



JOHAN FREDERIK STEFFENSEN IN MEMORIAM

N. E. NØRLUND

Den 20. december 1961 døde Johan Frederik Steffensen i en alder af 88 år. Hans studier og hans arbejde formede sig på en usædvanlig måde, der afviger meget fra andre matematikeres karriere. Han blev født i København den 28. februar 1873. Hans fader var generalauditor og en højt anset konservativ politiker. Efter at have taget artium fra metropolitanskolen i 1890 fulgte han i faderens fodspor og studerede jura ved Københavns universitet, hvor han i 1896 blev candidatus juris, og samme år udnævntes han til byfogedfuldmægtig i Fredericia.

Aktuarvidenskaben fangede tidligt hans interesse, og det blev den bro, der førte ham over til matematikernes kreds. I 1898 fik han ansættelse i Nordisk Genforsikringsselskab, hvor han tog del i opgørelsen af præmie-

reserven og andet beregningsarbejde under ledelse af Statsanstaltens beregner A. C. V. Petersen. Da der i 1904 blev indført et tilsyn med livsforsikringselskaberne, blev Steffensen medlem af forsikringsrådet og samtidig dets sekretær. Samme år kom hans første publikation, nemlig en hjælpetabel til bestemmelse af rentefoden i en annuitet med given kapitalværdi og varighed, der var frugten af et samarbejde med beregneren N. P. Bertelsen. To år senere publicerede Steffensen en almenyldig række til bestemmelse af rentefoden i en annuitet.

I sin ungdom beskæftigede han sig også med den teoretiske astronomi. I 1907 udgav han i *Nyt Tidsskrift for Matematik* en afhandling om trelegemeproblemet i det tilfælde, hvor den ene masse er uendelig lille og de to andre bevæger sig i en cirkulær bane. Han viser, at bevægelsesligningerne kan integreres ved ligelig konvergente rækker. I en afhandling i det danske videnskabernes selskabs publikationer undersøger han endvidere de periodiske baner i det af Hill betragtede specielle tilfælde af trelegemeproblemet, og han viser, hvorledes man ved at indføre polære koordinater i stedet for de af Hill benyttede rektangulære kan opnå en langt simplere og bedre tilnærmelse til den såkaldte intermediære bane. Et halvt århundrede senere har Steffensen fortsat disse undersøgelser i to afhandlinger i *Acta mathematica*, hvor han løser Hill's differentiaalligninger ved potensrækker og afleder rekursionsformler for koefficienterne i disse samt afleder konvergensbetingelser.

I 1912 erhvervede Steffensen den filosofiske doktorgrad på en afhandling om visse simple klasser af hele funktioner og deres anvendelse i talteorien. Han førtes herved ind på undersøgelser, der er beslægtede med nogle af Mellin's og Lindelöf's arbejder. Som motto for disputatsen tog han følgende citat af Goethe:

»Zweimal zwei ist nicht vier, sondern es ist eben zwei mal zwei, und das nennen wir abkürzend vier. Vier ist aber durchaus nichts Neues. Und so geht es immerfort bei ihren Folgerungen, nur dass man in den höheren Formeln die Identität aus dem Augen verliert«.

I 1919 blev Steffensen udnævnt til docent i forsikringsmatematik ved Københavns universitet; i tyve år til 1943 var han som professor for de aktuarstuderende den, som fastlagde rammerne for studiet. Han har opbygget en undervisning, som man ikke havde tidligere, og udgivet en række højt værdsatte universitetslærebøger i forsikringsmatematik, rentesregning, iagttagelseslære og interpolationsregning. Den sidstnævnte bog er også blevet publiceret på engelsk i to udgaver, og den har i vide kredse vundet megen påskønnelse for den omhyggelige undersøgelse af restleddene og den eksakte behandling af problemerne, hvorved den adskiller sig fra tidligere forfatteres. I forbindelse hermed beskæftigede

Steffensen sig med flere nye klasser af polynomier, som er egnede til at spille en vigtig rolle i interpolationslæren, og i tilslutning hertil har han afledt en almindelig summationsformel, der er en generalisation af den bekendte Euler-Maclaurin'ske formel. Endvidere har han fundet et smukt udtryk for den r^{te} dividerede differens af produktet af to funktioner $f(x)$ og $g(x)$. Sætter man

$$\varphi(x) = f(x) \cdot g(x),$$

og betegner man den r^{te} dividerede differens af $\varphi(x)$ med $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_r)$ så er

$$\varphi(x_0, \dots, x_r) = \sum_{v=0}^r f(x_0, \dots, x_v) \cdot g(x_v, \dots, x_r),$$

et overraskende simpelt udtryk, der som specielle tilfælde indeholder Leibniz's formel for den r^{te} differentialkvotient og de analoge formler for differenser med konstant interval.

Til de mekaniske kvadraturformler af Cote's type har Steffensen føjet tilsvarende formler af den åbne type, hvor ordinaterne i intervallets endepunkter ikke benyttes. Formålet hermed var at anvende de ny formler til numerisk integration af differentialligninger, en fremgangsmåde der betegnes som Steffensen's metode.

Foruden alt dette har Steffensen publiceret en imponerende lang række af afhandlinger, som giver vægtige bidrag til løsning af andre problemer inden for interpolationsregningen og inden for forsikringsmatematiken, men som det vilde føre for vidt at komme nærmere ind på her. Hans undersøgelser har vakt opmærksomhed langt uden for de nordiske matematikeres kreds, hvad der blandt andet har fået udtryk ved, at han har holdt gæsteforelæsninger ved universiteterne i London og Paris.

I årene 1930-36 var professor Steffensen formand for matematisk forening i København, og han blev senere æresmedlem af denne såvel som af forskellige aktuarforeninger. Inden for forsikringsverdenen har han beklædt en lang række tillidshverv, bl. a. været medlem af, og i ti år formand for bestyrelsen for statsanstalten for livsforsikring.

Jeg tror, man kan sige, at professor Steffensen var en lykkelig mand. Hans matematiske evner, suppleret med en grundig juridisk uddannelse, gjorde ham i særlig grad skikket til at varetage de betydningsfulde hverv, der blev ham betroet. Han fik en ualmindelig lang række gode arbejdsår, hvor det lykkedes ham i stor udstrækning at nå de mål, han havde stillet sig.

MÆNGDELÆRE OG TRANSFINITE KARDINALTAL, II¹

TORKIL HEIEDE og HANS JØRGEN HELMS

Transfinite kardinaltal.

11. Ækvivalente mængder. Hvis det om to mængder A og B gælder, at der eksisterer en enentydig afbildning af A på B , siger man, at A er *ækvivalent* (i Cantors forstand) med B og skriver

$$A \sim B.$$

Man udtrykker også dette således: A er *lige mægtig* med B .

Den herved definerede relation mellem mængder opfylder følgende tre love, hvilket berettiger anvendelsen af glosen ækvivalent (se s. 29):

Den reflexive lov: $A \sim A$.

Den symmetriske lov: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

Den transitive lov: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Reflexiviteten er klar, idet den identiske afbildning er en enentydig afbildning af A på A . Symmetrien bevises således: Hvis f er en enentydig afbildning af A på B , så er den inverse afbildning f^{-1} en enentydig afbildning af B på A . Endelig følger transitiviteten af, at hvis f er en enentydig afbildning af A på B og g en enentydig afbildning af B på C , så er den sammensatte afbildning $g \circ f$ en enentydig afbildning af A på C .

På grund af symmetrien kan man, hvis $A \sim B$, tillade sig at sige, at A og B er *indbyrdes ækvivalente* eller *lige mægtige*. Med en mere suggestiv udtryksmåde kan man sige, at A og B indeholder *lige mange* elementer (uden at der dermed er sagt noget talmæssigt om, hvor mange der er i hver af dem). Thi at der findes en enentydig afbildning af A på B , vil jo lidt løsere udtrykt sige, at der lader sig etablere en sammenparring af elementerne i A med elementerne i B , således at hvert element i A er parret sammen med netop ét element i B , og begge mængder derved er brugt op.

Som eksempler på indbyrdes ækvivalente mængder kan vi nævne mængderne $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, thi afbildningen f defineret ved

¹ Første del stod i NMT, denne årgang, s. 11–51.

$$f(a) = 2a \quad \text{for ethvert } a \in A$$

er en enentydig afbildning af A på B .

Sætter vi $A = \mathbb{N}$ og $B = \{x \mid x = 2a, a \in \mathbb{N}\}$, har vi atter $A \sim B$, thi den ovenfor definerede afbildning f (denne gang med $A = \mathbb{N}$) lader sig anvende. Løst sagt har vi da, at der er lige så mange naturlige tal, som der er lige, naturlige tal.¹

Sætter vi $A = \mathbb{N}$ og $B = \{x \mid x = a^2, a \in \mathbb{N}\}$, har vi igen $A \sim B$, thi afbildningen g defineret ved

$$g(a) = a^2 \quad \text{for ethvert } a \in \mathbb{N}$$

er en enentydig afbildning af A på B . Løst sagt: Der er lige så mange naturlige tal, som der er kvadrattal – netop det i indledningen omtalte af Galilei betragtede eksempel.

Vi har her sammenlignet $\mathbb{N}$ med et par delmængder af $\mathbb{N}$; nu skal vi gå den anden vej: Vi viste i 10, at elementerne i mængden $\mathfrak{J}$ kan opstilles i en *følge*, men det vil jo netop sige (se s. 39–40), at vi har etableret en enentydig afbildning af $\mathbb{N}$ på $\mathfrak{J}$, idet der er tale om en følge med forskellige elementer, som tilsammen udgør hele $\mathfrak{J}$. Vi har altså bevist, at $\mathbb{N} \sim \mathfrak{J}$. Vi viste også, at elementerne i $\mathfrak{Q}$ kan opstilles i en følge og får da ved samme argument, at $\mathbb{N} \sim \mathfrak{Q}$. Altså (løst formuleret): Der er lige så mange naturlige tal, som der er hele tal og som der er rationale tal.

Af fig. 18 fremgår det, idet den anvendte afbildning er en centralprojektion f med passende valgt centrum p , at to vilkårlige liniestykker, betragtet som punktmængder A og B i planen, er ækvivalente (eventuelt

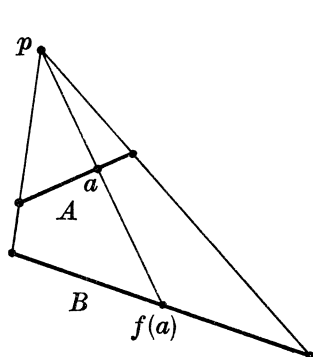


Fig. 18

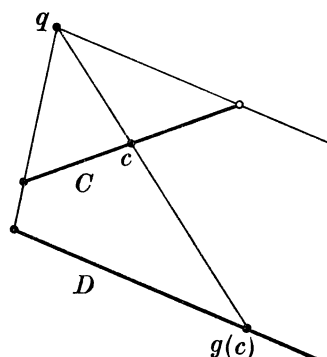


Fig. 19

¹ Erstatte vi faktoren 2 med 365, har vi Laurence Sterne's eksempel (ca. 1760): hans Tristram Shandy skriver sin selvbiografi så langsomt og udførligt, at han bruger et år på at skrive om en dag; hvis blot han ikke dør, skal han jo nok få nået at skrive om hver eneste dag af sit liv.

må man i stedet for centralprojektion benytte en parallelprojektion). Der er altså lige mange punkter på to vilkårlige liniestykker — jvf. det i indledningen omtalte spørgsmål hos Galilei.

På lignende måde fremgår det af fig. 19, at et vilkårligt halvåbent (åbent) liniestykke C er ækvivalent med en vilkårlig (åben) halvlinie D .

Da to vilkårlige halvlinier er ækvivalente og ligeså to vilkårlige linier (ses igen ved centralprojektion), får man endelig, at et vilkårligt åbent liniestykke E er ækvivalent med en vilkårlig linie F , thi E kan deles i et halvåbent og et åbent liniestykke og F i en halvlinie og en åben halvlinie.

Ved hjælp af den enentydige afbildning af en linie på $\mathfrak{R}$, som man får ved at gøre linien til en abscisseakse, kan man nu slutte, at to vilkårlige lukkede intervaller¹ $\{x | a \leq x \leq b\}$ og $\{x | c \leq x \leq d\}$ er ækvivalente; ligeså de halvåbne intervaller $\{x | a \leq x < b\}$ og $\{x | c \leq x < d\}$ og de åbne intervaller $\{x | a < x < b\}$ og $\{x | c < x < d\}$, og endelig er et vilkårligt åbent interval $\{x | a < x < b\}$ ækvivalent med hele $\mathfrak{R}$.

Lad os også bevise det sidste direkte: Ved

$$f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right) \text{ for ethvert } x \in I$$

defineres en enentydig afbildning f af $I = \{x | a < x < b\}$ på $\mathfrak{R}$.

I tilknytning til s. 43–44 nævner vi, at $A^{(1)}$ som mængden af samtlige afbildninger af $\{1\}$ ind i A må være ækvivalent med A ; altså $A^{(1)} \sim A = A^1$, eller anderledes udtrykt: $\{1\} * A \sim A$. Man ser, at det også for et vilkårligt element a gælder, at

$$(11.1) \quad \{a\} * A \sim \{a\} \times A \sim A.$$

Vi slutter denne paragraf med at bevise endnu et par formler, som vi senere vil få brug for.

Lad der først være givet et mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$, om hvilket det gælder, at der findes en mængde A , således at $A_k \sim A$ for ethvert $k \in K$. Man har da, hvis mængderne A_k er *parvis disjunkte*, at

$$(11.2) \quad A \times K \sim \bigcup_{k \in K} A_k.$$

Thi til ethvert $k \in K$ findes der, da $A \sim A_k$, en enentydig afbildning φ_k af A på A_k . Afbildningen f defineret ved

$$f((a, k)) = \varphi_k(a) \text{ for ethvert } (a, k) \in A \times K,$$

¹ Vi underforstår i betegnelserne, at $x \in \mathfrak{R}$.

der afbilder parret (a, k) , $a \in A$, $k \in K$ i et element af A_k , er en enentydig afbildning af $A \times K$ på $\bigcup_{k \in K} A_k$.

Lad dernæst A være en vilkårlig mængde, og lad D være mængden af alle dens delmængder. Det gælder da som vist s. 37, at der findes en enentydig afbildning af D på mængden $\{0, 1\}^A$ af afbildninger af A ind i mængden $\{0, 1\}$; altså har man

$$(11.3) \quad D \sim \{0, 1\}^A.$$

I det følgende vil vi, når andet ikke udtrykkeligt siges, ved ækvivalens forstå det i denne paragraf behandlede begreb.

12. Produktmængder, II. Som allerede omtalt (s. 40) kan et mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$ opfattes som en afbildning af indexmængden K ind i en mængde M af mængder. Ifølge s. 32–33 kan dette også udtrykkes således: Mængdesystemet $(A_k)_{k \in K}$ er en delmængde F af $K * M$ bestående af netop ét ordnet par $\langle k, A \rangle$ af elementer fra K og M for hvert element $k \in K$ (hvor den mængde $A \in M$, som er anden komponent i det ordnede par, der har et givet $k \in K$ som første komponent, netop er den, som får betegnelsen A_k). Det er da klart, at $K \sim F$, altså at mængdesystemet er ækvivalent med sin indexmængde.

Lad nu K være ækvivalent med en mængde L ; der findes altså en enentydig afbildning f af K på L . Betegner vi nu for ethvert element $l \in L$ med B_l den ved $k = f^{-1}(l)$ bestemte mængde A_k , har vi fået defineret et mængdesystem $(B_l)_{l \in L}$, altså en delmængde G af bestemt type af $L * M$, om hvilken det gælder, at $L \sim G$. Dette nye mængdesystem siges ofte med en upræcis udtryksmåde at være det samme som det gamle, blot forsynet med en ny indexmængde. De to systemer er ækvivalente, thi af $K \sim F$, $K \sim L$ og $L \sim G$ følger $F \sim G$; men de er kun det samme system, hvis $L = K$ og f er den identiske afbildning af K på K .

En grund til, at man kunne være tilbøjelig til at anse de to systemer for at være det samme (bortset fra, hvad man lidt unøjagtigt kunne udtrykke således, at det er de samme mængder, der optræder i de to systemer, og hver af disse mængder lige mange gange i hvert system), er den, at forenings-, henholdsvis fællesmængden af mængderne i det ene system er den samme som forenings-, henholdsvis fællesmængden af mængderne i det andet, eller som man siger: Ved dannelse af forenings- og fællesmængde er resultatet uafhængigt af den benyttede indexmængde. Anderledes udtrykt: Der gælder følgende to kommutative love:

$$\bigcup_{k \in K} A_k = \bigcup_{l \in L} B_l \quad \text{og} \quad \bigcap_{k \in K} A_k = \bigcap_{l \in L} B_l.$$

Beviserne forløber således: Til et vilkårligt element p af $\bigcup_{k \in K} A_k$ findes mindst ét $k \in K$, så at $p \in A_k$, og for $l=f(k)$ har vi $B_l=A_k$ og dermed $p \in B_l$ og derfor $p \in \bigcup_{l \in L} B_l$, altså har vi at $\bigcup_{k \in K} A_k \subseteq \bigcup_{l \in L} B_l$; analogt vises det, at $\bigcup_{l \in L} B_l \subseteq \bigcup_{k \in K} A_k$. Og et vilkårligt element $q \in \bigcap_{k \in K} A_k$ tilhører for ethvert $k \in K$ mængden A_k og tilhører derfor for ethvert $l \in L$ mængden B_l og dermed $\bigcap_{l \in L} B_l$, altså har vi, at $\bigcap_{k \in K} A_k \subseteq \bigcap_{l \in L} B_l$; analogt vises det, at $\bigcap_{l \in L} B_l \subseteq \bigcap_{k \in K} A_k$.

Med disse kommutative love har vi indfriet et løfte på s. 25.

Ved dannelse af *produktmængde* går det imidlertid anderledes end ved dannelse af forenings- og fællesmængde: For produktmængden af mængderne A_k spiller indexmængden K en så væsentlig rolle (man kunne med en anskuelig udtryksmåde sige: som det skelet, produktmængden er bygget op på), at det for de betragtede systemer $(A_k)_{k \in K}$ og $(B_l)_{l \in L}$ i almindelighed gælder, at

$$\prod_{k \in K} A_k \neq \prod_{l \in L} B_l,$$

selv i det tilfælde, at $L=K$; ja, endogså selv om de optrædende mængder er særdeles enkle. Lad os se på det s. 41 behandlede eksempel fra kombinatorikken: Lad denne gang indexmængden K bestå af mandens krop a og hans hovede b ; mængdesystemet $(A_k)_{k \in K}$ udgøres af de ordnede par $\langle a, A_a \rangle$ og $\langle b, A_b \rangle$, hvor A_a er mængden af frakker og A_b mængden af hatte. Produktmængden $\prod_{k \in K} A_k$ består da af de kombinationer af frakke på kroppen og hat på hovedet, som han kan optræde i. Afbilder man nu K på sig selv ved den afbildning f , som defineres ved $f(a)=b$ og $f(b)=a$, knyttes til kroppen mængden $B_a=A_{f^{-1}(a)}=A_b$ af hattene og til hovedet mængden $B_b=A_{f^{-1}(b)}=A_a$ af frakkerne. Produktmængden $\prod_{k \in K} B_k$ er altså mængden af de kombinationer af hat på kroppen og frakke på hovedet, som manden kan optræde i.

Hvis man betegner mængden af frakker med F og mængden af hatte med H og erstatter indexmængden $\{a, b\}$ med mængden $\{1, 2\}$ (hvor altså kroppen a erstattes med tallet 1 og hovedet b med tallet 2), kan alt dette også udtrykkes således: $F \times H \neq H \times F$; denne formel er altså et specialtilfælde af den ovenfor anførte.

Om end produktmængderne af mængderne i de to betragtede ækvivalente systemer ikke er den samme mængde, så er de dog ækvivalente:

$$\prod_{k \in K} A_k \sim \prod_{l \in L} B_l.$$

Beviset for denne kommutative lov for produktmængdedannelsen forløber således: Lad r være et vilkårligt element af produktmængden

$\mathbf{X}_{k \in K} A_k$, altså en belægning af K med elementer fra mængderne A_k . Til r knytter vi nu et bestemt element s af produktmængden $\mathbf{X}_{l \in L} B_l$, nemlig den belægning af L med elementer fra mængderne B_l , der til ethvert element l af L knytter det samme element af $B_l = A_{f^{-1}(l)}$, som ved r var knyttet til $k = f^{-1}(l)$. Dermed er defineret en enentydig afbildning af $\mathbf{X}_{k \in K} A_k$ på $\mathbf{X}_{l \in L} B_l$.

Ved et lignende ræsonnement beviser man den associative lov:

$$\mathbf{X}_{k \in K} A_k \sim \mathbf{X}_{p \in P} \mathbf{X}_{k \in K_p} A_k ,$$

hvor mængderne K_p udgør en klasseinddeling af indexmængden K med indexmængde P (jvf. s. 25).

Som enkle specialtilfælde af den associative og den kommutative lov har man naturligvis

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C) \sim A \times B \times C , \quad A \times B \sim B \times A .$$

Men desuden får man af den associative lov i det tilfælde, at alle mængderne A_k er den samme mængde A , følgende potensregneregler:

$$(12.1) \quad A^K \sim \mathbf{X}_{p \in P} A^{K_p}$$

med bl. a. specialtilfældet

$$(12.2) \quad A^{K_1 \cup K_2} \sim A^{K_1} \times A^{K_2} .$$

Gælder det i (12.1), at alle mængderne K_p er ækvivalente med samme mængde L , får man for det første, at højre side er ækvivalent med $(A^L)^P$, og dernæst, idet mængden $K = \bigcup_{p \in P} K_p$ ifølge (11.2) er ækvivalent med $L \times P$, at venstre side er ækvivalent med $A^{L \times P}$, idet man benytter produktmængdedannelsens kommutative lov. Alt i alt har man da følgende potensregneregler:

$$(12.3) \quad A^{L \times P} \sim (A^L)^P .$$

Endvidere får man ved lignende overvejelser den tredje potensregneregler:

$$(12.4) \quad \left(\mathbf{X}_{k \in K} A_k \right)^M \sim \mathbf{X}_{k \in K} A_k^M$$

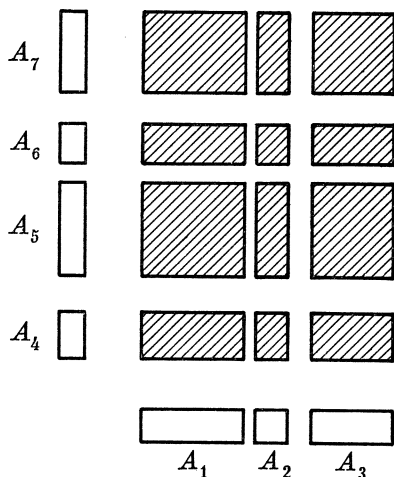
med bl. a. specialtilfældet

$$(12.5) \quad (A_1 \times A_2)^M \sim A_1^M \times A_2^M .$$

Endelig gælder der også en række distributive love; vi nøjes med at formulere denne ene: Hvis mængderne A_k er parvis disjunkte, så gælder

$$\bigtimes_{p \in P} \bigcup_{k \in K_p} A_k = \bigcup_{f \in F} \bigtimes_{p \in P} A_{f(p)},$$

hvor $F = \bigtimes_{p \in P} K_p$, og et element $f \in F$ altså er en belægning af P med elementer fra mængderne K_p , d. v. s. en afbildning af P ind i $\bigcup_{p \in P} K_p$, hvorved ethvert element $p \in P$ afbildes i et element $f(p)$ af K_p . Lad os belyse dette ved et enkelt specialtilfælde: Lad $P = \{1, 2\}$, $K_1 = \{1, 2, 3\}$, $K_2 = \{4, 5, 6, 7\}$; så består F af samtlige belægninger af P med elementer fra K_1 og K_2 , altså



$$\begin{aligned} F &= K_1 \times K_2 \\ &= \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 5), \\ &\quad \dots, (3, 7)\}, \end{aligned}$$

Fig. 20

og den distributive lov siger da (se fig. 20):

$$\begin{aligned} & (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \times (A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7) \\ &= (A_1 \times A_4) \cup (A_2 \times A_4) \cup (A_3 \times A_4) \cup (A_1 \times A_5) \cup \dots \cup (A_3 \times A_7). \end{aligned}$$

Som et simpelt specialtilfælde af den distributive lov har man

$$(12.6) \quad A \times \bigcup_{k \in K} A_k = \bigcup_{k \in K} (A \times A_k).$$

At man på højre side af lighedstegnet kan benytte K som indexmængde i stedet for F , følger af den kommutative lov for foreningsmængdedannelse, idet det her gælder, at $F = \{1\} \times K$, altså ifølge (11.1), at $F \sim K$. Videre har (12.6) følgende to specialtilfælde:

$$\begin{aligned} & A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \\ (12.7) \quad & A \times K = \bigcup_{k \in K} (A \times \{k\}). \end{aligned}$$

Formlen (12.7) har igen specialtilfældet

$$A \times \{a, b\} = (A \times \{a\}) \cup (A \times \{b\});$$

og til sidst skal det nævnes, at man af (12.7) umiddelbart kan aflæse ækvivalensformlen (11.2).

13. Kardinaltal. Efter at vi i 11 har indført begrebet ækvivalens af mængder og derved har fastlagt, hvad vil forstå ved, at der er *lige*

mange elementer i to forelagte mængder, skal vi nu beskæftige os med, hvad vi vil forstå ved en udtalelse om, *hvor mange* elementer der er i en forelagt mængde.

Lad os til indledning se på et simpelt eksempel: Når man siger, at der er 3 elementer i mængden $P = \{p, q, r\}$, så mener man dermed, at der er lige så mange elementer i P som i mængden $\{1, 2, 3\}$, eller med andre ord, at P er ækvivalent med denne mængde. (Ækvivalensen kan f. ex. påvises således: Den ved

$$f(r) = 1, \quad f(p) = 2, \quad f(q) = 3$$

definerede afbildning f er en enentydig afbildning af P på $\{1, 2, 3\}$).

Det vil åbenbart være nyttigt med et særligt navn og en særlig betegnelse for mængder af samme type som $\{1, 2, 3\}$. Lad os da vedtage, idet n er et vilkårligt naturligt tal eller tallet 0, at kalde den ved

$$N_n = \begin{cases} \{x \mid x \in \mathfrak{N}, x \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\} & \text{for } n \in \mathfrak{N}, \\ \emptyset & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

fastlagte mængde N_n det ved n bestemte *afsnit* af $\mathfrak{N}$.

Om nu definerer vi: Hvis det om en mængde A gælder, at den er ækvivalent med afsnittet N_n , kaldes den en *endelig* mængde; tallet n kaldes dens *kardinaltal* (eller *mægtighed*), og man skriver

$$\text{card } A = n.$$

Enhver mængde, der ikke er endelig, altså ikke er ækvivalent med noget afsnit af $\mathfrak{N}$, kaldes *uendelig*.

Elementerne af mængden $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N} \cup \{0\}$ kaldes i deres egenskab af kardinaltal for endelige mængder endelige kardinaltal; vi bemærker, at $\emptyset$ er den eneste mængde, som har kardinaltallet 0.

Det indledende eksempel kan nu repeteres således: Den betragtede mængde $P = \{p, q, r\}$ ses at være ækvivalent med N_3 ; den er derfor endelig, og $\text{card } P = 3$.

Vi har i definitionen ovenfor på væsentlig måde benyttet mængden $\mathfrak{N}^*$, som altså må foreligge i forvejen; det vil derfor måske være rimeligt at indskyde nogle bemærkninger om denne mængde. Man plejer at indføre $\mathfrak{N}$ ved hjælp af de af Peano opstillede aksiomer, ud fra disse at definere ordningsrelationen $<$ samt kompositionsreglerne addition og multiplikation med tilhørende regneregler, og derefter at opbygge talbegrebet via $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{Q}$ og $\mathfrak{R}$ til $\mathfrak{C}$ (de komplekse tal).¹ Tallet 0, som vi jo også havde brug for som kardinaltal, plejer man først at få undervejs i

¹ En fremstilling af alt dette kan man f. ex. finde i E. Landau: *Grundlagen der Analysis*, Leipzig 1930, genoptrykt New York 1945 og senere.

denne opbygning, nemlig sammen med de hele, negative tal. Men da disse ikke kommer på tale som kardinaltal, vil vi foretrække at tænke os ikke $\mathfrak{N}$, men $\mathfrak{N}^*$ lagt til grund for talbegrebets opbygning. Det giver ikke anledning til større ændringer af denne opbygning, og grundlaget behøver man næsten ikke at røre ved, idet man ved blot at skrive 0 i stedet for 1 et enkelt sted i Peanos aksiomer får $\mathfrak{N}^*$ i stedet for $\mathfrak{N}$, der så fremkommer som $\mathfrak{N}^* \setminus \{0\}$.

Vi antager altså, at der foreligger en mængde $\mathfrak{N}^*$, som opfylder Peanos aksiomer i følgende formulering:

I. *Der findes en enentydig afbildning ψ af $\mathfrak{N}^*$ på $\mathfrak{N}^* \setminus \{0\}$, hvor 0 er et bestemt, særligt udvalgt element af $\mathfrak{N}^*$. (For ethvert $n \in \mathfrak{N}^*$ kalder man $\psi(n)$ efterfølgeren af n , og addition defineres sidenhen, så at $\psi(n) = n + 1$, hvor $1 = \psi(0)$.)*

II. *Af $0 \in M \subseteq \mathfrak{N}^*$ og $n \in M \Rightarrow \psi(n) \in M$ følger det, at $M = \mathfrak{N}^*$. (Dette er det såkaldte induktionsaksiom.)*

Lad os tænke os, at vi ud fra disse aksiomer har defineret ordningsrelation samt kompositionsregler m. v., så at vi nu står med $\mathfrak{N}^*$ som en af helt neutrale, indholdsløse elementer bestående mængde, der blot er udstyret med den velkendte ordningsmæssige og algebraiske struktur. Så anvender vi denne mængde $\mathfrak{N}^*$ ved tilvejebringelsen af de mængder (nemlig afsnittene af $\mathfrak{N}$), der som en slags standardsammenligningsmængder skal bruges ved fastsættelsen af, hvilke mængder der skal kaldes endelige, og derved bliver elementerne af $\mathfrak{N}^*$ til kardinaltal.

Denne fremgangsmåde er ikke så mærkelig, som den måske i første omgang kan virke. Man kunne måske sammenligne situationen med den, som et lille barn er i, når det begynder at bruge sine fingre til at tælle med; barnet har jo fingrene i forvejen — blot uden »talmæssig« betydning.

Der foreligger naturligvis både et existens- og et entydighedsspørgsmål i forbindelse med den antydede indførelse af $\mathfrak{N}^*$. Det sidste kan afgøres ved et bevis for, at aksiomerne bestemmer $\mathfrak{N}^*$ entydigt på nær isomorfi; det første ved en påvisning af, at den ved $0 = \emptyset$, $\psi(n) = n \cup \{n\}$ bestemte mængde opfylder aksiomerne. Man kan forøvrigt gå et skridt videre og definere $\mathfrak{N}^*$ som denne mængde; man får da:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= \{\emptyset\} &= \{0\}, \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} &= \{0, 1\}, \\ 3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} &= \{0, 1, 2\}, \\ 4 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} &= \{0, 1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

og i almindelighed

$$\psi(n) = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

En sådan opbygning falder uden for denne fremstillings rammer.

Efter disse bemærkninger om indførelsen af mængden $\aleph^*$ fortsætter vi nu omtalen af anvendelsen af dens elementer som kardinaltal.

For fuldstændighedens skyld må vi sikre os, at en endelig mængde ikke kan have flere forskellige kardinaltal, altså at den ikke kan være ækvivalent med flere forskellige afsnit af $\aleph$. Idet vi bemærker, at $m < n \Leftrightarrow N_m \subset N_n$, kan vi gå således frem: Hvis det om en mængde A gælder, at $A \sim N_m$ og $A \sim N_n$, hvor $m < n$, så må det også gælde, at $N_m \sim N_n$ og $N_m \subset N_n$. At dette er umuligt, følger af, at intet afsnit af $\aleph$ er ækvivalent med nogen ægte delmængde af sig selv, og dette sidste vil vi nu bevise ved induktion. Lad M være den delmængde af $\aleph^*$, for hvis elementer k det gælder, at N_k ikke er ækvivalent med nogen ægte delmængde af sig selv. Hvis vi kan vise, at $0 \in M$, og at $p \in M \Rightarrow p+1 \in M$, får vi af induktionsaksiomet, at $M = \aleph^*$. Det første er klart, thi $N_0 = \emptyset$ har slet ingen ægte delmængder. Det andet vises indirekte: Lad $p+1 \notin M$; vi skal bevise, at $p \notin M$. Ifølge vor antagelse findes der en enentydig afbildning f af N_{p+1} på en mængde $S \subset N_{p+1}$; ved f afbildes N_p da enentydigt på $R = S \setminus \{f(p+1)\}$, og vi har altså, at $N_p \sim R$. Hvis nu $p+1 \notin S$, har vi $S \subset N_p$ og dermed $R \subset N_p$. Hvis derimod $p+1 \in S$, kan vi antage, at $p+1 = f(p+1)$; thi i modsat fald findes der et $q \in N_p$, så at $p+1 = f(q)$, og afbildningen g defineret ved

$$\begin{aligned} g(q) &= f(p+1), \\ g(p+1) &= f(q), \\ g(x) &= f(x) \text{ for } x \in N_{p+1} \setminus \{q, p+1\} \end{aligned}$$

vil afbilde N_{p+1} enentydigt på S , og det således, at $p+1 = g(p+1)$. Vi har da $R = S \setminus \{p+1\}$, og af $S \subset N_{p+1}$ følger $R \subset N_p$. I begge tilfælde har vi altså $N_p \sim R \subset N_p$ og dermed $p \notin M$.

Kardinaltallet af en endelig mængde er, som det ses, blot en præcisere formulering af det elementære begreb *antallet* af elementer i den pågældende mængde. Fordelen ved netop denne formulering er, at den kan udvides til at omfatte vilkårlige mængder, idet man definerer:

Kardinaltallet af en vilkårlig mængde A er et symbol, der knyttes til A og til enhver med A ækvivalent mængde.

Kardinaltallet af en uendelig mængde kaldes uendeligt eller *transfinit*. På samme måde som man for ikke nærmere angivne endelige kardinaltal bruger små latinske bogstaver (oftest m , n , p eller q), bruger man for ikke nærmere angivne endelige eller transfinite kardinaltal små goti-

ske bogstaver (ofte $\aleph$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{m}$ eller $\mathbb{n}$), og at mængden A har kardinaltallet $\aleph$, skriver man således:

$$\text{card } A = \aleph.$$

Det bemærkes, at både for endelige og for uendelige mængder A og B betyder udsagnet $\text{card } A = \text{card } B$ nøjagtigt det samme som (hverken mere eller mindre end) udsagnet $A \sim B$. Dette forstyrres ikke af, at man for de endelige mængders vedkommende har kardinaltallene foreliggende som elementer af mængden $\aleph^*$; thi baggrunden for dette er jo blot, at denne mængde blev benyttet ved fastsættelsen af, hvornår en forelagt mængde skulle kaldes endelig og hvornår uendelig.

14. Endelige mængder. Med henblik på senere at kunne udvide begreberne ordning, addition og multiplikation m. v. til vilkårlige kardinaltal skal vi i denne paragraf bevise en del sætninger, der sætter disse begreber, således som de foreligger for mængden $\aleph^*$, i forbindelse med operationer med endelige mængder.

Vi begynder med at bemærke, at da man ved induktion kan vise, at enhver delmængde af et afsnit af $\aleph$ er endelig, kan man straks opstille følgende sætning:

SÆTNING 14.I. *Enhver delmængde af en endelig mængde er endelig.*

Vi har s. 117 bevist, at et afsnit af $\aleph$ ikke er ækvivalent med nogen ægte delmængde af sig selv. Dette generaliserer vi nu til:

SÆTNING 14.II. *En endelig mængde er ikke ækvivalent med nogen ægte delmængde af sig selv.*

Beviset føres indirekte: Lad $A \sim N_n$ og $A \sim A_1 \subset A$. Ved en enentydig afbildning af A på N_n afbildes A_1 på en vis mængde $M \subset N_n$, og vi har da, at $N_n \sim A \sim A_1 \sim M$ og derfor $N_n \sim M$. Afsnittet N_n er således ækvivalent med en ægte delmængde af sig selv, hvilket er umuligt.

Derefter viser vi følgende sætning:

SÆTNING 14.III. *Om to endelige mængder A og B gælder netop ét af følgende tre udsagn:*

- 1° A er ækvivalent med B ,
- 2° A er ækvivalent med en ægte delmængde af B ,
- 3° B er ækvivalent med en ægte delmængde af A ;

eller kort udtrykt:

$$1^\circ A \sim B, \quad 2^\circ A \sim B_1 \subset B, \quad 3^\circ B \sim A_1 \subset A.$$

Beviset forløber således: Lad $A \sim N_m$ og $B \sim N_n$; hvis $m = n$, gælder 1°; hvis $m < n$, har vi $A \sim N_m \subset N_n \sim B$ og dermed 2°; på samme måde ses

det, at $m > n$ medfører 3°. Altså gælder mindst ét af de tre udsagn. På den anden side kan højst ét af de tre udsagn gælde, thi af 1° og 2° følger $B \sim B_1$, hvilket strider mod sætning 14.II. På samme måde ses det, at 1° og 3° ikke kan gælde samtidigt. Endelig kan 2° og 3° heller ikke gælde samtidigt, thi af $B_1 \subset B$ og $B \sim A_1$ fås $B_1 \sim A_2 \subset A_1$, og dette giver sammen med $A \sim B_1$, at $A \sim A_2$, og vi er igen kommet i strid med sætning 14. II.

Af dette bevis aflæses yderligere:

SÆTNING 14.IV. *De tre udsagn i sætning 14. III gælder netop i tilfældene henholdsvis:*

$$1^\circ \text{ card } A = \text{card } B, \quad 2^\circ \text{ card } A < \text{card } B, \quad 3^\circ \text{ card } B < \text{card } A.$$

Dette berettiger iøvrigt, at man kalder den sædvanlige ordning $<$ af $\mathfrak{N}^*$ en ordning *efter størrelse*.

Videre gælder, som man kunne vente:

SÆTNING 14.V. *Hvis mængderne A og B er endelige og disjunkte, så er*

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B.$$

Thi lad $A \sim N_m$ og $B \sim N_n$. Afbildningen f defineret ved

$$f(k) = m + k \text{ for ethvert } k \in N_n$$

er en enetydig afbildning af N_n på $M = \{m+1, m+2, \dots, m+n\}$. Vi har da, at $B \sim M$, og idet jo $N_m \cup M = N_{m+n}$, kan vi slutte, at $A \cup B \sim N_{m+n}$, altså, at $\text{card } (A \cup B) = m+n$.

Vi føjer til sætningen den kommentar, at dens udsagn ved regneundervisningen i skolens første klasse bruges til definition af summen af to naturlige tal. Her har vi imidlertid de naturlige tals addition defineret på forhånd ud fra Peanos aksiomer, og først ved denne sætning får den noget at gøre med dannelse af foreningsmængde.

Idet et mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$ ifølge s. 111 er endeligt, når indexmængden K er endelig, udvides sætning 14.v til:

SÆTNING 14.VI. *Hvis mængderne A_k udgør et endeligt system af endelige, parvis disjunkte mængder, så er*

$$\text{card } \bigcup_{k \in K} A_k = \sum_{k \in K} \text{card } A_k.$$

Thi ifølge en bemærkning nederst s. 111 kan vi antage, at K er et afsnit N_p af $\mathfrak{N}$. Vi har da $\bigcup_{k \in K} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$, og ved hjælp af sætning 14.v fås ved induktion

$$\text{card } \bigcup_{k \in K} A_k = \text{card } A_1 + \text{card } A_2 + \dots + \text{card } A_p = \sum_{k=1}^p \text{card } A_k.$$

Som specialtilfælde af sætning 14.vi fås:

SÆTNING 14.vii. *Hvis mængderne A_k udgør et endeligt system af endelige, parvis disjunkte mængder, der alle er ækvivalente med samme mængde A , så er*

$$\text{card } \bigcup_{k \in K} A_k = \text{card } A \cdot \text{card } K.$$

Thi
$$\text{card } \bigcup_{k \in K} A_k = \text{card } A + \text{card } A + \dots + \text{card } A = \text{card } A \cdot p.$$

Her har vi at gøre med et udsagn, der i den elementære regneundervisning bruges til definition af multiplikation.

Under benyttelse af formelen (11.2) får vi af sætning 14.vii:

SÆTNING 14.viii. *Hvis mængderne A og B er endelige, så er*

$$\text{card } (A \times B) = \text{card } A \cdot \text{card } B.$$

Vi belyser denne sætning ved eksemplet fra s. 41: Lad $A = \{b, s, t\}$ være mængden af frakker og $B = \{m, l\}$ mængden af hatte; produktmængden $A \times B$ består da af de $3 \cdot 2$ par

$$\begin{array}{lll} (b, m) & (s, m) & (t, m) \\ (b, l) & (s, l) & (t, l). \end{array}$$

Sætning 14.viii udvides (på samme måde som sætning 14.v udvidedes til sætning 14.vi) til:

SÆTNING 14.ix. *Hvis mængderne A_k udgør et endeligt system af endelige mængder, så er*

$$\text{card } \bigtimes_{k \in K} A_k = \prod_{k \in K} \text{card } A_k.$$

Som specialtilfælde af denne sætning fås dernæst:

SÆTNING 14.x. *Hvis mængderne A_k udgør et endeligt system af endelige mængder, der alle er ækvivalente med samme mængde A , så er*

$$\text{card } \bigtimes_{k \in K} A_k = (\text{card } A)^{\text{card } K}.$$

Heraf får vi endelig ved at betragte det tilfælde, at alle mængderne A_k er den samme mængde A , idet vi benytter definitionen s. 43:

SÆTNING 14.xi. *Hvis mængderne A og K er endelige, så er*

$$\text{card } (A^K) = (\text{card } A)^{\text{card } K}.$$

Vi vil gøre en vigtig anvendelse af sætning 14.XI. Lad D være mængden af alle delmængder af en endelig mængde K ; af formen (11.3) får vi, idet $\text{card}\{0,1\}=2$, at

$$(14.1) \quad \text{card } D = 2^{\text{card } K}.$$

Idet vi sætter $\text{card } K = n$, stemmer dette med det fra den elementære kombinatorik velkendte resultat

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n,$$

hvor $\binom{n}{p}$ betyder antallet af delmængder, hver bestående af p elementer, af en mængde på ialt n elementer, altså:

$$\binom{n}{p} = \text{card} \{A \mid \text{card } A = p, A \subseteq K, \text{card } K = n\}.$$

Iøvrigt kan man jo også få formen $\text{card } D = 2^n$ helt uden anvendelse af begrebet $\binom{n}{p}$, idet D er ækvivalent med mængden af muligheder for at udvælge en delmængde af K . For hvert af de n elementer i K er der, når vi vælger os en delmængde af K , to hinanden udelukkende muligheder: enten tages det med i delmængden, eller også tages det ikke med; der er da 2^n muligheder for at udvælge en delmængde.

Det er værd at bemærke det specialtilfælde af (14.1), at $K = \emptyset$ og dermed $\text{card } K = 0$, $D = \{\emptyset\}$ og $\text{card } D = 1 = 2^0$.

Vi slutter denne paragraf med af sætningerne 14.VI og 14.IX at aflæse:

SÆTNING 14.XII. *Forenings- og produktmængder af mængderne i endelige systemer af endelige mængder er endelige.*

I sætning 14.VI tales der ganske vist om parvis disjunkte mængder; men til et endeligt mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$ kan man altid finde et system $(B_k)_{k \in K}$ af parvis disjunkte mængder, således at $B_k \subseteq A_k$ for ethvert $k \in K$ og $\bigcup_{k \in K} B_k = \bigcup_{k \in K} A_k$, idet man kan sætte

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots,$$

$$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}),$$

og man får da

$$\text{card} \bigcup_{k \in K} A_k = \text{card} \bigcup_{k \in K} B_k = \sum_{k \in K} \text{card } B_k \leq \sum_{k \in K} \text{card } A_k.$$

15. Uendelige mængder. Vi har endnu ikke givet noget eksempel på en uendelig mængde. Imidlertid gælder, som man også kunne forvente, følgende sætning:

SÆTNING 15.I. *Mængden $\aleph$ er uendelig.*

Beviset føres indirekte; lad altså $\aleph$ være ækvivalent med et afsnit N_n af $\aleph$, og lad f være en enentydig afbildning af $\aleph$ på N_n . Af $N_n \subset \aleph$ fås $f(N_n) \subset f(\aleph) = N_n$, og dermed er N_n ækvivalent med en ægte delmængde af sig selv, hvilket som vist s. 117 er umuligt.

Cantor indførte for $\text{card } \aleph$ symbolet $\aleph_0$ (udtales *alef nul*; $\aleph$ er det første bogstav i det hebraiske alfabet). Vi nævner, at man også møder betegnelsen α . Enhver mængde A , der er ækvivalent med $\aleph$, og for hvilken det altså gælder, at

$$\text{card } A = \aleph_0,$$

kaldes *numerabel* (eller *tællelig*). Ifølge s. 109 har vi da, at mængden af lige, naturlige tal og mængden af kvadrattal samt mængderne $\aleph$ og $\aleph$ alle er numerable mængder; af det dengang sagte fremgår videre sætningen:

SÆTNING 15.II. *En mængde er numerabel, når og kun når dens elementer kan opstilles i en følge.*

At elementerne i en mængde kan opstilles i en følge, kan også udtrykkes på den måde, at de kan *nummereres* ved hjælp af samtlige elementer i $\aleph$; dette er grunden til, at man netop har valgt at bruge glosen numerabel.

Videre gælder:

SÆTNING 15.III. *Enhver mængde, der har en numerabel delmængde, er uendelig.*

Thi hvis den var endelig, måtte den numerable delmængde ifølge sætning 14.I også være det i strid med sætning 15.I.

Den omvendte sætning gælder imidlertid også:

SÆTNING 15.IV. *Enhver uendelig mængde har en numerabel delmængde.*

Vi nøjes med at henvise til begyndelsen af den anskuelige begrundelse for velordningssætningen 10.I; hvis den pågældende mængde er brugt op, før der er valgt en følge ud, er den ækvivalent med et afsnit af $\aleph$ og dermed endelig. Altså må det være muligt blandt mængdens elementer at udvælge en følge, d. v. s. en numerabel mængde. (Dette ræsonnement er, som antydnet, ikke helt tilfredsstillende; ved hjælp af udvalgsaksiomet kan man give et fuldstændigt bevis for sætning 15.IV.)

En uendelig mængde er altså netop en mængde, der har numerable delmængder. Vi vil nævne endnu en for de uendelige mængder karakteristisk egenskab; hertil viser vi følgende sætning:

SÆTNING 15.V. *Enhver uendelig mængde har en ægte delmængde, som den er ækvivalent med.*

Lad mængden A være uendelig, og lad $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots\}$ være en numerabel delmængde af A , som dermed kan opfattes som foreningsmængde af de disjunkte mængder $A \setminus B$ og B . Mængden $C = B \setminus \{b_1\} = \{b_2, b_3, \dots, b_n, \dots\}$ er numerabel og en ægte delmængde af B ; mængderne $A \setminus B$ og C er disjunkte, og deres foreningsmængde er en ægte delmængde af A og tydeligvis ækvivalent med A .

Sætning 14.II kan også formuleres således:

SÆTNING 15.VI. *En mængde, der har en ægte delmængde, som den er ækvivalent med, er uendelig.*

Sætningerne 15.V og 15.VI siger tilsammen, at en uendelig mængde netop er en mængde, der har ægte delmængder, som den er ækvivalent med. Denne egenskab kan derfor, som bl. a. Dedekind har gjort det, bruges til *definition* af begrebet uendelig mængde.

Vi kommer nu til en helt fundamental sætning, Felix Bernsteins ækvivalenssætning¹:

SÆTNING 15.VII. *Hvis det om to mængder gælder, at enhver af dem er ækvivalent med en delmængde af den anden, så er de indbyrdes ækvivalente.*

Lad $A \sim B_0 \subseteq B$ og $B \sim A_0 \subseteq A$. Hvis $B_0 = B$ eller $A_0 = A$, har vi umiddelbart, at $A \sim B$, og vi kan derfor antage, at $B_0 \subset B$ og $A_0 \subset A$. Lad φ og ψ være enentydige afbildninger af henholdsvis A på B_0 og B på A_0 . Vi vil ved hjælp af disse afbildninger trin for trin konstruere en enentydig

¹ Der findes mange beviser for denne sætning; for tilladelse til at gengive det her benyttede takker vi professor, dr. phil. Børge Jessen, som i sine forelæsninger plejer at gennemgå det i følgende ikklædning: Ved et afdansningsbal i en danseskole vil hver af drengene (der tilsammen udgør mængden A) helst danse med en ganske bestemt af pigerne (der tilsammen udgør mængden B), og der findes ikke blandt drengene to, der gerne vil danse med den samme pige. Ligeså vil hver af pigerne helst danse med en bestemt dreng, og ingen dreng foretrækkes af mere end én pige. Opgaven består nu i at arrangere en dans, så at alle kommer på gulvet, og der mindst er én i hvert dansende par, som er tilfreds. Hvis dette skal opnås, må de drenge, som ingen af pigerne vil danse med (de udgør mængden A_1), have lov til at inklinere (norsk: engasjere). De piger, som disse drenge inklinerer for (de udgør mængden B_1), ville gerne have danset med visse drenge (de udgør mængden A_2), som derfor, hvis dansen skal arrangeres som planlagt, må have lov til at inklinere. Således fortsættes, og om de slutteligt tiloversblevne piger (der udgør mængden S) viser det sig, at de drenge, som de gerne vil danse med, netop er de tiloversblevne (der udgør mængden R).

afbildning f af A på B , endog på så enkel en måde som vel tænkeligt, idet vi vil spalte A i to disjunkte mængder P og R (hvor R er en delmængde af definitionsområdet for ψ^{-1}) og definere f , så at den på P stemmer overens med φ og på R med ψ^{-1} .

Da definitionsområdet for ψ^{-1} er $\psi(B) = A_0 \subset A$, er ψ^{-1} ikke defineret på mængden $A_1 = A \setminus A_0 \neq \emptyset$, og da vi vil opbygge f af φ og ψ^{-1} , bliver vi nødt til at sætte

$$f(a) = \varphi(a) \text{ for } a \in A_1,$$

og f afbilder dermed A_1 enentydigt på $B_1 = \varphi(A_1) \neq \emptyset$.

Mængden $A_2 = \psi(B_1) \neq \emptyset$ er en delmængde af A_0 , og derfor er $A_2 \cap A_1 = \emptyset$. Den afbildes ved ψ^{-1} på B_1 , og da f skal være enentydig og skal opbygges af φ og ψ^{-1} , bliver vi nødt til at sætte

$$f(a) = \varphi(a) \text{ for } a \in A_2,$$

og f afbilder dermed A_2 enentydigt på $B_2 = \varphi(A_2) \neq \emptyset$, og da φ er enentydig, er $B_2 \cap B_1 = \emptyset$.

Ved stadig gentagelse af denne proces (se fig. 21, hvor φ er antydnet ved fuldt optrukne og ψ ved stiplede pile) fremkommer to mængdefølger

$$\begin{aligned} A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots, \\ B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots, \end{aligned}$$

idet vi for ethvert naturligt tal $n \geq 2$ går således frem:

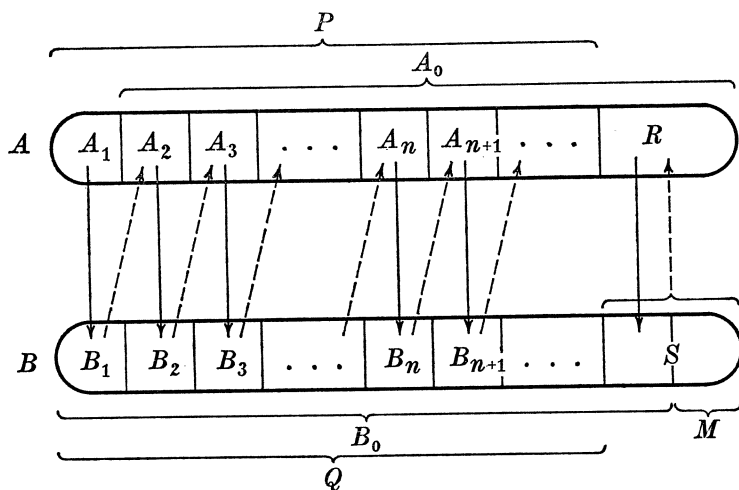


Fig. 21

Mængden $A_{n+1} = \psi(B_n) \neq \emptyset$ er, da ψ er enentydig, en delmængde af $A_0 \setminus \bigcup_{k=2}^n A_k$, og derfor er $A_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^n A_k = \emptyset$. Den afbildes ved ψ^{-1} på

B_n , og da f skal være enentydig og skal opbygges af φ og ψ^{-1} , bliver vi nødt til at sætte

$$f(a) = \varphi(a) \text{ for } a \in A_{n+1},$$

og f afbilder dermed A_{n+1} enentydigt på $B_{n+1} = \varphi(A_{n+1}) \neq \emptyset$, og da φ er enentydig, er $B_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^n B_k = \emptyset$.

Mængderne i hver af de to følger er parvis disjunkte, og f afbilder derfor mængden $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ enentydigt på mængden $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Vi betragter nu mængderne $R = A \setminus P$ og $S = B \setminus Q$. Af $Q = \varphi(P) \subseteq \varphi(A) = B_0 \subset B$ får vi $Q \subset B$ og dermed $S \neq \emptyset$. Ifølge det foregående er $\psi(Q) = P \setminus A_1$, og da $\psi(B) = A_0 = A \setminus A_1$, og ψ er enentydig, må det gælde, at

$$\psi(S) = \psi(B \setminus Q) = \psi(B) \setminus \psi(Q) = (A \setminus A_1) \setminus (P \setminus A_1) = A \setminus P = R,$$

og vi har vist, at $R = \psi(S) \neq \emptyset$. Vi kan da sætte

$$f(a) = \psi^{-1}(a) \text{ for } a \in R,$$

og f afbilder dermed R enentydigt på S .

Da $P \cap R = \emptyset$ og $Q \cap S = \emptyset$, har vi alt i alt opnået, at f afbilder $P \cup R = A$ enentydigt på $Q \cup S = B$, og vi har således bevist, at $A \sim B$.

Det bemærkes, at mængden $M = B \setminus B_0$ (der spiller samme rolle over for φ som $A_1 = A \setminus A_0$ over for ψ) er en ægte, ikke tom delmængde af S , som det også er antydnet på fig. 21. Thi af $B_0 \subset B$ følger det, at $M \neq \emptyset$. Da $R \neq \emptyset$, har vi også $\varphi(R) \neq \emptyset$, og af

$$\varphi(R) = \varphi(A \setminus P) = \varphi(A) \setminus \varphi(P) = B_0 \setminus Q \subseteq B \setminus Q = S$$

fås det, at $\varphi(R) \subseteq S$. Tilsammen giver disse resultater, at $S \setminus \varphi(R) \subset S$; men her står netop at læse, at $M \subset S$, idet

$$\begin{aligned} S \setminus \varphi(R) &= (Q \cup S) \setminus (Q \cup \varphi(R)) = B \setminus (\varphi(P) \cup \varphi(R)) \\ &= B \setminus \varphi(P \cup R) = B \setminus \varphi(A) = B \setminus B_0 = M. \end{aligned}$$

Man kan somme tider få brug for følgende sætning, der er ensbetydende med Bernsteins ækvivalenssætning:

SÆTNING 15.VIII. Hvis det om tre mængder A , B og C gælder, at $A \supseteq B \supseteq C$ og $A \sim C$, så er $A \sim B \sim C$.

Vi viser først, at sætning 15.VII medfører sætning 15.VIII: Af forudsætningerne i den sidstnævnte aflæses det, at A er ækvivalent med en delmængde af B , nemlig C , og at B er ækvivalent med en delmængde af A , nemlig B selv. Ifølge sætning 15.VII er da $A \sim B$, og af $C \sim A$ fås derpå $C \sim B$, og vi har $A \sim B \sim C$.

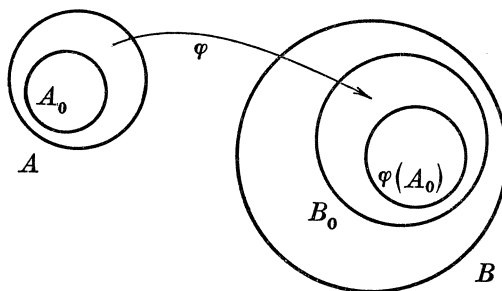


Fig. 22

Dernæst viser vi, at sætning 15.viii medfører sætning 15.vii: Lad $A \sim B_0 \subseteq B$ og $B \sim A_0 \subseteq A$, og lad φ være en enentydig afbildning af A på B_0 . Vi har da (se fig. 22), at $A_0 \sim \varphi(A_0) \subseteq B_0$, og dermed (idet $B \sim A_0$):

$$B \supseteq B_0 \supseteq \varphi(A_0) \quad \text{og} \quad B \sim \varphi(A_0),$$

og ifølge sætning 15.viii gælder det da, at $B \sim B_0$ eller lige så godt $B_0 \sim B$. Dette giver sammen med $A \sim B_0$, at $A \sim B$.

Man ser ofte Bernsteins ækvivalenssætning bevist ved hjælp af et direkte bevis for sætning 15.viii.

16. Ordning af kardinaltallene. Vi skal i det følgende udvide den foreliggende ordning af de endelige kardinaltal til også at omfatte de transfinite; da kardinaltallene er defineret ved begrebet ækvivalens, må udvidelsen af ordningen også ske ved hjælp af dette.

Forbindelsen mellem ækvivalens af endelige mængder og ordning af deres kardinaltal er udtrykt i sætningerne 14.iii og 14.iv. Hvis sætning 14.iii nu gjaldt for vilkårlige mængder A og B , så kunne man definere således: $\text{card } A < \text{card } B$, hvis A er ækvivalent med en ægte delmængde af B , og dermed ville man så have en ordning, der ifølge sætning 14.iv ville være en udvidelse af ordningen af de endelige kardinaltal. Men sætning 14.iii gælder *ikke* for uendelige mængder; thi de tre udsagn kan gælde samtidigt, idet 1° ifølge sætning 15.v medfører 2° og 3°. Det kan iøvrigt ikke på forhånd afvises som umuligt, at der kunne eksistere uendelige mængder A og B , for hvilke ingen af dem gælder.

Hvis det skal lykkes at definere en ordning af kardinaltallene for vilkårlige mængder, må opregningen af de forskellige muligheder med hensyn til ækvivalens mellem to forelagte mængder og delmængder af dem udformes på en sådan måde, at den er uafhængig af, om mængderne er endelige eller ej. Det viser sig nu, at man kan komme igennem ved som

udgangspunkt at benytte følgende sætning, hvis rigtighed er umiddelbart indlysende:

SÆTNING 16.I. *Om to vilkårlige mængder A og B gælder netop ét af følgende fire udsagn:*

- 1° A er ækvivalent med en delmængde af B , og
 B er ækvivalent med en delmængde af A ,
- 2° A er ækvivalent med en delmængde af B , og
 B er ikke ækvivalent med nogen delmængde af A ,
- 3° A er ikke ækvivalent med nogen delmængde af B , og
 B er ækvivalent med en delmængde af A ,
- 4° A er ikke ækvivalent med nogen delmængde af B , og
 B er ikke ækvivalent med nogen delmængde af A ;

eller kort udtrykt:

- 1° $A \sim B_1 \subseteq B$ og $B \sim A_1 \subseteq A$,
- 2° $A \sim B_1 \subseteq B$ og $B \not\sim A_1 \subseteq A$,
- 3° $A \not\sim B_1 \subseteq B$ og $B \sim A_1 \subseteq A$,
- 4° $A \not\sim B_1 \subseteq B$ og $B \not\sim A_1 \subseteq A$.

Det ses, at hvis mængderne A og B specielt er endelige, gælder udsagnene 1°, 2° og 3° netop, når udsagnene henholdsvis 1°, 2° og 3° i sætning 14.III gælder, og at udsagnet 4° derfor aldrig kan gælde. For endelige mængder har vi altså ganske den samme inddeling som tidligere, og udsagnene $\text{card } A = \text{card } B$, $\text{card } A < \text{card } B$ og $\text{card } B < \text{card } A$ gælder altså netop, når henholdsvis 1°, 2° og 3° i sætning 16.I gælder.

Op på nøjagtigt samme måde går det nu også, når A og B ikke forudsættes endelige. Vi begynder med at vise, at udsagnet 4° i sætning 16.I aldrig gælder, altså:

SÆTNING 16.II. *Om to vilkårlige mængder A og B gælder netop ét af de tre udsagn 1°, 2° og 3° i sætning 16.I.*

Beviset forløber, lidt løst formuleret, således: Ifølge velordningssætningen kan vi tænke os, at de to forelagte mængder A og B er velordnede; vi afbilder nu ethvert element af A (så langt det går) i det element af B , der står på samme plads i henhold til velordningen (se s. 48). Et af følgende tre tilfælde vil da indtræffe: A bliver brugt op samtidigt med B , A bliver brugt op før B eller B bliver brugt op før A . I alle tre tilfælde er mindst en af de to mængder ækvivalent med en delmængde af den anden, og udsagnet 4° kan derfor aldrig gælde.

Sætning 16.II kan præciseres nærmere således:

SÆTNING 16.III. *Hvis det om to vilkårlige mængder A og B gælder, at $A \sim B$, så er udsagnet 1° i sætning 16.I opfyldt, og hvis $A \not\sim B$, så er netop ét af udsagnene 2° og 3° opfyldt.*

Thi hvis $A \sim B$, så er 1° opfyldt med f. ex. $B_1 = B$ og $A_1 = A$. Omvendt er det jo netop indholdet af Bernsteins ækvivalenssætning, at hvis 1° er opfyldt, så er $A \sim B$, og dette kan også udtrykkes således: Hvis $A \not\sim B$, så er 1° ikke opfyldt. Men ifølge sætning 16.II er i så fald netop ét af udsagnene 2° og 3° opfyldt.

Videre konstaterer man ved betragtning af sammensatte afbildninger, at hvis mængderne A' og B' er ækvivalente med henholdsvis A og B , så gælder udsagnene 1° , 2° og 3° for A' og B' , netop når henholdsvis 1° , 2° og 3° gælder for A og B .

Dermed er vi så rustede til at definere den ønskede ordning af kardinaltallene. Lad der altså være givet to forskellige kardinaltal $\mathfrak{k}$ og $\mathfrak{l}$; vi vælger to mængder A og B , så at $\text{card } A = \mathfrak{k}$ og $\text{card } B = \mathfrak{l}$. Da $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{l}$ medfører $A \not\sim B$, gælder for A og B ifølge sætning 16.III netop ét af udsagnene 2° og 3° , og vi definerer:

$\mathfrak{k} < \mathfrak{l}$ (og $\mathfrak{l} > \mathfrak{k}$), hvis A og B opfylder 2° ,

$\mathfrak{l} < \mathfrak{k}$ (og $\mathfrak{k} > \mathfrak{l}$), hvis A og B opfylder 3° .

Havde vi i stedet for A og B valgt andre mængder A' og B' med kardinaltallene henholdsvis $\mathfrak{k}$ og $\mathfrak{l}$, så måtte det gælde, at $A' \sim A$ og $B' \sim B$, og dermed ville vi i henhold til bemærkningen ovenfor have fået samme relation mellem $\mathfrak{k}$ og $\mathfrak{l}$. Definitionen er således (som det også måtte forlanges) uafhængig af det specielle valg af mængderne A og B .

Relationen $<$ er ifølge det allerede sagte irreflexiv, antisymmetrisk og konnektiv; vi mangler så blot at vise, at den er transitiv. Lad der da være givet tre kardinaltal $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ og $\mathfrak{m}$ med $\mathfrak{k} < \mathfrak{l}$ og $\mathfrak{l} < \mathfrak{m}$, og lad A , B og C være mængder, der opfylder $\text{card } A = \mathfrak{k}$, $\text{card } B = \mathfrak{l}$ og $\text{card } C = \mathfrak{m}$. Vi har da, at $A \sim B_1 \subseteq B \sim C_1 \subseteq C$ og dermed $A \sim C_2 \subseteq C$; altså gælder for A og C netop ét af udsagnene 1° og 2° . Imidlertid kan 1° ikke gælde, thi af $C \sim A_2 \subseteq A$ ville det (idet $A \sim B_1 \subseteq B$) følge, at $C \sim B_2 \subseteq B$, hvilket ikke kan være rigtigt. Altså opfylder A og C udsagnet 2° , og da alt dette er uafhængigt af det specielle valg af mængderne A , B og C , har vi bevist, at $\mathfrak{k} < \mathfrak{m}$.

Altså har vi fået indført en *ordning* af kardinaltallene, og ifølge bemærkningerne midt på s. 127 er den en udvidelse af ordningen af de endelige kardinaltal. Med en nærliggende sprogbrug siges vor ordning at være en ordning af kardinaltallene efter størrelse, og $\mathfrak{k} < \mathfrak{l}$ ($\mathfrak{l} > \mathfrak{k}$) læses således: $\mathfrak{k}$ er mindre end $\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{l}$ er større end $\mathfrak{k}$), ligesom man, hvis $\text{card } A < \text{card } B$

(eller $\text{card } B > \text{card } A$) siger, at A er mindre mægtig end B (eller at B er mere mægtig eller mægtigere end A).

Af ordningens definition aflæser man de følgende to sætninger, der giver forbindelsen mellem ordningen og begrebet ægte delmængde (jvf. sætning 14.IV, der gælder for endelige mængder):

SÆTNING 16.IV. *Hvis det om to mængder A og B gælder, at $\text{card } A < \text{card } B$, så er A ækvivalent med en ægte delmængde af B .*

SÆTNING 16.V. *Hvis det om to mængder A og B gælder, at A er ækvivalent med en ægte delmængde af B , så er $\text{card } A \leq \text{card } B$.*

Af sætning 15.IV og ordningens definition fremgår det, at det for et vilkårligt transfinit kardinaltal $\aleph$ gælder, at

$$(16.1) \quad \aleph_0 \leq \aleph,$$

hvilket også kan udtrykkes således:

SÆTNING 16.VI. *Kardinaltallet $\aleph_0$ er det mindste transfinite kardinaltal.*

(Dette er naturligvis grunden til, at man i betegnelsen anvender tallet 0 som index.)

På den anden side gælder det naturligvis for ethvert endeligt kardinaltal n , at

$$(16.2) \quad n < \aleph_0,$$

thi sætning 15.I siger, at $n \neq \aleph_0$, og $\aleph_0 < n$ ville ifølge sætning 16.IV medføre, at $\aleph$ var ækvivalent med en ægte delmængde af afsnittet N_n , altså med en endelig mængde, hvilket ifølge sætning 15.I er umuligt.

Da kardinaltallenes ordning er transitiv, får vi af (16.1) og (16.2):

SÆTNING 16.VII. *Ethvert endeligt kardinaltal er mindre end ethvert transfinit kardinaltal.*¹

Endelig aflæser vi af disse sætninger:

SÆTNING 16.VIII. *Enhver delmængde af en numerabel mængde er endelig eller numerabel.*

¹ Det kan bevises, at kardinaltallenes ordning endog er en *velordning*, og de transfinite kardinaltal kan derfor navngives systematisk og kardinaltallene opstilles efter størrelse således:

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots; \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_n, \dots; \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \dots; \dots,$$

hvor $\omega, \omega+1, \omega+2, \dots; \dots$ er de såkaldte *transfinite ordinaltal*, hvis definition og egenskaber vi iøvrigt ikke skal komme ind på.

Enhver uendelig delmængde af en numerabel mængde er således numerabel; f. ex. er mængden af primtal numerabel, da den er en uendelig delmængde af $\mathbb{N}$. En mængde, der er endelig eller numerabel, kaldes iøvrigt (med en ifølge det foregående berettiget udtryksmåde) en *højest* numerabel mængde. Som et eksempel på en sådan kan nævnes mængden af elementer i en følge (thi de behøver jo ikke alle at være forskellige).

17. Addition og multiplikation af kardinaltal. Vi vil definere sum og produkt af to vilkårlige kardinaltal $\mathfrak{k}$ og $\mathfrak{l}$. Lad det om to mængder A og B gælde, at

$$\text{card } A = \mathfrak{k} \quad \text{og} \quad \text{card } B = \mathfrak{l}.$$

Ved definitionen af summen af $\mathfrak{k}$ og $\mathfrak{l}$ vil vi forudsætte, at A og B er disjunkte. Derved begrænser vi os ikke til specielle kardinaltal $\mathfrak{k}$ og $\mathfrak{l}$, thi til to mængder A og B findes der altid to mængder $A^* \sim A$ og $B^* \sim B$, så at $A^* \cap B^* = \emptyset$, nemlig ifølge (11.1) f. ex. produktmængderne $A^* = A \times \{1\}$ og $B^* = B \times \{2\}$.

Vi definerer:

$$(17.1) \quad \mathfrak{k} + \mathfrak{l} = \text{card}(A \cup B), \text{ hvis } A \cap B = \emptyset,$$

$$(17.2) \quad \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{l} = \text{card}(A \times B).$$

Disse definitioner er (som det også måtte forlanges) uafhængige af, hvilke mængder med kardinaltallene $\mathfrak{k}$ og $\mathfrak{l}$ vi specielt har valgt, thi gælder det også om mængderne A' og B' , at $\text{card } A' = \mathfrak{k}$ og $\text{card } B' = \mathfrak{l}$, så har vi $A' \sim A$ og $B' \sim B$ og dermed

$$A' \cup B' \sim A \cup B, \text{ hvis } A' \cap B' = A \cap B = \emptyset,$$

$$A' \times B' \sim A \times B.$$

Ifølge sætningerne 14.v og 14.viii er de hermed definerede begreber sum og produkt af to vilkårlige kardinaltal udvidelser af begreberne sum og produkt af to endelige kardinaltal.

Af lovene $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ og $A \cup B = B \cup A$ (s. 20) følger nu den associative og den kommutative lov for kardinaltallenes addition:

$$(\mathfrak{k} + \mathfrak{l}) + \mathfrak{m} = \mathfrak{k} + (\mathfrak{l} + \mathfrak{m}), \quad \mathfrak{k} + \mathfrak{l} = \mathfrak{l} + \mathfrak{k}.$$

Af lovene $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$ og $A \times B \sim B \times A$ (s. 113) følger den associative og den kommutative lov for kardinaltallenes multiplikation:

$$(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{l}) \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{k} \cdot (\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m}), \quad \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{k}.$$

Endelig følger af $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (s. 114) den distributive lov:

$$\mathfrak{k} \cdot (\mathfrak{l} + \mathfrak{m}) = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{l} + \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{m},$$

alt i den smukkeste overensstemmelse med de for de endelige kardinaltal gældende love. Denne overensstemmelse findes også i følgende regler:

$$(17.3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{k} + 0 &= \mathfrak{k}, & \mathfrak{k} \cdot 1 &= \mathfrak{k}, \\ \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{l} = 0 &\Leftrightarrow \mathfrak{k} = 0 \text{ eller } \mathfrak{l} = 0, \end{aligned}$$

der følger af henholdsvis $A \cup \emptyset = A$ (s. 20), $A \times \{a\} \sim A$ (formlen (11.1)) og $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ eller $B = \emptyset$ (s. 40–41).

Man kan inddrage flere end to kardinaltal i dannelsen af summer og produkter ved at sætte

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{l} + \mathfrak{m} = (\mathfrak{k} + \mathfrak{l}) + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m} = (\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{l}) \cdot \mathfrak{m},$$

og videre ved induktion:

$$(17.4) \quad \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_{n-1} + \mathfrak{m}_n = (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_{n-1}) + \mathfrak{m}_n,$$

$$(17.5) \quad \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_{n-1} \cdot \mathfrak{m}_n = (\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_{n-1}) \cdot \mathfrak{m}_n.$$

Ad denne vej kan man endog nå til at definere sum og produkt af kardinaltallene i en følge af sådanne, altså

$$(17.6) \quad \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_n + \dots,$$

$$(17.7) \quad \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n \cdot \dots,$$

og det kan ved hjælp af de associative love vises, at man i disse udtryk kan sætte og hæve parenteser efter behag. Vi vil imidlertid hellere med det samme direkte definere sum og produkt af kardinaltallene i et vilkårligt system af sådanne.

Lad der altså til ethvert element k i en indexmængde K være knyttet et kardinaltal $\mathfrak{m}_k$; til ethvert $k \in K$ vælger vi en mængde A_k med

$$\text{card } A_k = \mathfrak{m}_k.$$

Ved definitionen af summen af kardinaltallene $\mathfrak{m}_k$ vil vi forudsætte, at mængderne A_k er parvis disjunkte. Derved begrænser vi os ikke til specielle kardinaltal $\mathfrak{m}_k$, thi til et mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$ findes der altid et mængdesystem $(A_k^*)_{k \in K}$ af parvis disjunkte mængder, således at $A_k^* \sim A_k$ for ethvert $k \in K$, nemlig ifølge (11.1) f. ex. systemet af produktmængderne

$$A_k^* = A_k \times \{k\} \text{ for ethvert } k \in K.$$

Vi definerer:

$$(17.8) \quad \sum_{k \in K} m_k = \text{card} \bigcup_{k \in K} A_k, \text{ hvis } A_l \cap A_m = \emptyset \text{ for } l \in K, m \in K, l \neq m,$$

$$(17.9) \quad \prod_{k \in K} m_k = \text{card} \bigtimes_{k \in K} A_k.$$

Disse definitioner er (som det også måtte forlanges) uafhængige af, hvilke mængder med kardinaltallene m_k vi specielt har valgt, thi gælder det også om mængderne A'_k , $k \in K$, at $\text{card } A'_k = m_k$ for ethvert $k \in K$, så har vi, at $A'_k \sim A_k$ for ethvert $k \in K$, og dermed

$$\bigcup_{k \in K} A'_k \sim \bigcup_{k \in K} A_k, \text{ hvis } A'_l \cap A'_m = A_l \cap A_m = \emptyset \text{ for } l \in K, m \in K, l \neq m,$$

$$\bigtimes_{k \in K} A'_k \sim \bigtimes_{k \in K} A_k.$$

Ifølge sætningerne 14.VI og 14.IX er de hermed definerede begreber sum og produkt af kardinaltallene i et vilkårligt system af kardinaltal udvidelser af begreberne sum og produkt af kardinaltallene i et endeligt system af endelige kardinaltal, og det er klart, at de tillige er udvidelser af de ved (17.1) og (17.2) definerede begreber sum og produkt af to vilkårlige kardinaltal.

Af den associative og den kommutative lov for foreningsmængdedannelsen (s. 25 og 111) og for produktmængdedannelsen (s. 112–113) samt den s. 114 nævnte distributive lov fås de tilsvarende love for kardinaltallenes addition og multiplikation, som ses at være udvidelser af de s. 130–131 nævnte love:

De associative love: Hvis $(K_p)_{p \in P}$ er en klasseinddeling af indexmængden K , så er

$$\sum_{k \in K} m_k = \sum_{p \in P} \sum_{k \in K_p} m_k \quad \text{og} \quad \prod_{k \in K} m_k = \prod_{p \in P} \prod_{k \in K_p} m_k.$$

De kommutative love: Hvis der findes en enentydig afbildning f af K på L , og $l = f(k) \Rightarrow m_l = m_k$, så er

$$\sum_{k \in K} m_k = \sum_{l \in L} m_l \quad \text{og} \quad \prod_{k \in K} m_k = \prod_{l \in L} m_l.$$

Den distributive lov: Idet F betegner produktmængden $\bigtimes_{p \in P} K_p$, er

$$\prod_{p \in P} \sum_{k \in K_p} m_k = \sum_{f \in F} \prod_{p \in P} m_{f(p)}.$$

Vi nævner følgende regler, hvis rigtighed er umiddelbar:

$$\sum_{k \in K} m_k = 0, \text{ hvis og kun hvis } m_k = 0 \text{ for ethvert } k \in K.$$

$$\sum_{k \in K} m_k = \text{card } K, \text{ hvis } m_k = 1 \text{ for ethvert } k \in K.$$

$$(17.10) \quad \prod_{k \in K} m_k = 1, \text{ hvis og kun hvis } m_k = 1 \text{ for ethvert } k \in K.$$

Videre får man af (3.3):

$$\sum_{k \in K} m_k = \sum_{k \in K \setminus L} m_k, \text{ hvis } m_k = 0 \text{ for } k \in L,$$

og af den associative lov, (17.10) og (17.3) får man:

$$\prod_{k \in K} m_k = \prod_{k \in K \setminus L} m_k, \text{ hvis } m_k = 1 \text{ for } k \in L.$$

Endelig får man af $\bigcap_{k \in K} A_k = \emptyset \Leftrightarrow A_k = \emptyset$ for mindst ét $k \in K$ (s. 43):

$$\prod_{k \in K} m_k = 0, \text{ hvis og kun hvis } m_k = 0 \text{ for mindst ét } k \in K.$$

Forbindelsen mellem addition og multiplikation skabes af den distributive lov; et særligt vigtigt specialtilfælde af denne aflæses direkte af (11.2), der som nævnt s. 114 er en konsekvens af den der anførte distributive lov for forenings- og produktmængdedannelse:

Lad der være givet to kardinaltal l og m ; vælger vi en mængde K med $\text{card } K = l$ som indexmængde for et system af kardinaltal m_k , der alle er lig m , gælder det, at

$$(17.11) \quad m \cdot l = \sum_{k \in K} m_k.$$

Heraf fås følgende sætning, der er en udvidelse af sætning 14.vii:

SÆTNING 17.I. *Hvis mængderne A_k udgør et system af parvis disjunkte mængder, der alle er ækvivalente med samme mængde A , så er*

$$\text{card } \bigcup_{k \in K} A_k = \text{card } A \cdot \text{card } K.$$

De i (17.4)–(17.7) betragtede summer og produkter indordnes under de ved (17.8) og (17.9) definerede begreber sum og produkt af kardinaltallene i et vilkårligt system ved følgende formler, hvor N_n som sædvanlig betegner det ved n bestemte afsnit af $\mathfrak{N}$:

$$(17.12) \quad \sum_{k \in N_n} m_k = m_1 + m_2 + \dots + m_n,$$

$$(17.13) \quad \prod_{k \in N_n} m_k = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n,$$

$$(17.14) \quad \sum_{k \in \mathfrak{N}} m_k = m_1 + m_2 + \dots + m_n + \dots,$$

$$(17.15) \quad \prod_{k \in \mathfrak{N}} m_k = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n \cdot \dots.$$

Vi nævner, at man også møder betegnelserne

$$\sum_{k=1}^n m_k, \prod_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^{\infty} m_k \quad \text{og} \quad \prod_{k=1}^{\infty} m_k.$$

Af (17.12) og (17.14) får vi i det tilfælde, at alle de optrædende kardinaltal m_k er lig med det samme kardinaltal m , ved hjælp af (17.11) følgende formler:

$$m + m + \dots + m = m \cdot n,$$

$$m + m + \dots + m + \dots = m \cdot \aleph_0.$$

Af definitionen på kardinaltallenes ordning s. 128 får man følgende sætning, der danner grundlaget for regning med uligheder mellem kardinaltal:

SÆTNING 17.II. Hvis det om to systemer af kardinaltal $(l_k)_{k \in K}$ og $(m_k)_{k \in K}$ gælder, at $l_k \leq m_k$ for ethvert $k \in K$, så er

$$\sum_{k \in K} l_k \leq \sum_{k \in K} m_k \quad \text{og} \quad \prod_{k \in K} l_k \leq \prod_{k \in K} m_k.$$

Som vi senere skal se ved eksempler, gælder det i almindelighed ikke, at $l_k < m_k$ for ethvert $k \in K$ medfører $\sum_{k \in K} l_k < \sum_{k \in K} m_k$ og $\prod_{k \in K} l_k < \prod_{k \in K} m_k$. Det skal dog nævnes, at dette er rigtigt i det specielle tilfælde, at K er endelig, men beviset for denne sætning falder uden for rammerne af denne fremstilling.

18. Potenser af kardinaltal. Lad der være givet to kardinaltal l og m ; vi vælger en mængde K med $\text{card } K = l$ og bruger den som indexmængde for et system af kardinaltal m_k , der alle er lig med m . Vi definerer:

$$(18.1) \quad m^l = \prod_{k \in K} m_k.$$

Ifølge multiplikationens kommutative lov s. 132 er m^l uafhængig af det specielle valg af mængden K .

Vi får straks følgende udvidelse af sætning 14.X:

SÆTNING 18.I. Hvis mængderne A_k , $k \in K$ alle er ækvivalente med samme mængde A , så er

$$\text{card } \prod_{k \in K} A_k = (\text{card } A)^{\text{card } K}.$$

Thi ifølge definitionen på produkt af kardinaltal er $\text{card } \prod_{k \in K} A_k = \prod_{k \in K} \text{card } A_k$.

Heraf får vi ved at betragte det tilfælde, at alle mængderne A_k er den samme mængde A , og idet vi benytter definitionen s. 43, følgende udvidelse af sætning 14.XI:

SÆTNING 18. II. *For vilkårlige mængder A og K gælder det, at*

$$\text{card}(A^K) = (\text{card } A)^{\text{card } K}.$$

Vi kunne også have defineret m^I direkte ved at vælge mængder A og K med $\text{card } A = m$ og $\text{card } K = I$ og sætte $m^I = \text{card}(A^K)$; men i så fald havde vi måttet give et særligt bevis for potensens uafhængighed af det specielle valg af disse to mængder, og vi havde også som en sætning måttet bevise den forbindelse mellem potens og produkt, der her er brugt til potensbegrebets definition.

Af (17.13) og (17.15) får vi i det tilfælde, at alle de optrædende kardinaltal m_k er lig med det samme kardinaltal m , idet vi benytter (18.1):

$$m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n,$$

$$m \cdot m \cdot \dots \cdot m \cdot \dots = m^{\aleph_0}.$$

Af de tidligere behandlede potensmængderegnerregler aflæses nu umiddelbart følgende potensregnerregler:

Af (12.1) fås:

$$m^{\sum_{p \in P} I_p} = \prod_{p \in P} m^{I_p}$$

med bl. a. specialtilfældet (jvf. (12.2))

$$m^{I+I} = m^I \cdot m^I.$$

Dernæst fås af (12.3):

$$(18.2) \quad m^{I \cdot I} = (m^I)^I;$$

og endelig af (12.4):

$$\left(\prod_{k \in K} m_k \right)^I = \prod_{k \in K} m_k^I$$

med bl. a. specialtilfældet (jvf. (12.5))

$$(m \cdot n)^I = m^I \cdot n^I.$$

Vi nævner endnu følgende regler:

$$(18.3) \quad I^1 = I, \quad 1^I = 1, \quad I^0 = 1,$$

som fås af henholdsvis $A^{(1)} \sim A$ (s. 110), (17.10) og $A^\emptyset = \{\emptyset\}^{\aleph_0}$ (s. 44).

Endelig vil vi gøre en vigtig anvendelse af sætning 18. II. Lad D være mængden af alle delmængder af en mængde K ; af formelen (11.3) får vi, idet $\text{card } \{0, 1\} = 2$, at

$$(18.4) \quad \text{card } D = 2^{\text{card } K}.$$

Denne formel har vi tidligere mødt som (14.1), men da var der kun tale om en endelig mængde K . Man kan ved en løs betragtning gøre resultatet

(18.4) plausibelt, idet man kopierer det s. 121 gennemførte ræsonnement: D er ækvivalent med mængden af muligheder for at udtage en delmængde af K . Der er $\text{card } K$ elementer i mængden K , og for hvert af dem er der, når vi vælger os en delmængde af K , to muligheder: om det tages med i delmængden eller ej — der er da $2^{\text{card } K}$ muligheder for at udvælge en delmængde.

Som eksempel til (18.4) nævner vi, at mængden af delmængder af en numerabel mængde har kardinaltallet $2^{\aleph_0}$.

(Fortsættes i næste hefte.)

LITT OM KJEGLESNITTENE FRA ET ASTRONAUTISK SYNSPUNKT

TH. GODAL

Fra å ha vært et fag som meget få interesserte seg for er celest mekanikk nå plutselig, av nærliggende årsaker, omfattet med stor og almen interesse. Som lærer i realfag må man i våre dager stadig være forberedt på spørsmål fra elevene angående romfartøyers baneforhold. Et grunnproblem som ofte melder seg i en slik forbindelse er følgende:

Gitt to faste punkter P_0 og P_1 i et sentralt gravitasjonsfelt, f. eks. jordens. Et romfartøy skal bevege seg fra P_0 til P_1 i løpet av en bestemt tid t . Hvilken utgangshastighet v_0 må det da ha i P_0 dersom bevegelsen mellom de to punkter skal foregå uten påvirkning av andre krefter enn gravitasjonen?

Ligninger for problemets løsning hva de såkalte baneelementer angår blev oppstillet av Gauss¹ i forbindelse med bestemmelse av banen for en nyoppdaget planet. Planetens hastighet interesserte ikke Gauss seg direkte for, og det er vanskelig å trekke noen enkle slutninger vedrørende denne av hans relasjoner.

Banen er som kjent et kjeglesnitt. Ved direkte å spørre om hastigheten, slik det faller naturlig å gjøre når man står overfor astronautiske problemer, kommer man derfor automatisk i kontakt med kjeglesnittenes tangentegenskaper. Som følge av den spesielle fremgangsmåten som vil bli benyttet i denne artikkel, avslører der seg tidlig et for den videre behandling meget nyttig resultat. Der siktes her til den egenskap figuren illustrerer ved å antyde at linjen ON halverer vinkelen P_0OP_1 .

Idet vi foreløpig ser bort fra kravet om at bevegelsen fra P_0 til P_1 skal foregå i løpet av en bestemt tid, skal vi nå utlede en meget enkel relasjon for utgangshastigheten ved å bygge direkte på bevegelsesligningen

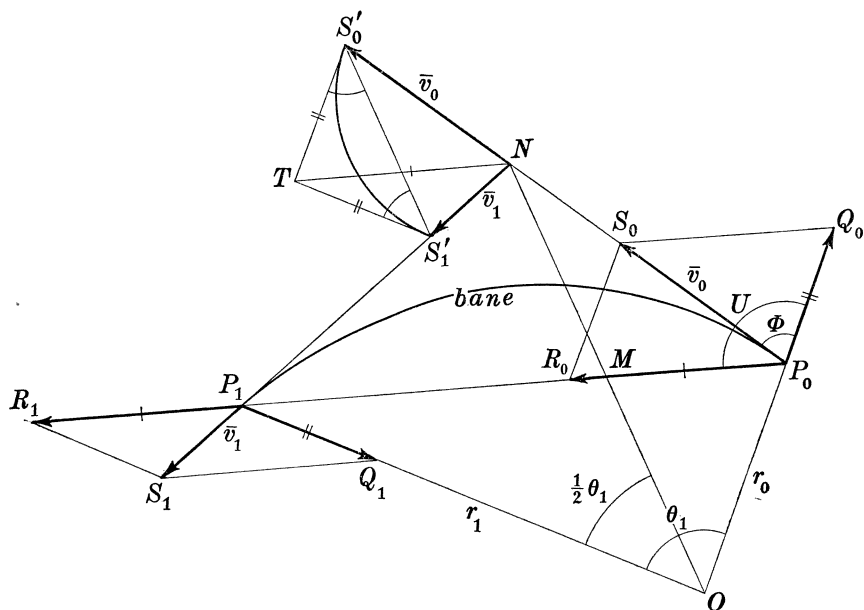
$$(1) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{k}{r^2} \mathbf{e},$$

samt den derav avledbare Keplers 2. lov om flatehastigheten:

¹ C. F. Gauss: *Theoria Motus Corporum Coelestium*, Göttingen 1809, s. 114–116.

$$(2) \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \text{konst.}$$

Her betegner k gravitasjonskonstanten, og e er en enhetsvektor som peker fra romfartøyet mot gravitasjonssentret. Betydningen av de øvrige betegnelser fremgår av figuren.



O er gravitasjonssentret, NP_0 og NP_1 banetangenter. Hastighetsvektorene v_0 og v_1 (på figuren betegnet $\bar{v}_0$, $\bar{v}_1$) har størrelsene v_0 og v_1 og er oppløst i komponenter ved

$$v_0 = \vec{P_0Q_0} + \vec{P_0R_0}, \quad v_1 = \vec{P_1Q_1} + \vec{P_1R_1}.$$

$P_0Q_0 = P_1Q_1$, $P_0R_0 = P_1R_1$. Produktet $P_0Q_0 \cdot P_0R_0$ er det samme for alle baner mellom P_0 og P_1 .

Av (1) og (2) fås

$$(3) \quad dv = \frac{k}{h} e d\theta.$$

dv er altså hva størrelsen angår proporsjonal med $d\theta$. Da dv hele tiden er rettet mot gravitasjonssentret, er det ikke vanskelig å innse at spissen av vektoren v i forhold til romfartøyet beskriver en sirkel med radius

lik k/h .¹ Den buen av denne sirkelen som svarer til bevegelsen fra P_0 til P_1 er inntegnet øverst på figuren. Den forbinder spissene av de til punktet N forskjøvne vektorer $\mathbf{v}_0$ og $\mathbf{v}_1$. Tangentene til sirkelen i S'_0 og S'_1 er ifølge (1) parallelle med henholdsvis OP_0 og OP_1 . Korden $S'_0S'_1$ må derfor være parallell med halveringslinjen for vinkelen θ_1 mellom OP_0 og OP_1 . På grunn av Keplers 2. lov er trekantene OP_0S_0 og OP_1S_1 like store; dette gjelder derfor også om trekantene ONS'_0 og ONS'_1 . Følgelig må $S'_0S'_1$ være parallell med ON , som derfor halverer vinkelen θ_1 .

På figuren er hastigheten $\mathbf{v}_0$ oppløst i komponentene $\vec{P_0Q_0}$ og $\vec{P_0R_0}$, og likeså $\mathbf{v}_1$ i komponentene $\vec{P_1Q_1}$ og $\vec{P_1R_1}$. Det er nå ganske enkelt å bevise det som anføres i figurteksten om parvis like store hastighetskomponenter for den enkelte bane, og konstant produkt av størrelsene av disse for alle baner fra P_0 til P_1 :

Da komponentene $\vec{P_0Q_0}$ og $\vec{P_1Q_1}$ intet bidrag gir til flatehastigheten, må trekantene OP_0R_0 og OP_1R_1 være like store, hvorav straks følger $P_0R_0 = P_1R_1$. Forskyves de to trekanter $P_0S_0R_0$ og $P_1S_1R_1$ så P_0 resp. P_1 faller i N , vil kantene P_0R_0 og P_1R_1 begge falle i NT , hvor T er sirkeltangentenes skjæringspunkt. I trekanten $S'_0S'_1T$ blir de to vinklene ved $S'_0S'_1$ begge lik $\frac{1}{2}\theta_1$, slik at $TS'_0 = TS'_1$ eller $P_0Q_0 = P_1Q_1$.

Videre fåes at $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta_1$ er lik P_0Q_0 dividert med sirkelens radius som jo er lik k/h . Da h ifølge (2) og figuren er lik $r_0 \cdot P_0R_0 \cdot \sin U$, må vi altså ha at

$$(4) \quad P_0Q_0 \cdot P_0R_0 = \frac{k}{r_0 \sin U} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta_1, \text{ q. e. d.}$$

Med figurens betegnelser kan denne ligning også skrives på den mer hensiktsmessige form

$$(5) \quad r_0 v_0^2 \sin \Phi \sin (U - \Phi) = k \sin U \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta_1,$$

hvilket man lett overbeviser seg om ved å kombinere (4) med sinusproporsjonen anvendt på trekanten $P_0Q_0S_0$.

Ligning (5) er brukbar til litt av hvert. Den er ikke innskrenket til bare å være en ligning mellom to gitte posisjoner i en bane og hastigheten i den ene av disse. Den kan også oppfattes som ligning for selve banen

¹ Ved integrasjon av (3) fåes nemlig $\mathbf{v} = \frac{k}{h} \mathbf{e}^* + \mathbf{c}$, hvor $\mathbf{e}^*$ er frembrakt av $\mathbf{e}$ ved en dreining på -90° , og $\mathbf{c}$ er konstant. Man kan også gå over til rettvinklede koordinater, hvorved (3) blir $dv_x = -\frac{k}{h} \cos \theta d\theta$, $dv_y = -\frac{k}{h} \sin \theta d\theta$, som ved integrasjon gir $v_x = -\frac{k}{h} \sin \theta + c_1$, $v_y = \frac{k}{h} \cos \theta + c_2$.

i U og θ_1 som variable. Vi skal ikke her gå nærmere inn på anvendelsesmulighetene utenfor vårt egentlige problem, men bare nevne et meget enkelt resultat av (5): For gitt P_0 og P_1 er utgangshastigheten minst dersom $\Phi = \frac{1}{2}U$. Dette er en generalisering av en kjent regel for kastebevegelse i lufttomt rom, såvidt vites tidligere kun bevist for det tilfelle at tyngdens aksellerasjon er konstant.

For å kunne komme videre med vårt opprinnelige problem må vi finne et uttrykk for flateinnholdet av sektoren begrenset av OP_0 , OP_1 og banen. Ifølge Keplers 2. lov er da tiden for bevegelsen fra P_0 til P_1 gitt som forholdet mellom dette flateinnholdet og flatehastigheten. Figuren viser at flatehastigheten er lik $\frac{1}{2}r_0v_0 \sin \Phi$, og det er ingen vanskelighet å finne et brukbart uttrykk for dette ved hjelp av (5); Φ peker seg da naturlig ut som parameter. Det går utmerket godt an å uttrykke sektorens flateinnhold, og dermed også tiden, ved den samme parameter. Det viser seg imidlertid å være mer hensiktsmessig å benytte en annen parameter, nemlig den halve differens av størrelsene av den såkalte ekssentriske anomali i P_1 og P_0 . Det var denne parameter Gauss valgte å benytte, dessverre uten annen motivering enn at de resulterende ligninger derved blir svært enkle.

Etter et nærmere studium av figuren faller det ganske naturlig å forsøke å uttrykke sektorens flateinnhold ved en geometrisk definert parameter som viser seg å være identisk med den av Gauss benyttede. Sektoren består av en trekant, hvis flateinnhold intet problem er, samt et segment. Som kjent er segmentet i tilfelle av en parabel ganske enkelt lik $2/3$ av trekanten P_0P_1N . I tilfelle av en ellipse er segmentet samme brøkdel av trekanten P_0P_1N som et sirkelsegment er av en tilsvarende trekant, forutsatt at sirkelens radius er lik $\sqrt{r_0r_1}$, dens sentrum O , og ON er den samme for ellipse som for sirkel. I tilfelle av en hyperbel har man en fullstendig analog regel med likesidet hyperbel isteden for sirkel. Begge regler lar seg forholdsvis lett bevise ved å benytte seg av at ON halverer vinkelen θ_1 .

For her å holde oss til ellipsen og den dertil hørende sirkel, så vil det nå innsees at det faller meget naturlig å innføre en parameter g definert ved

$$(6) \quad \cos g = \sqrt{r_0r_1}/ON.$$

Ved hjelp av dette finner man lett at

$$\text{Segment: Trekant } P_0P_1N = (g - \sin g \cos g) \cos g / \sin^3 g$$

for sirkelen, og følgelig også for ellipsen.

Figuren viser at flateinnholdet av trekanten P_0P_1N er lik flate-

innholdet av trekanten P_0P_1O multiplisert med MN/OM . Ifølge figuren og (6) har vi

$$\frac{MN}{OM} = \frac{ON - OM}{OM} = \frac{\sqrt{r_0 r_1} - OM \cos g}{OM \cos g}.$$

Betegner vi nå for korthets skyld den for alle baner mellom P_0 og P_1 felles størrelse $\sqrt{r_0 r_1}/OM$ med A , har vi altså:

$$(7) \quad \frac{MN}{OM} = \frac{A - \cos g}{\cos g}.$$

Sektorens flateinnhold F er derfor gitt ved

$$(8) \quad F = \frac{1}{2} r_0 r_1 \sin \theta_1 [1 + (A - \cos g)(g - \sin g \cos g)/\sin^3 g].$$

Figuren viser at

$$\frac{r_0 \sin \Phi}{P_0 M \sin(U - \Phi)} = \frac{ON}{MN},$$

som ved multiplikasjon med (5) gir

$$\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \Phi}{P_0 M} = k \frac{ON \sin U}{MN} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1.$$

Idet

$$P_0 M \sin U = OM \sin \frac{1}{2} \theta_1,$$

gir dette ved (6) og (7) for flatehastigheten:

$$(9) \quad \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin \Phi = \frac{1}{2} \sqrt{k} \sin \frac{1}{2} \theta_1 (r_0 r_1)^{1/4} \cos^{-1/2} \frac{1}{2} \theta_1 (A - \cos g)^{-1/2}.$$

Setter vi nå for korthets skyld

$$2k^{-1/2} (r_0 r_1)^{3/4} \cos^{3/2} \frac{1}{2} \theta_1 = B,$$

gir (8) og (9) ved divisjon følgende formel for tiden t for bevegelsen fra P_0 til P_1 :

$$(10) \quad t = B(A - \cos g)^{1/2} [1 + (A - \cos g)(g - \sin g \cos g)/\sin^3 g].$$

Med de tilhørende uttrykk for A og B gitt ovenfor er dette en lett modifisert utgave av en av Gauss' fundamentale formler.

Tatt i betraktning at faktoren $(g - \sin g \cos g)/\sin^3 g$ er tabulert, ser en at det ved (10) går forholdsvis raskt å approksimere g svarende til gitt t . Ved hjelp av (6) fåes ved betraktning av trekanten OP_0N at den til g svarende utgangshastighet v_0 er bestemt ved

$$\cot g \Phi = \cot g \frac{1}{2} \theta_1 - \sqrt{r_0/r_1} \cos g / \sin \frac{1}{2} \theta_1,$$

samt ligning (5).

Det hersker uenighet om hvorvidt det er raskere å bestemme g ved hjelp av (10) enn å bestemme a ved hjelp av

$$(11) \quad t = k^{-1/2} a^{3/2} \left(\arccos \frac{2a - r_0 - r_1 - d}{2a} - \sin \arccos \frac{2a - r_0 - r_1 - d}{2a} + \arccos \frac{2a - r_0 - r_1 + d}{2a} - \sin \arccos \frac{2a - r_0 - r_1 + d}{2a} \right).$$

Her betegner a ellipsens store halvakse, d avstanden fra P_0 til P_1 . Den til a svarende utgangshastighet v_0 er bestemt ved den fra celest mekanikk velkjente relasjon

$$(12) \quad (2k - r_0 v_0^2) a = k r_0$$

sammen med ligning (5).

I forbindelse med utledningen av sin formel tilsvarende (10) ovenfor omtaler Gauss også formel (11). Han tilskriver den Lambert og betegner den som meget elegant. Gauss foretrakk dog å bruke sin egen formel, som han derfor antagelig mente var mer effektiv enn Lamberts formel.

Det er selvfølgelig mulig å angripe det i denne artikkel behandlede problem ved hjelp av andre en-parameterformler for t enn Gauss' og Lamberts. Det later dog til å være meget vanskelig å komme frem til noe nytt som er på høyde med det de to klassikere presterte for over hundre år siden.

Det kan kanskje til slutt være berettiget å kommentere ligning (12) litt. Den gir, som en ser, uttrykk for det forbløffende faktum at ellipsebanens store halvakse er avhengig kun av starthastighetens størrelse og ikke dens retning. Det er svært vanskelig å forstå at en så fascinerende enkel relasjon som (12) ikke forekommer mer i anvendelsene enn den gjør. Ikke så rent få enkle og til dels fundamentale egenskaper blir av den grunn ofte oversett. Det kan kanskje høres utrolig ut, men selv den enkle generaliserte egenskapen ved kastebevegelse omtalt like etter ligning (5) ovenfor har forfatteren av denne artikkel, tross iherdig søken, ennå til gode å se bevist av noen annen. Den kan i virkeligheten bevises enda meget enklere enn ovenfor ved å bygge direkte på ligning (12).

I det hele tatt finner man ikke meget »esprit de géométrie« i arbeider om astronautisk baneberegning. Området domineres stort sett av hardkokte analytikere, som sjelden eller aldri overrasker leseren med geometrisk interpretasjon av noen av sine resultater.

En hederlig unntagelse er engelskmannen professor D. F. Lawden. Noen av hans resultater er tildels paradoksale. Her skal bare nevnes ett: Dersom man vil sende et romfartøy fra jorden opp i en sirkelformet bane ved to impulser, en i starten og en ved inngangen i sirkelbanen, så blir summen av impulsene mindre jo større radius man velger for banen.

A THEOREM ON CLOSED POLYGONS IN THE PROJECTIVE PLANE

FR. FABRICIUS-BJERRE

1. Let c denote a closed differentiable *curve* in the projective plane. If each point of c is interior point of an arc of order 2 (a convex arc) and the curve has no double point, the curve, as a whole, is of order 2. This theorem has been stated by A. Möbius [4], but A. Kneser [3] has given the first proof of it. J. Hjelmslev [1] has generalized the theorem to curves in spaces of 3 or more dimensions.

E. Kivikoski [2] has stated the corresponding theorem for a closed *polygon* in the projective plane. On the following pages we shall give a new proof for the polygon-theorem. As an introduction we mention some definitions and properties of polygons in the projective plane.

2. In the plane m points $P_1, P_2, \dots, P_m$, $m \geq 3$, are given. Consecutive points are connected by segments whereby we get an *open* polygon with the vertices $P_1, P_2, \dots, P_m$ and the sides $P_1P_2, \dots, P_{m-1}P_m$. For two points P_i and P_{i+1} , any of the two segments which connects the points may be chosen as the side P_iP_{i+1} . The polygon will be *closed* by addition of a segment connecting P_m and P_1 . We only consider polygons for which any two consecutive sides do not lie on the same line.

A line l can have no point in common with the side P_iP_{i+1} or intersect the side in one point or contain the whole side. In the last case we say that l has the two points P_i and P_{i+1} in common with the polygon, disregarding the interior points of the side. The *order* of a polygon π (open or closed) is defined as the maximum number of points common for π and an arbitrary straight line. The order of a polygon is at least 2 and at most equal to the number of sides.

In the polygon π we consider a side P_iP_{i+1} , the preceding side $P_{i-1}P_i$ and the following side $P_{i+1}P_{i+2}$ (for closed polygons the indices are taken modulo m). If it is possible to choose a point P'_{i-1} on the side $P_{i-1}P_i$ and a point P'_{i+2} on the side $P_{i+1}P_{i+2}$ such that the 3-side $P'_{i-1}P_iP_{i+1}P'_{i+2}$ has the order 2, the side P_iP_{i+1} is called a *convex side* in

the polygon. If this can not be done, that is if the 3-side has the order 3 for any choice of the auxiliary points P'_{i-1} and P'_{i+2} , the side is called an *inflectional side*.

3. The above definitions enable us to formulate the theorem to be proved:

If all the sides in a closed polygon π are convex and π has no double points, the polygon has the order 2.

PROOF. Let the polygon π have the vertices $P_1, P_2, \dots, P_m$ and the sides $P_1P_2, \dots, P_{m-1}P_m, P_mP_1$. We first prove the theorem for $m=3$.

We introduce an *affine* plane by choosing as the line at infinity a line u which intersects the complementary segments to the sides P_1P_2 and

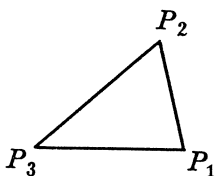


Fig. 1 a

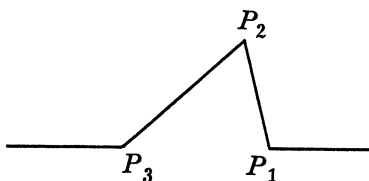


Fig. 1 b

P_2P_3 . These sides are then finite segments issuing from P_2 (fig. 1a and b). If we connect the points P_1 and P_3 by the finite segment P_1P_3 , we get a simple triangle, that is a 3-side of order 2, where every side is convex. If we take the complementary segment, we obtain a closed 3-side of order 3 where every side is an inflectional side. Thus the theorem is true for $m=3$.

Next we assume $m \geq 4$. The 2-side $P_1P_2P_3$ is an open polygon of order 2. If the polygon π does not have the order 2 there exists a number i , $3 \leq i \leq m$, such that the open polygon $\pi_i = P_1P_2 \dots P_i$ has the order 2, but the polygon $\pi_{i+1} = P_1P_2 \dots P_{i+1}$ has the order 3. We will show that this assumption leads to a contradiction.

Since the polygon π_i is of order 2, the line p through the side P_1P_2 has no other points in common with π_i . The same holds for the line q through the side $P_{i-1}P_i$, and consequently the polygon π_i is lying in one of the two angular domains which are bounded by the lines p and q . If $i \geq 4$ the intersection between p and q is a point T outside π_i , and a line u through T and in the angular domain where π_i does not lie, has no point in common with π_i . If u is chosen as the line at infinity, the polygon π_i will be an *ordinary convex polygon* in the affine plane for which

the sides P_1P_2 and $P_{i-1}P_i$ lie on the *parallel lines* p and q (fig. 2a and b). The *convex domain* bounded by π_i and the finite segment P_iP_1 is called ω . For $i=3$ the lines p and q intersect in P_2 , and choosing a suitable

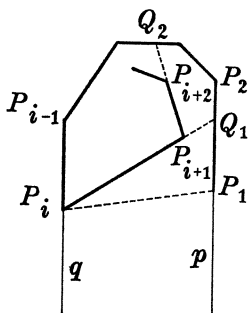


Fig. 2a

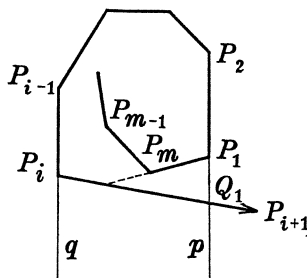


Fig. 2b

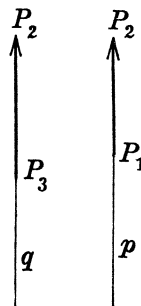


Fig. 2c

line u through P_2 as the line at infinity, the convex polygon π_3 will be the two half-lines P_1P_2 and P_3P_2 (fig. 2c).

The line through the side P_iP_{i+1} will intersect either the polygon $\pi_{i-1} = P_1P_2 \dots P_{i-1}$ or the half-line of p with endpoint P_1 not containing the point P_2 . The intersection point is denoted Q_1 , and we first consider the case where Q_1 is a point of the polygon π_i (fig. 2a).

Since the side $P_{i-1}P_i$ is assumed to be convex, the side P_iP_{i+1} must go into the parallel strip bounded by p and q , and since π has no double point, P_{i+1} will be an *interior* point of the finite segment P_iQ_1 . The polygon $P_{i-1}P_iQ_1 \dots P_{i-1}$ is the boundary of a convex domain ω_1 , where $\omega_1 \subseteq \omega$.

We next consider the convex side $P_{i+1}P_{i+2}$. The line through this side will intersect the polygon $Q_1 \dots P_{i-1}P_i$ in a point Q_2 , and since π has no double point, the vertex P_{i+2} is an *interior* point of the finite segment $P_{i+1}Q_2$. The polygon $P_iP_{i+1}Q_2 \dots P_i$ is the boundary of a new convex domain ω_2 , where $\omega_2 \subset \omega_1$. Continuing in this way we obtain new points $Q_3, Q_4, \dots$, new vertices $P_{i+3}, P_{i+4}, \dots$ and new convex domains $\omega_3, \omega_4, \dots$, where each convex domain is contained in the preceding one. All the vertices $P_{i+2}, P_{i+3}, \dots$ are in the interior of ω . After a finite number of steps we reach the vertex $P_{m+1} = P_1$ which is, however, lying on the boundary of ω . Hence we have the desired contradiction.

We then turn to the case where Q_1 is a point on the prolongation of the side P_1P_2 (fig. 2b). Since the polygon π_{i+1} is assumed to have the order 3, the vertex P_{i+1} cannot be a point of the finite segment P_iQ_1 , and consequently this segment is contained in the side P_iP_{i+1} . If we again use that the sides of the polygon are convex and that the polygon

π has no double point, we find, exactly as above, that the sides P_2P_1 , P_1P_m , P_mP_{m-1} , $\dots$ form a spiral-shaped open polygon for which the vertices $P_m, P_{m-1}, \dots$ are placed in the convex domain bounded by the polygon $Q_1P_2 \dots P_{i-1}P_iQ_1$. But since the vertex P_{i+1} is situated outside this domain, we have again obtained a contradiction.

Hence we have proved that the polygon π is of order 2, that is in the affine plane π is a convex polygon.

It may be noted that in the above proof we have applied properties of convex polygons in the affine plane. Kivikoski, in his proof, uses purely projective methods only.

REFERENCES

- [1] J. HJELMSLEV: *Ein Satz über monotone Raumkurven im R_n mit einer Anwendung auf elliptisch und hyperbolisch gekrümmte Ovale*. Acta Math. 87 (1952), pp. 59–82.
- [2] E. KIVIKOSKI: *Zur Theorie der projektiven Vielseite*. Ann. Acad. Scient. Fennicae, A. 32 (1929).
- [3] A. KNESER: *Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven*. Math. Ann. 41 (1893), pp. 349–376.
- [4] A. MÖBIUS: *Ueber die Gestalt sphärischer Curven*. Gesammelte Werke, B. 2, pp. 185–187, Leipzig 1886.

BOKMELDINGER

FR. CHR. HOLB. ARENTZ: *Undersøgning hvorledes man paa korteste Maade kan opløse saadanne Æquationer, som indeholde flere eller mange ubekjendte Størrelser tillige*. Faksimileutgave av avhandling først trykt i »Nye Samling af det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter«, Andet Bind, København 1788, s. 251–286. Trykt i 500 nummererte eksemplarer. Norges Tekniske Høgskole, Hovedbiblioteket, Trondheim 1961. N.kr. 17.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 89.)

I den rekke av faksimileutgaver som i de senere år er blitt utgitt av Hovedbiblioteket på NTH, er nå også tatt med Arentz' avhandling om løsning av lineære ligningssystemer ved hjelp av determinanter. Det er fortjenstfullt av hovedbibliotekar Thalberg at han på denne måten frisker opp erindringen om det eldste norske matematiske arbeide av noen betydning.

Vi taler i våre dager om den Cramerske metode. Cramers store verk, *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes algébriques*, kom i 1750. Det er på en 650 sider i kvartformat, men den løsningsmetode som har gjort forfatterens navn berømt, står i et tillegg til boken og opptar bare 3 sider. Arentz, som fikk sitt arbeide trykt 38 år senere, har åpenbart ikke kjent hverken Cramers verk eller de bidrag til utvikling av ligningsteoriene og determinantbegrepet som i mellomtiden var kommet fra Bézout, Vandermonde, Laplace og Lagrange. Det minner oss om hvor isolert en vitenskapsmann på våre breddegrader den gang arbeidet, og Arentz var jo heller ikke bare matematiker: han var fysiker, filosof og teolog foruten at han var skolemann.

Prioriteten til determinantbegrepet har som bekjent Leibniz, etter at man i midten av forrige århundre oppdaget hans brevveksling med de l'Hospital. De l'Hospital forstår ikke hva Leibniz mener, når han hevder at han kan regne like generelt med tall som med bokstaver, og i det eksempel Leibniz velger til forklaring, skriver han hver koeffisient bare som et par indekser: istedenfor f.eks. a_{11} setter han simpelthen 11. Arentz bruker ett indeksnummer og plasserer det rett under bokstavet. Det er sannsynlig at han har fått idéen til denne skrivemåten ved de

underlige hukommelsesregler han laget for å hjelpe elevene til å huske årstall.

Arentz forsynte sitt arbeide til slutt med en tabell hvor samtlige ledd i en determinant til og med 6te orden er oppført. Lar man blikket løpe over de 720 leddene i den siste, får man en sterk følelse av hvor genial den er den måten vi idag kan skrive en determinant på. Men *den* kom først i 1841. Det var, *mirabile dictu*, den 20-årige Cayley som lanserte den i sitt første arbeide, *On a theorem in the geometry of position*.

Ole Peder Arvesen

ANDREAS DIEMER: *Das Wesen der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung und ihre Bedeutung für die Unternehmensleitung*. Walter de Gruyter & Co, Berlin 1962. 240 S., 76 Fig. DM 28.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 90.)

Dette er en bok som etter forfatterens mening skal behandle »alle Fragen (i forbindelse med anvendelse av elektroniske regnemaskiner i bedriftsledelse) in möglichst eingehender und umfassender Weise« (s. 6), og han har tenkt å klare dette på under 240 sider! I så måte er boken svært mislykket.

Boken er riktignok både inngående og omfattende, men på emner som jeg antar er av liten eller ingen interesse for folk som ønsker en redegjørelse for hva elektroniske regnemaskiner er, og hvordan de kan benyttes som et hjelpemiddel i bedriftsledelse. Forfatteren anser det nødvendig blant annet å forklare hvordan radorør (s. 29 ff.) og halvledere (s. 47 ff.) virker og hva hysteresesløyfer er (s. 60 ff.). Til dette bruker han nesten 50 sider. Det er ikke realistisk å tro at folk med handelsutdannelse vil ha noe glede av denne delen av boken, og andre som har bedre grunnlag og har interesse for disse tekniske aspektene, vil finne det bedre beskrevet i mange andre bøker som bare beskjeftiger seg med denne delen av regnemaskinteknikken. Det tilsvarende argument gjelder også for den delen av boken (ca. 70 sider) som behandler elektroniske regnemaskiners logiske oppbygning.

Når forfatteren annonserer et kapittel med overskriften »Die mathematischen Grundlagen«, er man naturlig nok interessert i å se hva dette måtte inneholde. Men når han som undertitel har »Die Bedeutung der Zahlensysteme für die automatisierte elektronische Datenverarbeitung«, blir en jo med en gang skeptisk. Kapitlet inneholder en oversikt over forskjellige måter å realisere det desimale tallsystem på i en elektronisk regnemaskin der man bare har bistabile elementer. Man får her et godt overblikk over de metoder som kommer til anvendelse, og forfatteren

angir også maskiner hvor de forskjellige systemene brukes. Inntrykket en likevel sitter igjen med, er at det er altfor teknisk betont for den leserkrets som boken er beregnet på.

Bokens siste kapitel, »Das Verfahren der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung als Mittel zur Ordnung und Bestimmung der betriebswirtschaftlichen Prozesse«, inneholder i grunnen noe av det man venter seg av boken når man ser titelen. Kapitlet gir da også så vidt jeg kan bedømme en god analyse av de prosesser som opptrer i bedrifter, og peker nok inn i fremtiden med hensyn til hvordan elektroniske regnemaskiner etter hvert bør komme til anvendelse på det området.

Etter å ha lest boken sitter en igjen med det inntrykk at titelen så langt fra er dekkende for innholdet og at innholdet i alt vesentlig er delt i to deler: en teknisk del som er detaljert, og en databehandlingsdel som riktignok er fremsynt, men som så langt fra anviser noen konkrete metoder for anvendelse av elektroniske regnemaskiner i bedriftsledelse.

Boken vil kanskje interessere den ytterst engere krets av personer som allerede er vel fortrolig med anvendelsen av databehandlingsmaskiner, og som ønsker litt mer forståelse av det tekniske grunnlaget, men disse vil nok med letthet finne det like godt beskrevet i allerede eksisterende bøker.

Anmeldelsen er skrevet ut fra norske forhold med et godt utvalg i litteratur på engelsk. Hvorvidt boken skulle ha større berettigelse i Tyskland er det vanskelig å ha noen formening om.

Torstein Kristiansen

YNGVE DOMAR: *Matematik för 1 betyg*. Algebra och geometri I–II. (NKI-skolans akademiska kurser.) NKI-skolan, Stockholm 1961. Band I 170 s. Band II 213 s.

(Inneholdsfortegnelse i NMT 9 (1961), s. 182.)

Boken ingår som en del i en korrespondenskurs för ett betyg i matematik. Författaren förutsätter, att läsaren har kunskaper, som svarar mot matematikkursen på realgymnasiets biologiska gren, eller har goda kunskaper från allmänna linjens sociala gren.

Boken är indelad i nio brev, varav huvuddelen, brev 3–8, ägnas åt geometri och lineär algebra.

Geometrin i två och tre dimensioner uppbyggs axiomatiskt utifrån de reella talen. Sålunda definieras i ett tredimensionellt rum punkter som ordnade taltripplar, plan som mängden av alla punkter (x, y, z) , vilka satisfierar en ekvation $Ax + By + Cz + D = 0$, där $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, och

linje som skärningen mellan två icke parallella plan. Skärningen mellan två respektive tre plan, mellan linje och plan samt mellan två linjer diskuteras ingående. Determinanter av ordningen två och tre definieras, och ekvationssystem med två och tre obekanta behandlas. Ett par sidor ägnas åt en konkret illustration av begreppet tredimensionellt rum.

Sista hälften av brev 4 behandlar affina avbildningar från ett tredimensionellt rum till ett annat. Dessa avbildningar definieras syntetiskt, och koordinatframställningen härleds. Detta avsnitt, som också innehåller en diskussion av begreppet affin geometri, är lättläst men kunde ha berikats med några fler figurer och exempel. I brev 5 fortsätter studiet av affina avbildningar. Det visas, att det finns exakt en affin avbildning, vilken avbildar fyra givna punkter, som inte ligger i ett plan, på fyra givna punkter, som inte ligger i ett plan. De speciella affina avbildningarna translationer och likställighetsavbildningar studeras. Satsen att begreppet translation är invariant vid en affin avbildning kunde man ha undvarit. I detta brev finns också en utredning om möjligheten att välja andra koordinatrepresentationer i rummet än den från början givna och en härledning av sambandet mellan koordinaterna i olika koordinatssystem. Hjälpmålet är här de affina avbildningarna. Framställningen är på denna punkt ganska summarisk och fattig på exempel. Brevet avslutas med införandet av vektorbegreppet. En vektor definieras som sammanfattningen av alla ordnade punktpar, som kan överföras i varandra genom en translation. Därefter definieras addition av vektorer och multiplikation med reellt tal och visas räknelagarna för dessa operationer. Här finns också en uttömmande diskussion av den geometriska innebörden av begreppet lineärt beroende för två, tre och fler än tre vektorer.

De två följande breven, som ägnas åt euklidisk geometri i två och tre dimensioner, är innehållsrika och framställningen är med ett par undantag utförlig och lättläst. Undantagen är behandlingen av koordinatbyte mellan ortonormerade system och kongruensavbildningar. Koordinatframställningen av de senare saknas.

Brev 1 och 2 behandlar enkla egenskaper hos olika talområden (inklusive de komplexa talen), kombinatorik, talteori, polynom samt matematisk logik och bevismetoder. Man gläds här särskilt åt det sist nämnda avsnittet, som innehåller ett flertal instruktiva exempel och övningsuppgifter.

Bokens sista brev innehåller vissa avsnitt ur analyskursen för ett betyg. Här förekommer bl. a. ett antal formler för uppskattning av felet vid vissa approximativa beräkningar av bestämda integraler. Formlerna bevisas ej och »behöver inte läras in utantill». Deras existensberättigande i en bok som denna synes därför vara litet. Enligt recensentens mening

kunde de med fordel ha ersatts med en utførlig behandling av metoden med rektangeluppskattninger, som inte ens omnämns.

Om boken i sin helhet kan sägas, att den är väldisponerad, att exempel och övningsuppgifter i anslutning till texten i allmänhet är välvalda men ofta för få och att repetitionsfrågorna i slutet av varje brev bör kunna fylla sin uppgift väl. Med hänsyn till de förhållandevis ringa förkunskaper, som författaren förutsätter hos sina läsare, kan det ifrågasättas, om inte framställningen borde ha varit utförligare på en del punkter och beträffande geometrin mindre abstrakt.

Kjell Björup

JOHN G. HOCKING — GAIL S. YOUNG: *Topology*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 9 + 374 pp. \$ 8.75.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 157.)

Som det fremgår av innholdsfortegnelsen er første halvdel generell (mengdeteoretisk) topologi, mens siste halvdel er algebraisk topologi. Det har tydelig vært forfatterne mye om å gjøre å få frem de *geometriske* aspekter ved topologien. Dette har befridd fremstillingen for den tunge formalisme som ofte er knyttet til denne matematiske disiplin. Bevisene er ikke først og fremst korte og »elegante«, men heller direkte og naturlige. Boken er også rikt illustrert med interessante eksempler fra geometri og analyse. En spesiell kvalitet ved fremstillingen er at denne ved flere emner fører studentene frem til nyere resultater. Dette skjer naturligvis ved at de mest avanserte satsene bare annonseres og forklares, men samtidig gir forfatterne opplysning om hvor resultatene finnes, når de ble funnet og av hvem.

Dyptliggende satser i matematikken bevises ofte på nye måter etter at resultatene avklares. Dette har forfatterne tatt konsekvensen av, og flere viktige emner (eksempelvis Čech-homologiteori) blir tatt opp igjen med nyere metoder etter at de først er behandlet og motivert ad »historisk« veg.

Om det rent faglige innholdet kan en gjøre seg flere refleksjoner. Boken gir en særlig klar og konsis fremstilling av de forskjellige typer av sammenheng et topologisk rom kan ha og relasjoner mellom disse. Avsnittene om kompakthet er korte, men meget gode. Generelle uniforme strukturer er derimot bare så vidt nevnt. Forfatterne henviser her til Kelly's lærebok. Den algebraiske topologien utvikles greitt etter standard-metoder. Beregning av homologigrupper ved insidensmatriser er praktisk talt ikke berørt. Istedet blir homologigruppene bestemt ved rent gruppeteoretiske metoder, hvilket gir resultatene meget raskt og med lite arbeide men til gjengjeld krever en del kunnskaper i gruppeteori. En ratitet ved emneutvalget er for øvrig at den singulære homologiteorien

er utelatt til fordel for Cech-teorien. Ved en innføring i algebraisk topologi ville det vel kanskje være mer naturlig (og nyttig) å studere den singulære teorien.

Per Holm

ROBERT SCHATTEN: *Norm ideals of completely continuous operators.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 27.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960. 8 + 81 S. DM 23.60.

(Innholdsfortegnelse i NMT 9 (1961), s. 84.)

Fredholms teori for integrallikninger er blitt generalisert på flere forskjellige måter. En av de første, og vel den mest vellykte, er teorien til Riesz for kompakte operatorer. Men noe tilsvarende Fredholms determinant får en ikke frem i denne teorien. Først i de siste ti år er en blitt klar over hvilke kompakte operatorer det er som har en Fredholm-determinant. Forfatteren av den foreliggende monografi har ved en rekke avhandlinger ytet et betydelig bidrag til denne klargjøringsprosess. Hans viktigste resultater blir her fremstilt på en meget klar og tilgjengelig form. Av forutsetninger trengs i det vesentlige bare elementær Hilbertromsteori.

La x, y, z være elementer i et Hilbertrom. Da betegnes avbildningen $z \rightarrow \langle z, y \rangle x$ med $x \otimes \bar{y}$. Første hovedresultat er at en begrenset operator A er kompakt hvis og bare hvis $A = \sum \lambda_i x_i \otimes \bar{y}_i$, hvor λ_i er positive tall. Hvis $\sum \lambda_i < \infty$, så sies A å høre til trase-klassen og $\sum \lambda_i$ kalles trase-normen. Trase-klassen, og dens analoge for et vilkårlig Banachrom, er nettopp den klassen hvor det har lyktes å utvikle en Fredholmsk determinant-teori. Forfatteren behandler ikke dette, men han viser at trase-klassen kan identifiseres med det konjugerte til rommet av alle kompakte operatorer, og videre at det konjugerte av traseklassen kan identifiseres med rommet av alle begrensede operatorer. Trase-klassen er et eksempel på et norm-ideal. Med dette menes et ideal I i rommet av de begrensede operatorene, slik at det over I er definert en norm α som gjør I komplett og er slik at $\alpha(x \otimes \bar{y}) = \|x\| \|y\|$.

Siste kapitel er viet til en karakterisering av alle de minimale norm-idealene. Det vesentligste hjelpemidlet her er følgende sats: Hvis A, B, U, V er (n, n) matriser, så vil maksimum av realdelen til trasen av produktet $AUBV$, når U og V gjennomløper alle unitære matriser, være produktsummen av egenverdiene til $(AA')^{1/2}$ og $(BB')^{1/2}$.

Otte Hustad

A. P. SPEISER: *Digitale Rechenanlagen.* Grundlagen, Schaltungstechnik, Arbeitsweise, Betriebssicherheit. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961. 16 + 432 S., 301 Fig. Ganzleinen DM 69.00.

(Innehållsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 93.)

Dr. A. P. Speiser's verk är en utmärkt översikt över dagens teknik inom området elektronisk databehandling. Boken vänder sig till data-maskinkonstruktören och torde vara av föga intresse för användaren — matematikern, systemmannen, programmeraren. Såväl nybörjaren som den i tekniken bevandrade kan ha utbyte av materialet. Författaren nöjer sig nämligen inte enbart med att presentera olika kretsar och *EDB*-komponenter utan omnämner även sådana speciella kretstekniska problem, som konstruktören kan stöta på vid användningen av kretsen eller komponenten i fråga (t.ex strökapacitansers och ledningsinduktansers inverkan på pulsformen).

Efter ett inledande kapitel om binära talsystemet, logisk algebra, logiska symboler, en datamaskins uppbyggnad i stort och dess programmering får läsaren följa tekniken alltifrån olika kretselement och kretstyper till datamaskinenheter, sådana som minnen och in-utorgan och därefter möta organisatoriska synpunkter på utformningen av olika data-system. Härvid är det betecknande att författaren ej beskriver teknikens historia utan helt ägnar sig åt att skildra nuläget och därvid lämnar största utrymmet åt dagens väsentligaste tekniska konstruktioner. I kapitlet om minnen finner man således ingen redogörelse för »utdöda minnestyper» såsom t.ex. Williamsröret utan får i stället i tur och ordning 31 sidor om kärnminnen, 23 sidor om trumminnen, 2 sidor om skivminnen, 2 sidor om fördröjningsminnen och till slut 11 sidor med minnestyper under utveckling (tunna filmer, twistorer, tunneldioder m.fl.).

Enligt anmälaren behandlas alltför kort olika in- och utorgan trots att Speiser inleder detta kapitel med att påpeka att »konstruktionen och utvecklingen av in- och utorganen fordrar mer erfarenhet och längre tid än byggandet av elektroniska kretsar». En bättre balans mellan de perifera organens problem och centralenhetens hade därför varit önskvärd. Även avsnittet om datasystemens organisation är summariskt hållet. Man hade väntat sig en något utförligare behandling av olika applikationers krav på systemens uppbyggnad. De ofta mycket avancerade problemen med simultant arbetande maskinenheter har hittills relativt sparsamt förekommit i litteraturen. De får ej heller här någon större plats.

Trots detta är Speisers bok en utmärkt konstruktörshandbok — inte minst genom rikligt med illustrationer och litteraturanvisningar. Ca 300 hänvisningar till böcker och tidskriftsartiklar lämnas.

Gunnar Wahlström

MOTTATTE BØKER

K. Autwick: *Logarithms*. (The Commonwealth and International Library of Science, Technology and Engineering, Mathematics Division, vol. 3.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1962. 13 + 102 pp. sh. 8/6, \$ 1.75.

Introduction 1-2 * Method 1. Multiplication and division involving numbers between 1 and 10 3-24 * Method 2. Multiplication and division involving numbers between 1 and 10 — using indices 25-37 * Multiplication and division involving numbers greater than 10 39-48 * Multiplication and division involving numbers less than unity 49-68 * Powers and roots—both methods 69-78 * Miscellaneous examples 79-81 * Answers 83-96 * Tables 99-102.

Harvey Cohn: *A second course in number theory*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 13 + 276 pp. sh. 60/-.

Introductory survey 1-6 * Review of elementary number theory and group theory 9-21 * Characters 22-38 * Algebraic concepts 39-53 * Basis theorems 54-74 * Further applications of basis theorems 75-89 * Unique factorization and units 93-112 * Unique factorization into ideals 113-130 * Norms and ideal classes 131-141 * Class structure in quadratic fields 142-156 * Class number formulas and primes in arithmetic progression 159-182 * Quadratic reciprocity 183-194 * Quadratic forms and ideals 195-211 * Compositions, orders, and genera 212-230 * Concluding survey 231-242 * Bibliography and comments 243-246 * Appendix tables 247-274 * Index 275-276.

Wilfred J. Combella: *Introduction to elementary functions*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 14 + 343 pp. sh. 53/-.

The concepts of set, relation, and functions 1-20 * Boolean algebra 21-44 * Real numbers and coordinate geometry 45-66 * Determinants 67-83 * The circular functions 84-151 * The line 152-189 * The circle and the conic sections 190-227 * Equations and graphs of loci 228-257 * The exponential and logarithmic functions 258-269 * Mathematical induction and the binomial function 270-295 * Complex numbers and elementary theory of equations 296-314 * Answers to selected exercises 315-325 * Tables 327-336 * Index 337-343.

R. Courant — D. Hilbert: *Methods of mathematical physics*. Vol. II: Partial differential equations. Interscience Publ., New York, London 1962. 22 + 830 pp. sh. 120/-.

Introductory remarks 1-61 * General theory of partial differential equations of first order 62-153 * Differential equations of higher order 154-239 * Potential theory and elliptic differential equations 240-406 * Hyperbolic differential equations in two independent variables 407-550 * Hyperbolic differential equations in more than two independent variables 551-676 * Representation of solutions 676-766 * Appendix: Ideal functions or distributions 766-798 * Bibliography 799-818 * Index 819-830.

V. A. Ditkin — A. P. Prudnikov: *Operational calculus in two variables and its applications*. (International series of monographs in pure and applied mathematics.) Translated from Russian by D. M. G. Wishart. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1962. 10 + 167 pp. sh. 50/-, \$ 8.50.

The two-dimensional Laplace transform 3-38 * Basic definitions and theorems of the operational calculus in two variables and its applications 39-78 * Tables of formulae 81-162 * References 163-167.

Bernhard Epstein: *Partial differential equations. An introduction*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1962. 10 + 273 pp. sh. 74/-.

Terminology and basic theorems ix-x * Some preliminary topics 1-27 * Partial differential equations of first order 28-41 * The Cauchy problem 42-68 * The Fredholm alternative in spaces 69-89 * The Fredholm alternative in Hilbert spaces 90-129 * Elements of potential theory 130-166 * The Dirichlet problem 167-216 * The heat equation 217-231 * Green's functions and separation of variables 232-251 * Solutions to selected exercises 253-266 * Suggestions for further study 267-268 * Index 269-273.

Johan C. H. Gerretsen: *Lectures on tensor calculus and differential geometry*. P. Noordhoff, Groningen 1962. 12 + 204 pp. Cloth D. fl. 25.00.

Linear vector spaces 1-13 * Metric vector spaces 14-25 * Bilinear and quadratic forms 27-41 * Tensors 42-52 * Manifolds in a metric point space 53-70 * Curves 71-98 * Geodesic differentiation 99-125 * Hypersurfaces 126-145 * Theory of curvature of general manifolds 146-177 * Theory of integrability 178-196 * Bibliography 197 * Index 198-204.

Wolfgang Haack: *Darstellende Geometrie, II. Körper mit krummen Begrenzungsflächen, kotierte Projektionen*. Dritte, durchgesehene Auflage. (Sammlung Göschen 143.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. 129 S. DM 3.60.

Zylinder, Kegel, Kugel 5-45 * Durchdringungen von Zylindern, Kugeln, Kegeln 45-76 * Drehflächen und Schraubenflächen 76-98 * Kotierte Projektionen 99-129.

Dick Wick Hall — Louis O. Kattsoff: *Unified algebra and trigonometry*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 12 + 455 pp. sh. 51/-.

Sets and functions 1–25 * The rational number system 26–54 * The real number system. The distance formula, the equations of a circle 55–75 * Trigonometric functions of numbers 76–111 * Trigonometric functions of angles 112–143 * Algebraic expressions. Operations with polynomials 144–167 * Elementary factoring of polynomials. Operations with fractions. The solutions of quadratic equations 168–205 * Solving linear equations 206–247 * Applications of linear equations. Average rates of change 248–275 * Logarithms 276–296 * The solution of triangles. The laws of sines and cosines. Areas 297–318 * Trigonometric functions of sums and differences of angles. Double-angle and half-angle formulas. The law of tangents 319–333 * A further study of complex numbers 334–346 * Sequences, progressions, and mathematical induction 347–359 * The theory of equations 360–381 * Graphs of trigonometric functions 382–400 * Counting permutations, combinations, and the binomial theorem 401–418 * Answers to odd-numbered problems 419–432 * Tables 433–449 * Index 451–455.

Morton Hamermesh: *Group theory and its application to physical problems*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London; Pergamon Press, London, Paris 1962. 11 + 509 pp. sh. 25/6.

Elements of group theory 1–31 * Symmetry groups 32–67 * Group representations 68–114 * Irreducible representations of the point symmetry groups 115–127 * Miscellaneous operations with group representations 128–160 * Physical applications 161–181 * The symmetric group 182–278 * Continuous groups 279–321 * Axial and spherical symmetry 322–376 * Linear groups in n -dimensional space. Irreducible tensors 377–412 * Applications to atomic and nuclear problems 413–457 * Ray representations. Little groups 458–495 * Bibliography and notes 499–501 * Index 505–509.

R. W. Hamming: *Numerical methods for scientists and engineers*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1962. 17 + 411 pp. sh. 85/6.

The difference calculus 3–23 * Roundoff noise 24–40 * The summation calculus 41–46 * Evaluation of infinite series 47–59 * Finite difference equations 60–66 * The finite Fourier series 67–78 * Introduction to polynomial approximations 81–90 * Polynomial interpolation — arbitrarily spaced data 91–108 * Polynomial interpolation — equally spaced data 109–117 * A uniform method for finding formulas 118–142 * On finding the error term of a formula 143–152 * Formulas for definite integrals 153–164 * Indefinite integrals 165–182 * Introduction to differential equations 183–193 * A general theory of predictor-corrector methods 194–210 * Special methods of integrating ordinary differential equations 211–222 * Least squares: theory 223–243 * Least squares: practice 244–248 * Chebyshev polynomials 249–264 * Rational functions 265–271 * Periodic functions — Fourier approximation 275–289 * The convergence of Fourier series 290–300 * Nonperiodic functions — the Fourier integral 301–312 * Linear filters — smoothing and differentiating 313–322 * Integrals and differential equations 323–337 * Exponential approxima-

tion 338–342 * Singularities 343–347 * Algorithms and heuristics 351–359 * Simultaneous linear algebraic equations 360–365 * Inversion of matrices and eigenvalues 366–369 * Some examples of the simulation of situations and processes 370–382 * Random numbers and Monte Carlo methods 383–393 * The art of computing for scientists and engineers 394–401 * References 403–404 * Index 405–411.

Gunnar Hansen — F. Barker Jørgensen — Arne Porsager: *Tal og tekst. Håndbog*, 6.–7. skoleår. Gyldendal, København 1962. 116 s. + lærervejledning 12 s. D. kr. 11.25.

Af tallenes historie 9–10 * Hele tal 11–19 * Mere om tallene 20–24 * Brøker 25–37 * Decimaltal 38–44 * Benævnelser 45–49 * Procentregning 50–53 * Forholdsregning 54–57 * Gennemsnitsregning 58 * Delingsregning 59–61 * Handelsregning 62–66 * Rentesregning 67–70 * Værdipapirer 71–75 * Fremmed mønt 76–77 * Omkreds og areal 78–81 * Overflade og rumfang 82–84 * Kontrol af udregninger 85–86 * Opstillinger 87–88 * Diagrammer og kurver 89–90 * Aritmetik 91–98 * Geometri 99–108 * Register og ordliste 109–116.

Gunnar Hansen — F. Barker Jørgensen — Arne Porsager: *Tal og tekst. Regnebog*, 6. skoleår. Gyldendal, København 1962. 132 s. D. kr. 10.50.

Emner med træningsopgaver 8–97 * Fællesøvelser 98–132.

JOHN G. HOCKING — GAIL S. YOUNG: *Topology*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 9 + 374 pp. \$ 8.75.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 151–152.)

Topological spaces and functions 1–36 * The elements of point-set topology 37–104 * Further topics in point-set topology 105–148 * The elements of homotopy theory 149–192 * Polytopes and triangulated spaces 193–217 * Simplicial homology theory 218–281 * Further developments in algebraic topology 282–319 * General homology theories 320–363 * References 365–370 * Index 371–374.

E. Kamke: *Mengenlehre*. (Sammlung Götschen 999/999a.) Vierte, verbesserte Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. 194 S. DM 5.80.

Aus den Anfängen der Mengenlehre 5–21 * Über beliebige Mengen und ihre Kardinalzahlen 21–69 * Bemerkungen über die Begründung der Mengenlehre 69–78 * Über geordnete Mengen und ihre Ordnungstypen 79–110 * Über wohlgeordnete Mengen und ihre Ordnungszahlen 110–160 * Der Wohlordnungssatz, verwandte Sätze und Folgerungen 161–191 * Literaturverzeichnis 192 * Register 193–194.

E. A. Maxwell: *Deductive geometry*. (The Commonwealth and International Library of Science, Technology and Engineering, Mathematics Division, vol. 2.) Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris 1962. 13 + 176 pp. sh. 12/6, \$ 2.50.

Introduction and notation 1–13 * The geometry of the triangle 14–26 * Some circle theorems 27–50 * The theorems of Ceva and Menelaus 51–56 * Harmonic properties 57–77 * Pole and polar 78–89 * Line and plane 90–106 * Some standard solid bodies 107–119 * Angles between lines and planes 120–129 * The sphere 130–143 * The nature of space 144–154 * Transformations 155–173 * Index 175–176.

Oskar Perron: *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1962. 134 S., 70 Fig. Leinen DM 21.00.

Die Grundbegriffe 9–11 * Die Axiome 12–23 * Begriff der Nichteuklidischen Geometrie 24–30 * Der Parallelwinkel 30–37 * Rechtwinkliges Dreieck und Spitzeck 37–42 * Konstruktionsaufgaben 42–51 * Die Winkelfunktionen $S(\alpha)$ und $C(\alpha)$ 51–60 * Identifizierung von $S(\alpha)$ und $C(\alpha)$ mit $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ 61–68 * Berechnung des Parallelwinkels $II(\alpha)$ 68–75 * Trigonometrie 76–82 * Schnittpunktsätze beim Dreieck 82–88 * Flächeninhalt 88–96 * Der Kreis 97–102 * Der Grenzkreis 102–110 * Die Abstandslinie 111–120 * Widerspruchsfreiheit 120–132 * Die wichtigste Literatur 132 * Namen- und Sachverzeichnis 133–134.

Pihl og Ring: *Regnebog for 1. real*. Ved Bernhard Andersen og Holger Salfelt. Gyldendal, København 1962. 182 s. D. kr. 13.75.

Addition 9–12 * Subtraktion; flerleddede størrelser 13–17 * Multiplikation 18–25 * Division 26–29 * Division med brøk 30–32 * Ligninger 33–39 * Procentregning 40–45 * Skatter 46–47 * Rentesregning 48–55 * Forholdsregning 56–61 * Delings- og blandingsregning 62–69 * Aktier 70–78 * Obligationer 79–83 * Veksler 84–87 * Checks 88 * Grafisk afbildning 89–90 * Areal og rumfang 91–101 * Blandede opgaver 102–134 * Negative tal 135–161 * Ligninger med 1 ubekendt 162–167 * Ligninger med 2 ubekendte 168–174 * Grafisk fremstilling 175–182.

George Polya: *Mathematical discovery, I*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 15 + 216 pp. sh. 36/–.

The pattern of two loci 3–21 * The cartesian pattern 22–59 * Recursion 60–98 * Superposition 99–113 * Problems 117–128 * Widening the scope 129–153 * Solutions 154–208 * Appendix 209–212 * Bibliography 213–214 * Index 215–216.

John Riordan: *Stochastic service systems*. (The SIAM series in applied mathematics.) John Wiley & Sons, New York, London 1962. 10 + 139 pp. sh. 51/–.

Introduction 1–7 * Traffic input and service distributions 8–21 * The simplest traffic system 22–40 * Single-server systems 41–78 * Many-server systems 79–121 * Traffic measurements 122–131 * References 132–136 * Index 137–139.

Thomas L. Saaty: *Elements of queueing theory with applications*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1961. 15 + 423 pp. sh. 89/–.

Essential symbols xiii-xv * Structure, technique, and basic theory 3-80 * Poisson queues 83-149 * Non-Poisson queues 153-227 * Queueing ramifications, applications, and renewal theory 231-372 * Bibliography 373-413 * Index 415-423.

S. Vajda: *Theorie der Spiele und Linearprogrammierung*. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. 129 S. DM 18.00.

Einführung in die Theorie der Spiele 7-20 * Graphische Darstellung 20-29 * Algebra der Spieltheorie 29-41 * Abriss der Linearprogrammierung 41-53 * Graphische Darstellung der Linearprogrammierung (1. Teil) 54-59 * Algebra der Simplex-Methode 59-74 * Degeneration und andere Schwierigkeiten 74-89 * Dualität 90-104 * Lösung von Spielen 104-110 * Graphische Darstellung der Linearprogrammierung (2. Teil) 110-117 * Methode der Leitvariablen 118-123 * Literaturverzeichnis 124-126 * Verzeichnis der Definitionen 126-127 * Behandelte Spiele 127-128 * Behandelte lineare Programme 128-129.

Elbridge P. Vance: *Modern college algebra*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 8+260 pp. \$ 4.25.

Sets and numbers 1-19 * The algebra of numbers as a logical system 20-32 * Extensions of the logic of algebra 33-63 * Inequalities, absolute values, and coordinate systems 64-83 * Functions and their graphical representation 84-95 * Linear and quadratic functions 96-138 * Determinants 139-155 * Polynomial functions 156-167 * Inverse functions 168-176 * Permutations, combinations, and the binomial theorem 177-193 * Mathematical induction 194-199 * Exponential and logarithmic functions 200-222 * Complex numbers 223-238 * Tables 239-241 * Answers to selected odd-numbered problems 243-256 * Index 257-260.

L. Wolf: *Elements of probability and statistics*. (McGraw-Hill series in probability and statistics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London 1962. 15+322 pp. sh. 58/-.

Empirical frequency distributions 1-7 * Sets and set operations 8-14 * Notational and computational devices 15-41 * Averages 42-51 * Measures of dispersion 52-77 * Probability 78-102 * Discrete probability distributions 103-136 * Applications of discrete distributions 137-164 * Continuous probability distributions 165-199 * Normal distributions 200-229 * Chi-square distributions 230-248 * F distributions 249-267 * Student's distribution 268-278 * Bivariate distributions 279-294 * Appendix 295-317 * Index 319-322.

OPPGAVER TIL LØSNING

Professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo, har igjen overtatt som oppgaveredaktør. Løsninger av oppgavene 226–229 sendes til ham. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i Bind 11, hefte 1, være sendt innen 15. desember 1962.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

226. Givet i planen to linier a og b samt eet punkt P udenfor disse.

a) Konstruer igennem P to på hinanden vinkelrette linier, hvis skæringspunkter M og N med a og b er således beliggende at $PM = PN$.

b) Bestem beliggenheden af punktet P på en given ret linie C , når $PM = PN$ skal være minimum eller maximum ($PM \perp PN$).

Helge Harboe

227. En sats formodet av Fatou og bevist av Hurwitz og Polya (Acta Math. 40, s. 179–83) sier: Er konvergensradien for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ lik 1, fins der en følge av reelle tall $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n^2 = 1$, slik at $\sum \varepsilon_n a_n z^n$ ikke kan fortsettes ut over $|z| = 1$. Beviset er et rent eksistensbevis (ikke konstruktivt). Problemet er nå: Bestem en følge som nevnt for det tilfellet at

$\sum a_n z^n$ er Maclaurinrekken for $f(z) = \frac{z}{1-z}$.

Helge Tverberg

228. La $\Re$ bety klassen av alle funksjoner $w(z)$, regulære og med positiv realdel i $|z| < 1$. La videre $\Re_R$ og $\Re_1$ bety de delklasser av $\Re$ som er karakterisert ved at henholdsvis $w(0)$ er reell og at $|w(0)| = 1$.

Bestem i $\Re_R$ og $\Re_1$ best mulige universelle (d. v. s. gyldige i hele $\Re_R$ resp. $\Re_1$) skrankeområder for $w(z)$, uttrykt ved $|z|$.

Haakon Waadeland

229. Find summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n+1)}.$$

Per W. Karlsson

230. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(x^n)$ konvergerer uniformt i området av alle tall. Bestem $f(x)$.

LØSNINGER

215. Vis, at hvis to talfølger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ for alle n tilfredsstiller

$$a_{n+1} = a_1 a_n + b_1 b_n \quad \text{og} \quad b_{n+1} = a_1 b_n + b_1 a_n,$$

så gjelder for $k=2, 3, \dots$

$$a_{n+k} = a_k a_n + b_k b_n \quad \text{og} \quad b_{n+k} = a_k b_n + b_k a_n.$$

Ove J. Munch

Løsning: Antages påstanden at være riktig for ethvert n og $k=p$, bliver

$$\begin{aligned} a_{n+p+1} &= a_1(a_p a_n + b_p b_n) + b_1(a_p b_n + b_p a_n) \\ &= (a_1 a_p + b_1 b_p) a_n + (a_1 b_p + b_1 a_p) b_n = a_{p+1} a_n + b_{p+1} b_n. \end{aligned}$$

På tilsvarende måte er

$$b_{n+p+1} = a_{p+1} b_n + b_{p+1} a_n,$$

altså er påstanden gyldig for $k=p+1$.

Da betingelsen imidlertid netop udsiger, at påstanden er gyldig for vilkårlig n og $k=1$, er den også gyldig for $k=2, 3, \dots$

Bernhard Andersen

Oppgaven er også løst av Per Roar Andenæs, István Beck, C. Bengtsson, Christian Berg, L. Carlitz, P. W. Karlsson, P. Kjeldaa, L. Lindskog, Andrzej Makowski, A. Mikkelsen, Torsten Ström, Steffen Strøbæk, B. Textorius og B. Thorrodsen.

218. I mange elementære lærebøker i talteori stilles den oppgave at bevise, at

$$\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}$$

er et helt tal. Bevis, at det endog er et lige tal.

Anders Bager

Løsning: Den i $n!$ ingående potensen av 2 är 2^{α_n} där

$$\alpha_n = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} \right] + \left[\frac{n}{8} \right] + \dots$$

Den i $(2n)!$ ingående potensen av 2 är $2^{n+\alpha_n}$ ty

$$\left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \left[\frac{2n}{8}\right] + \dots = n + \alpha_n.$$

Den i $(2n)!/n!$ ingående potensen av 2 är alltså exakt 2^n , och vi kan skriva

$$\frac{(2a)!}{a!} \cdot \frac{(2b)!}{b!} \cdot \frac{1}{(a+b)!} = \frac{2^a \cdot 2^b}{(a+b)!} \cdot Q,$$

där Q är et udda tal.

Att uttrycket är ett *jämmt* heltal kommer av att $(a+b)!$ innehåller en potens av 2 som är högst 2^{a+b-1} .

Åke Kjellström

Utsagnet i siste avsnitt ser man lettest slik:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \dots \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots < n.$$

Red. anm.

Opgaven er også løst av N. E. Andersen, J. Anderson, Gunnbjörg Gismarvik, J. Hilden, Steffen Strøbæk og Torsten Ström.

RESULTAT AF PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIASTER

(Opgaverne i NMT 9 (1961), s. 186–187.)

Der indkom 41 besvarelser. Den udsatte præmie kr. 150 blev tildelt Jørgen Tornehave, III mn Virum Statsskole. To ekstrapremier på hver kr. 100 blev tildelt Erik Pedersen, III mn Åbenrå Statsskole og Bent Slot, I mn Vestre Borgerdydskole. Bogpræmier tildeltes Karin Beyer, III mn Virum Statsskole, Finn Folkmann, III mn Lyngby Statsskole, Arne Mikkelsen, III mn Kolding Gymnasium, Flemming Bækgaard Pedersen, II mn Vejle Gymnasium og Gregers Koch, III mn Østre Borgerdydskole.

RESULTAT AV PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIASTER

(Oppgavene i NMT 8 (1960), s. 195–196. Smlgn. NMT 9 (1961), s. 188.)

I konkurransen var det 7 deltakere. H.K.H. Kronprinsens premie kr. 200 for beste besvarelse ble tildelt Byrge Birkeland, elev av 4 Rg., Arendal off. høgre allmennskole.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1962 på de matematiske gymnasielinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. Løs ligningen

$$\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x .$$

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = (x-2)\sqrt{5-x} .$$

Tangenten til kurven i punktet $(2, 0)$ begrænser sammen med kurven og y -aksen en lukket figur. Beregn denne figurs areal.

Beregn endvidere rumfanget af det legeme, der fremkommer, når den nævnte figur drejes 360° om x -aksen.

3. En omdrejningskegle, hvis grundflades radius er r , har højden $r\sqrt{3}$. Grundfladens centrum kaldes O , og keglens toppunkt kaldes T . A og B er to punkter på grundfladens periferi således beliggende, at vinkel $AOB = 120^\circ$.

Find vinkel ATB .

Midtpunktet af sidelinien TA kaldes M . Find længden af BM samt vinklen mellem linierne BM og OT .

Igennem M lægges en plan, som skærer keglefladen i en parabel med toppunkt i M . Bestem afstanden mellem parablens brændpunkt og toppunkt.

Matematik II.

1. I femkant $ABCDE$ er de tre sider AB , AE og BC alle lig med 4,268, og de fire vinkler A , B , C og D er alle lig med $105^\circ, 58$.

Beregn siderne CD og DE .

2. Angiv de reelle værdier af x , for hvilke

$$1 \leq \left| \frac{x}{x-1} \right| \leq 2 .$$

3. Bevis, at for enhver fast værdi af v i intervallet $0 < v < \pi$ er

$$\begin{aligned} x &= 4(t^2 + t \cos v) \\ y &= 4t \sin v \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty)$$

en parameterfremstilling for en parabel.

Find koordinaterna til parablens brändpunkt F uttryckt ved v .

Bestem det geometriske sted for F , når v gennemløber intervallet $0 < v < \pi$.

FINLAND

Längre kursen.

1. En person har köpt 100 aktier à 2500 mk/st. i ett visst bolag. Då dettas aktiekapital höjdes, utdelades gratis åt aktionärerna en ny aktie på fem gamla, varjämte nya aktier utbjöds till inlösen för 3000 mk/st. Huru många nya aktier — utöver de gratis utdelade — bör nämnda person inlösa för att på sin totala penningplacering erhålla ränta enligt samma procent som förut, förutsatt att dividenden per aktie förblir oförändrad?

2. Den femte termen i en oändlig konvergent geometrisk serie är 2. Seriens första, andra och fjärde term bildar, i nämnd ordning, en aritmetisk serie. Beräkna den geometriska seriens summa.

3. För vilka värden på x är

$$\frac{1-x}{x-3} < \frac{1}{x-1} ?$$

4. Bevisa att samtliga parabler $y = x^2 - 2mx + m - 1$, oberoende av värdet på m , går genom samma punkt. Vilka är denna punkts koordinater? Rita de kurvor, som svarar mot värdena $m = 0$ och $m = 1$.

5. Bevisa att om x_1 är en rot till ekvationen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

så är ekvationens vänstra membrum divisibelt med $x - x_1$.

6. Hörnen i en liksidig triangel ABC förenas med en godtycklig punkt P på bågen AC av den omskrivna cirkeln. Visa att $PB = PA + PC$.

7. Med mittpunkten av sträckan AB som medelpunkt uppritas en godtycklig cirkel. Må P vara en punkt på dennas periferi. Visa att $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ är oberoende av P 's läge.

8. Av en given cirkel utskäres en sektor, och denna vecklas till mantelyta för en kon. Vilken skall sektorns centrivinkel vara, för att konens volym skall bli så stor som möjligt? Angiv resultatet med en minuts noggrannhet.

9. I en spetsvinklig triangel ABC dras höjdlinjerna AD och BE , och deras fotpunkter D och E sammanbindes. Visa att DE delar triangeln i en fyrhörning och en triangel, vilkas areor förhåller sig som $\operatorname{tg}^2 C : 1$.

10. Bestäm på cirkelperiferin $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ den punkt, i vilken funktionen $x^2 + y^2$ uppnår sitt minsta värde. Beräkna detta.

ÍSLAND

I.

1. $A(-a, 0)$ og $B(0, b)$ er to punkter på ellipsen

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

C er skæringspunktet mellem ellipsens tangenter i A og B . $E(x_1, y_1)$ er et punkt på ellipsen i første kvadrant. O er koordinatsystemets begyndelsespunkt. En ret linie gennem E parallel med X -aksen skærer liniestykket OC i H . En linie gennem H vinkelret på AB skærer y -aksen i N .

- Beregn koordinaterne for H og N udtrykt ved y_1 , a og b .
- Påvis, at NE er ellipsens normal i E .
- Angiv det liniestykke på y -aksen, langs hvilket N bevæger sig, når E gennemløber ellipsens 1. kvadrant.
- Udtryk arealet af trekanten EHN ved x_1 og y_1 (foruden a og b) og ligeledes ved v i den sædvanlige parameterfremstilling for ellipsen.
- Find den største værdi, som dette areal kan antage.

2. Undersøg kurven $y = 3\sin^2x + 3\sin x - \frac{9}{4}$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.

- Find kurvens skæringspunkter med akserne.
- Find de punkter på kurven, hvor tangenterne er vandrette.
- Tegn kurven.
- Beregn arealet af det område, der begrænses af x -aksen og kurven og ligger over x -aksen.

3. En halvkugle og en ret kegle står på en fælles grundflade, som har radius r . (Halvkuglens storecirkel er også keglens grundcirkel.) Kuglefladen skærer keglefladen i højden $\frac{1}{2}r$ over grundfladen. Beregn rumfanget af det område, som ligger

- indenfor keglen og udenfor halvkuglen,
- udenfor keglen og indenfor halvkuglen.

II.

1. En kaptajn befinder sig på sit skib nogle få mil fra land. Det er mørkt, men kaptajnen ser to lys på land. For at kunne bestemme, hvor langt fra land han befinder sig, tager kaptajnen sigte på de to lys. Vinklen mellem sigtelinierne er 56° . Derpå sejler han 1 mil i retning mod B og måler vinklen. Den gang er den 58° . Kaptajnen sejler atter en mils vej, men med kurs mod A , hvorefter han måler vinklen tredje gang. Den er nu 60° . På grundlag af disse målinger beregner kaptajnen afstanden AB og hvor langt fra linien AB skibet befinder sig, når den sidste måling foretages.

Tegn en figur, hvor skibets position betegnes ved F , M og S . Beregn afstanden AB og afstanden fra S til linien AB .

2. Givet ligningen

$$x^4 - x^3 + x - 1 = 0.$$

- Løs ligningen. De ikke reelle rødder skal skrives på formen $a + ib$ og ligeledes udtrykt ved r og v .
- Tegn en figur, som viser røddernes beliggenhed i koordinatsystemet.

- c) Opløft de ikke reelle rødder til 4. potens og beregn summen af resultaterne.
 d) Rødderne i den givne ligning tillige med ovennævnte 4. potenser er rødder i en ny ligning af højere grad. Skriv denne ligning på den simplest mulige form.

3. Undersøg funktionerne

$$y = x^2\sqrt{1-x} \quad \text{og} \quad y = x\sqrt[4]{1-x}.$$

- a) Angiv definitionsområdet for de to funktioner.
 b) Skriv ligningerne for tangentene i $(0,0)$ og $(1,0)$.
 c) Find maxima og minima.
 d) Tegn kurverne.
 e) Beregn arealet af det område, som kurverne begrænser i intervallet $0 \leq x \leq 1$.

NORGE

Reallinjen.

1. I en kule med radius R er det innskrevet en rett sylinder. Kall høyden i sylindren $2x$ og finn volumet av sylindren uttrykt ved R og x .

Vis at volumet er størst for en viss verdi av x . Finn denne største verdien og den tilsvarende verdien av x .

Formelen for volumet av et kusegment er $\pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$, der R er kuleradien og h er høyden i segmentet. Bruk denne formelen til å finne volumet av det ringformede legemet som ligger mellom kuleflaten og sylinderflaten i det tilfelle at sylindren har sitt største volum.

Den oppgitte formelen for volumet av et kusegment kan vi finne ved å regne ut et bestemt integral. Skriv opp dette integralet og utfør integrasjonen.

2. I en geometrisk rekke er første ledd $a_1 = \sqrt{3} \sin x$ og kvotienten $k = \frac{1}{1 + \sqrt{3} \tan x}$

der x er en vinkel mellom 0° og 360° . Hvilke verdier kan x ikke ha i dette området? Hvilke verdier av x i området er det som gir en konvergent geometrisk rekke?

Vis at summen av den konvergente rekken blir $s = \cos x + \sqrt{3} \sin x$.

Lag en skisse av s som funksjon av x . Trekk opp kurven med hel strek der s er summen av den konvergente rekken, og prikk resten.

3. Punktet $A(a,0)$ er gitt. Hva blir likningen for en rett linje gjennom A med vinkelkoeffisient k ? Denne linjen skjærer den rette linjen $x=2$ i punktet P . Hva blir koordinatene til P ?

Trekk en rett linje gjennom origo og P , og en ny rett linje gjennom A med vinkelkoeffisient $1/k$. Skjæringspunktet mellom disse to linjene kaller vi S . Når k varierer, følger S en kurve. Vis at denne kurven får likningen

$$(a-2)x^2 + 2y^2 - a(a-2)x = 0.$$

Gjør kort greie for hvordan denne likningen skifter geometrisk betydning når vi lar A flytte seg på x -aksen. Nevn bare arten av kurver. Gjør særskilt greie for det tilfellet at A ligger i origo.

Vis at det går to kurver gjennom punktet $(2,4)$. Bestem akser og sentrum for

begge kurvene og tegn dem inn på millimeterpapiret. Velg 1 cm som enhet på begge aksene.

Undersøk til slutt om det går noen kurve gjennom punktet $(-2, 4)$.

SVERIGE

Matematiska grenen.

1. I funktionen $y = a \cdot e^x \sin(2x + b)$ är a och b konstanter. Visa, att denna funktion, oberoende av a och b , satisfierar differentialekvationen $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$.

Det förutsättes bekant, att $\frac{de^x}{dx} = e^x$.

2. Beräkna ytan av det område i planet, som begränsas av x -axeln, kurvan $y = x^{-p}$, där p är ett tal > 1 , samt de rätta linjerna $x = 1$ och $x = a > 1$. Visa även, att ytan har ett gränsvärde, då $a \rightarrow \infty$, och bestäm detta.

3. Visa, att konstanten k kan bestämmas så, att formeln $1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + \dots + n \cdot 10^{n-1} = k[(9n - 1) \cdot 10^n + 1]$ gäller för alla positiva heltalsvärden på n .

4. Undersök, hur i ett rätvinkligt koordinatsystem den geometriska betydelsen av ekvationen $mx^2 + (m^2 - 2)y^2 = m(m^2 - 2)$ ändras, då konstanten m genomlöper alla reella värden.

5. Bestäm skärningspunkten P mellan kurvorna $y = x^2 + a_0x + a_0^2$ och $y = x^2 + ax + a^2$, där a_0 och a är två olika reella konstanter. Visa, att om a går mot a_0 , så går P mot en punkt P_0 . Bestäm slutligen orten för P_0 , när a_0 antar alla reella värden.

6. Kring en given rektangel med ytan R omskrives en ellips med axlarna parallella med rektangelns sidor. Ellipsens yta E är så liten som möjligt. Visa, att förhållandet mellan E och R är oberoende av rektangelns form.

7. I en parabel har parametern längden b . Ett segment avskäres med en godtycklig korda, vars projektion på styrlinjen är c . Visa, att segmentets yta är $\frac{c^3}{6b}$.

8. Tre kanter, som utgår från ett hörn i en tetraeder, har längderna a , b och c . De tre vinklarna mellan dessa kanter är lika stora och lika med v . Bestäm tetraederns volym som funktion av v , och åskådliggör den grafiskt för de v -värden, som kan komma i fråga. Ange speciellt det största värde, som volymen kan anta.

SUMMARY IN ENGLISH

N. E. NØRLUND: *Johan Frederik Steffensen in memoriam.* (Danish.)

An obituary on professor Johan Frederik Steffensen, February 28, 1873 – December 20, 1961.

TORKIL HEIEDE and HANS JØRGEN HELMS: *Set theory and transfinite cardinal numbers, II.* (Danish.)

In part II of this expository article, transfinite cardinal numbers are introduced and their simplest properties discussed.

TH. GODAL: *On the conic sections from an astronomical point of view.* (Norwegian.)

The following problem is raised and solved by simple geometrical considerations: Given two points P_0 and P_1 in a central field of gravitation. Determine the initial velocity in P_0 such that a space ship moves from P_0 to P_1 in a given time.

FR. FABRICIUS-BJERRE: *A theorem on closed polygons in the projective plane.* (English.)

For a closed polygon π in the projective plane, E. Kivikoski has shown that if all the sides are convex and π has no double points, then the polygon has the order 2. The author gives a new proof of this theorem.