kan vel forsvare å komme med, dersom det er plass; det er utmerket oppgavestoff, men lenger enn til tre linjer og tre spalter bør en ikke gå.

For alle som ønsker reform i matematikkundervisningen er Stenders bok en utmerket hjelper full av gode ideer og impulser.

Kay Piene

EDUARD STIEFEL: *Einführung in die numerische Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1961. 234 S., 36 Fig. Leinen DM 24.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT 9 (1961), s. 184.)

Den numeriske matematik falder egentlig i to afdelinger, nemlig for det første den egentlige numeriske analyse, der beskæftiger sig med fremstillingen af forsvarlige metoder til numerisk løsning af analytiske problemer, og for det andet regnetekniken, der omsætter de fundne metoder til praktiske regneprocedurer. Denne sidste del er ofte ikke den mindst vanskelige, idet den i så høj grad er afhængig af de tekniske hjælpemidler, der står til disposition. Selv en så simpel iterativ procedure som en kvadratrodsbestemmelse kan i almindelighed ikke med fordel udføres ens på de forskellige typer af bordmaskiner. Af let forståelige

grunde beskæftiger nyere værker om numerisk matematik sig hovedsagelig med metoder, der er velegnede for elektroniske regnemaskiner.

Stiefel har i sin bog ikke præciseret, for hvilket regneudstyr de anførte metoder er tænkt, men metoderne selv og de anførte eksempler synes at tyde på, at forfatteren nærmest henvender sig til et publikum, der ikke har adgang til udstyr udover elektriske bordmaskiner, selvom flere af de anførte metoder er fuldt anvendelige for elektroniske maskiner.

Som det vel kan være naturligt for en begynderbog, udmærker Stiefels bog sig mere ved omfanget af de behandlede emner end ved dybtgående behandling af de enkelte metoder, men man kunne dog ønske, at forfatteren i højere grad havde været opmærksom på, at læseren ikke altid umiddelbart vil se begrænsningen i de enkelte metoder.

Bogen er i sit oplæg meget elementær. De første fem kapitler forudsætter således end ikke kendskab til differentialregning, der dog indføres som en særlig proces kaldet linearisering. Den elementære behandlingsmåde fører ikke sjældent til en levende og anskuelig fremstilling af baggrunden for de forskellige behandlede problemer.

Ved gennemlæsning af indholdsfortegnelsen noterer man med tilfredshed, at man her står overfor en forfatter, for hvem numerisk analyse ikke er synonymt med interpolationsregning, der efter anmelderens mening optager for fremtrædende en plads i ældre lærebøger i numerisk matematik. På den anden side kan man ikke undlade at undre sig over, at en så enkel og let håndterbar metode som Aitken-Neville interpolation end ikke er nævnet.

Den lineære algebra, der er omtalt i første kapitel, er behandlet uden anvendelse af matricer og kan derfor forekomme en smule tung i fremstillingen. Denne hviler på udskiftningsprincippet, hvorved en lineær sammenhæng $Y = AX$ erstattes med en ækvivalent $Y' = A'X'$, hvor søjlematricerne Y' og X' fremgår af Y og X ved ombytning af et element i den ene med et element i den anden.

Som praktisk løsningsmetode for lineære ligninger er angivet den Gaussiske eliminationsmetode, omend i en fremstilling, der er mere egnet til at illustrere det grundlæggende princip end til at give en praktisk farbar vej i tilfælde af lidt større ligningssystemer.

Forfatteren bør i høj grad roses, fordi han har medtaget så vigtige emner som lineær programmering og udjævning i Chebyshefsk forstand. Selv om fremstillingen måske er lidt skitsemæssig, udgør bogens andet kapitel dog en udmærket introduktion i dette emne.

Den ikke lineære algebra i kapitel 3 er behandlet med ret klassiske metoder, såsom funktionel iteration, Newtons metode, Horners skema etc. Hertil kommer som venteligt fra en schweizisk forfatter en fremstil-

ling af Rutishausers *QD*-algoritme anvendt på algebraiske ligninger. Fremstillingen er klar, og dens anvendelsesmuligheder er tydeligt angivet. Derimod tilslører de valgte eksempler i nogen grad den omstændighed ved metoden, at det undertiden kan være nødvendigt at arbejde med et betydeligt cifferantal for at opnå en selv beskeden nøjagtighed i de fundne resultater.

Egenværdiproblemerne i kapitel 5 er fortrinsvis behandlet ved en algoritme til bestemmelse af det karakteristiske polynomium, der derefter må tænkes løst ved een af de i det foregående kapitel angivne metoder. Om denne metode til bestemmelse af egenværdier er at foretrække, hører til de ikke afklarede problemer inden for den numeriske analyse.

I kapitlet om differentiaalligninger finder man et af bogens morsomste afsnit, nemlig behandlingen af numerisk integration ved fortsat halvering. Dette emne er af forfatteren tidligere behandlet i tidsskriftartikler, hvor han har givet bevis for de af Romberg fremsatte formodninger. Metoden giver et godt eksempel på, hvorledes man med en enkel regneteknik kan opnå meget nøjagtige resultater. Eksperimenter med metodens egnethed for elektroniske maskiner er i øjeblikket i gang her i landet.

Bogens syvende og sidste kapitel er viet approximation af funktioner. Fremgangsmåden har her været en udnyttelse af den Lagrangeske interpolationsformel, der via sin anvendelse på komplekse støttepunkter fører til Fourieranalyse og Chebyshefudvikling.

I det første af de to tillæg vises i en række gennemregnede eksempler forskellige praktiske opstillinger, der med fordel kan benyttes ved anvendelsen af de beskrevne metoder.

Det andet tillæg indeholder en del nyttige formler og tabeller.

Stiefels *Einführung in die numerische Mathematik* er en bog, der absolut kan anbefales enhver, der gerne vil stifte bekendtskab med den numeriske matematik. Det er en nyttig bog, der både i kraft af sit indhold og udstyr er såre letlæst.

Bj. Svejgaard

WILLIAM J. LEVEQUE: *Elementary theory of numbers*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 8 + 132 pp. \$ 5.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 94.)

Denna lärobok är på sätt och vis en omarbetning av förf:s kända *Topics in number theory*, del 1. Från och med kap. 5 avviker emellertid själva lärostoffet: de kvadratiske resterna har utgått liksom det svåraste avsnittet, det om talteoretiska funktioner. I stället har kedjebraåkens elementäraste egenskaper och gaussiska heltal medtagits. Dessa kapitel

är mycket välavvägda, jämförelsen mellan talkropparna $Z(i)$ och $Z(\sqrt{10})$ är metodiskt lyckad. Litet obestämd analytik, främst »Pells» ekvation, dock utan tillämpningarna från Topics, behandlas i slutkapitlet. Boken upptar inte alls kvadratiske former (som Davenport), ej heller printalsfördelning eller högregradsekvationer (Nagell).

Också framställningen skiljer sig påtagligt från den förra bokens. Den är tillrättalagd för ett lägre stadium (secondary, undergraduate), som här får lära känna »den gren av matematiken, där studenten möter den största variation i bevis typer» och »enkla problem, som stimulerar hans intresse, prövar hans förmåga och skärper hans matematiska stringens». Det kan nämnas, att av dessa och andra skäl både School mathematics study group och Committee on undergraduate programs i USA — trots det militärt-praktiska drag »den nya vågen» där borta har — förordar undervisning i *talteori* på highschool- och college-stadiet.

Bevisen är utförligare och övningsuppgifterna fler än i Topics. Satserna belyses i rätt många fall med enkla exempel. I jämförelse med dessa är många av uppgifterna krävande, men de är utvecklande och fullständiga texten. Allt detta gör att vi i LeVeques nya bok har fått en utmärkt kursbok för nybörjare, en som därtill är typografiskt tilltalande. Markeringen av bevis slut med små trianglar är åskådlig, där emot inte satsernas utbrytning ur texten. Numreringen av satser och formler är inte löpande (ett modernt fel?).

En noggrannare genomläsning föranleder endast några helt betydelselösa anmärkningar. I beviset till teorem 7-8 bör väl $1 < \delta < \gamma^2$ ändras till $1 < \delta \leq \gamma^2$. I beviset till 5-8 hänvisas till formel (15), vilket inte kan stämma. »Tryckfel» berörande väsentligheter finner vi på s. 13, 36, 65, 114 och 132. Opåkallat är det väl att beteckna kedjebråksutvecklingar med klausul i stället för med klammer (den förra betecknar f. ö. även mängder).

Det är naturligt att en kursbok för detta stadium i flera hänseenden motsvarar gängse böcker, t. ex. Davenports. Så belyses i dessa två aritmetikens fundamentalsats med det eleganta — från Hilbert stammande — exemplet med talmängden $4k+1$, inom vilken faktoruppdelningen är flertydig. Så upptar bägge böckerna det intressanta kinesiska restteoremet. LeVeques bok saknar Davenports noter och källhänvisningar. Men den ger i gengäld i inledningen en strålande framställning av talteorins väsen, grunder och metodik. En förtjänst är att metodiken och ändamålet med resonemangen genomgående preciseras, något som ofta försummas, fastän det har stor pedagogisk betydelse.

Clas-Olof Selenius

B. L. VAN DER WAERDEN: *Algebra, II*. Vierte Auflage. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 34.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959. 9 + 275 S. DM 29.60.

(Innholdsfortegnelse i NMT 8 (1960), s. 46.)

I 1960 og 1959 kom henholdsvis første og annet bind av van der Waerdens algebra igjen i nye utgaver. Første bind er det så vidt vi kan se ikke endret noe på, men annet bind har undergått vesentlige forandringer, slik at det er god grunn til å gi en omtale av dette bindet. Annet bind i de tidligere utgaver åpnet med et kapittel om eliminasjonsteori. Dette kapitlet er i den siste utgaven sløyfet til fordel for to helt nye kapitler — et om algebraiske funksjoner av en variabel og et om topologisk algebra. La det være sagt med en gang at dette er et meget heldig bytte som har økt verdien av annet bind i en vesentlig grad. Teorien for algebraiske funksjoner av en variabel er en usedvanlig sentral og fin teori som tillater mange behandlingsmåter: Funksjonsteoretisk, geometrisk og rent algebraisk. Det er selvfølgelig det sistnevnte synspunkt som presenteres her, og det er da først og fremst valuasjonsteori som kommer til anvendelse. Van der Waerden nøyer seg med å føre teorien frem til beviset for Riemann-Roch's sats som jo er teoriens mest sentrale resultat. Fremstillingen skiller seg ikke vesentlig fra hva man f. eks. finner i Chevalley's bok »Introduction to the theory of algebraic functions of one variable«, skjønt van der Waerden gjør mer bruk av formelle Laurentrekker og har en litt annen behandling av differensialer. I det vesentlige er det Weil's bevis for Riemann-Roch's sats som gis begge steder.

Kapitlet om topologisk algebra åpner med elementære egenskaper ved topologiske grupper, topologiske vektorrom, topologiske ringer og topologiske kropper. Spesielt vises det hvorledes disse topologisk-algebraiske strukturer kan kompletteres. I forbindelse med topologiske kropper er det naturlig å spørre hvorledes topologien må være for at den kan defineres ved en valuasjon. Det er meget nyttig at van der Waerden har tatt med et avsnitt som behandler dette spørsmålet, som først ble studert av Kaplansky, Zelinsky, Fleischer, Kowalsky og Dürbaum. På dette punkt synes ikke van der Waerdens kjennskap til litteraturen å være helt prikkfri. Hverken Zelinsky eller Fleischer er nevnt. — Kapitlet over topologisk algebra avsluttes med en berømt sats av Pontrjagin som sier at en lokalkompakt, sammenhengende, ikke nødvendigvis kommutativ, topologisk kropp er isomorf (og homeomorf) enten med kroppen av de reelle tall, kroppen av de komplekse tall eller den ikke-kommutative kroppen av kvaternionene.

Også ellers i boka er det kommet med mange nye ting i forbindelse

med de kapitler som var med i forrige utgave. Alt i alt har dette annet bind vunnet stort på de forandringer som er gjort, og van der Waerdens bok vil utvilsomt også i fremtiden øve en stor innflytelse ved utdannelsen av unge matematikere.

K. E. Aubert

MOTTATTE BØKER

A. R. Amir-Moez — A. L. Fass: *Elements of linear spaces*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 26.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1962. 9 + 149 pp. sh 35/-; \$ 5.50.

Real Euclidean space 1-15 * Linear transformations and matrices 16-27 * Determinants and linear equations 28-36 * Special transformations and their matrices 37-46 * Characteristic equation of a transformation and quadratic forms 47-59 * Unitary spaces 61-66 * Linear transformations, matrices and determinants 67-78 * Quadratic forms and application to geometry 79-99 * Applications and problem solving techniques 100-113 * Some algebraic structures 115-122 * Linear transformations in general vector spaces 123-131 * Singular values and estimates of proper values of matrices 132-142 * Appendix 143-145 * Index 147-149.

Charles F. Brumfiel — Robert E. Eicholz — Merrill E. Shanks: *Algebra, II*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 13 + 466 pp. \$ 4.00.

Numbers and number systems 3-9 * Rational numbers 11-59 * Real numbers 61-91 * Roots, radicals, and quadratic equations 93-119 * Complex numbers 121-149 * Relations and functions 151-201 * Polynomials and rational functions 203-241 * Exponential notation, radicals, and algebraic functions 243-271 * Exponential functions 273-281 * The logarithm functions 283-305 * Trigonometry 307-345 * Mathematical induction and sequences 347-365 * Systems of equations 367-389 * Permutations, combinations, probability, and the binomial theorem 391-417 * Tables 418-421 * Answers to selected exercises 422-461 * Index 462-466.

Werner Burau: *Algebraische Kurven und Flächen, II*. (Sammlung Götschen 436/436a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. 162 S. DM 5.80.

Literaturverzeichnis 5 * Einleitung 7-13 * Algebraische Flächen 2. und 3. Grades 14-90 * Algebraische Raumkurven 91-159 * Sachregister 160-162 * Namenregister 162.

Robert D. Carmichael — Edwin R. Smith: *Mathematical tables and formulas*. (Dover books S 111.) Dover Publications, New York 1962. 8 + 269

pp. \$ 1.00. (Distribueres i Danmark av Arnold Busck's Boghandel, København; i Norge av Johan Grundt Tanum, Oslo; i Sverige av Importbokhandeln, Stockholm.)

Introduction 1-8 * Common logarithms 10-49 * Important constants 50 * Logarithmic trigonometric functions 51-95 * Logarithmic sines and tangents of small angles 96-113 * Natural trigonometric functions 114-159 * Four-place logarithms and antilogarithms 160-163 * Diverse trigonometric tables 164-170 * Powers, roots, and reciprocals 171-191 * Natural logarithms 192-201 * Exponential and hyperbolic functions 202-208 * Multiples of M and of $1/M$ 209 * Ten-place logarithms of prime numbers 210 * Formulas and theorems from algebra, elementary geometry, trigonometry, analytic geometry and calculus 211-231 * Graphs for reference 231-240 * Table of integrals 241-265 * Infinite series 266-269.

André Delachet: *Contemporary geometry*. Translated from the French by Howard G. Bergmann. (Dover books S 988.) Dover Publications, New York 1962. 19 + 94 pp. \$ 1.00. (Distribueres i Danmark av Arnold Busck's Boghandel, København; i Norge av Johan Grundt Tanum, Oslo; i Sverige av Importbokhandeln, Stockholm.)

Historical introduction ix-xix * The algebraic origin of groups 3-17 * Geometries and abstract spaces 21-34 * Topology 37-41 * Continuity in geometry 42-59 * Various aspects of topology 60-78 * Applications of topology 79-86 * Conclusion 87-88 * Index 89-94.

L. Fox: *Numerical solution of ordinary and partial differential equations*. (Summer School — Oxford 1961.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1962. 9 + 509 pp. sh. 70/-; \$ 10.50.

Ordinary differential equations (15 papers by L. Fox, D. F. Mayers, R. A. Buckingham, M. J. D. Powell) 3-202 * Introduction to partial differential equations (8 papers by L. Fox, J. E. Walsh) 205-312 * Practical problems in partial differential equations (12 papers by J. E. Walsh, A. E. Glennie, N. E. Hoskin — B. W. Pearson, D. S. Butler, A. R. Curtis, L. H. Underhill — L. M. Russel, J. B. Parker, I. C. Pull, I. C. Pyle, H. Motz, E. Knighting) 315-493 * References 494-501 * Index 502-509.

Carl-Erik Fröberg: *Lärobok i numerisk analys*. Svenska Bokförlaget/Bonniers (Scandinavian University Books), Stockholm 1962. 4 + 277 s. Sv. kr. 37.00, inb. Sv. kr. 43.00.

Numeriska beräkningar 1-11 * Ekvationer 12-34 * Matriser 35-59 * Lineära ekvationssystem 60-78 * Matrisinversion 79-84 * Algebraiska egenvärdesproblem 85-104 * Lineära operatorer 105-117 * Interpolation 118-138 * Numerisk derivation 139-142 * Numerisk kvadratur 143-167 * Summation 168-184 * Multipelintegraler 185-189 * Differensekvationer 190-198 * Ordinära differentialekvationer 199-221 * Partiella differentialekvationer 222-235 * Approximation 236-254 * Monte Carlo-metoden 255-262 * Lineär programmering 263-273 * Register 274-277.

Carl-Erik Fröberg — Bengt Sigurd: *Datamaskiner och deras användning inom vetenskap, administration och språköversättning*. (TEMA-serien 2.) Bibliotekstjänst, Lund 1962. 147 s. Sv. kr. 14.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 203–204.)

Maskinerna: byggnad och funktion 9–58 * Användningsområden 59–96 * Språköversättning 97–124 * Spel 125–133 * Tänkande maskiner? 134–139 * Framtidsutsikter 140–141 * Kort bibliografi 142 * Register 143–147.

B. V. Gnedenko — A. Ya. Khinchin: *An elementary introduction to the theory of probability*. Translated from the Russian by Leo F. Boron. (Dover books T 155.) Dover Publications, New York 1962. 12+133 pp. \$ 1.45. (Distribueres i Danmark av Arnold Busck's Boghandel, København; i Norge av Johan Grundt Tanum, Oslo; i Sverige av Importbokhandeln, Stockholm.)

The probability of an event 3–10 * Rule for the addition of probabilities 11–17 * Conditional probabilities and the multiplication rule 18–26 * Consequences of the addition and multiplication rules 27–37 * Bernoulli's scheme 38–48 * Bernoulli's theorem 49–56 * Random variables and distribution laws 59–64 * Mean values 65–73 * Mean value of a sum and of a product 74–79 * Dispersion and mean deviations 80–92 * Law of large numbers 93–99 * Normal laws 100–117 * Conclusion 118–122 * Table of values of the function $\Phi(x)$ 123 * Bibliography 125–127 * Index 129–133.

R. L. Goodstein: *Fundamental concepts of mathematics*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 22.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1962. 8+279 pp. sh. 40/–.

Numbers for counting 5–92 * Numbers for profit and loss and numbers for sharing 93–135 * Numbers unending 136–198 * Classes and truth functions 199–240 * Network and maps 241–276 * Index 277–279.

H. Kr. Hansen: *Grundlæggende aritmetik 2 for teknisk forberedelseseksamen*. Gyldendal, København 1962. 108 s. D. kr. 9.50.

Kvadrat- og kubikrod 7–26 * Kvadratrods- og kubikrodsuddragning 27–50 * Den kvadratiske ligning (u/formel) 51–57 * Den kvadratiske lignings formel 58–69 * Logaritmer 70–90 * 1. gradsligningens grafiske fremstilling 91–103 * Blandede opgaver 104–108.

Richard E. Johnson — Lona Lee Lendsey — William E. Slesnick — Grace E. Bates: *Modern algebra. Second course*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 12+594 pp. \$ 4.25.

Numbers 1–42 * Equations and inequalities of the first degree 43–94 * Second-degree equations and inequalities 95–126 * The complex number system 127–163 * Conic sections and their equations 164–206 * Exponents and radicals 207–222 *

Logarithms 223–265 * Functions 266–297 * Polynomials 298–343 * Mathematical induction 344–373 * Problems of counting 374–424 * Probability 425–484 * Trigonometry 486–539 * Vector algebras 540–575 * Tables 579–583 * Greek alphabet 583 * Bibliography 584–585 * Index 589–594.

Walther Lietzmann: *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Dritte Auflage. Bearbeitet von Richard Stender. Quelle & Meyer, Heidelberg 1961. 255 S. DM 18.00.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 207–209.)

Verzeichnis der Abkürzungen 10 * Ziele des mathematischen Unterrichts 11–32 * Wege der Unterrichtsführung 33–67 * Die Reformbewegung im mathematischen Unterricht 68–73 * Das mathematische Lehrbuch 74–76 * Der Mathematikunterricht im 5. und 6. Schuljahr 77–106 * Elementare Algebra 107–130 * Ebene Geometrie 131–154 * Ebene Trigonometrie 155–162 * Geometrie des Raumes 163–171 * Arithmetik 172–178 * Infinitesimalrechnung 179–193 * Die Vektormethode auf der Schule 194–206 * Kegelschnittlehre 207–221 * Die komplexen Zahlen 222–233 * Kugelgeometrie 234–246 * Einführung in die Mengenlehre 247–250 * Ausblick 250 * Personenverzeichnis 251–253 * Sachverzeichnis 253–255.

Paul Lorenzen: *Formale Logik*. (Sammlung Götschen 1176/1176a.) Zweite Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. 165 S. DM 5.80.

Einleitung 4–7 * Syllogistik 7–30 * Klassische Logik der Junktoren 30–56 * Kalküle der Junktorenlogik 57–67 * Effektive Logik der Junktoren 68–100 * Logik der Quantoren 101–136 * Logik der Gleichheit 137–159 * Literaturverzeichnis 160–161 * Namenverzeichnis 162 * Sachverzeichnis 162–164 * Symbolverzeichnis 165.

M. M. Postnikov: *Foundations of Galois theory*. (International series of monographs on pure and applied mathematics 29.) Translated from the Russian by Ann Swinfen. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1962. 10 + 109 pp. sh. 42/–.

The elements of field theory 1–15 * Necessary facts from the theory of groups 16–24 * Galois theory 25–41 * Additional facts from the general theory of groups 45–57 * Equations solvable by radicals 58–72 * The construction of equations solvable by radicals 73–91 * The unsolvability by radicals of the general equation of degree $n \geq 5$ 92–109.

Recent developments in general relativity. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris; PWN — Polish Scientific Publishers, Warszawa 1962. 472 pp. sh. 55/–; \$ 8.00.

Part I (7 papers by S. Bazański, P. G. Bergmann — A. B. Komar, H. Bondi, V. L. Ginzburg, A. Lichnerowicz — Y. Fourès-Bruhat, F. A. E. Pirani, M. A. Tonnelat) 13–118 * Part II (38 papers by J. L. Andersson, R. L. Arnowitt — S. Deser — C. W. Misner, S. Bazański, F. J. Belinfante, W. B. Bonnor, O. Costa de Beaure-

gard, B. S. DeWitt, P. A. M. Dirac, J. Ehlers, V. Fock, T. Gold, I. Goldberg, J. N. Goldberg, S. N. Gupta, P. Havas, P. Jordan, O. Klein, W. Kundt — B. Hoffmann, C. Lanczos, B. E. Laurent, L. Marder, I. Ozsvath — E. Schücking, A. Papapetrou — H. Treder, A. Peres — N. Rosen, A. Z. Petrov, G. Rosen, R. Sachs, A. Schild, D. W. Sciama, J. L. Synge, A. H. Taub, A. Trautman, B. Tulczyjew — W. Tulczyjew) 121–472.

Francis J. Scheid: *Elements of finite mathematics*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 7+279 pp. \$ 5.00.

Professor Boole and the poker players 1–60 * What is a number 61–120 * Combinatorial analysis 121–176 * What are the chances 177–262 * Answers to odd-numbered problems 265–272 * Index 275–279.

Abraham Spitzbart — Ross H. Bardell: *Introductory algebra and trigonometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 10+389 pp. \$ 5.50.

The real number system and fundamental operations 1–25 * Special products and factoring 26–45 * Fractions 46–62 * Exponents and radicals 63–85 * Coordinate geometry and functions 86–105 * The trigonometric functions 106–124 * Linear equations and systems of linear equations 125–146 * Quadratic equations and the quadratic function 147–167 * Circle relations, right triangles 168–191 * Graphs of the trigonometric functions 192–200 * Inverse trigonometric, exponential, and logarithmic functions 201–232 * Properties of the trigonometric functions 233–264 * Systems of equations involving quadratics 265–280 * Progressions 281–295 * The solution of oblique triangles 296–317 * Complex numbers 318–332 * Answers to odd-numbered exercises 335–365 * Tables 368–380 * Index 383–389.

K. Steinbuch: *Taschenbuch der Nachrichtenverarbeitung*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962. 16+1521 S., 1295 Fig. Ganzleinen DM 98.00.

W. de Beaclair, Geschichtliche Entwicklung 1–39 * S. W. Wagner, Begriffsbestimmungen 39–100 * H. Zemanek, Logische Algebra und Theorie der Schaltnetzwerke 100–162 * O. Schäfer, Theorie elektrischer Schaltvorgänge 162–181 * E. Schaaff, Röhren einschliesslich Zählröhren 182–210 * F. Weitzsch, Halbleiterdioden und Transistoren 211–248 * O. Eckert, Magnetische Bauelemente 248–289 * H. Kazmierczak, Wandler 289–339 * O. Lörcher, Stromversorgung 339–426 * K. Sobotta, Relaischaltkreise 427–441 * H.-J. Dreyer, Dioden-Schaltkreise. Transistor-Schaltkreise. Röhren-Schaltkreise 442–481 * Th. Einsele, Magnetische Schaltkreise 482–510 * H. Billing — A. Rüdiger, Das Parametron 510–521 * H. Billing, Übersicht und Begriffe. Schieberegister. Zähler 522–558 * H. Billing — W. Anacker, Matrizenspeicher 558–589 * H. Zschekel, Magnetomotorische Speicher 589–625 * H. Billing — H. Oehlmann, Speicherröhren. Photographische Speicher 625–637 * H. Billing, Laufzeitspeicher 637–644 * H. Billing — H. Oehlmann, Tieftemperaturschaltkreise und -speicher 644–654 * A. Stecher, Tastenfelder 655–663 * K. Sobotta, Digitale Anzeigevorrichtungen 663–667 * S. Voelcker — S. Kohler, Fernschreibgeräte, Lochbandgeräte 668–699 * G. Glombitza, Elektrische

Schreibmaschinen 699–710 * G. Mehlhose, Lochkartenmaschinen 710–733 * G. Stütz, Mechanische Schnelldrucker 733–741 * M. Preislinger, Nichtmechanische Schnelldrucker 742–756 * W. Krägeloh, Analog/Digital- und Digital-Umsetzer 756–778 * K. Bauer, Kurven- und Punktschreiber 779–799 * K. Steinbuch, Automatische Zeichenerkennung 800–830 * W. Meyer-Eppler, Automatische Spracherkennung. Synthetische Sprache 831–856 * J. Erben — L. Jakob, Telegraphie-Übertragungstechnik 857–899 * J. Erben — K. Schüssler, Schnellübertragung digitaler Informationen 900–911 * E. Weber, Fernmess- und Fernwirktechnik 911–934 * O. Schäfer, Kontinuierliche Regelkreise 935–963 * H. Kaufmann, Digitale Systeme in Regelkreisen 963–981 * W. Grieger, Fördertechnik 982–1008 * W. Handler, Digitale Universalrechenautomaten 1009–1139 * R. Piloty, Datenverarbeitung 1140–1158 * E. Kettel, Funktionsgruppen von Analogsystemen 1159–1218 * G. Meyer-Brötz, Analogrechensysteme und Simulatoren 1218–1241 * K. J. Lesemann, Ziffern-Integrieranlagen 1241–1253 * W. Simon, Maschinensteuerungen 1253–1273 * M. Woitschach, Automatische Bibliothek 1273–1313 * G. Liske, Automatische Briefverteilanlagen 1313–1329 * H. Bottenbruch, Programmierung 1330–1398 * K. J. Lesemann, Programmierung 1398–1417 * H. Zemanek, Lernende Automaten. Biologische, psychologische und technische Sicht. Formen menschlichen Lernens. Typen lernender Automaten. Spezielle Lernmodelle. Bedingte Wahrscheinlichkeit für Lernverfahren. Verschiedene Lernstrukturen. Spezielle Automaten. Problemlösung. Selbstorganisierende Systeme. Schlussbemerkung 1418–1480 * K. Küpfmüller, Nachrichtenverarbeitung im Menschen. Wahrnehmungen. Äusserungen und Tätigkeiten 1481–1501 * Sachverzeichnis 1502–1521.

(Bei allen Seitenangaben ist Literatur eingefasst.)

Richard Stender: *Didaktische Themen aus der neueren Mathematik*. Quelle & Meyer, Heidelberg 1962. 71 S. DM 7.00.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 210–211.)

Die naive Mengenlehre in der Unter- und Mittelstufe unserer Gymnasien 5–12 * Der mengentheoretische Funktionsbegriff 12–15 * Mathematik und Logik im Schulunterricht 16–34 * Schulische Wege zu den irrationalen Zahlen 35–39 * Möglichkeiten einer schulischen Neugestaltung der Infinitesimalrechnung 39–49 * Differentialgleichungen auf der Schule 50–59 * Die Hyperbelfunktionen 59–62 * Matrizen und Determinanten 62–66 * Sinn und Aufgabe der modernen Algebra 66–69 * Personen- und Sachregister 70–71.

Elbridge P. Vance: *Modern algebra and trigonometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 10 + 374 pp. \$ 5.50.

Sets and numbers 1–19 * The algebra of numbers as a logical system 20–32 * Extensions of the logic of algebra 33–63 * Inequalities, absolute values, and coordinate systems 64–86 * Functions and their graphical representation 87–98 * The circular functions 99–143 * Linear and quadratic functions 144–188 * Determinants 189–205 * Polynomial functions 206–219 * Inverse functions 220–232 * Permutations, combinations, and the binomial theorem 233–249 * Mathematical induction 250–256 * Exponential and logarithmic functions 257–279 * Applications of the circular functions 280–292 * Applications of the circular functions to angles 293–321 * Complex numbers 322–337 * Tables 338–350 * Answers to selected odd-numbered problems 351–369 * Index 370–374.

G. Velsing-Rasmussen: *Regningens psykologi*. (Gyldendals Pædagogiske Bibliotek.) Gyldendal, København 1962. 236 s. D. kr. 19.00.

Grundlaget for vort tal- og regnesystem 11-18 * Udviklingen af talbegreb i førskolealderen 19-36 * Undervisningsplaner for regning i folkeskolen 37-55 * Motivationens betydning 56-73 * Betydningen af forståelse og indsigt 74-90 * Den grundlæggende regneundervisning 91-142 * Anvendt regning 143-165 * Børns forståelse af regneudtryk 166-171 * Bedømmelse af regnefærdighed 172-191 * Undersøgelser over regneprocessens forløb 192-204 * Årsager til regnevanskeligheder 205-221 * Behandling af regnevanskeligheder 222-227 * Litteratur 228-232 * Sag- og navneregister 233-236.

Charles Wexler: *Analytic geometry. A vector approach*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 10 + 291 pp. \$ 4.50.

Introduction 1-4 * Fundamental concepts 5-46 * The straight line 47-93 * Circles and spheres 94-138 * The conic sections and other curves 139-244 * Normals to surfaces 244-248 * Summary 249-257 * Answers to problems 259-288 * Index 289-291.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 231–235 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i Bind 11, hefte 2, være sendt innen 1. mars 1963.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

231. En kvadrat skall delas i tre rätliniga figurer så, att de i dessa inskrivna cirkelarna blir lika stora.

A. V. Peljo

232. Vis geometrisk at

$$3 \sum_{k=1}^n k^5 = 4 \left(\sum_{k=1}^n k \right)^3 - \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Gunnbjørg Gismarvik

233. Bestem koefficienterne i udviklingen

$$\sqrt{z} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p J_{2p+\frac{1}{2}}(z).$$

P. W. Karlsson

234. Antag $\int_0^{\infty} f^2(t) dt$ konvergent samt $f(x) \geq 0$ för $x \geq 0$. Visa att

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt$$

är begränsad för alla $x \geq 0$.

Torsten Ström

235. To (egentlige eller udartede) keglesnit k_1 og k_2 har netop fire fælles punkter A_i ($i=1, 2, 3, 4$). Bevis, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at punkterne A_i ligger på samme cirkel, er, at k_j ($j=1, 2$) har en symmetriakse a_j , således at $a_1 \perp a_2$. Hvilken sætning får man heraf, hvis begge k_j er liniepar?

Anders Bager

LÖSNINGER

220. Konstruer en cirkel som tangerer en gitt cirkel og to gitte rette linjer. (Det blir maksimalt 8 løsninger.)

H. Killingbergtrø

Løsning: Vi tenker os, at den givne cirkel svinder ind til et punkt, idet den søgte cirkel og de givne linier følger med; den første idet den beholder sit centrum, de sidste idet de beholder deres retning. Efter dette kunstgreb går den søgte cirkel igennem et givet punkt og rører to kendte linier, der er parallelle med de givne i en afstand lig den givne cirkels radius. Den søgte cirkels centrum kan nu let konstrueres og dermed cirklen.

Christian Berg

Også løst av Thomas Strai og Bolli Thoroddsen.

222. En funktion $f(x)$ satisfierar följande villkor:

- 1) $x < 0$; $f(x) \equiv 0$.
- 2) $f(+0) = e^{-y}$, $0 < y < \infty$.
- 3) $x > 0$; $f'(x) = e^{-y}[1 - f(x - y)]$.

Visa, att $f(x) \rightarrow 1$ monotont, då $x \rightarrow \infty$.

Bengt Joel Andersson

Løsning: Sätt $f(x) = 1 + g(x)$. Differentialekvationen övergår i

$$(1) \quad g'(x) = -e^{-y}g(x - y).$$

I det slutna intervallet $(0, y)$ är $g(x - y) = -1$ och lösningen blir här $g(x) = xe^{-y} + e^{-y} - 1$. Vi observerar att $g(x) < 0$ samt växande i $(0, y)$ och låter detta bilda grund för ett induktionsbevis. Ur (1) kan med krav på kontinuitet $g(x)$ beräknas i det slutna intervallet $I_2: (ny, (n+1)y)$ om $g(x)$ är känd i $I_1: ((n-1)y, ny)$. Antag nu att $g(x) < 0$ samt växande i I_1 . Då blir $g(x)$ växande och $g'(x)$ avtagande i I_2 . Det återstår att visa att $g(x) < 0$ i I_2 . Eftersom $g(x)$ är växande i I_2 räcker det att visa att $g((n+1)y) < 0$. Pga. förutsättningarna gäller

$$(2) \quad yg'((n+1)y) < g((n+1)y) - g(ny) < yg'(ny),$$

dvs.

$$(3) \quad g((n+1)y) > g(ny)(1 - ye^{-y}),$$

$$(4) \quad g((n+1)y) < g(ny) + yg'(ny).$$

Ur (3) fås

$$e^{-y}g'(ny) > g(ny)(1 - ye^{-y}),$$

som insättes i (4):

$$g((n+1)y) < g'(ny) \left(y - \frac{e^y}{1 - ye^{-y}} \right) < 0$$

för alla y . Eftersom alltså $g(x)$ enligt ovanstående är växande, kontinuerlig och < 0 för alla $x \neq 0$, så existerar $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(ny)$. Ur (2) och (1) följer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + g(x)) = 1.$$

Anm. För att endast visa $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ kan differentialekvationen Laplacetransformeras varvid erhålles

$$F(p) = e^{-y} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot \frac{1}{p + e^{-y(p+1)}}.$$

Eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$ fås $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Torsten Ström

223. En följe $\{a_n\}$ av reelle tall er definert ved

$$a_{n+1}|a_{n+1}|^r = (a_n - k)|a_n - k|^r + k,$$

der k og r er positive tall, og a_0 er gitt.

a) Vis at $\{a_n\}$ divergerer for alle a_0 dersom $k > 2$.

b) Er $0 < k \leq 2$, fins et entydig tall α (avhengig av k og r) slik at $\{a_n\}$ divergerer dersom $a_0 < \alpha$ og konvergerer dersom $a_0 > \alpha$. Vis for siste tilfelle at følgen konvergerer mot $k - \alpha$.

c) Sett $a_0 > \alpha$, og bestem $\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

H. Killingbergtrø

Løsning: Funktionen $\varphi(x) = x|x|^r$ er voksende; $\varphi'(x)$ er aftagende for $x < 0$ og voksende for $x > 0$. Hældningen $\kappa(x)$ for linien gennem $(x, \varphi(x))$ og $(x-k, \varphi(x-k))$ er aftagende for $x < \frac{1}{2}k$ og voksende for $x > \frac{1}{2}k$. For $k > 2$ ses mindsteværdien for $\kappa(x)$ da at være > 1 , for $k < 2$ derimod at være < 1 , hvorfor $\kappa(x) = 1$ i så tilfælde for netop 2 værdier α og β , $\alpha < \beta$, $\beta = k - \alpha$. For $k = 2$ bliver $\alpha = \beta = 1$. Man ser heraf, at ligningen

$$(*) \quad \varphi(x) = \varphi(x-k) + k$$

for $k > 2$ ingen løsninger har, for $k = 2$ løsningen $x = 1$ og for $0 < k < 2$ løsningerne α og β . Vi har endvidere

$$\begin{aligned} \varphi(x) &> \varphi(x-k) + k \quad \text{for } x < \alpha \text{ og for } x > \beta \\ \text{og} \quad \varphi(x) &< \varphi(x-k) + k \quad \text{for } \alpha < x < \beta. \end{aligned}$$

Af dette følger:

a) Ifald $\{a_n\}$ konvergerer, må grænseværdien være en løsning til ligningen (*); $\{a_n\}$ må derfor divergere for $k > 2$.

b) Ifald $a_n < \alpha$ er $\varphi(a_n - k) + k = \varphi(a_{n+1}) < \varphi(a_n)$ og følgelig $a_{n+1} < a_n$; når $a_0 < \alpha$ kan $\{a_n\}$ så hverken konvergere mod α eller β og altså overhovedet ikke konvergere.

Ifald $\alpha < a_n < \beta$ vil

$$\varphi(\beta) > \varphi(a_n - k) + k = \varphi(a_{n+1}) > \varphi(a_n) > \varphi(\alpha),$$

og dermed $\beta > a_{n+1} > a_n > \alpha$. For $\alpha < a_0 < \beta$ er talfølgen da voksende og begrænset og konvergerer følgelig, mod β .

Ifald $a_n \geq \beta$ fås tilsvarende $\beta \leq a_{n+1} \leq a_n$, og grænseværdien er β .

c) For $k \rightarrow 0$ vil korderne med hældningen 1 »snævres sammen« om punkter, hvor $\varphi'(x) = 1$. Vi har $\varphi'(x) = (1+r)|x|^r$, med $\varphi'(x) = 1$ for $|x| = (1+r)^{-1/r}$. Der må derfor gælde

$$\lim_{k \rightarrow 0} \beta = (1+r)^{-1/r} \rightarrow \frac{1}{e} \quad \text{for } r \rightarrow 0.$$

Ove J. Munch

Også løst av Torsten Ström.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

Oppgavekonkurranse for 1963, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Den beste samling besvarelser vil bli tildelt H.K.H. Kronprins Haralds premie på 200 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med. Oppgavene faller inn under reallinjens pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som mulig. Det er ikke nødvendig å ha svart på alle 6 oppgavene. Ingen kan vinne hovedpremien mer enn én gang.

En sender løsninger til lektor Ragnar J. Solvang, Ris skole, Vinderen, Oslo, innen 1. 6. 1963, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

Oppgavene er også publisert i *Den Høgre Skolen* for 15. nov. 1962.

Vi henstiller til matematikklærerne på reallinjen om å gjøre flinke elever oppmerksom på konkurransen.

1. a) For hvilke verdier av x gjelder ulikheten

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9?$$

- b) Finn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2}.$$

2. Finn flateinnholdene av de kvadrater som har den egenskap at et punkt inne i det har avstandene 3, 4 og 5 lengdeenheter fra tre av kvadratets hjørner.

3. I en rettvinklet trekant ABC er A den rette vinkel. Høyden på hypotenusen er lik h , og hypotenusen BC lik a . Trekk medianen fra A til BC og kall skjæringspunktet med hypotenusen for M . Avsett langs hypotenusen på begge sider av M et stykke lik $\frac{a}{2n}$ ($n > 1$) og kall de fremkomne punkter for D og E . Trekk AD og AE og vis at

$$\operatorname{tg} \angle DAE = \frac{4nh}{a(n^2 - 1)}.$$

4. Denne tabellen:

1	1	1	1	.	.	.	.	.
1	2	3	4	5	.	.	.	.
1	2	4	7	11	16	.	.	.
1	2	4	8	15	26	42	.	.
1	2	4	8	16	31	57	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

er bygget opp slik at et element er lik summen av det venstre nabo-element og det som står rett ovenfor dette naboelementet. Eksempel: $26 + 31 = 57$.

Vis at det n -te element i den 3. horisontalrad er lik $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$. Finn det n -te element i 4. horisontalrad.

Finn summen av de n første elementene i 3. horisontalrad og vis at differensen mellom denne sum og det $(n+1)$ -te ledd i 4. horisontalrad er lik -1 .

Prøv om du kan finne andre aritmetiske egenskaper ved det gitte tall-skjema.

5. I en vilkårlig trekant betegner vi sidene med a_1 , a_2 og a_3 , og de tilhørende høyder med h_1 , h_2 og h_3 . Siden a_1 blir av h_1 delt i to deler, p_1 og q_1 , a_2 blir av h_2 delt i p_2 og q_2 og a_3 blir av h_3 delt i p_3 og q_3 . Vis at

$$\frac{p_1 q_1}{h_1^2} + \frac{p_2 q_2}{h_2^2} + \frac{p_3 q_3}{h_3^2} = 1.$$

Forsøk å angi kjente formler som er spesialtilfeller av dette resultatet.

6. Det er gitt en parabel. Bestem de normaler der den delen som ligger innenfor parabellen blir minst mulig.

PRISOPGAVE FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier udskriver herved nedenstående prisopgave for elever i gymnasier og ved studenterkurser. Opgaven ønskes besvaret så fuldstændigt som muligt, og der lægges vægt på en omhyggelig og overskuelig fremstilling. For den bedste blandt de tilfredsstillende besvarelser udsættes en præmie på 150 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstra-præmier.

Besvarelsene indsendes senest 31. marts 1963 til lektor Henrik Meyer, Bakke-
draget 15, Birkerød. På besvarelsen skal anføres indsenderens navn, adresse, skole
og klassetrin. Besvarelsen skal ledsages af en erklæring om, at opgaveløsningen er
selvstændigt arbejde. (Benyttelse af litteratur er dog tilladt.)

Lad $\mathcal{F}$ betegne mængden af funktioner, definerede på det lukkede
interval I fra 0 til 1.

En funktion f , tilhørende $\mathcal{F}$, kaldes *monoton*, hvis enten

$$x_1 < x_2 \text{ medfører } f(x_1) < f(x_2) \text{ for alle } x_1 \text{ og } x_2 \text{ i } I,$$

eller

$$x_1 < x_2 \text{ medfører } f(x_1) > f(x_2) \text{ for alle } x_1 \text{ og } x_2 \text{ i } I.$$

En funktion f , tilhørende $\mathcal{F}$, kaldes *enentydig*, hvis

$$x_1 \neq x_2 \text{ medfører } f(x_1) \neq f(x_2) \text{ for alle } x_1 \text{ og } x_2 \text{ i } I.$$

Undersøg,

- 1) om enhver enentydig funktion i $\mathcal{F}$ er monoton.
- 2) om enhver enentydig og kontinuert funktion i $\mathcal{F}$ er monoton.

En funktion f , tilhørende $\mathcal{F}$, vil vi kalde *sammenhængsbevarende*, der-
som den har følgende egenskab:

For alle x_1 og x_2 i I og for alle c gælder det, at hvis $f(x_1) < c < f(x_2)$,
så findes der et tal x_3 mellem x_1 og x_2 , så $f(x_3) = c$.

Undersøg,

- 3) om enhver sammenhængsbevarende funktion i $\mathcal{F}$ er kontinuert.
- 4) om enhver monoton og sammenhængsbevarende funktion i $\mathcal{F}$ er
kontinuert.
- 5) om enhver enentydig og sammenhængsbevarende funktion i $\mathcal{F}$ er
kontinuert.

Bevis, at hvis f , tilhørende $\mathcal{F}$, er differentiabel i I , så er f' sammen-
hængsbevarende.

SUMMARY IN ENGLISH

TORKIL HEIEDE and HANS JØRGEN HELMS: *Set theory and transfinite cardinal numbers.* (Danish.)

In the final part III of this expository article, further properties of transfinite cardinal numbers are discussed.

CLAS-OLOF SELENIUS: *On the relative approximation of regular continued fractions.* (Swedish.)

Let $\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \dots]$ be the regular continued fraction for an irrational number ξ_0 , with convergents $A_\nu/B_\nu = [b_0, b_1, \dots, b_\nu]$. In the approximation formula

$$\left| \xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \right| = \frac{1}{\gamma_\nu B_{\nu-1}^2},$$

the number γ_ν is called the "approximation constant" corresponding to the denominator b_ν .

A sequence of denominators $b_i = 1$ is called a "unisequence". The author studies the approximation constants corresponding to a finite unisequence, and arranges them according to magnitude. This arrangement, which depends only on the length k of the sequence, is illustrated geometrically in figs. 1-4 p. 196, corresponding to the different possibilities for $k \bmod 4$.

Applications to semi-regular continued fractions and to the "Pellian" equation are briefly mentioned.

N. F. GJEDDEBÆK: *Note on the difference between consecutive primes.* (English.)

By combinatorial means an attempt is made to derive formulas for the relative frequency of the different gaps between consecutive primes. For gaps of size 2, 4, ..., 18 and 20 close agreement is found between formulas and reality.

INNHALDSFORTEGNELSE

GUNNAR BLOM — CARL-ERIK FRÖBERG: Om myntväxling.....	55- 69
FR. FABRICIUS-BJERRE: A theorem on closed polygons in the projective plane.....	143-146
N. F. GJEDDEBÆK: Note on the difference between consecutive primes.	200-202
TH. GODAL: Litt om kjeglesnittene fra et astronautisk synspunkt.....	137-142
C. L. GODSKE: Oddvar Bjørgum in memoriam.....	5- 7
TORKIL HEIEDE — HANS JØRGEN HELMS: Mængdelære og transfinite kardinaltal, I-III.....	11-51, 108-136, 169-190
FRITZ HERZOG: Remarks on a paper by O. Kolberg.....	78- 79
N. E. NØRLUND: Johan Frederik Steffensen in memoriam.....	105-107
A. SCHINZEL: On the composite integers of the form $c(ak+b)! \pm 1$	8- 10
CLAS-OLOF SELENIUS: Om regelbundna kedjebraåks relativa approximation.....	191-199
ERNST S. SELMER: Om strykprosenter, Farey-rekker og kjedebroåk.....	70- 77
HELGE TVERBERG: Om en sats fra kombinatorikken.....	52- 54

Bokmeldinger

C. C. ANDERSEN — S. A. BO — GUNNAR NIELSEN — J. DAMGAARD SØRENSEN: Realskolens regning og matematik. POUL MOGENSEN: Geometri for realafdelingen. POUL NEERUP — FRANS HANDEST: Elementær plangeometri (KAY PIENE).....	80
FR. CHR. HOLB. ARENTZ: Undersøgning hvorledes man paa korteste Maade kan opløse saadanne Æqvationer, som indeholde flere eller mange ubekjendte Størrelser tillige (OLE PEDER ARVESEN).....	147
THOR A. BAK — JONAS LICHTENBERG: Videregående matematik for ikke matematikere (POUL NEERUP).....	82
VIGGO BRUN: Regnekunsten i det gamle Norge (DAVID FOG).....	84
ANDREAS DIEMER: Das Wesen der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung und ihre Bedeutung für die Unternehmensleitung (TORSTEIN KRISTIENSEN).....	148
YNGVE DOMAR: Matematik för 1 betyg (KJELL BJÖRUP).....	149
CARL-ERIK FRÖBERG — BENGT SIGURD: Datamaskiner och deras användning inom vetenskap, administration och språköversättning (KÅRE FLØISAND).....	203
JOHN N. FUJII: An introduction to the elements of mathematics (ERLING R. HANSÉN).....	85
DONALD GREENSPAN: Introduction to partial differential equations (HELGE SKOVGAARD).....	204
TORD HALL: Matematik för 1 betyg (JAN LANKE).....	205

JOHN G. HOCKING — GAIL S. YOUNG: Topology (PER HOLM).....	151
GOTTFRIED KÖTHE: Topologische lineare Räume, I (OTTE HUSTAD)....	86
WALTHER LIETZMANN: Methodik des mathematischen Unterrichts (KAY PIENE).....	207
YNGVE ROLLOF: Operationsanalys (ARNLJOT HØYLAND).....	87
ROBERT SCHATTEN: Norm ideals of completely continuous operators (OTTE HUSTAD).....	152
JACOB T. SCHWARTZ: Introduction to matrices and vectors (FLEMMING P. PEDERSEN).....	209
A. P. SPEISER: Digitale Rechenanlagen (GUNNAR WAHLSTRÖM).....	152
RICHARD STENDER: Didaktische Themen aus der neueren Mathematik (KAY PIENE).....	210
EDUARD STIEFEL: Einführung in die numerische Mathematik (BJ. SVEJGAARD).....	211
WILLIAM J. LEVEQUE: Elementary theory of numbers (CLAS-OLOF SELENIUS).....	213
B. L. VAN DER WAERDEN: Algebra, II (K. E. AUBERT).....	215
Mottatte bøker	89, 154, 216
Oppgaver	
Oppgaver til løsning.....	95, 160, 223
Løsninger.....	96, 161, 224
Eksamensoppgaver	163
Prisoppgaver for gymnaslaster.....	162, 227
Kronikk.....	98
Summary in English.....	103, 168, 230