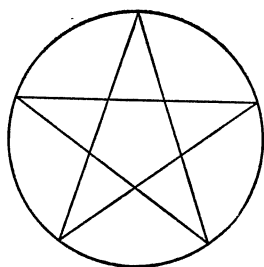


NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 10



OSLO 1962

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.
Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.
Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.
Matemaattisten aineiden opettajien liitto – Matematik-, fysik-
och kemilärarförbundet.
Íslenska stærðfræðafélagið.
Norsk matematisk forening.
Norsk lektorlags matematikkseksjon.
Svenska matematikersamfundet.
Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.
Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.
Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

REDAKSJON:

David Fog, Carl-Erik Fröberg, G. af Hällström,
Bo Kjellberg, Regnar Norgil, Bertil Nyman, Ragnar J. Solvang,
B. L. Stara, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.
Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSER:

Redaksjon: Matematisk Institutt, Allégt. 34, Bergen.
Ekspedisjon: Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.



ODDVAR BJØRGUM IN MEMORIAM

C. L. GODSKE

Professor Oddvar Bjørgum, som var født på Voss 7. februar 1916, døde 22. desember 1961 i Bergen.

Tidligere enn de fleste forskere fant Oddvar Bjørgum fram til sitt spesielle forskningsområde og til en problemstilling som skulle prege hele hans intense men alt for korte vitenskapelige virksomhet. Før han ennå var ferdig med sitt studium, mens han som amanuensis ved Geofysisk Institutt i Bergen fra 1939 skaffet seg en grundig og bred oversikt over den teoretiske meteorologi, ble han interessert i atmosfærisk turbulens. Et fundamentalt problem innenfor den teoretiske turbulensforskning valgte han som spesialoppgave ved den avsluttende matematisk-naturvitenskapelige embetseksamen i 1943.

Turbulensforskningen må karakteriseres som et av de vanskeligste områder innenfor den teoretiske geofysikk. Få unge forskere ville valgt

sitt spesialstudium nettopp innenfor dette felt, enda færre ville hatt mot til å holde fast ved sin problemstilling, når de etterhvert oppdaget hvor kompliserte forholdene er innenfor de turbulente bevegelsene i luft og hav. Men Bjørgum hadde både pågangsmotet og utholdenheten. Tittelen på hans hovedfagsarbeide: »Turbulence from a novel point of view« gir noe av en programerklæring fra en ung og dristig forsker. De vanskeligheter han møtte bare ansporet ham til nye forsøk, såvel når det gjaldt turbulensdannelse som fullt utviklet turbulens. Med stor energi gikk Bjørgum inn for et stadig bredere og dypere studium for å skaffe seg de nødvendige matematiske hjelpemidler, ikke minst når det gjaldt studiet over turbulente skjærstrømninger og ikke-lineære effekter.

På enkelte av disse områder ble Bjørgum den rene virtuos. Jeg tenker da særlig på vektoranalysen, som også ga ham stoff til noen meget interessante vitenskapelige undersøkelser. På en av disse undersøkelser tok han i 1952 den filosofiske doktorgrad ved Universitetet i Bergen. Bjørgums doktoravhandling, som behandler »Beltramifeltene«, vitner om utpregete formelle evner. Hans elegante fremstilling vakte berettiget oppmerksomhet, og hans resultater ble vektoranalytisk »lærebokstoff« i løpet av meget kort tid.

Bjørgum kom imidlertid snart tilbake til sitt egentlige felt, turbulensforskningen. I Norge var her lite å lære, men i 1946/47 hadde Bjørgum under sitt opphold ved Imperial College i London knyttet kontakt med engelske kolleger, til fordel for begge parter. I 1952/53 dro han, etter invitasjon fra University of California, Department of Meteorology, til Los Angeles, hvor han arbeidet på et forskningsprosjekt om turbulent diffusjon i den frie atmosfære. I sitt friår 1960/61 var Bjørgum knyttet til Mathematics Research Center (U. S. Army), University of Wisconsin i Madison. Hans turbulensundersøkelser hadde ledet til så store praktisk-matematiske problemer at det ble nødvendig å få kontakt med regnesentra som disponerte over store elektroniske siffermaskiner. Da han i høst kom hjem, rik på erfaringer og med nye ideer og planer, syntes alt å ligge til rette for enda større resultater enn dem han hittil hadde oppnådd.

Oddvar Bjørgum var en ildsjel av de sjeldne. Ble han grepet av en ide, eksisterte hverken dagliglivet, forskjellen mellom dag og natt, eller hans egen helse. Han var et ekte barn av forskningsalderen, vi har alt for få av hans type. Likevel, han var ingen utilnærmelig, eksklusiv forsker som satt med sine problemer i ensom majestet. Han har også gitt et stort bidrag til norsk vitenskapelig miljø ved sin virksomhet som universitetslærer. Som grunnlegger av faget anvendt matematikk ved Universitetet i Bergen ble han i 1952 utnevnt til dosent, i 1955 til pro-

fessor i dette fag. En rekke forelesningshefter vitner om hans flid, hans pedagogiske evner og interesse og hans omsorg for studentene.

Björgums interesser strakte seg langt utenfor den teoretiske turbulensforskning. Hans kunnskaper om atmosfærisk diffusjon gjorde ham til en verdifull sakkyndig for jord- og skogbruk når det gjaldt biologiske skadevirkninger ved spredning av gassarter fra industrianlegg. I kollokvievirksomheten ved Universitetet i Bergen var han en av de mest virksomme, alltid villig når en foreleser trengtes, alltid våken når det gjaldt å komme til bunns i stoff andre la fram.

Ved de mange kongresser Björgum besøkte (i Norge, England, Holland, Belgia, Frankrike, Tyskland, Italia og Tyrkia) var han alltid våken og aktiv, og benyttet alle muligheter til å skaffe seg ikke bare verdifulle vitenskapelige kontakter, men også venner i inn- og utland.

Kolleger og venner kommer til å savne ham og minnes ham i takknemlighet.

ON THE COMPOSITE INTEGERS OF THE FORM

$$c(ak+b)! \pm 1$$

A. SCHINZEL

It follows immediately from the theorems of Wilson¹ and Leibniz² that there exist infinitely many composite integers of the forms $(ak+b)!+1$ and $(ak+b)!-1$ if $a > 0$ and $(a, b+1)=1$ or $(a, b+2)=1$ respectively. This suggests the problem whether for arbitrary integers $a > b \geq 0$ and rational $c > 0$ there exist infinitely many composite integers of the form $c(ak+b)! \pm 1$. All the cases, except the two mentioned above, for which I have found a positive answer to this problem are given by the following

THEOREM. *There exist infinitely many composite integers of each of the forms*

- 1) $c(4k)!+1, c(4k+2)!+1,$
 $c(6k)!+1, c(6k+2)!+1, c(6k+4)!+1;$
- 2) $c(2k)!-1, c(2k+1)!+1, c(2k+1)!-1;$
- 3) $[b(2k+1)]!+1.$

Here b is a positive odd integer and c a positive rational number.

PROOF. An immediate generalisation of the theorem of Wilson gives

$$(p-i-1)!i! \equiv (-1)^{i+1} \pmod{p}, \quad p \text{ prime}, \quad 0 \leq i \leq p-1.$$

Hence for arbitrary $c=d/n$ (d, n integers):

$$(1) \quad p|ni! + \varepsilon(-1)^{i+1}d \quad \text{implies} \quad p|d(p-i-1)! + \varepsilon n \\ (0 \leq i \leq p-1, \varepsilon = \pm 1).$$

Let now $a=4$ or $6, b$ even. For sufficiently large l we have $\frac{(al-b-2)!}{c} \equiv 0 \pmod{a}$, therefore

$$\frac{(al-b-2)!}{c} - 1 \equiv -1 \pmod{a},$$

and since positive integers of the form $4t-1$ resp. $6t-1$ have a prime

¹ $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$

² $(p-2)! \equiv +1 \pmod{p}.$

factor of the same form, $\frac{(al-b-2)!}{c} - 1$ has a prime factor $p_l \equiv -1 \pmod{a}$.

For sufficiently large l , p_l must be $> al-b-2 > n$, and in view of (1):

$$(2) \quad p_l | d(p_l - al + b + 1)! + n.$$

It follows that $d(p_l - al + b + 1)! + n \geq p_l > al - b - 2$, whence

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (p_l - al + b + 1) = \infty,$$

and for l large enough, $c(p_l - al + b + 1)! \equiv 0 \pmod{a}$. Since $p_l \equiv -1 \pmod{a}$ we have $p_l \nmid c(p_l - al + b + 1)! + 1$, and the number $c(p_l - al + b + 1)! + 1$ is composite, because by (2)

$$p_l | c(p_l - al + b + 1)! + 1.$$

Since $p_l - al + b + 1 \equiv b \pmod{a}$, the proof of part 1 of the theorem is complete.

To prove part 2, let us assume $a = 2$, $b = 0$ or 1 , $\varepsilon = \pm 1$, and if $2l - b \geq d$ denote by p_l the greatest prime factor of $\frac{(2l-b)!}{c} + \varepsilon(-1)^{b+1}$. For l large enough, each prime factor p of the above number is $> 2l - b > n$, thus in view of (1):

$$p | d(p - 2l + b - 1)! + \varepsilon n.$$

It follows hence that $d(p - 2l + b - 1)! + \varepsilon n \geq p > 2l - b$. For sufficiently large l we have $n | (p - 2l + b - 1)!$ and thus

$$(3) \quad p | c(p - 2l + b - 1)! + \varepsilon.$$

In particular

$$(4) \quad p_l | c(p_l - 2l + b - 1)! + \varepsilon.$$

Suppose that

$$(5) \quad p_l = c(p_l - 2l + b - 1)! + \varepsilon.$$

If $\frac{(2l-b)!}{c} + \varepsilon(-1)^{b+1}$ has any prime factor $p < p_l$, we have

$$p \leq c(p - 2l + b - 1)! + \varepsilon$$

in view of (3), and therefore for sufficiently large l :

$$\begin{aligned} p_l - p &\geq c(p_l - 2l + b - 1)! + \varepsilon - c(p - 2l + b - 1)! - \varepsilon \\ &= c(p - 2l + b - 1)! [(p_l - 2l + b - 1) \dots (p - 2l + b - 1)] \\ &\geq (p - \varepsilon)(p_l - p - 1) \geq (2l - b)(p_l - p - 1) > p_l - p, \end{aligned}$$

which is impossible. Equality (5) implies therefore

$$(6) \quad \frac{(2l-b)!}{c} + \varepsilon(-1)^{b+1} = p_l^\alpha.$$

For sufficiently large l we have further

$$\begin{aligned} 6|c(p_l - 2l + b - 1)!| &= p_l - \varepsilon, \\ 2l - b &\geq \frac{p_l - \varepsilon}{2} > \frac{p_l - \varepsilon}{3} > 6d, \end{aligned}$$

thus $d(p_l - \varepsilon)^2 | (2l - b)! |$ and in view of (6):

$$(p_l - \varepsilon)^2 | p_l^\alpha - \varepsilon(-1)^{b+1} |.$$

Hence

$$(p_l - \varepsilon)^2 | \alpha(p_l - \varepsilon) \varepsilon^{\alpha-1} + \varepsilon^\alpha - \varepsilon(-1)^{b+1} |, \quad (p_l - \varepsilon) | \alpha,$$

and we get

$$\frac{(2l-b)!}{c} + \varepsilon(-1)^{b+1} = p_l^\alpha \geq p_l^{p_l - \varepsilon} > (2l-b)^{2l-b},$$

which for l large enough gives a contradiction. We must therefore have $p_l \nmid c(p_l - 2l + b - 1)! + \varepsilon$, and in view of (4) the number $c(p_l - 2l + b - 1)! + \varepsilon$ is composite. Since $p_l \equiv 1 \pmod{2}$,

$$p_l - 2l + b - 1 \equiv b \pmod{2},$$

which proves part 2 of the theorem.

In order to prove part 3, we shall show that if b is odd and $b(2l+1) > 3$, at least one of the numbers $[b(2l+1)]! + 1$ and $\{[b(2l+1)]! - b(2l+1)\}! + 1$ is composite. In fact, suppose that $[b(2l+1)]! + 1$ is a prime p . Then, in view of (1):

$$p | \{[b(2l+1)]! - b(2l+1)\}! + 1,$$

and if $\{[b(2l+1)]! - b(2l+1)\}! + 1$ is not composite, we have

$$\begin{aligned} \{[b(2l+1)]! - b(2l+1)\}! + 1 &= p = [b(2l+1)]! + 1, \\ [b(2l+1)]! - b(2l+1) &= b(2l+1), \\ [b(2l+1) - 1]! &= 2, \quad b(2l+1) = 3, \end{aligned}$$

against the assumption. On the other hand, both numbers $b(2l+1)$ and $[b(2l+1)]! - b(2l+1)$ are of the form $b(2k+1)$, which completes the proof.

MÆNGDELÆRE OG TRANSFINITE KARDINALTAL, I¹

TORKIL HEIEDE og HANS JØRGEN HELMS

Indhold.

Indledning, litteratur.

Elementær mængdelære:

1. Mængdebegrebet.
2. Delmængder.
3. Foreningsmængde og fællesmængde.
4. Differensmængde, komplementærmængde og diskrepansmængde.
5. Klasseinddelinger og ækvivalensrelationer.
6. Afbildninger.
7. Belægninger.
8. Produktmængder, I.
9. Ordnete mængder.
10. Velordnede mængder.

Transfinite kardinaltal:

11. Ækvivalente mængder.
12. Produktmængder, II.
13. Kardinaltal.
14. Endelige mængder.
15. Uendelige mængder.
16. Ordning af kardinaltallene.
17. Addition og multiplikation af kardinaltal.
18. Potenser af kardinaltal.
19. Kardinaltallet $\aleph_0$.
20. Kardinaltalsbestemmelse for et par talmængder.
21. Kardinaltallet $\aleph$.
22. Cantors sætning og kontinuumshypotesen.

Indledning. I sin Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze (1638) betragter Galilei to liniestykker af forskellig længde og spørger, om det længste indeholder flere punkter end det korteste, og han svarer, at det ikke har nogen mening om to samlinger af uendeligt mange ting at sige, at den ene indeholder flere eller færre end eller lige så mange som den anden. Dette svar begrundes med følgende overvejelse:

¹ Artiklen vil blive fordelt over hefterne af Bind 10.

Det synes anskueligt klart, at der findes langt flere hele, positive tal end kvadrattal, og dog kan man hævde, at der er lige mange; thi til ethvert kvadrattal svarer et helt, positivt tal, nemlig dets kvadratrods, og til ethvert helt, positivt tal svarer et kvadrattal, nemlig dets kvadrat.

Galilei forfølger denne tankegang videre således: Blandt tallene op til tallet 100 findes 10 kvadrattal, altså er $\frac{1}{10}$ af disse tal kvadrattal; endvidere er kun $\frac{1}{100}$ af tallene op til tallet 10000 kvadrattal og kun $\frac{1}{1000}$ af tallene op til tallet 1000000, og så fremdeles. Men blandt tallene op til et uendeligt tal (hvis man kan forestille sig noget sådant, siger Galilei) må der ifølge det ovennævnte argument findes lige så mange kvadrattal, som der findes tal. Heraf slutter Galilei, at begreberne »lige så stor«, »større« og »mindre« hverken kan anvendes på »uendelige størrelser« indbyrdes eller på »uendelige størrelser« i forbindelse med »endelige størrelser«, men kun på »endelige størrelser« indbyrdes.

Da Georg Cantor (1845–1918) omkring 1870 grundlagde og i de følgende ca. 25 år videreudviklede mængdelæren, var det imidlertid netop ved hjælp af den definition på »ligestorhed« af mængder, som ligger i Galileis ovennævnte ræsonnement, at han fik hold på begrebet antallet af elementer i en uendelig mængde, idet det lykkedes ham at fortsætte talrækken 1, 2, 3, ..., n , ... med de såkaldte *transfinite kardinaltal*. Cantors ideer mødte til at begynde med den voldsomste modstand, men spiller nu en så betydelig rolle i mange matematiske discipliner, at man med fuld ret kan tale om matematikken før og efter Cantor.

Hensigten med de følgende sider er at give en fremstilling af nogle af de resultater, der i de forløbne 90 år er opnået inden for læren om de transfinite kardinaltal. Da det er tanken at føre behandlingen så langt frem som til en formulering af den såkaldte generaliserede kontinuums-hypotese, bliver det fordelagtigt fra begyndelsen at anvende ret præcise og derfor i nogen grad abstrakte definitioner; thi man måtte ellers skærpe begreberne undervejs og dermed blive nødt til endnu en gang at beskæftige sig med emner, som (i en mere løs formulering) allerede var omtalt. Det er dog ikke meningen at give en strengt axiomatisk fremstilling; en sådan ville også ganske sprænge rammerne for en artikel som denne. Vi vil således overalt benytte det såkaldte *naive mængdebegreb*, som det i sin tid opstilledes af Cantor, og de paradoxer, som det har vist sig at kunne føre til, vil vi slet ikke komme ind på.

For ikke for ofte at skulle afbryde behandlingen af kardinaltallene har vi fundet det naturligt at samle alle de nødvendige mængdeteoretiske forkundskaber i et første kapitel, der har karakter af en nogenlunde udførlig oversigt, enkelte steder mere udførlig end det af hensyn til det følgende er nødvendigt.

LITTERATUR

Ældre arbejder:

- [1] G. CANTOR: *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin 1932.
- [2] R. DEDEKIND: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig 1888, 8. uændr. opl. 1960.
- [3] F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig 1914, genoptrykt New York 1949.
- [4] F. HAUSDORFF: *Mengenlehre*. Berlin & Leipzig 1927, genoptrykt New York 1944.

Nyere arbejder:

- [5] H. BACHMANN: *Transfinite Zahlen*. Berlin, Göttingen & Heidelberg 1955.
- [6] A. A. FRAENKEL — Y. BAR-HILLEL: *Foundations of set theory*. Amsterdam 1958.
- [7] P. BERNAYS — A. A. FRAENKEL: *Axiomatic set theory*. Amsterdam 1958.
- [8] W. SIERPIŃSKI: *Cardinal and ordinal numbers*. Warszawa 1958.
- [9] P. SUPPES: *Axiomatic set theory*. Princeton 1960.

Arbejder af introducerende karakter:

- [10] E. KAMKE: *Mengenlehre*. Berlin & Leipzig (Sammlung Göschel) 1928, 3. udg. 1955.
- [11] A. A. FRAENKEL: *Einleitung in die Mengenlehre*. Berlin 1919, 3. udg. (væsentligt forøget) 1928, genoptrykt New York 1946.
- [12] A. A. FRAENKEL: *Abstract set theory*. Amsterdam 1953, 2. rev. udg. 1961.
- [13] S. BUNDGAARD: *Nogle grundlæggende begrebsdannelser indenfor matematikken, A—B*. Århus 1959/60.
- [14] P. R. HALMOS: *Naïve set theory*. Princeton 1960.

De med [3], [4] og [13] betegnede arbejder sigter ikke først og fremmest på almen mængdelære og transfinite kardinaltal, men behandler også andre emner. Det bør nævnes, at [13] indeholder et meget righoldigt udvalg af øvelser, og at der i [12] findes en litteraturfortegnelse på 128 sider.

Elementær mængdelære.

1. Mængdebegrebet. Ved en mængde forstås en samling af *vilkårlige, forskellige objekter*, således beskaffen, at det om ethvert forekommende objekt er fastlagt, om det findes i samlingen eller ej. De objekter, der findes i den pågældende samling, kaldes mængdens *elementer* og siges at tilhøre mængden eller at være indeholdt i den; mængden siges at indeholde ethvert af sine elementer og at bestå eller udgøres af sine elementer.

Begrebet *samling*, som vi her har brugt, er på forhånd lige så lidet defineret som begrebet *mængde*, som vi således ikke har givet nogen egentlig definition på, men blot beskrevet på en måde, som skulle være egnet til at fremkalde tilsigtede forestillinger (altså analogt med Euklids »definitioner« på begreberne punkt, ret linie etc.).

Det fremhæves, at der ikke i begrebet *mængde* indgår noget som helst om nogen *rækkefølge*, som elementerne eventuelt kunne siges at optræde i.

Vi vil sædvanligvis betegne mængder med store latinske bogstaver og elementer med små¹; skrivemåden $a \in A$ skal betyde, at elementet a tilhører mængden A , og skrivemåden $b \notin A$, at b ikke tilhører A (også for andre tegn, som angiver relationer mellem objekter af en eller anden nærmere angivet art, gælder det, at man benægter dem ved over-

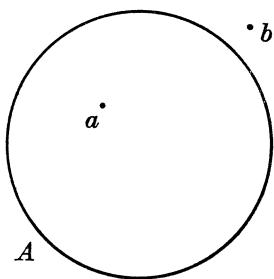


Fig. 1

stregning). Det er ofte praktisk at illustrere sådanne tilhørsforhold ved en symbolsk tegning som vist på fig. 1, hvor man forøvrigt i stedet for en cirkel lige så godt kunne have tegnet enhver anden kurve, som deler planen i to adskilte områder.

Hvis to bogstaver a og b betegner det samme element, skriver man $a = b$ (i modsat fald altså $a \neq b$); hvis to mængder A og B består af de samme elementer, skriver man $A = B$ og siger også, at A og B er den samme mængde. Udsagnet $A \neq B$ er altså ensbetydende med, at

der findes mindst ét element, der tilhører den ene, men ikke den anden af de to mængder. Det bemærkes, at i begge de her indførte betydninger af lighedstegnet gælder (som også i den elementære matematik, hvor lighedstegnet kun bruges mellem tal) følgende tre love:

Den reflexive lov: $x = x$ for vilkårligt x .

Den symmetriske lov: $x = y \Rightarrow y = x$ for vilkårlige x og y .

Den transitive lov: $x = y, y = z \Rightarrow x = z$ for vilkårlige x, y og z .

Tegnet $\Rightarrow$ betyder »medfører«; vi vil lejlighedsvis også anvende tegnet $\Leftrightarrow$, der betyder »er ensbetydende med«.

Som eksempler på mængder nævner vi:

Mængden A_1 af tallene -2 og 3 .

Mængden A_2 af alle primtal mindre end 1000 .

Mængden A_3 af alle negative, hele tal.

Mængden A_4 af alle rationale tal større end -2 og mindre end 3 .

Mængden A_5 af alle (reelle) løsninger til ligningen $x^2 - x - 6 = 0$.

Mængden A_6 af alle (reelle) løsninger til uligheden $x^2 - x - 6 < 0$.

Mængden A_7 af alle (reelle) løsninger til ligningen $4x + 2y = 6$.

Mængden A_8 af alle negative, reelle tal.

¹ Denne konvention kan ikke altid overholdes, idet en mængdes elementer jo gerne kan være mængder; iøvrigt vil vi for visse specielle mængder (herom senere) bruge gotiske bogstaver.

Mængden B_1 af alle punkter på en given ret linie.

Mængden B_2 af alle punkter inden for en given cirkel.

Mængden B_3 af alle skæringspunkter mellem to givne, hinanden skærende rette linier.

Mængden C_1 af alle firkanter i en given plan.

Mængden C_2 af alle parallelogrammer i den samme plan.

Mængden C_3 af alle rhomber i den samme plan.

Mængden C_4 af alle rektangler i den samme plan.

Mængden C_5 af alle kvadrater i den samme plan.

Mængden D_1 af alle reelle funktioner af en reel variabel.

Mængden D_2 af alle kontinuerte, reelle funktioner af en reel variabel.

Mængden E_1 af alle indstillingsmåder for en cykelås med 6 taster, der hver kan indstilles på 3 måder.

Mængden E_2 af alle de indstillingsmåder for den nævnte lås, for hvilke den ikke kan lukkes op.

Ved valget af betegnelserne er der her taget hensyn til, at de betragtede mængder er af forskellige typer; således er mængderne $A_1, A_2, \dots, A_8$ talmængder og mængderne B_1, B_2, B_3 punktmængder, mens mængderne $C_1, C_2, \dots, C_5$ er mængder af punktmængder. De anvendte betegnelser kan vi naturligvis andre steder bruge for helt andre mængder. Imidlertid kan det være praktisk for mængder, der ofte kommer i betragtning, at have én gang for alle fastsatte *standardbetegnelser*. Vi vil således for visse særligt vigtige talmængder benytte store gotiske bogstaver og nævner med det samme:

Mængden $\mathfrak{N}$ af alle *naturlige* (d. v. s. hele, positive) tal.

Mængden $\mathfrak{S}$ af alle *hele* tal.

Mængden $\mathfrak{Q}$ af alle *rationale* tal.

Mængden $\mathfrak{R}$ af alle *reelle* tal.

(Ved valget af betegnelserne $\mathfrak{S}$ og $\mathfrak{Q}$ har vi tænkt på gloserne integer og quotient.)

Vi bemærker, at den symbolske karakter af fig. 1 fremgår af, at den kan bruges som illustration til vidt forskellige situationer; den kan således lige så vel fremstille den situation, at $A = A_5$, $a = 3$, $b = 1$, som den, at $A = C_1$, a betegner en vis firkant og b en vis trekant i den givne plan. I tilfældet $A = B_2$ kan figuren, sådan som den nu er tegnet, tillægges et mere konkret indhold.

Hvis det på en eller anden let overskuelig måde er muligt at angive en *opremsning* af elementerne i en mængde, bruger man selve opremsningen anbragt i en svungen parentes som betegnelse for mængden.

Således skriver man, idet vi stadig holder os til de ovenfor anførte eksempler:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{-2, 3\}, \\ A_2 &= \{2, 3, 5, 7, 11, \dots, 997\}, \\ A_3 &= \{-1, -2, -3, \dots\}. \end{aligned}$$

Mængden B_3 består af et enkelt punkt; kaldes det p , kan man skrive: $B_3 = \{p\}$. Det er vigtigt at mærke sig, at elementet p og mængden $\{p\}$ ikke er det samme. En mængde, der (som B_3) består af netop ét element, kaldes en *singleton*.

Det understreges, at mængden A_3 ikke må forveksles med *talfølgen*

$$(-1, -2, -3, \dots)^1,$$

thi for følgens vedkommende kommer det også an på den *rækkefølge*, i hvilken elementerne er opskrevet, medens vi blandt mange andre muligheder også kunne skrive:

$$\begin{aligned} A_3 &= \{\dots, -3, -2, -1\}, \\ A_3 &= \{-1, -3, -5, \dots; -2, -4, -6, \dots\}, \end{aligned}$$

og iøvrigt kan det samme element jo godt forekomme flere gange i en følge, mens en mængdes elementer alle er forskellige. Ligeledes kunne vi også skrive

$$\begin{aligned} A_2 &= \{997, 991, 983, 977, 971, \dots, 2\}, \\ A_1 &= \{3, -2\}. \end{aligned}$$

I forbindelse med de to forskellige opskrifter af A_1 kan det bemærkes, at koordinatsættet til et punkt i en plan er noget andet end en talmængde, thi $(-2, 3)$ og $(3, -2)$ betegner jo ikke det samme punkt.

En mængde vil ofte være karakteriseret ved, at dens elementer tilfredsstiller en eller flere nærmere angivne *betingelser*. En bekvem betegnelse for en sådan mængde får man ved for mængden af alle de elementer x , der tilfredsstiller betingelserne $\alpha, \beta, \dots, \mu$, at skrive:

$$\{x \mid \alpha, \beta, \dots, \mu\}.$$

Man kalder x den pågældende mængdes *variable element* og siger også, at x *gennemløber* mængden. Vi illustrerer denne betegnelsesmåde ved hjælp af nogle af de s. 14–15 nævnte eksempler:

$$A_3 = \{x \mid x = -a, a \in \mathfrak{N}\}$$

¹ Den måske uvante parentes vil blive omtalt nærmere sidenhen.

(eller naturligvis lige så godt: $A_3 = \{z \mid z = -b, b \in \mathfrak{R}\}$),

$$A_3 = \{x \mid x < 0, x \in \mathfrak{J}\},$$

$$A_4 = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathfrak{D}\},$$

$$A_8 = \{x \mid x < 0, x \in \mathfrak{R}\}.$$

Det konstateres let, at

$$\{x \mid x^2 - x - 6 = 0, x \in \mathfrak{R}\} = \{3, -2\},$$

altså at $A_5 = A_1$, og videre ser man, at

$$A_6 = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0, x \in \mathfrak{R}\} = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathfrak{R}\}.$$

Det bemærkes udtrykkeligt, at det ikke går an at udelade betingelser som $x \in \mathfrak{R}$ eller $x \in \mathfrak{D}$ af betegnelsen, med mindre det er helt klart, hvilken type elementer der er tale om, thi man kunne ellers forveksle f. ex. A_6 og A_4 .

Det ses, at man kan beskrive den opgave at løse en ligning eller en ulighed som det at opskrive løsningsmængden (d. v. s. mængden af de tal, som tilfredsstiller den pågældende ligning eller ulighed) på en umiddelbart overskuelig måde. Opgaven at løse et system af ligninger eller uligheder kan beskrives analogt.

Mængden A_7 , hvis elementer jo er talpar, kan straks opskrives således:

$$A_7 = \{(x, y) \mid 4x + 2y = 6, x \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{R}\},$$

men også f. ex. således:

$$A_7 = \{(x, y) \mid x = t, y = 3 - 2t, t \in \mathfrak{R}\};$$

og hvis talparrene (x, y) fortolkes som koordinatsæt til punkter i en plan, har man her en ret linie opskrevet dels ved en ligning, dels ved en parameterfremstilling.

2. Delmængder. Hvis det om to mængder A og B gælder, at ethvert element af A også tilhører B (altså hvis $a \in A \Rightarrow a \in B$), siger man, at A er en *delmængde* af (eller er inkluderet i) B , og skriver $A \subseteq B$, eller lige så godt at B omfatter (eller inkluderer) A , og skriver $B \supseteq A$ (se fig. 2). Den herved definerede relation mellem mængder kaldes *inklusion* og tegnene $\subseteq$ og $\supseteq$ inklusionstegn.

Idet vi igen henholder os til eksemplerne foran, gælder det f. ex., at

$$A_3 \subseteq A_8, A_4 \subseteq A_6, C_1 \supseteq C_2, C_2 \supseteq C_3, C_2 \supseteq C_4, E_1 \supseteq E_2,$$

og videre, at

$$A_1 \not\subseteq A_3, A_3 \not\subseteq A_1, C_3 \not\subseteq C_4, C_4 \not\subseteq C_3,$$

og naturligvis

$$A_2 \not\subseteq C_1, D_1 \not\subseteq B_3 \text{ o. s. v.}$$

For inklusionen $\subseteq$ gælder følgende tre love:

Den reflexive lov: $A \subseteq A$.

Den antisymmetriske lov: $A \subseteq B, A \not\subseteq B \Rightarrow B \not\subseteq A$.

Den transitive lov: $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$,

og tilsvarende love naturligvis for inklusionen $\supseteq$. Ligesom her vil vi heller ikke i det følgende, når vi anfører almenlydige love, udtrykkeligt fremhæve almenlydigheden ved at skrive: for vilkårlige mængder A, B og C o. lign. Det ses, at disse love formelt er de samme som de love, der gælder for de reelle tals velkendte ulighedsrelationer $\leq$ og $\geq$.

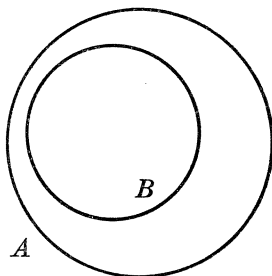


Fig. 2

Den transitive lov kan illustreres ved følgende eksempel (se igen s. 14–15):

$$C_3 \subseteq C_2, C_2 \subseteq C_1 \text{ og dermed } C_3 \subseteq C_1,$$

og ifølge den transitive lov er der iøvrigt god mening i at opskrive kæder som

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{R}.$$

Af den antisymmetriske lov eller direkte af inklusionens definition følger det, at

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B,$$

og heri ligger en ofte anvendt metode til påvisning af, at to betragtede mængder er den samme. Gennemfører man således denne fra den elementære matematik velkendte overvejelse: »Hvis det om et tal x gælder, at $x^2 - x - 6 = 0$, så må det om dette tal også gælde, at $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, altså $(x - \frac{1}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$, og dermed $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ eller $x - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, og derfor $x = 3$ eller $x = -2$ «, så har man under gentagen anvendelse af den transitive lov påvist, at $A_5 \subseteq A_1$; og at gøre prøve i ligningen $x^2 - x - 6 = 0$ med tallene 3 og -2 (eller at foretage en tilbageregning) er det samme som at undersøge, om $A_1 \subseteq A_5$. Lignende bemærkninger kunne man naturligvis knytte til enhver anden ligning og også til et vilkårligt system af ligninger. Andre eksempler har man i de opgaver, der i mange skolebøger betegnes

som bestemmelse af et *geometrisk sted*: man viser, at alle punkter med en vis egenskab ligger på en vis kurve, og derefter, at ethvert punkt på kurven har den pågældende egenskab.¹

Den reflexive lov udtrykker, at enhver mængde er delmængde af sig selv. Ved man om to mængder A og B , at $A \subseteq B$ og $A \neq B$, siger man, at A er en *ægte* (eller *egentlig*) delmængde af B , og skriver $A \subset B$ eller lige så godt $B \supset A$. Eksempelvis har vi $C_5 \subset C_3$ og $C_4 \supset C_5$.

For disse, de såkaldte *skarpe inklusioner* gælder følgende love:

Den irreflexive lov: $A \not\subset A$.

Den antisymmetriske lov: $A \subset B, A \neq B \Rightarrow B \not\subset A$.

Den transitive lov: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$,

og tilsvarende for inklusionen $\supset$; alt sammen svarende til, hvad der gælder for de skarpe ulighedsrelationer $<$ og $>$.

Det er klart, at

$$A = B \Rightarrow A \subseteq B, \quad A \subset B \Rightarrow A \subseteq B,$$

og tilsvarende for $\supseteq$ og $\supset$; de samme regler gælder for $\leq$ og $<$ samt for $\geq$ og $>$. Den vigtige regel

$$a \not\leq b \Leftrightarrow b < a,$$

som også er rigtig for $\geq$ og $>$, gælder imidlertid hverken for $\subseteq$ og $\subset$ eller for $\supseteq$ og $\supset$. Sagt på en anden måde: for to reelle tal a og b gælder altid netop ét af de tre udsagn $a < b$, $a = b$, $a > b$; den tilsvarende regel gælder ikke for skarp inklusion.

Det bemærkes, at en del forfattere bruger tegnene $\subset$ og $\supset$ i de betydninger, vi her har tillagt tegnene $\subseteq$ og $\supseteq$.

Det er i mange henseender bekvemt at kunne operere med begrebet en *tom* mængde, d. v. s. en mængde, der ingen elementer indeholder. Eksempelvis kan man med dette begreb til rådighed tale om løsningsmængden til en ligning uden i forvejen at sikre sig, at ligningen har løsninger, ligesom man også kan tale om mængden af skæringspunkter mellem to rette linier uden at vide, om de skærer hinanden, jvf. mængden B_3 foran.

Om to tomme mængder O_1 og O_2 må det gælde, at $O_1 = O_2$, thi de inde-

¹ Den særlige betegnelse »geometrisk sted« er iøvrigt helt overflødig, idet det jo er både kortere og enklere i stedet for »det geometriske sted for et punkt, som ...« at sige »mængden af de punkter, som ...«.

holder jo de samme elementer. Der eksisterer altså netop én sådan mængde; den kaldes *den tomme mængde* og betegnes sædvanligvis $\emptyset$ (man møder dog bl. a. også betegnelserne O og 1). For at undgå enhver misforståelse fremhæves det, at talmængden $\{0\}$ ikke er tom (den er en singleton); det samme gælder mængden $\{\emptyset\}$, hvis eneste element er den tomme mængde.

Eksempelvis anfører vi:

$$\left\{ x \mid \frac{5}{x} + 3 = 3, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mid \sqrt{x+5} - \sqrt{20-x} = 7, x \in \mathbb{R} \right\} = \emptyset.$$

Om enhver mængde A må det gælde, at $\emptyset \subseteq A$, thi ethvert element i $\emptyset$ tilhører A .

3. Foreningsmængde og fællesmængde. Lad der være givet to mængder A og B . Den mængde, der består af alle de elementer, som tilhører *mindst én* af mængderne A og B (skraveret på fig. 3), kaldes *foreningsmængden* af A og B og betegnes $A \cup B$ (hos nogle forfattere, især i ældre litteratur, møder man betegnelsen $A + B$). Sagt på en anden måde: $A \cup B$ består af alle de elementer, der tilhører A eller B (herunder medregnet, ifølge den i matematisk sprogbrug sædvanlige betydning af glosen »eller«, de eventuelle elementer, der tilhører dem begge).

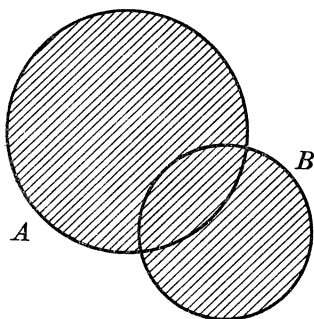


Fig. 3

Idet vi igen henviser til s. 14–15, nævner vi følgende eksempel:

$$A_1 \cup A_3 = \{3, -1, -2, -3, -4, \dots\}.$$

Der gælder følgende love, som alle let bevises ved hjælp af definitionen og nemt illustreres ved symbolske figurer:

Den associative lov: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Den kommutative lov: $A \cup B = B \cup A$.

Den idempotente lov: $A \cup A = A$.

Absorptionsloven: $A \supseteq B \Leftrightarrow A \cup B = A$.

Et vigtigt specialtilfælde af den sidste er $A \cup \emptyset = A$.

Den mængde, der består af alle de elementer, som tilhører *begge* mængderne A og B (skraveret på fig. 4), kaldes *fællesmængden* eller *gennem-*

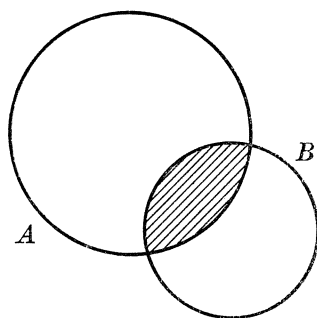


Fig. 4

snitsmængden af A og B og betegnes $A \cap B$ (hos nogle forfattere møder man betegnelsen $A \cdot B$ eller blot AB). Sagt på en anden måde: $A \cap B$ består af alle de elementer, der tilhører både A og B .

Idet vi igen henviser til s. 14–15, nævner vi, at $C_3 \cap C_4 = C_5$.

Vi fremhæver, at det kun er i kraft af, at vi har begrebet den tomme mængde til disposition, at vi kan tale om fællesmængden af to vilkårlige mængder, thi det kan jo meget vel indtræffe, at to forelagte mæng-

der A og B ingen elementer har fælles, altså at $A \cap B = \emptyset$; i så fald kaldes A og B *disjunkte* (eller *elementfremmede*). Som eksempel nævner vi, at $A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Der gælder følgende love, som alle let bevises ved hjælp af definitionen og nemt illustreres ved symbolske figurer:

Den associative lov: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Den kommutative lov: $A \cap B = B \cap A$.

Den idempotente lov: $A \cap A = A$.

Absorptionsloven: $A \supseteq B \Leftrightarrow A \cap B = B$.

Et vigtigt specialtilfælde af den sidste er $A \cap \emptyset = \emptyset$.

De to kompositionsregler $\cup$ og $\cap$ sammenknyttes ved følgende to love:

Den første distributive lov: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Den anden distributive lov: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

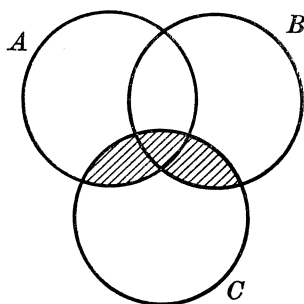


Fig. 5

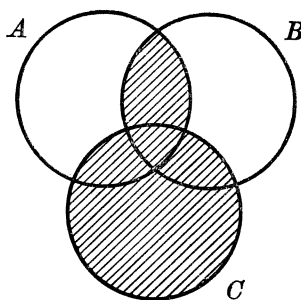


Fig. 6

De to distributive love illustreres ved fig. 5 og fig. 6; vi gennemfører et udførligt bevis for den anden og nøjes med at nævne, at den første kan bevises på lignende måde.

Hvis $x \in (A \cap B) \cup C$, må mindst ét af følgende udsagn gælde: $x \in A \cap B$, $x \in C$. Vi ræsonnerer nu således:

$$x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in A \cup C \\ x \in B \Rightarrow x \in B \cup C \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$x \in C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup C \\ x \in B \cup C \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

og vi har dermed vist, at

$$(3.1) \quad (A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Nu den anden vej: Lad $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Hvis $x \in C$, har vi umiddelbart, at $x \in (A \cap B) \cup C$. Hvis $x \notin C$, har vi, idet

$$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup C \\ x \in B \cup C \end{cases},$$

at begge følgende udsagn gælder: $x \in A$, $x \in B$. Deraf følger det, at $x \in A \cap B$ og dermed også $x \in (A \cap B) \cup C$. Vi har da også vist, at

$$(3.2) \quad (A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C.$$

Af (3.1) og (3.2) følger den anden distributive lov.

Det ses, at bortset fra de idempotente love, absorptionslovene og den anden distributive lov er de anførte regler formelt ganske de samme som de fra sædvanlig talregning velkendte, idet man i disse sidste blot skal erstatte $+$ og $\cdot$ med henholdsvis $\cup$ og $\cap$ og lade den tomme mængde $\emptyset$ træde i stedet for tallet 0.

Man kan inddrage flere end to mængder i dannelsen af forenings- og fællesmængder ved at sætte $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ og $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$ (eller ifølge de associative love lige så godt $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$ og $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$) og videre ved induktion:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n.$$

Man kan endog nå til at definere forenings- og fællesmængde af mængderne i en *følge* af mængder:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots, \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots.$$

Ved hjælp af de associative love kan man vise, at man i alle disse udtryk kan sætte og hæve parenteser efter behag.

Imidlertid får vi brug for at kunne tale om forenings- og fællesmængde af mængderne i et *helt vilkårligt system* af mængder (begrebet mængdesystem præciseres nedenfor), og til dette formål er den antydede vej ikke fremkommelig. I stedet for at bygge op ved hjælp af de allerede givne

definitioner på forenings- og fællesmængde af mængderne i et system af to mængder generaliserer man selve disse definitioner til et vilkårligt system. Herved lader man sig lede af, at de lige nævnte mængder $A \cup B \cup C$ og $A \cap B \cap C$ kan karakteriseres direkte, nemlig som mængden af alle de elementer, der tilhører mindst én af, henholdsvis alle mængderne A , B og C .

Lad der da til ethvert element k af en mængde K være knyttet en mængde A_k ; samlingen af alle mængderne A_k (som ikke nødvendigvis alle er forskellige) kaldes *mængdesystemet* bestående af mængderne A_k , og mængden K kaldes systemets *indexmængde*. Systemet betegnes $(A_k)_{k \in K}$ eller ofte blot (A_k) .

Vi belyser denne definition med et par eksempler: Hvis $K = \{1, 2\}$, består mængdesystemet $(A_k)_{k \in K}$ af to mængder med betegnelserne A_1 og A_2 ; hvis $K = \mathfrak{N}$, består det af mængder med betegnelserne $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$.

Den mængde, der består af alle de elementer, som tilhører mindst én af mængderne A_k , kaldes foreningsmængden af mængderne A_k ; og den mængde, der består af alle de elementer, som tilhører enhver af mængderne A_k , kaldes fællesmængden eller gennemsnitsmængden af mængderne A_k . De to mængder betegnes henholdsvis

$$\bigcup_{k \in K} A_k \quad \text{og} \quad \bigcap_{k \in K} A_k$$

eller (i tekstlinier) af typografiske grunde $\bigcup_{k \in K} A_k$ og $\bigcap_{k \in K} A_k$.¹

I det specielle tilfælde $K = \{1, 2\}$ er disse definitioner ensbetydende med de tidligere. Hvis $K = \{1, 2, \dots, n\}$, har vi at gøre med de allerede nævnte mængder

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{og} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n,$$

som vi med en modifikation af de ovenfor indførte betegnelser også skriver

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \quad \text{og} \quad \bigcap_{k=1}^n A_k.$$

Noget lignende gør sig gældende i tilfældet $K = \mathfrak{N}$, hvor man har at gøre med mængderne

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup \dots \quad \text{og} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \dots,$$

der også betegnes

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{og} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

¹ På samme måde vil også flere af de i det følgende indførte betegnelser optræde to udgaver.

Det ses, at tegnene $\cup$ og $\cap$ svarer til henholdsvis $\cup$ og $\cap$ på samme måde som Σ og Π til henholdsvis $+$ og $\cdot$.

Vi nævner et eksempel: Lad P være et fast punkt i planen; hvis K er mængden af positive reelle tal og A_k cirkelskiven med centrum i P og radius k , så består $\bigcup_{k \in K} A_k$ af alle punkter i hele planen og $\bigcap_{k \in K} A_k$ af punktet P .

Hvis det for vilkårlige $l \in K$ og $m \in K$ ($l \neq m$) gælder, at $A_l \cap A_m = \emptyset$, kaldes mængderne A_k *parvis disjunkte*. I så fald er også $\bigcap_{k \in K} A_k = \emptyset$,

mens det omvendte ikke behøver at gælde undtagen i tilfælde som $K = \{1, 2\}$.

Vi nævner endnu et eksempel: Lad der på intervallet $I = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ være defineret en reel, positiv, kontinuert funktion f , og lad $A_x = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$. Da er, idet vi fortolker (x, y) som punktet med disse koordinater, $\bigcup_{x \in I} A_x$ den af x -aksen, linierne $x = a$ og $x = b$ samt kurven $y = f(x)$ ¹ begrænsede punktmængde i planen (se fig. 7). Det

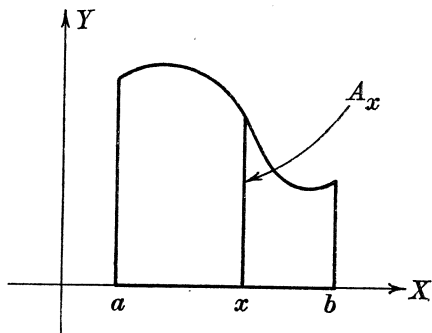


Fig. 7

bemærkes, at mængderne A_x er parvis disjunkte.

Ved formuleringen af almenlydige love for kompositionsreglerne $\cup$ og $\cap$ får vi brug for det i sig vigtige begreb en klasseinddeling. Vi definerer først: Hvis det om en mængde B og et mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$ gælder, at

$$B \subseteq \bigcup_{k \in K} A_k,$$

kaldes $(A_k)_{k \in K}$ en *overdækning* af B . Hvis det yderligere gælder, at mængderne A_k er parvis disjunkte, at ingen af dem er tom, og at

$$B = \bigcup_{k \in K} A_k,$$

kaldes $(A_k)_{k \in K}$ en *klasseinddeling* af B ; det er da klart, at B ikke er tom. Udtrykt på en anden måde: Mængdesystemet $(A_k)_{k \in K}$ kaldes en klasseinddeling af mængden B , hvis enhver af mængderne A_k er en ikke tom delmængde af B , og ethvert element af B tilhører en og kun én af mængderne A_k . Mængderne A_k kaldes i denne situation *klasser*.

Til en vilkårlig ikke tom mængde B findes der altid klasseinddelinger, nemlig i hvert fald de to såkaldte trivielle:

$$K = B, \quad A_k = \{k\} \text{ for ethvert } k \in B,$$

¹ Udførligere: $\{(x, y) \mid y = 0\}$, $\{(x, y) \mid x = a\}$, $\{(x, y) \mid x = b\}$ og $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$.

hvor altså ethvert element af B er alene i sin klasse, og

$$K = \{1\}, A_1 = B,$$

hvor der kun er én klasse, nemlig hele B . Hvis B kun indeholder ét element, er disse to klasseinddelinger dog den samme.

Lad der nu til et vilkårligt mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$ foreligge en klasseinddeling af indexmængden K , altså et system af ikke tomme, parvis disjunkte delmængder K_p af K (hvor p gennemløber en vis indexmængde P), således at $K = \bigcup_{p \in P} K_p$. Da gælder de associative love:

$$\bigcup_{k \in K} A_k = \bigcup_{p \in P} \bigcup_{k \in K_p} A_k \quad \text{og} \quad \bigcap_{k \in K} A_k = \bigcap_{p \in P} \bigcap_{k \in K_p} A_k.$$

Spørgsmålet om kommutative love skal vi senere vende tilbage til.

Videre gælder de idempotente love: Hvis $A_k = A$ for ethvert $k \in K$, gælder det, at

$$\bigcup_{k \in K} A_k = \bigcap_{k \in K} A_k = A.$$

Endelig kan man også ved hjælp af en klasseinddeling af indexmængden formulere absorptionslove og distributive love; vi nøjes her med følgende specialtilfælde af absorptionslovene: Hvis det for en delmængde $L \neq \emptyset$ af K gælder, at $A_l = \emptyset$ for ethvert $l \in L$, så har man

$$(3.3) \quad \bigcup_{k \in K} A_k = \bigcup_{k \in M} A_k \quad \text{og} \quad \bigcap_{k \in K} A_k = \emptyset,$$

hvor $M = \{k \mid k \in K, k \notin L\}$ eller, under anvendelse af det nedenfor anførte begreb differensmængde: $M = K \setminus L$.

4. Differensmængde, komplementærmængde og diskrepansmængde.

Ved *differensmængden* mellem to mængder A og B eller *overskudsmængden* af A over B , skrevet $A \setminus B$ (eller $A - B$), forstår man mængden af alle de elementer af A , der ikke tilhører B (se fig. 8). Det ses umiddelbart, at

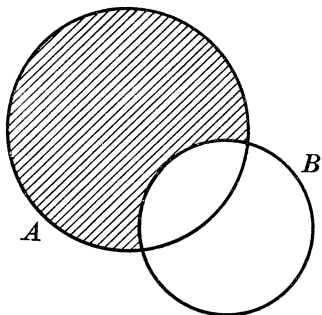


Fig. 8

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup B &= A \cup B, \\ (A \setminus B) \cap B &= \emptyset, \\ A \setminus B &= A \setminus (A \cap B), \\ A \subseteq B &\Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset, \\ A \cap B &= A \cap C \Leftrightarrow A \setminus B = A \setminus C. \end{aligned}$$

Desuden gælder de to distributive love:

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cap C &= (A \cap C) \setminus (B \cap C), \\ (A \cap C) \setminus B &= (A \setminus B) \cap (C \setminus B), \end{aligned}$$

hvor de to venstresider endog er den samme mængde (se fig. 9).

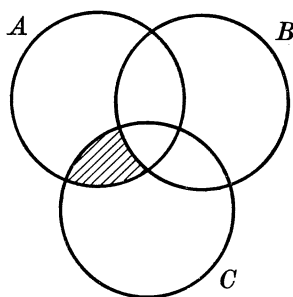


Fig. 9

Vi nævner nogle eksempler på differensmængder, idet vi igen henviser til s. 14–15:

$$\begin{aligned} A_1 \setminus A_3 &= \{3\}, \\ A_3 \setminus A_1 &= \{-1, -3, -4, -5, \dots\}, \\ C_3 \setminus C_4 &= C_3 \setminus C_5, \\ C_4 \setminus C_3 &= C_4 \setminus C_5, \\ C_5 \setminus C_3 &= C_5 \setminus C_4 = \emptyset. \end{aligned}$$

Hvis $B \subseteq A$, bruger man om differensmængden $A \setminus B$ det specielle navn *komplementærmængden* til B relativt til A og skriver

den som $\mathbf{C}_A B$ eller, når misforståelser er udelukket, blot $\mathbf{C}B$ (se fig. 10); flere andre betegnelser er i brug, f. ex. B' og $\bar{B}$. Det bemærkes, at nogle forfattere lader differensmængde og komplementærmængde være det samme begreb, idet de i definitionen på differensmængden mellem A og B (der i så fald altid betegnes $A - B$) forudsætter $B \subseteq A$.

For to vilkårlige mængder A og B gælder det tydeligvis (se fig. 8), at

$$A \setminus B = \mathbf{C}_A (A \cap B).$$

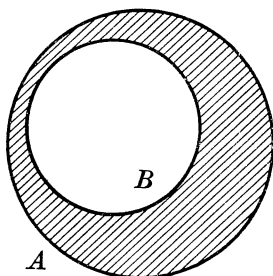


Fig. 10

Komplementærmængdebegrebet har særlig interesse, hvis de i en vis sammenhæng optrædende mængder alle er delmængder af en eller anden fast mængde E , der så kaldes den i den pågældende situation foreliggende *universalmængde*. I tilfældet $E = \mathfrak{N}$ har man således, idet vi igen be-

nytter de s. 14–15 nævnte eksempler:

$$\mathbf{C}A_1 = \{\dots, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, \dots\},$$

$$\mathbf{C}A_2 = A_3 \cup \{0, 1, 1000, 1001, \dots\} \cup B,$$

hvor B betegner mængden af alle sammensatte tal mellem 1 og 1000, og

$$\mathbf{C}A_3 = \mathfrak{N} \cup \{0\}.$$

Det overlades til læseren i tilfældet $E = C_1$ at bestemme mængderne $\mathbf{C}C_2$, $\mathbf{C}C_3$, $\mathbf{C}C_4$ og $\mathbf{C}C_5$.

Endelig har man i tilfældet $E = E_1$, at $\mathbf{C}E_2$ er en mængde bestående af ét element (under forudsætning af, at låsen er, som den bør være).

For komplementærmængder med hensyn til en fast mængde E gælder følgende regneregler:

$$\begin{aligned} A \cup \complement A &= E, & \complement \emptyset &= E, \\ A \cap \complement A &= \emptyset, & \complement E &= \emptyset, & \complement \complement A &= A, \end{aligned}$$

samt de såkaldte de Morgans love:

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \quad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B,$$

eller mere generelt:

$$\complement \bigcup_{k \in K} A_k = \bigcap_{k \in K} \complement A_k, \quad \complement \bigcap_{k \in K} A_k = \bigcup_{k \in K} \complement A_k.$$

Vi har tidligere (s. 22) påpeget en analogi mellem regning med mængder og regning med tal; denne analogi kan i den her betragtede situation udvides, thi da man har $A \cap E = A$, optræder universalmængden på samme måde i mængdealgebraen, som tallet 1 gør det i talalgebraen. Da man imidlertid også har $A \cup E = E$, er analogien ikke helt fuldstændig. På den anden side kan man ved at erstatte $+$ og $\cdot$ med henholdsvis $\cap$ og $\cup$ og betragte den anden distributive lov i stedet for den første få en ganske tilsvarende analogi, hvor E træder i stedet for 0 og $\emptyset$ i stedet for 1, og hvor det så er formelen $A \cap \emptyset = \emptyset$, der ikke har noget analogon.

Det ses, at hvis en mængdealgebraisk formel er rigtig, så er dens *duale* det også, d. v. s. den, der fremkommer, når overalt i den givne formel $\cup$ erstattes med $\cap$ og omvendt, $\bigcup$ med $\bigcap$ og omvendt, $\subset$ med $\supset$ og omvendt og endelig enhver mængde med sin komplementærmængde. Specielt gælder det, at

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \complement A \supseteq \complement B,$$

og heraf følger det, at ligesom man (se s. 18) kan anvende formelen

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$$

til påvisning af, at to mængder er den samme, kan man også bruge enhver af disse tre formler:

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ \complement A \subseteq \complement B \end{cases}, \\ A = B &\Leftrightarrow \begin{cases} \complement B \subseteq \complement A \\ B \subseteq A \end{cases}, \\ A = B &\Leftrightarrow \begin{cases} \complement B \subseteq \complement A \\ \complement A \subseteq \complement B \end{cases}. \end{aligned}$$

For fuldstændighedens skyld nævner vi, at den mængde, der består af alle de elementer, som tilhører netop én af mængderne A og B (skraveret på fig. 11), kaldes *diskrepansmængden* af A og B og betegnes $A \triangle B$

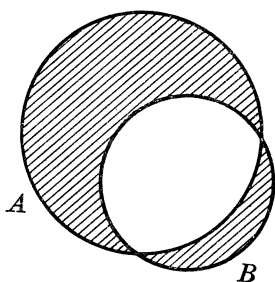


Fig. 11

(man møder også betegnelsen $A \dot{+} B$). Sagt på en anden måde: $A \Delta B$ består af alle de elementer, der tilhører A eller B , men ikke dem begge; altså:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Imidlertid gælder det også, at

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

og opfattet på denne måde er $A \Delta B$ et udtryk for, hvor nært A og B i en vis forstand er ved at være den samme mængde, og begrebet spiller derfor ofte en rolle, når man på en eller anden måde approximerer en mængde med andre mængder.

Der gælder igen en række regneregler, som let bevises og nemt kan illustreres ved symbolske figurer. Vi nævner:

Den associative lov: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Den kommutative lov: $A \Delta B = B \Delta A$.

Den distributive lov: $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$,

og desuden følgende:

$$A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B,$$

$$A \Delta B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset,$$

$$A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = \emptyset,$$

$$A \Delta B = C \Leftrightarrow A \Delta C = B,$$

af hvilke især den sidste er værd at bemærke.

Om de i denne paragraf betragtede tre begrebsdannelser kan det sammenfattende siges, at ingen af dem er helt analog til talregningens differensbegreb, men at de alle tre på hver sin måde afspejler væsentlige træk ved dette.

5. Klasseinddelinger og ækvivalensrelationer. Lad der foreligge en mængde $A \neq \emptyset$ og en klasseinddeling af denne (se s. 24). Idet vi om den klasse, som et element $a \in A$ tilhører, bruger betegnelsen K_a (hver klasse får da muligvis flere betegnelser), har vi med det samme, at

$$(5.1) \quad K_a \cap K_b \neq \emptyset \Rightarrow K_a = K_b.$$

Om to elementer a og b af A vedtager vi nu at sige, at a er *ækvivalent* med b , skrevet $a \sim b$, såfremt $a \in K_b$. Der gælder nu:

$$(5.2) \quad a \sim b \Leftrightarrow K_a = K_b.$$

Thi af $a \in K_b$ fås, idet jo $a \in K_a$, at $K_a \cap K_b \neq \emptyset$, og dermed ifølge (5.1), at $K_a = K_b$; og omvendt fås af $K_a = K_b$, idet $a \in K_a$, at $a \in K_b$.

For den betragtede relation $\sim$ gælder følgende tre love:

Den reflexive lov: $a \sim a$.

Den symmetriske lov: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.

Den transitive lov: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Den første siger jo nemlig blot, at $a \in K_a$, og de to andre bevises ved hjælp af (5.2) på følgende måde:

$$\begin{aligned} a \sim b &\Rightarrow K_a = K_b \Rightarrow K_b = K_a \Rightarrow b \sim a. \\ \left. \begin{aligned} a \sim b &\Rightarrow K_a = K_b \\ b \sim c &\Rightarrow K_b = K_c \end{aligned} \right\} &\Rightarrow K_a = K_c \Rightarrow a \sim c. \end{aligned}$$

Da den symmetriske lov gælder, er det tilladeligt at benytte udtryksmåden: a og b er *indbyrdes* ækvivalente.

Idet en vilkårlig reflexiv, symmetrisk og transitiv relation kaldes en *ækvivalensrelation* (hvad vi altså ovenfor har foregrebet ved straks at benytte glosen ækvivalent), har vi bevist:

SÆTNING 5.1. *Til en vilkårlig klasseinddeling af en ikke tom mængde får man en ækvivalensrelation i denne ved at fastsætte, at et element er ækvivalent med et andet, såfremt det tilhører samme klasse som dette.*

Den i sætningen nævnte ækvivalensrelation kaldes den til klasseinddelingen svarende.

I en vilkårlig ikke tom mængde A findes der altid ækvivalensrelationer, nemlig i hvert fald de to såkaldte trivielle:

$$a \sim b, \text{ hvis } a = b,$$

hvor altså ethvert element af A kun er ækvivalent med sig selv, og

$$a \sim b \text{ for ethvert } b \in A,$$

hvor ethvert element er ækvivalent med ethvert andet. Hvis A kun indeholder ét element, er disse to ækvivalensrelationer dog den samme.

Lad der nu i en vilkårlig mængde $A \neq \emptyset$ foreligge en ækvivalensrelation $\sim$; vi definerer et system af delmængder af A (med A selv som indexmængde) ved at sætte

$$K_a = \{x \mid x \sim a\}.$$

Mængderne K_a , som ikke nødvendigvis alle er forskellige, er ikke tomme, thi da ækvivalensrelationen er reflexiv, har vi for ethvert $a \in A$, at $a \in K_a$. Det samme ræsonnement viser, at ethvert element af A tilhører mindst én af mængderne K_a .

Hvis det om et element $c \in A$ gælder, at $c \in K_a$ og $c \in K_b$, altså at $c \sim a$ og $c \sim b$, så har vi ifølge den symmetriske lov, at $a \sim c$, og dermed ifølge den transitive, at $a \sim b$. For et vilkårligt element x af K_a gælder det, at $x \sim a$, og af $a \sim b$ fås det da ved den transitive lov, at $x \sim b$, altså at $x \in K_b$, og vi har således vist, at $K_a \subseteq K_b$. På nøjagtigt samme måde ses det, at $K_b \subseteq K_a$, og vi har altså alt i alt bevist:

$$(5.3) \quad K_a \cap K_b \neq \emptyset \Rightarrow K_a = K_b.$$

Mængden af alle de indbyrdes forskellige blandt de mængder, der tilhører det betragtede mængdesystem, er dermed en klasseinddeling af A , og det således, at to elementer hører til samme klasse, når og kun når de er ækvivalente, thi for det første har vi:

$$a \sim b \Rightarrow a \in K_b,$$

og da $b \in K_b$, tilhører a og b i så fald samme klasse; og for det andet:

$$\left. \begin{array}{l} a \in K_c \Rightarrow a \sim c \\ b \in K_c \Rightarrow b \sim c \Rightarrow c \sim b \end{array} \right\} \Rightarrow a \sim b.$$

Vi har dermed bevist:

SÆTNING 5. II. *Til en vilkårlig ækvivalensrelation i en ikke tom mængde får man en klasseinddeling af denne ved at fastsætte, at et element tilhører samme klasse som et andet, såfremt det er ækvivalent med dette.*

Den i sætningen nævnte klasseinddeling kaldes den til ækvivalensrelationen svarende ækvivalensklasseinddeling, og dens klasser kaldes *ækvivalensklasser*; ethvert element af en ækvivalensklasse siges at *repræsentere* denne.

Det er klart, at danner man først den til en forelagt ækvivalensrelation svarende ækvivalensklasseinddeling og derpå den til denne svarende ækvivalensrelation, så får man netop den, man gik ud fra, og tilsvarende, hvis man begynder med en klasseinddeling.

Eksempler på til hinanden svarende par af ækvivalensrelationer og ækvivalensklasseinddelinger kan hentes fra alle matematikkens områder; lad os nævne nogle få:

Lad A være mængden af rette linier i en plan og $a \sim b$, hvis a er parallel eller sammenfaldende med b ; ækvivalensklasserne er parallelbundterne i den pågældende plan. Det bemærkes, at man ikke får en ækvivalensrelation ved at definere: $a \sim b$, hvis a skærer eller er sammenfaldende med b , thi denne relation er ikke transitiv. Mængden af liniebundter i planen er jo heller ikke nogen klasseinddeling af mængden af linier; thi enhver linie er element af mange liniebundter.

Lad A være mængden af alle liniestykker i en plan og $a \sim b$, hvis a

har samme længde som b ; ækvivalensklasserne er mængderne af lige lange liniestykker i den pågældende plan.

Lad A være mængden af alle trekanter i en plan og $a \sim b$, hvis a er kongruent med b ; ækvivalensklasserne er mængderne af alle indbyrdes kongruente trekanter i den pågældende plan.

Lad A være mængden af alle trekanter i en plan og $a \sim b$, hvis a er ensvinklet med b ; ækvivalensklasserne er mængderne af alle indbyrdes ensvinklede trekanter i den pågældende plan.

Lad A være mængden af alle hele tal og $a \sim b$, hvis $a - b$ er deleligt med 2; ækvivalensklasserne er mængden af hele, lige tal og mængden af hele, ulige tal.

Lad A være mængden af delmængder af en mængde M og $a \sim b$, hvis $a = b$; ækvivalensklasserne består hver af ét element, nemlig en vis delmængde af M . Det bemærkes, at to forskellige ækvivalensklasser består af hver sin af to forskellige delmængder af M (ækvivalensklasser er jo disjunkte), men disse to mængder er ikke nødvendigvis disjunkte.

For flere af de nævnte ækvivalensrelationer har man specielle tegn. For den første skriver man $a \parallel b$ eller $a \neq b$, for den anden ofte (lidt dri- stigt) $a = b$, for den tredje $a \cong b$ eller $a \overline{\cong} b$, for den fjerde har man $a \sim b$ som standardbetegnelse, og for den femte skriver man $a \equiv b \pmod{2}$.

6. Afbildninger. Hvis det om to mængder A og B gælder, at der til ethvert element $a \in A$ på entydig måde er knyttet et element $b \in B$, siger man, at der foreligger *en afbildning af A ind i B* (eller, især hvis B er en talmængde, en *funktion* fra A til B); A kaldes afbildningens *definitions- mængde* og B dens *dispositions- mængde*.

En afbildning betegnes sædvanligvis med et lille bogstav, og at f er en afbildning af A ind i B , skrives således

$$f: A \text{ ind i } B;$$

man træffer også skrivemåderne

$$f: A \rightarrow B \quad \text{og} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

Det til et element $a \in A$ knyttede element $b \in B$ kaldes *billedelementet* af a (eller den til a svarende *funktionsværdi*) og betegnes $f(a)$; man siger også, at a *afbildes* i $f(a)$, og skriver

$$a \rightarrow f(a).$$

Det understreges, at man altså foretrækker at lade symbolet $f(x)$ betegne ikke (som det har været sædvane) den betragtede afbildning, men et bestemt af dens billedelementer, nemlig det til elementet x knyttede.

Hvis det om to afbildninger f og g med samme definitionsmængde A gælder, at $f(a) = g(a)$ for ethvert $a \in A$, siger man, at f er den samme afbildning som g , og skriver $f = g$ (med den ældre symbolik ville man skrive $f(x) \equiv g(x)$); denne relation mellem afbildninger er klart reflexiv, symmetrisk og transitiv.

I definitionen på begrebet afbildning optræder uden nærmere forklaring udtrykkene »er knyttet til« og »på entydig måde«. Det ville være mere tilfredsstillende at bygge afbildningsbegrebet direkte på mængdebegrebet, og vi indskyder derfor et kortfattet afsnit om ordnede par og mængder af sådanne, så meget hellere som vi derved også får givet en præcis definition på begrebet relation, som vi allerede lejlighedsvis har benyttet og også senere får brug for.

Lad der være givet to ikke nødvendigvis forskellige elementer a og b ; vi skal søge at definere det *ordnede par* $\langle a, b \rangle$ af disse elementer, d. v. s. en kombination af en særlig type af disse to, således beskaffen, at de ikke optræder side om side, men i en bestemt rækkefølge, så at a , der kaldes det ordnede pars første komponent, på en eller anden måde kan siges at gå forud for den anden komponent b . Det er allerede nu klart, at $\langle a, b \rangle$ skal være noget andet end $\{a, b\}$, og dette understreges yderligere af, at man vil have $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$, når og kun når $a = c$ og $b = d$, således at $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$, hvis $a \neq b$.

Man kan uden større besvær gå efter, at man får alle disse ønsker opfyldt ved at bruge definitionen

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

som udtrykker begrebet ordnet par direkte ved mængdebegrebet (og iøvrigt er en definition af den slags, som bringer et anskueligt klart begreb på plads i systemet og dermed har gjort sin skyldighed).

Lad der nu være givet to mængder A og B , der ikke behøver at være disjunkte, ja, som endog gerne kan være den samme mængde. Mængden af alle ordnede par $\langle a, b \rangle$, hvor $a \in A$ og $b \in B$, betegnes $A * B$ (den er tom, hvis og kun hvis mindst én af mængderne A og B er det). En vilkårlig delmængde R af $A * B$ kaldes en *relation* fra A til B , idet man siger, at et element $a \in A$ står i den pågældende relation til et element $b \in B$ (hvilket kan skrives aRb), såfremt $\langle a, b \rangle \in R$.

Lad eksempelvis A være mængden af alle rette linier i en plan og B mængden af alle cirkler i samme plan, og lad den betragtede relation R være »er tangent til«. At det ordnede par $\langle a, b \rangle$ tilhører R , er da ensbetydende med, at linien a er tangent til cirklen b .

En vilkårlig relation $R \subseteq A * B$ har en såkaldt *invers*, nemlig den delmængde R^{-1} af $B * A$, som består af netop de ordnede par $\langle b, a \rangle$, for hvilke

det gælder, at $\langle a, b \rangle \in R$. I det betragtede eksempel udtrykkes den inverse relation ved »har som tangent«.

I det specielle tilfælde $A = B$ (som er det, vi i de foregående paragraffer har haft at gøre med nogle gange), taler man om en relation i A . Lad os som eksempel for $A = \mathbb{N}$ nævne relationen »går op i« eller »er divisor af«, hvis inverse er relationen »er multiplum af«.

Hvis der for en relation R i A gælder følgende tre love (for vilkårlige elementer af A):

Den reflexive lov: $\langle a, a \rangle \in R$.

Den symmetriske lov: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$.

Den transitive lov: $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$,

kalder man relationen en *ækvivalensrelation* (jvf. s. 29). Den lige nævnte relation »går op i« er ikke en ækvivalensrelation, thi den er ikke symmetrisk. Vi nævner, at man kan finde eksempler på samtlige kombinationsmuligheder af gyldighed og ikke-gyldighed af de tre love, som således er indbyrdes uafhængige.

Lad os igen betragte en relation fra A til B , idet vi altså lader den specielle forudsætning $A = B$ falde. Hvis det gælder, at der for ethvert $a \in A$ findes netop ét ordnet par i R , som har a som første komponent (altså for det første, at der til ethvert $a \in A$ findes et $b \in B$, så at $\langle a, b \rangle \in R$, og for det andet, at $\langle a, b \rangle \in R, \langle a, c \rangle \in R \Rightarrow b = c$), kalder man R en *afbildning* af A ind i B , og anden komponent af det pågældende ordnede par kaldes billedelementet af a . Hermed har vi netop fået fat på det, som anskueligt udtrykkes således: at der til ethvert element af A på entydig måde er knyttet et element af B , og vi er altså nået frem til den ønskede, på mængdebegrebet hvilende definition på begrebet afbildning. Det ses iøvrigt, at relationen = mellem to afbildninger er opfyldt, hvis de er den samme mængde af ordnede par.

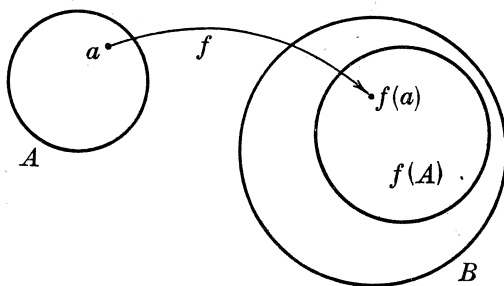


Fig. 12

Vi går nu videre med fremstillingen af afbildningernes teori. For enhver mængde $A' \subseteq A$ kaldes den delmængde af B , som består af alle billedelementerne af elementerne fra A' , *billedmængden* af A' (eller den til A' svarende *værdimængde*) og betegnes $f(A')$.

For $A' = A$ får man mængden $f(A)$, som også kaldes afbildningens billedmængde (eller funktionens

værdimængde) (se fig. 12). Hvis $f(A')$ består af ét element, siges f at være *konstant* på A' ; hvis f er konstant på A , siges f kort at være en konstant afbildning.

Man beviser uden større vanskelighed, at hvis A' og A'' er delmængder af A , så er

$$(6.1) \quad f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A''),$$

$$(6.2) \quad f(A' \cap A'') \subseteq f(A') \cap f(A''),$$

$$(6.3) \quad f(A' \setminus A'') \supseteq f(A') \setminus f(A'').$$

Ethvert element af A , som ved f afbildes i et givet element $b \in B$, kaldes et *originalement* til b ; mængden af sådanne elementer kaldes *originalmængden* til b og kan naturligvis godt indeholde mere end ét element (og kan iøvrigt også være tom, nemlig hvis $b \in B \setminus f(A)$). Originalmængden til et vilkårligt element af $f(A)$ er et eksempel på en mængde, på hvilken f er konstant. Endvidere forstår man ved originalmængden til en mængde $B' \subseteq f(A)$ den delmængde af A , som består af alle de elementer af A , hvis billedelementer tilhører B' .

Foreligger der to afbildninger f og g , således at dispositionsmængden for f er definitionsmængde for g , altså

$$f: A \text{ ind i } B, \quad g: B \text{ ind i } C,$$

forstår man ved den af f og g *sammensatte* afbildning

$$g \circ f: A \text{ ind i } C$$

den således definerede afbildning (se fig. 13):

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \text{ for ethvert } a \in A.$$

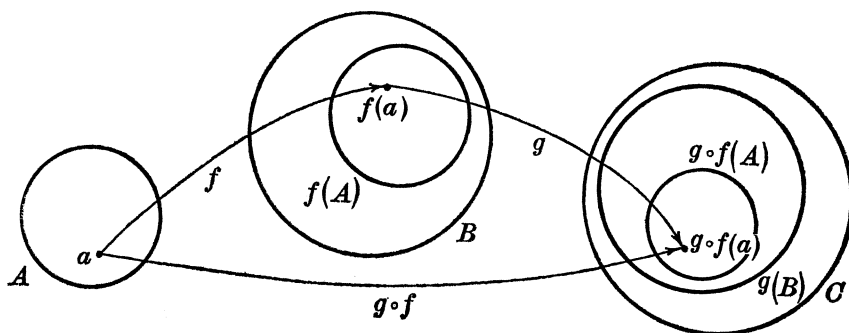


Fig. 13

Hvis det for en afbildning $f: A \text{ ind i } B$ gælder, at $f(A) = B$, kaldes f en afbildning af A på B , og man skriver

$f: A$ på B .

Enhver afbildning $f: A$ ind i B kan, om det ønskes, betragtes som en afbildning af A på $f(A)$.

Hvis det for en afbildning $f: A$ ind i B gælder, at originalmængden til ethvert element af $f(A)$ består af ét element (eller sagt på en anden måde: at forskellige elementer af A stedse har forskellige billedelementer), kaldes afbildningen *enentydig*.

Et eksempel på en afbildning, der på én gang er enentydig og afbilder definitions- mængden A på dispositions- mængden B , har man for $B=A$ i den afbildning, der lader ethvert element $a \in A$ afbildes i sig selv; denne afbildning kaldes den *identiske* afbildning af A på A .

Sammen med en enentydig afbildning $f: A$ ind i B betragter man ofte den afbildning af $f(A)$ på A , som fastlægges ved, at ethvert element $b \in f(A)$ afbildes i sit entydigt bestemte originalelement. Denne afbildning kaldes den til f *inverse* (eller omvendte) og betegnes f^{-1} , og vi har altså, idet billedmængden ses at være hele A :

$$f^{-1}: f(A) \text{ på } A.^1$$

Da originalmængden ved f^{-1} til et vilkårligt element $a \in A$ må udgøres af det ene element $f(a)$, er afbildningen f^{-1} enentydig; den har da en invers, og da et vilkårligt element $a \in A$ ved denne afbildes i sit originalelement ved f^{-1} , altså $f(a)$, har vi:

$$(f^{-1})^{-1} = f: A \text{ på } f(A).$$

Hvis f er en enentydig afbildning, kan man i (6.2) og (6.3) erstatte inklusionstegn med lighedstegn.

Videre gælder det, at den af to enentydige afbildninger $f: A$ ind i B og $g: B$ ind i C sammensatte afbildning $g \circ f: A$ ind i C er enentydig, thi originalmængden ved g til et element $c \in C$ består af ét element $b \in B$, og originalmængden ved f til dette af ét element $a \in A$, og dette udgør originalmængden ved $g \circ f$ til c .

Endvidere konstaterer vi, at hvis f er en enentydig afbildning af A på B , så er f^{-1} en enentydig afbildning af B på A , og $(f^{-1})^{-1} = f: A$ på B ; og videre, at hvis begge afbildningerne $f: A$ på B og $g: B$ på C er enentydige, så er den sammensatte afbildning $g \circ f$ en enentydig afbildning af A på C , specielt er $f^{-1} \circ f$ den identiske afbildning af A på A ; og endelig, at hvis afbildningen $f: A$ på B er enentydig og A' en ægte delmængde af A , så er $f(A')$ en ægte delmængde af B .

¹ Definitionerne kan også ved hjælp af relationsbegrebet formuleres således: Enhver afbildning f har, betragtet som relation fra A til $f(A)$, en invers relation f^{-1} . Hvis denne også er en afbildning, kaldes f enentydig, og f^{-1} kaldes den inverse afbildning til f .

Vi giver nogle eksempler på afbildninger: Den sædvanlige elementære funktionslære beskæftiger sig med de specielle afbildninger, hvis definitionsmængde og dispositionsmængde begge er mængden $\Re$ af de reelle tal eller delmængder af denne — som oftest intervaller; lad os nævne de ved $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\sqrt{x}$ og $f(x)=|x|$ definerede afbildninger. Men afbildningsbegrebet optræder i virkeligheden også adskillige andre steder i den elementære matematik; i geometrien ofte i den skikkelse, at man ved en afbildning af en mængde af geometriske objekter ind i $\Re$ etablerer en såkaldt *måling* af disse objekter, således ved liniestykkers længde, polygoners areal og vinklers måltal (eller »størrelse«); ingen af disse tre afbildninger er enentydig. Den afbildning, der til enhver trekant knytter summen af dens vinklers måltal, er et eksempel på en konstant afbildning af mængden af alle trekanter ind i $\Re$. Videre er parallelforskydninger, drejninger, spejlinger, flytninger og multiplikationer eksempler på afbildninger af en mængde af geometriske figurer på den samme mængde (hvis ikke man foretrækker at opfatte dem som afbildninger af mængden af punkter i hele planen (eller rummet) på sig selv); disse afbildninger er alle enentydige. Ved en projektion afbildes en mængde af figurer i en lineær mangfoldighed (ret linie, plan, rum) på en mængde af figurer i en anden lineær mangfoldighed (eller man kan igen foretrække at operere med mængden af alle punkter i de lineære mangfoldigheder); en projektion er ikke nødvendigvis enentydig.

At gøre en ret linie til en abscisseakse er at etablere en enentydig afbildning af en særlig type af mængden af dens punkter på mængden $\Re$, og analogt er indlæggelse af et koordinatsystem i planen (eller rummet) det samme som etablering af en enentydig afbildning af en særlig type af mængden af planens (eller rummets) punkter på mængden af alle reelle talpar (eller taltripler).

En mængde bestående af afbildninger kan optræde som definitionsmængde for en ny afbildning. Vi nævner et eksempel, hvor dispositionsmængden også er en mængde af afbildninger: den (ikke enentydige) afbildning, ved hvilken enhver sædvanlig differentiabel funktion afbildes i sin differentialkvotient. Dispositionsmængden kan også bestå af geometriske objekter; vi nævner den afbildning, ved hvilken enhver sædvanlig funktion afbildes i sit grafiske billede. Endelig nævner vi et eksempel, hvor dispositionsmængden er $\Re$, nemlig den (ikke enentydige) afbildning, ved hvilken enhver sædvanlig på et vist fast interval kontinueret funktion afbildes i sit bestemte integral over dette interval.

En afbildning af en mængde K ind i en mængde B af mængder har vi tidligere haft med at gøre; thi betegner vi med A_k den til et vilkårligt element $k \in K$ ved afbildningen knyttede mængde (som altså er et ele-

ment af B), udgør mængderne A_k netop et mængdesystem med K som indexmængde (se s. 23).

Lad A være mængden af ækvivalensklasser af kongruente liniestykker i en given plan; knytter man til enhver af disse klasser den fælles længde af de liniestykker, der udgør den, har man en enentydig afbildning af A ind i $\mathbb{R}$. Erstatte man kongruente liniestykker med kongruente trekanter og længder med arealer, får man en ikke enentydig afbildning.

Det i sætningerne 5.I og 5.II udtrykte hovedresultat kan formuleres således: For en vilkårlig ikke tom mængde A findes der en enentydig afbildning af mængden af ækvivalensrelationer i A på mængden af klasseinddelinger af A , nemlig den, der afbilder en vilkårlig ækvivalensrelation i den klasseinddeling, som man får ved at regne to elementer af A til samme klasse, når de er ækvivalente.

Lad os endelig nævne følgende vigtige eksempel: Vi betragter for en vilkårlig mængde A mængden D af samtlige delmængder af A og mængden F af samtlige afbildninger af A ind i mængden $\{0, 1\}$. Idet vi til enhver delmængde M af A knytter dens karakteristiske funktion φ , d. v. s. den funktion, der er konstant på M med funktionsværdien 1 og konstant på $\bar{M}$ med funktionsværdien 0, har vi etableret en enentydig afbildning af D på F .

7. Belægninger. Vi har allerede lejlighedsvis nævnt (ikke ordnede) talpar og taltripler; vi skal nu præcisere disse begreber, idet vi samtidigt generaliserer dem.

Lad der være givet to (ikke nødvendigvis disjunkte eller forskellige) mængder A og B . Før vi opstiller en nøjagtig definition på et par af elementer fra A og B , vil vi forsøge at indkredse begrebet ved nogle løsere betragtninger. Et vilkårligt element a fra A og et vilkårligt element b fra B skal på en eller anden måde siges at udgøre et par af elementer fra A og B , og a skal kaldes parrets A -komponent og b dets B -komponent; det er altså meningen, at det stadig skal erindres, hvilke mængder a og b er hentet fra. Desuden skal to sådanne par kun anses for det samme, hvis de har samme A -komponent og samme B -komponent. Man kan forsøge at give alt dette udtryk ved at betegne parret ved $(a \in A, b \in B)$; da det ikke er meningen at opfatte komponenterne som optrædende i nogen bestemt rækkefølge inden for parret, er $(b \in B, a \in A)$ blot en anden betegnelse for det samme par.

Af det allerede sagte fremgår det, at parret ikke er det samme som f. ex. mængden $\{a\} \cup \{b\}$, og dette kommer endnu tydeligere frem, når man betænker, at det ikke forudsættes, at $A \cap B = \emptyset$. Thi lad $c \in A \cap B$; det har da god mening at tale om parret $(c \in A, c \in B)$, og dette er noget

helt andet end mængden $\{c\} \cup \{c\} = \{c\}$. Ydermere: hvis $c \in A \cap B$ og $d \in A \cap B$, hvor $c \neq d$, så er $\{c\} \cup \{d\} = \{d\} \cup \{c\} = \{c, d\} = \{d, c\}$, mens

$$(7.1) \quad (c \in A, d \in B) \neq (d \in A, c \in B),$$

hvilket bl. a. også kan skrives således:

$$(7.2) \quad (c \in A, d \in B) \neq (c \in B, d \in A).$$

Man kan gøre betegnelserne lidt enklere: De to mængder, fra hvilke man henter de elementer, der skal kombineres til et par, kan man af rent sproglige grunde ikke nævne samtidigt, og man vedtager da som betegnelse for parret at bruge (a, b) , idet det underforstås, at den forrest opskrevne komponent er hentet fra den først nævnte af mængderne og den bagest opskrevne fra den sidst nævnte. For par af elementer fra mængderne A og B kommer formelen (7.1) (og også (7.2)) derved til at se således ud:

$$(7.3) \quad (c, d) \neq (d, c).$$

Imidlertid svigter begge de indførte betegnelsesmåder i tilfældet $A = B$. For den førstes vedkommende opdager man dette ved f. ex. at indsætte $A = B$ i (7.1) eller (7.2), og for den andens melder vanskelighederne sig derved, at man ikke kan afgøre, hvilken af to givne mængder man nævner først, hvis ikke de er forskellige. Man kunne måske håbe, at der blot var tale om, at betegnelsesmåderne var uheldigt valgt, og at det foregående dog var tilstrækkeligt til fastlæggelse af selve begrebet et par af elementer fra A og B . Men også i selve definitionen går det galt, thi hvordan skal man skelne mellem begreberne A -komponent og B -komponent, når $A = B$? Man kunne prøve at klare sig ved at tale om forskellige eksemplarer af den samme mængde, eller man kunne forsøge at nøjes med de allerede indførte ordnede par; men begge ideer fører til nye vanskeligheder: den første kræver en revision af selve mængdebegrebet, og den anden, der ofte anvendes, lægger hindringer i vejen for en generalisation, som vi snart skal gennemføre, idet vi i stedet for at kombinere et element fra hver mængde i et system af blot to mængder skal gøre det samme for et helt vilkårligt mængdesystem.

Det viser sig nu, at man kan komme igennem ved en ganske lille ændring i opfattelsen af, hvad det er at danne et par af elementer fra mængderne A og B : hidtil har vi, anskueligt sagt, udtaget et element af hver af de to mængder og føjet dem sammen til et par. Nu vil vi vælge os *en fast mængde bestående af to elementer* og lade et bestemt af disse udpege et element fra A og det andet et fra B , og parret bliver således bygget op på denne faste mængde, som kaldes dets *indexmængde*. For at have noget bestemt at holde os til vil vi altid som indexmængde bruge

mængden $\{1, 2\}$, og vor definition kommer, idet vi samtidigt fastsætter betegnelsen for et par, til at lyde således:

Ved et *par* (eller med en udførligere udtryksmåde: et *indiceret par*) af elementer fra mængderne A og B forstås en *afbildning* f af mængden $\{1, 2\}$ ind i mængden $A \cup B$, således beskaffen, at $f(1) \in A$ og $f(2) \in B$. Hvis $f(1) = a$ og $f(2) = b$, betegnes parret (a, b) ; a og b kaldes henholdsvis 1- og 2-komponent af parret. Det bemærkes, at $(a, b) = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}$. På lignende måde kan enhver belægning (se nedenfor) opskrives som en mængde, hvis elementer er ordnede par. Hvis specielt $A = B$, kaldes (a, b) et par af elementer fra A ; et sådant er altså ganske det samme som en afbildning af $\{1, 2\}$ ind i A .

Med en løsere og lidt farlig udtryksmåde kaldes a og b ofte parrets første og anden komponent; det understreges, at der heri ikke skal ligge noget som helst i retning af, at de to komponenter forekommer i en bestemt rækkefølge i parret (anderledes sagt: det er *ikke et ordnet par*, vi har med at gøre); det gør de kun i opskrivningen af parret. Lad os belyse dette ved et eksempel: Koordinaterne til et punkt i en plan udgør et par af elementer fra $\Re$, og de har ikke af sig selv nogen bestemt rækkefølge; det er kun, når man nævner dem eller skriver dem op, at man (ifølge sædvane) først tager abscissen og så ordinaten.

Det er klart, at (7.3) (hvor det forudsættes, at $c \neq d$) gælder for det hermed definerede parbegreb.

Den ovenfor nævnte generalisation ligger nu lige for: Lad der foreligge et vilkårligt mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$; en afbildning f af indexmængden K ind i mængden $\bigcup_{k \in K} A_k$, således beskaffen, at $f(k) \in A_k$ for ethvert $k \in K$, kaldes med en anskuelig udtryksmåde en *belægning* af K med elementer fra mængderne A_k . Hvis $f(k) = a_k$, $k \in K$, betegnes belægningen således: $(a_k)_{a_k \in A_k, k \in K}$, eventuelt blot $(a_k)_{k \in K}$ eller (a_k) , og a_k kaldes belægningens k -komponent (eller k 'te komponent). Hvis specielt mængderne A_k alle er den samme mængde A , kaldes $(a_k)_{k \in K}$ en belægning af K med elementer fra A ; en sådan er altså ganske det samme som en afbildning af K ind i A .

Man ser somme tider benævnelsen: et *komplex* brugt i stedet for den her anvendte: en belægning. Vi har valgt den sidste, fordi den på en mere håndfast måde minder om den væsentlige rolle, som indexmængden spiller for strukturen af (a_k) .

Hvis $K = \{1, 2\}$, får man det allerede behandlede begreb: et par, og hvis $K = \{1, 2, 3\}$, kaldes belægningen en *tripel* af elementer fra A_1 , A_2 og A_3 og betegnes (a_1, a_2, a_3) . Mere almindeligt kalder man i tilfældet $K = \{1, 2, \dots, n\}$ belægningen et *n -sæt* af elementer fra $A_1, A_2, \dots, A_n$ og betegner den $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Videre kalder man i tilfældet $K = \Re$ belægningen en *følge* af elementer fra $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ og betegner

den $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$. I de specielle tilfælde, at de betragtede mængder A_k alle er den samme mængde A , taler man om en tripel, et n -sæt og en følge af elementer fra A .

Som et eksempel nævner vi den s. 15 omtalte mængde E_1 : ethvert element af den er en afbildning af mængden $T = \{t_1, t_2, \dots, t_6\}$ af de 6 taster ind i mængden $I = \{i_1, i_2, i_3\}$ af de 3 for en tast mulige indstillingsmåder, altså en belægning af T med elementer fra I .

Det fremhæves, at der i forbindelse med begrebet belægning foreligger et *eksistensspørgsmål*: Findes der til et forelagt mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$ altid en belægning af K med elementer fra mængderne A_k ? Det er klart, at hvis blot én af mængderne A_k er tom, er svaret nej; og vi vil gå ud fra, at hvis ingen af mængderne A_k er tom, er svaret ja, d.v.s. at der altid findes mindst én belægning af den ønskede art. Denne forudsætning er det såkaldte *udvalgsaxiom*, som vi senere skal vende tilbage til. Det bemærkes, at dette stærke udvalgsaxiom ikke er nødvendigt til sikring af eksistens af n -sæt.

Lad os til slut notere, at vi har mødt begrebet belægning tidligere uden at anvende glosen: Vi definerede s. 23 et mængdesystem som en samling af mængder, bestemt ved at der til hvert element k af en indexmængde K er knyttet en mængde A_k . Anderledes sagt er mængdesystemet $(A_k)_{k \in K}$ altså (som nævnt s. 36–37) en afbildning af K ind i en mængde M , hvis elementer er mængder (at mængderne A_k ikke behøver alle at være forskellige, ligger netop i, at denne afbildning ikke behøver at være enentydig). Dette kan vi nu udtrykke således: Mængdesystemet er en belægning af K med elementer fra M , som er en mængde af mængder. At et mængdesystem er en speciel type belægning, giver sig også udtryk i overensstemmelsen mellem betegnelserne.

8. Produktmængder, I. Lad der være givet to mængder A og B ; ved *produktmængden* $A \times B$ forstår man mængden af alle par (a, b) af elementerne fra A og B , altså:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

eller sagt mere udførligt: $A \times B$ er mængden af alle afbildninger f af $\{1, 2\}$ ind i $A \cup B$, for hvilke $f(1) \in A$ og $f(2) \in B$.¹ Det er straks klart, at

$$A \times B \neq B \times A, \text{ hvis } A \neq B;$$

thi $B \times A$ er mængden af alle afbildninger f af $\{1, 2\}$ ind i $B \cup A$, for hvilke $f(1) \in B$ og $f(2) \in A$.

Produktmængdebegrebet skyldes Cantor. Vi konstaterer, at $A \times B$ er

¹ Hvis man kun har defineret ordnede par og ikke som i denne fremstilling tillige indicerede par, må man lade $A \times B$ være det, vi her har kaldt $A * B$.

tom, hvis og (se ovenfor) kun hvis mindst én af faktormængderne (d. v. s. A og B) er det.

Lad os hente et eksempel fra den elementære kombinatorik: En mand har en blå, en sort og en ternet frakke samt en mørk og en lys hat. Han kan da optræde med blå frakke og mørk hat, med sort frakke og lys hat o. s. v., og mængden af disse kombinationer er, idet vi holder regnskab med dem ved hjælp af indexmængden $\{1, 2\}$, produktmængden af mængden af frakker og mængden af hatte.

Der er ikke noget i vejen for, at A og B specielt kan være den samme mængde; for $A \times A$ bruger man også betegnelsen A^2 . Et velkendt og

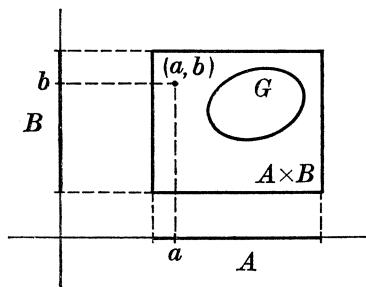


Fig. 14

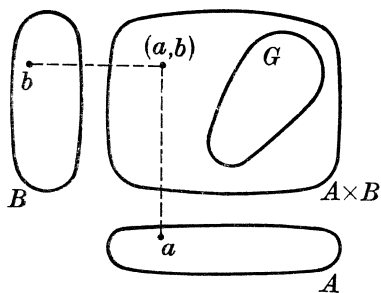


Fig. 15

allerede berørt (s. 36 og 39) eksempel på denne situation har man i mængden af koordinatsæt for punkterne i en plan (efter fastlæggelse af et koordinatsystem), thi den er åbenbart netop $\mathbb{R}^2$. Man kalder ofte, inspireret af dette eksempel, en produktmængde det *cartesiske produkt* af faktormængderne og anskueliggør $A \times B$ som vist på fig. 14 eller fig. 15 (de på figurerne indtegnede mængder G omtales nedenfor); og man kalder $\mathbb{R}^2$ den *euklidiske talplan* eller det todimensionale euklidiske talrum (dog først efter indførelse af det sædvanlige, ved kvadratroden af kvadratsummen af koordinatdifferenserne fastlagte afstandsbegreb).

På fig. 16 og fig. 17 vises det, hvorledes man kan anskueliggøre produktmængderne af en ret linie og en cirkel og af to cirkler (opfattet som punktmængder) ved hjælp af en cylinderflade og en torusflade.

Vi nævner, at man generaliserer begrebet grafisk billede af en sædvanlig funktion på følgende måde: Lad der foreligge en relation fra A til B (eller mere specielt en afbildning af en delmængde af A ind i B), altså en delmængde R (eller en delmængde f af særlig beskaffenhed) af $A * B$, hvis elementer er ordnede par $\langle a, b \rangle$ med $a \in A$ og $b \in B$. Til ethvert ordnet par $\langle a, b \rangle \in R$ knytter vi nu parret $(a, b) \in A \times B$, og den derved fremkomne mængde $G = \{(a, b) \mid \langle a, b \rangle \in R\}$ kaldes *graf*¹ i $A \times B$ af R

¹ Det bemærkes, at det kun er i kraft af, at vi har defineret $A \times B$ som noget andet end $A * B$, at vi kan skelne mellem en afbildning og dens graf.

(eller f) og kan anskueliggøres som vist på fig. 14 eller fig. 15, idet den jo er en delmængde af $A \times B$. I det på figurerne betragtede tilfælde er åbenbart $(a, b) \notin G$, altså $\langle a, b \rangle \notin R$, d. v. s. at a ikke står i den pågældende relation til b .

Ved grafen af R (eller f) i $B \times A$ forstås mængden $\{(b, a) \mid \langle a, b \rangle \in R\}$. Det ses, at en relation $R \subseteq A * B$ og dens inverse $R^{-1} \subseteq B * A$ har samme graf i $A \times B$ (ligesom de også har samme graf i $B \times A$). Som eksempel nævner vi den fra den elementære funktionslære velkendte sag, at den afbildning f af $\{x \mid x > 0, x \in \mathfrak{R}\}$ på $\mathfrak{R}$, som defineres ved $f(x) = \ln x$, og dens ved $f^{-1}(y) = e^y$ fastlagte inverse afbildning har samme graf i $\mathfrak{R}^2$, nemlig mængden $\{(x, y) \mid y = \ln x\} = \{(x, y) \mid x = e^y\}$.

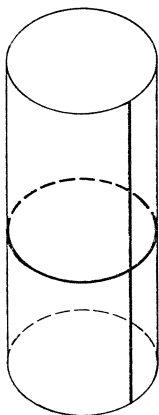


Fig. 16

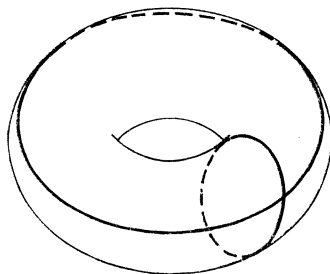


Fig. 17

Videre definerer man nu produktmængden af mængderne i en mængdetripel (A, B, C) :

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

(et simpelt eksempel får man ved i det kombinatoriske eksempel ovenfor at tilføje en mængde bestående af 5 halstørklæder) og mere almindeligt produktmængden af mængderne i et mængde- n -sæt $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ og af mængderne i en mængdefølge $(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n &= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_k \in A_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}\}, \\ A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \dots &= \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid a_k \in A_k, k \in \mathfrak{N}\}. \end{aligned}$$

Det understreges, at $A \times B \times C$ er noget andet end $(A \times B) \times C$, thi denne sidste mængdes elementer er ikke tripler, men par, og ligeledes er $A \times B \times C \neq A \times (B \times C)$. Desuden er $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$, thi ganske vist består begge disse mængder af par, men for den førstes vedkommende er 1-komponenterne par af elementer fra A og B , for den andens er de elementer af A .

For $A \times A \times \dots \times A$ (hvor den samme mængde optræder som faktormængde n gange) bruger man også betegnelsen A^n , idet man samtidigt sætter $A^1 = A$. Mængden af koordinatsæt for punkter i rummet (efter fastlæggelse af et koordinatsystem) er således $\mathfrak{R}^3$, og denne mængde kaldes derfor (igen først efter indførelse af det sædvanlige afstands-begreb) det tredimensionale euklidiske talrum; også for $n > 3$ kaldes $\mathfrak{R}^n$ (med analogt afstands-begreb) det n -dimensionale euklidiske talrum. Vi nævner, at en vis delmængde af $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \dots \times \mathfrak{R} \times \dots$, nemlig mængden af alle de talfølger $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, for hvilke rækken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ er konvergent, kaldes det *hilbertske talrum* (efter indførelse af et med de foregående analogt afstands-begreb, som netop muliggøres af den nævnte konvergensbetingelse).

Vi får i det følgende også brug for at kunne tale om produktmængden af mængderne i et *helt vilkårligt* mængdesystem $(A_k)_{k \in K}$. Idet vi benytter den i 7 indførte terminologi, definerer vi: Den mængde, der består af alle belægninger af indexmængden K med elementer fra mængderne A_k , kaldes produktmængden af mængderne A_k og betegnes

$$\prod_{k \in K} A_k.$$

Vi bemærker straks, at produktmængden er tom, hvis og (se s. 40) kun hvis mindst én af faktormængderne (d. v. s. mængderne A_k) er det.

For $K = \{1, 2\}$, $K = \{1, 2, 3\}$, $K = \{1, 2, \dots, n\}$ og $K = \mathfrak{N}$ stemmer denne definition overens med de allerede givne definitioner på $A_1 \times A_2$, $A_1 \times A_2 \times A_3$, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ og $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \dots$; med en modifikation af den indførte betegnelse skriver man for de to sidste også

$$\prod_{k=1}^n A_k \quad \text{og} \quad \prod_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Hvis mængderne A_k alle specielt er den samme mængde A , sætter man

$$\prod_{k \in K} A_k = A^K,$$

og denne såkaldte *potensmængde* er i henhold til definitionen på $\prod_{k \in K} A_k$ mængden af samtlige belægninger af K med elementer fra A eller ifølge en bemærkning sidst i 7 simpelthen mængden af samtlige afbildninger af K ind i A . Som eksempel kan vi nævne den s. 15 og s. 40 omtalte mængde E_1 : den er mængden af alle afbildninger af T ind i I , altså potensmængden I^T .

Videre nævner vi følgende specielle tilfælde:

$$\begin{aligned} A^{(1,2)} &= A \times A = A^2, & A^{(1,2,3)} &= A \times A \times A = A^3, \\ A^{(1,2,\dots,n)} &= A \times A \times \dots \times A = A^n, \\ A^{\mathfrak{N}} &= A \times A \times \dots \times A \times \dots \end{aligned}$$

Mængden $A^{(1)}$ optræder ikke blandt disse eksempler; den vil blive behandlet i 11. Mængden $A^\emptyset$ er mængden af samtlige afbildninger af $\emptyset$ ind i A ; enhver sådan er en delmængde af $\emptyset * A$ og derfor tom, og mængden $A^\emptyset$ består da af det ene element $\emptyset$ (og er altså ikke tom): $A^\emptyset = \{\emptyset\}$.

9. Ordnete mængder. Ved en ordnet mængde forstår man anskueligt sagt en mængde udstyret med en regel, der for to vilkårlige elementer a og b af mængden fastlægger, om a i en eller anden forstand skal siges at gå *forud* for b eller ej; et velkendt eksempel har man i den sædvanlige ordning $<$ af de naturlige tal «efter størrelse». Vi skal i denne paragraf præcisere begrebet ordning nærmere under benyttelse af det allerede indførte begreb relation, idet vi lader os vejlede af, at det anskueligt må være et par væsentlige træk ved en ordning, at den er *transitiv* (hvis a går forud for b og b forud for c , så går a forud for c) og *ikke symmetrisk* med hensyn til *forskellige* elementer (to sådanne går ikke forud for hinanden, mens det bliver en definitionssag, om et element skal siges at gå forud for sig selv).

Lad der i en mængde A foreligge en relation R , altså en delmængde R af mængden $A * A$ af alle ordnede par $\langle a, b \rangle$ af elementer fra A . Vi har s. 33 formuleret den reflexive, den symmetriske og den transitive lov for en sådan relation; vi antager nu, at den betragtede relation R foruden at være reflexiv og transitiv er antisymmetrisk, d. v. s. opfylder følgende lov:

Den antisymmetriske lov: $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, a \rangle \in R \Rightarrow a = b$,

eller anderledes udtrykt:

Den antisymmetriske lov: $\langle a, b \rangle \in R, a \neq b \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R$.

Man kalder da R en *partiell, reflexiv ordningsrelation* og A en (ved R) partielt og reflexivt ordnet mængde.

Med samme betydning som $\langle a, b \rangle \in R$ bruger man ofte, når der er tale om en ordningsrelation, skrivemåden $a < b$ (hvilket læses: a går forud for b), og det med $\langle a, b \rangle \in R$ ensbetydende udsagn $\langle b, a \rangle \in R^{-1}$ skrives $b > a$ (hvilket læses: b følger efter a); tegnene $<$ og $>$ skal naturligvis minde om de velkendte tegn $<$ og $>$. Vi kan da gentage definitionen på følgende form:

En relation $<$ i en mængde A kaldes en *partiell, reflexiv ordningsrelation* og A en (ved $<$) *partielt og reflexivt ordnet mængde*, såfremt $<$ opfylder følgende love:

Den reflexive lov: $a < a$.

Den antisymmetriske lov: $a < b, b < a \Rightarrow a = b$.

Den transitive lov: $a < b, b < c \Rightarrow a < c$,

af hvilke den anden ofte med fordel formuleres således:

Den antisymmetriske lov: $a < b, a \neq b \Rightarrow b \nless a$.

Det måske mest nærliggende eksempel på en partiel, reflexiv ordningsrelation har man i relationen $\subseteq$ mellem mængder; et andet eksempel er $\supseteq$, idet det gælder alment, at hvis $<$ er en partiel, reflexiv ordningsrelation, så er den inverse relation $>$ det også. Endnu et par eksempler har man i den s. 33 nævnte »går op i«-relation mellem naturlige tal (at a går op i b , skrives iøvrigt sædvanligvis $a|b$) og dens inverse, relationen »er multiplum af«.

Det bør nævnes, at den tomme mængde og enhver singleton $\{a\}$ ordnes partielt og reflexivt ved definitionen $a < b$, hvis $a = b$, og at en ordnet mængde bestående af to elementer ikke er det samme som et ordnet par, hvis komponenter jo gerne kan være det samme element.

Den sædvanlige ordning $<$ af de naturlige tal er ikke en ordningsrelation af den betragtede type, thi den er ikke reflexiv. Vi formulerer da følgende lov for en relation R :

Den irreflexive lov: $\langle a, a \rangle \notin R$,

som vi med det samme også udtrykker ved hjælp af tegnet $<$:

Den irreflexive lov: $a \nless a$.

Og vi definerer: En relation $<$ i en mængde A kaldes en *partiel, irreflexiv ordningsrelation* og A en (ved $<$) *partielt og irreflexivt ordnet mængde*, såfremt $<$ er irreflexiv, antisymmetrisk og transitiv. Den inverse relation $>$ er i så fald også en partiel, irreflexiv ordningsrelation, og et par eksempler på sådanne ordningsrelationer har man i relationerne $\subset$ og $\supset$ mellem mængder.

De hidtil betragtede ordningsrelationer kaldes *partielle*, fordi der i A kan være elementer, som de slet ikke bringer i forbindelse med hinanden. Det kan jo således for to mængder M og N meget vel indtræffe, at der hverken gælder $M \subseteq N$ eller $N \subseteq M$ (eller: hverken $M \subset N$ eller $N \subset M$), ligesom det for to naturlige tal a og b kan hænde, at der hverken gælder $a|b$ eller $b|a$. Blandt de partielle ordningsrelationer findes endog relationer, der slet ikke fornemmes som ordnende: en vilkårlig mængde ordnes partielt og reflexivt ved definitionen: $a < b$, hvis $a = b$.

Vi opstiller da endnu en lov:

Den konnektive lov: $a \neq b \Rightarrow \langle a, b \rangle \in R$ eller $\langle b, a \rangle \in R$,

eller i en anden formulering:

Den konnektive lov: $\langle a, b \rangle \notin R, a \neq b \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$.

Vi opskriver også straks begge formuleringer ved hjælp af tegnet $<$:

Den konnektive lov: $a \neq b \Rightarrow a < b$ eller $b < a$.

Den konnektive lov: $a \nless b, a \neq b \Rightarrow b < a$.

Or vi definerer: En relation $<$ i en mængde A kaldes en *total, reflexiv (henholdsvis irreflexiv) ordningsrelation* og A en (ved $<$) totalt og reflexivt (irreflexivt) ordnet mængde, såfremt $<$ er reflexiv (irreflexiv), antisymmetrisk, transitiv og konnektiv. Den inverse relation $>$ er i så fald også en total, reflexiv (irreflexiv) ordningsrelation, og eksempler på sådanne ordningsrelationer har man i relationerne $\leq$ og $\geq$ ($<$ og $>$) mellem naturlige tal eller lige så godt mellem hele, rationale eller reelle tal.

Vi nævner endnu nogle eksempler: Den ovenfor omtalte ordning af den tomme mængde eller en singleton er en total, reflexiv ordning.¹ Mængden af punkter på en orienteret, ret linie er netop ved orienteringen en totalt, irreflexivt ordnet mængde. Mængden af punkter i en plan kan også ordnes totalt og irreflexivt: Planen forsynes med et retvinklet koordinatsystem, og for to punkter P_1 og P_2 med koordinatsættene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) sætter man

$$P_1 < P_2, \text{ hvis } x_1 < x_2 \quad \text{eller} \quad \text{hvis } x_1 = x_2, y_1 < y_2.$$

Efter det samme princip er opslagsordene i et lexikon ordnet, og en sådan ordning kaldes derfor *lexikografisk*. En anden lexikografisk ordning af planens punkter kan man få ved at benytte et polært koordinatsystem, og iøvrigt ses det at gælde almindeligt, at produktmængder som $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ og $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times \dots$ kan ordnes lexikografisk, hvis mængderne A_k er ordnede mængder.

Det bemærkes, at en total ordningsrelation efter de her givne definitioner også er partiel; dette kan man, om man ønsker det, undgå ved i definitionen på en partiel ordningsrelation yderligere at forlange, at den betragtede relation ikke er konnektiv.

Undertiden ser man følgende love optræde i ordningsrelationernes definitioner:

Den asymmetriske lov: $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R$.

Den stærkt konnektive lov: $\langle a, b \rangle \in R$ eller $\langle b, a \rangle \in R$,

af hvilke den sidste ofte formuleres således:

Den stærkt konnektive lov: $\langle a, b \rangle \notin R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$.

Udtrykt ved hjælp af tegnet $<$ lyder de to love således:

Den asymmetriske lov: $a < b \Rightarrow b \nless a$.

Den stærkt konnektive lov: $a < b$ eller $b < a$,

eller den sidste lige så godt således:

Den stærkt konnektive lov: $a \nless b \Rightarrow b < a$.

¹ Sætter man i stedet $a < b$, hvis $a \neq b$, får man en total, irreflexiv ordning.

Der er imidlertid intet nyt i disse love, idet asymmetri er ensbetydende med irreflexivitet og antisymmetri, og stærk konnektivitet med reflexivitet og konnektivitet. Ved beviserne for disse og lignende påstande kan man med fordel tænke på grafen G af den pågældende relation R , idet man særligt hæfter sig ved grafens »beliggenhed« i forhold til diagonalen D i A^2 , d. v. s. mængden $D = \{(a, a) \mid a \in A\}$; således er R reflexiv eller irreflexiv, eftersom $D \subseteq G$ eller $D \cap G = \emptyset$.

Lad os bemærke, at der, som man kunne vente, til enhver irreflexiv ordningsrelation findes en nærtbeslægtet reflexiv: Hvis $<$ er en partiel (total), irreflexiv ordningsrelation, så er $\leq$ (læs: går forud for eller er lig med) en partiel (total), reflexiv ordningsrelation, og analogt går det naturligvis for $>$ og $\geq$.

I det følgende vil vi, når andet ikke siges, ved en ordning forstå den mest specielle af de fire muligheder, nemlig en *total*, *irreflexiv* ordningsrelation.

Til afslutning nævner vi, at den samme mængde oftest kan ordnes på mange forskellige måder. Lad os for eksempel anføre nogle forskellige ordninger (der alle er totale og irreflexive) af $\mathfrak{N}$, idet vi på anskuelig måde opstiller elementerne i $\mathfrak{N}$ i rækkefølge i henhold til de pågældende ordninger.

Først den sædvanlige ordning:

$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

og dens inverse:

$$\dots, n, \dots, 4, 3, 2, 1,$$

og dernæst tre ordninger, som dannes ved en opdeling af $\mathfrak{N}$ i lige og ulige tal:

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots; 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots,$$

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots; \dots, 2n, \dots, 8, 6, 4, 2,$$

$$\dots, 2n, \dots, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots,$$

og endelig ordningen:

$$1, 3, 6, 10, \dots; 2, 5, 9, 14, \dots; 4, 8, 13, 19, \dots; 7, 12, 18, 25, \dots; \dots,$$

som er konstrueret ved hjælp af dette skema:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & \dots \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & 2 & & 5 & & 9 & & 14 & & 20 & \dots \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & 4 & & 8 & & 13 & & 19 & & 26 & \dots \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & 7 & & 12 & & 18 & & 25 & & 33 & \dots \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & 11 & & 17 & & 24 & & 32 & & 41 & \dots \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \dots
 \end{array}$$

hvis tilblivelseshistorie kan ses af pilene; ideen i denne metode skyldes Cauchy.

I næste paragraf skal vi beskæftige os med en særlig type ordninger, de såkaldte velordninger. Vi nævner med det samme, at af de her anførte seks ordninger af $\mathfrak{N}$ er den første, den tredje og den sjette velordninger og de øvrige ikke.

10. Velordnede mængder. Hvis der i en delmængde $B \neq \emptyset$ af en ordnet mængde A findes et element, som ved den pågældende ordning går forud for ethvert andet element i B , siges B at have dette element som sit *første element*. Hvis enhver delmængde $B \neq \emptyset$ af den ordnede mængde A har et første element, kaldes A en *velordnet* mængde; den tomme mængde kaldes også velordnet. Det bør nævnes, at begrebet en velordnet mængde skyldes Cantor.

Mængden $\mathfrak{N}$ af naturlige tal er som ovenfor nævnt velordnet ved den sædvanlige ordning $<$, hvorimod dette ikke gælder for mængderne $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Q}$ og $\mathfrak{R}$; thi som eksempler på delmængder, der ikke indeholder noget første element, kan vi nævne henholdsvis

$$\{0, -2, -4, \dots\}, \{a \mid 0 < a < 1, a \in \mathfrak{Q}\} \quad \text{og} \quad \{a \mid 0 < a < 1, a \in \mathfrak{R}\}.$$

Iøvrigt kunne den første af de tre nævnte mængder (lige så vel som $\mathfrak{Z}$ selv) have været brugt i alle tre tilfælde.

Som et eksempel på en ved den sædvanlige ordning $<$ velordnet mængde af rationale tal kan man nævne mængden

$$\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots; 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \dots; 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{3}{4}, \dots; \dots\}.$$

En velordnet mængde A opstillet »i rækkefølge« vil altid få et udseende af denne type, thi den har (som delmængde af sig selv) et første element a_1 , differensmængden $A \setminus \{a_1\}$ har et første element a_2 , differensmængden $A \setminus \{a_1, a_2\}$ har et første element a_3 , ...; videre har differensmængden $A \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$ et første element b_1 , ...; ... o.s.v., så længe de nævnte differensmængder ikke er tomme.

Der rejser sig naturligt det spørgsmål, om man ved at vælge en *anden* ordning af f. ex. mængden $\mathfrak{Z}$ kan opnå at få den velordnet. Svaret på dette spørgsmål er bekræftende, thi følgen

$$(0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots)$$

indeholder tydeligvis ethvert element af $\mathfrak{Z}$ netop én gang, og sætter man nu $a < b$, hvis a står før b i denne følge, har man en velordning af $\mathfrak{Z}$.

Også $\mathfrak{Q}$ kan velordnes: Man opskriver skemaet

	1	2	3	4	5	6	...
↖	↗	↗	↗	↗	↗		
↖	1	2	3	4	5	6	
↖	2	2	2	2	2	2	...
↖	1	2	3	4	5	6	
↖	3	3	3	3	3	3	...
↖	1	2	3	4	5	6	
↖	4	4	4	4	4	4	...
↖	1	2	3	4	5	6	
↖	5	5	5	5	5	5	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	,

i hvilket ethvert positivt rationalt tal optræder i enhver af sine brøksfremstillinger. Skemaet gennemløbes nu efter de angivne pile, idet man dog begynder med tallet 0 og efter hvert tal indføjer dets modsatte og iøvrigt kun tager et tal med, den første gang man møder det. Derved fremkommer følgen

$(0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 4, -4, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 5, -5, \dots)$,

der indeholder ethvert element af $\mathfrak{Q}$ netop én gang. Den anvendte fremgangsmåde kaldes Cantors første diagonalmetode (ideen i den går som nævnt s. 48 tilbage til Cauchy), og man får en velordning af $\mathfrak{Q}$, når man sætter $a < b$, hvis a står før b i denne følge.

Det bemærkes udtrykkeligt, at de anførte velordninger af $\mathfrak{S}$ og $\mathfrak{Q}$ er af særligt enkel karakter: vi har i begge tilfælde stillet elementerne af den pågældende mængde op i en *følge* og derved fået velordninger af samme type som den, man får for $\mathfrak{N}$ ved anvendelse af den sædvanlige ordning $<$. Vi skal senere bevise, at der eksisterer mængder, der indeholder »for mange« elementer, til at disse kan stilles op i en følge; så meget mere overraskende er det måske, at man kan bevise følgende sætning:

SÆTNING 10.1. *Enhver mængde kan velordnes.*

Denne fundamentale sætning, den såkaldte *velordningssætning*, er opstillet af Cantor som en »uundgåelig nødvendighed af rent logisk karakter«. Den tankegang, som ligger bag ved denne påstand, kan refereres således:

Lad der være forelagt en mængde $A \neq \emptyset$. Vi vælger et element $a_1 \in A$, derefter et element $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ (hvis denne mængde ikke er tom), derefter et element $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ og så fremdeles. Hvis vi på denne måde har fået udvalgt en hel følge $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ af forskellige elementer,

og mængden $A \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ ikke er tom, vælger vi af den et element b_1 ; af mængden $A \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots; b_1\}$ vælger vi (hvis den ikke er tom) et element b_2 o. s. v., eventuelt en hel følge til og endnu en; ja, en følge af følger, en følge af følger af følger om muligt o. s. v. o. s. v., og ved at fortsætte således får man A brugt op.

Idet vi nu for to elementer p og q af A sætter $p < q$, hvis p er blevet udvalgt før q , har vi etableret en velordning af A .

Mod dette ræsonnement kan der rettes forskellige indvendinger; først og fremmest kan man have betænkeligheder ved de stadigt gentagne valg handlinger, og desuden er det ikke ganske klart, at A virkelig bliver brugt op, og at der fremkommer en velordning. Det lykkedes i 1904 E. Zermelo ved hjælp af det bl. a. af ham selv opstillede udvalgs-axiom at føre et strengt bevis for velordningssætningen. Vi vil skitsere hans bevis i en formulering, der benytter udvalgsaxiomet i den skikkelse, som vi tidligere (s. 40) har haft med at gøre, og som skyldes Russel (1907) og Zermelo (1908). Beviset er bygget over den ovenfor gennemførte løsere betragtning.

Lad $(A_k)_{k \in K}$ være mængden af alle delmængder af den givne mængde A , og lad k_0 være det element af indexmængden K , for hvilket $A_{k_0} = A$. Idet vi sætter $L = K \setminus \{k_0\}$, er $(A_k)_{k \in L}$ altså mængden af alle ægte delmængder af A . Vi har da, at $A \setminus A_k \neq \emptyset$ for ethvert $k \in L$, og udvalgsaxiomet siger nu netop, at der findes en belægning af L med elementer fra mængderne $A \setminus A_k$, $k \in L$, altså en afbildning, der til ethvert element $k \in L$ knytter et bestemt element $a_k \in A \setminus A_k$. Sagt på en anden måde: Til enhver ægte delmængde A_k af A har vi fået knyttet et element $a_k \in A$, som *ikke* tilhører A_k .

En mængde S af delmængder af A kaldes en *kæde*, hvis det gælder, at

$$(10.1) \quad A_k \in S, k \in L \Rightarrow A_k \cup \{a_k\} \in S,$$

og (for en vilkårlig delmængde M af K), at

$$(10.2) \quad A_k \in S \text{ for ethvert } k \in M \Rightarrow \bigcup_{k \in M} A_k \in S.$$

(Det bemærkes, at (10.1) i overvejelserne ovenfor svarer til, at man går fra et element i en følge til det næste, mens (10.2) svarer til, at man tager fat på en ny følge.) Mængden af alle kæder er ikke tom, thi mængden af *alle* delmængder af A er en kæde. Lad nu T være *fællesmængden* af alle kæder; T er altså mængden af netop de delmængder af A , som findes i enhver kæde.

T er selv en kæde (og altså i en vis forstand den mindst omfattende), thi af $A_k \in T$, $k \in L$ følger det, at $A_k \in S$ for enhver kæde S og dermed

ifølge (10.1), at $A_k \cup \{a_k\} \in S$ for enhver kæde S , altså $A_k \cup \{a_k\} \in T$; og af $A_k \in T$ for ethvert $k \in M$ følger det, at $A_k \in S$ for ethvert $k \in M$ for enhver kæde S og dermed ifølge (10.2), at $\bigcup_{k \in M} A_k \in S$ for enhver kæde S , altså $\bigcup_{k \in M} A_k \in T$.

Foreningsmængden B af alle mængderne i kæden T er en delmængde af A ; vi vil vise, at $B = A$. Af (10.2) får vi, at $B \in T$, og vi antager nu, at B er en ægte delmængde af A . Af (10.1) får vi da, idet vi med b betegner det til B knyttede element af $A \setminus B$, at $B \cup \{b\} \in T$. Ifølge definitionen på B er mængden $B \cup \{b\}$ som element af kæden T en delmængde af B , og derfor er b et element af B i strid med, at det som lige nævnt er et element af $A \setminus B$. Antagelsen $B \subset A$ fører altså til en modstrid, og da som nævnt $B \subseteq A$, har vi $B = A$.

Ethvert element af A findes derfor i mindst én af mængderne i kæden T , og for vilkårlige elementer p og q af A sætter vi nu $p < q$, hvis der findes en mængde $C \in T$, således at $p \in C$ og $q \notin C$. Det er nu muligt at bevise, at den herved definerede relation $<$ er irreflexiv, antisymmetrisk, transitiv og konnektiv, altså at den er en ordningsrelation for A , og endvidere, at denne ordning er en velordning af A . Beviserne volder ingen principielle vanskeligheder, men er forholdsvis omstændelige, og vi vil derfor lade os nøje med det allerede udviklede. Vi har altså vist, hvorledes man tilvejebringer velordningen af A med ét slag i stedet for ved den ovenfor omtalte, noget tvivlsomme opbygning skridt for skridt; men vi gennemfører ikke nogen påvisning af, at der virkelig er kommet en velordning ud af det.

Det skal til sidst nævnes, at man også kan gå den modsatte vej: Man kan bevise, at hvis enhver mængde kan velordnes, så gælder udvalgsaksiomet. Disse to vigtige udsagn er altså *ensbetydende*.

Det er måske også på sin plads at angive Zermelos oprindelige formulering af udvalgsaksiomet: Til enhver mængde af ikke tomme, parvis disjunkte mængder findes en mængde, der består af netop ét element af hver af disse mængder. Dette kan vises at være ensbetydende med den formulering, vi her har brugt.

(Fortsættes i næste hefte.)

OM EN SATS FRA KOMBINATORIKKEN

HELGE TVERBERG

Vi skal i det følgende gi et nytt bevis for en enkel, men morsom kombinatorisk sats som først ble vist av Philip Hall [2]. La oss tenke oss at det er gitt n endelige, ikke tomme mengder $M_1, M_2, \dots, M_n$, med henholdsvis $k_1, k_2, \dots, k_n$ elementer. Når er det mulig å *velge ut ett element fra hver mengde slik at de utvalgte elementer alle er forskjellige*? — De utvalgte elementer sies da å danne et *representantsystem*.

La f. eks. mengdene være

$$M_1 = \{a, b\}, M_2 = \{b, c\}, M_3 = \{a, b\}, M_4 = \{a, b, c\}, M_5 = \{a, b, c, d, e\}.$$

Prøver en seg frem her, vil en finne at et utvalg som nevnt ikke er mulig. Grunnen til det er svært enkel å innse. Danner en nemlig mengden¹ $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 = \{a, b, c\}$, så inneholder den bare *tre* elementer. Vi skjønner at vi får følgende betingelse i alminnelighet:

(B) *Enhver union av k mengder blant de n gitte må inneholde minst k elementer.*

Satsens innhold er nå at denne betingelsen, som altså er *nødvendig* for eksistensen av et representantsystem, også er *tilstrekkelig*.

Ideen i det nye beviset er følgende: I stedet for å prøve å velge representantene en for en, prøver en å *sjalte ut* elementer ett for ett, slik at til slutt blir bare representantsystemet stående igjen. Det eneste en da har å passe på når en stryker et element, er at (B) fremdeles er oppfylt for de mengdene en har etter strykningen. Når en først har valgt å bruke denne ideen, følger beviset nesten automatisk.

Etter de forangående bemerkninger er det opplagt at beviset må føres ved *induksjon*, ikke etter n , men etter summen $k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Når denne er $= 1$, er satsen opplagt riktig, og vi kan altså anta at summen er > 1 .

La x være et vilkårlig element som hører til f. eks. M_1 . Hvis mengdene $M_1 - \{x\}, M_2, \dots, M_n$ hadde et representantsystem, ville det kunne

¹ Lesere som ikke er fortrolige med symbolikken vil finne denne nærmere beskrevet i Heiede og Helms' artikkel «Om mængdelære og transfinite kardinaltal» i denne årgang av NMT.

brukes også for mengdene $M_1, M_2, \dots, M_n$. Vi kan derfor anta at $M_1 - \{x\}, M_2, \dots, M_n$ ikke har noe representantsystem, og får da av induksjonshypotesen at (B) ikke er oppfylt for disse mengder. Det vil si at $(M_1 - \{x\}) \cup M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_k}$ bare har k elementer for et visst valg av indekser $i_1, i_2, \dots, i_k$. Da våre opprinnelige mengder oppfyller (B), må $M_1 \cup M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_k}$ ha minst $k+1$ elementer. Det vil si at x ikke kan høre til noen av mengdene $M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_k}$, og at $M_1 - \{x\} \subset M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_k}$.

Hvis nå M_1 var den eneste mengden x hørte til, ville et representantsystem for $M_2, M_3, \dots, M_n$, som eksisterer ifølge induksjonshypotesen, kunne kompletteres med x og gi det representantsystem vi søker. Altså kan vi anta at x også er element i f. eks. M_2 . Som ovenfor finner vi da mengder $M_{j_1}, M_{j_2}, \dots, M_{j_l}$ som ikke inneholder x og som er slik at $M_2 - \{x\} \subset M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \dots \cup M_{j_l}$. Vi kan anta at indeksene $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l$ er tallene $3, 4, \dots, m$. Mengdene $M_1, M_2, M_3, \dots, M_m$ kan da ikke ha noe representantsystem, for de k elementene som $(M_1 - \{x\}) \cup M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_k}$ inneholder måtte i så fall brukes til å representere de k siste av disse mengder, og x måtte brukes til å representere M_1 . Likedan kan en slutte at x også måtte representere M_2 , og dette er jo ikke mulig.

Siden $M_1, M_2, \dots, M_m$ ikke har noe representantsystem, mens (B) tydeligvis er oppfylt, må $m=n$ (igjen bruker vi induksjonshypotesen). Det vil si: Hvert element x må forekomme i akkurat to av mengdene $M_1, M_2, \dots, M_n$. Videre vil hver av mengdene ha minst to elementer, for hvis f. eks. $M_1 = \{x\}$, ville $M_1 \cup M_2 \cup M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \dots \cup M_{j_l}$ ha bare $l+1$ elementer, i strid med (B). Nå har $M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_k}$ akkurat k elementer. Hvert av disse hører til høyst to av disse mengdene, og hver av disse mengdene består av minst to elementer. Da må hver av mengdene bestå av akkurat to elementer, og hvert element må tilhøre akkurat to av mengdene.

Vi har vist at M_1 inneholder minst to elementer, altså et $y \neq x$. Da må y høre til $M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_k}$, men det ville si at y hørte til minst tre av mengdene $M_1, M_2, \dots, M_n$, i strid med det vi har vist tidligere. Dermed er beviset fullført.

Det fins flere varianter av denne satsen; en ypperlig fremstilling av disse, med eksempler, finner en i [1]. En variant ble bevist av den ungarske matematiker König allerede i 1916 [3] og brukt av ham til å bevise følgende resultat: Elementene i en kvadratisk n 'te ordens matrise oppfyller betingelsene

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

Videre er alle $a_{ij} \geq 0$. Da vil minst ett av utviklingsleddene i determinanten $|a_{ij}|$ være $\neq 0$.

Til bevis definerer vi mengdene M_i , $i = 1, 2, \dots, n$, slik: M_i består av de tall j for hvilke elementet $a_{ij} > 0$. Anta nå at (eventuelt etter passende søyle-ombyttinger) $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k = \{1, 2, \dots, l\}$. Da vil

$$k = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_{ij} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k a_{ij} \leq \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n a_{ij} = l.$$

I stedet for de k første rekker kunne en velge k vilkårlige. Det vil si at mengdene $M_1, M_2, \dots, M_n$ oppfyller betingelsen i Halls sats, og vi har et system av distinkte representanter $j_1, j_2, \dots, j_n$ for mengdene $M_1, M_2, \dots, M_n$. Men det vil nettopp si at $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ er en permutasjon av $(1, 2, \dots, n)$, og at utviklingsleddet som svarer til denne permutasjonen har alle sine faktorer $\neq 0$.

Vi har ovenfor gitt bare den »endelige« versjonen av Halls sats. Vi forutsatte at antallet mengder var endelig, lik n , men satsen gjelder også i tilfellet uendelig mange endelige mengder. Det er klart ut fra resonnementene vi har ført ovenfor at dersom vi har en vilkårlig familie av mengder, og (B) er oppfylt (merk i denne forbindelse at tallet k i (B) fremdeles antas å være endelig), så vil vi alltid, dersom ikke alle mengdene inneholder akkurat ett element, kunne fjerne et element fra en av mengdene slik at (B) fremdeles er oppfylt. Er en fortrolig med Zorns lemma fra mengdelæren, faller det etter dette ikke noe vanskelig å fullføre beviset. Er en ikke fortrolig med Zorns lemma, bør en prøve å forestille seg at en kan fjerne ett og ett element »uendelig mange ganger«, inntil hver av de mengdene en startet med er redusert til ett element.

Tilføyet av forfatteren under korrekturen:

Det påståtte nye beviset er dessverre ikke nytt likevel. Hovedideen i det er brukt av C. J. Everett og G. Whaples: *Representations of sequences of sets*, Am. Jour. of Math. 71 (1949), pp. 287–293.

LITTERATUR

- [1] M. HALL: *A survey of combinatorial analysis*, i boken: *Some aspects of analysis and probability*, New York 1958.
- [2] PH. HALL: *On representatives of subsets*. J. London Math. Soc. 10 (1935), pp. 26–30.
- [3] D. KÖNIG: *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*. Math. Ann. 77 (1916), pp. 453–465.

OM MYNTVÄXLING

GUNNAR BLOM och CARL-ERIK FRÖBERG

Inledning. En journalist vid en kvällstidning ringde nyligen till universitetet i Lund och frågade på hur många sätt man kan växla en tia. Författarna till denna artikel hörde härom och löste problemet oberoende av varandra, varvid den ene (med hjälp av papper och penna och diverse approximationer) erhöll värdet ca. 260 miljoner, medan den andre (med hjälp av SMIL) erhöll resultatet 266 016 628.

Problemet har förmodligen ställts otaliga gånger förut och antagligen även lösts många gånger (ett exempel härpå erbjuder Schuberts klassiska *Mathematische Mussestunden*, del I, 1:a uppl. 1897, flera följ. upplagor, där flera resultat ges liknande dem som återges i vår Tabell 2). I uppsatsen skall vi lämna en översikt över vad som går att åstadkomma med enkla medel. I avd. 1 återges kända resultat, medan avd. 2 och 3 torde innehålla en del nya ting.

Till professor Selmer, som omsorgsfullt granskat manuskriptet och framfört en rad värdefulla synpunkter, riktar vi ett varmt tack.

1. Allmänna resultat i exakt form.

1.1. Problemet. Låt oss beteckna myntenheterna med $a_1, a_2, a_3, \dots$ och det givna beloppet med n . Problemet är att bestämma på hur många olika sätt detta belopp kan växlas med hjälp av de m lägsta myntsorterna. Det sökta antalet betecknar vi med $D(m, n)$. Tydligt är detta lika med antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen

$$(1) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = n.$$

Med talteoretisk terminologi kan man säga att $D(m, n)$ är antalet partitioner av n i de givna delarna $a_1, a_2, \dots, a_m$. Sylvester införde termen *denumerant* för ett dylikt antal. Vi skall emellertid helt enkelt kalla $D(m, n)$ för *antalet växlingar*.

Vi definierar $D(m, 0) = 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) och $D(0, n) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). I $D(m, n)$ inräknas det fall att ingen växling äger rum. Enligt

denna konvention kan alltså beloppet 1 öre växlas i 1-öringar på ett sätt, beloppet 2 öre växlas i 1- och 2-öringar på två sätt, osv. Vi säger att myntsorterna är *multiplikativa*, om varje a_m är en hel multipel av a_{m-1} . Myntsorterna 1, 2, 10, 50, 100 är alltså multiplikativa, däremot inte 1, 2, 5, 10, 25. Ett specialfall av de multiplikativa myntsorterna utgör de *binära*, dvs. 1, 2, 4, 8, 16, ...

1.2. Genererande funktionen för $D(m, n)$. Låt $\varphi_m(t)$ vara genererande funktionen för sviten $D(m, n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), dvs.

$$\varphi_m(t) = \sum D(m, n) t^n.$$

Man inser lätt att

$$(2) \quad \varphi_m(t) = \{(1-t^{a_1})(1-t^{a_2}) \dots (1-t^{a_m})\}^{-1}.$$

Problemet är härmed på sätt och vis redan löst; man har bara att beräkna koefficienten för t^n i detta uttryck och får då $D(m, n)$. Eller annorlunda uttryckt: det är just detta problemet gäller.

1.3. En rekursionsformel. Det förefaller naturligt att beräkna $D(m, n)$ rekursivt genom att börja med myntet a_1 och sedan lägga till en ny myntsort i taget. Man kan därvid använda den grundläggande rekursionsformeln

$$(3) \quad \begin{aligned} D(m, n) = & D(m-1, n) + D(m-1, n-a_m) + D(m-1, n-2a_m) \\ & + D(m-1, n-3a_m) + \dots \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

där summationen fortsätter så länge $n - ia_m$ är *positivt eller noll*. Denna formel följer av uttrycket för $\varphi_m(t)$ eller direkt på följande sätt. Om beloppet n skall växlas, kan myntet a_m tänkas ingå 0 gånger, 1 gång, 2 gånger, osv. Det återstående beloppet, dvs. resp. $n, n-a_m, n-2a_m, \dots$ skall sedan växlas i de övriga mynten $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$, vilket kan ske på resp. $D(m-1, n), D(m-1, n-a_m), D(m-1, n-2a_m), \dots$ sätt. Den angivna proceduren blir tidsödande, om den skall utföras för hand, men kan naturligtvis utan svårighet genomföras med hjälp av en snabb siffermaskin. — Om speciellt n är en multipel av högsta myntsorten a_m , kan (3) skrivas

$$(4) \quad D(m, ka_m) = \sum_{i=0}^k D(m-1, ia_m).$$

1.4. Explicita uttryck för antalet växlingar. Att ange ett explicit uttryck för $D(m, n)$ i $a_1, a_2, \dots, a_m$ och n är tyvärr inte möjligt utom i speciella fall (vi bortser därvid från uttryck innehållande den genererande

funktionen). Det allmännaste resultat man känner i den vägen är följande sats som bevisades 1943 av Bell [2] men som nog varit åtminstone delvis bekant tidigare. Låt d_m vara den minsta gemensamma dividenden till $a_1, a_2, \dots, a_m$. Då gäller följande:

Antalet växlingar av beloppet

$$(5) \quad n = kd_m + e_m \quad (0 \leq e_m < d_m)$$

är ett polynom i k av graden $m-1$ vars koefficienter beror av $a_1, a_2, \dots, a_m$ och e_m men ej av k .

Vi skriver detta polynom så:

$$(6) \quad D(m, kd_m + e_m) = c_0 + c_1 \binom{k}{1} + c_2 \binom{k}{2} + \dots + c_{m-1} \binom{k}{m-1}.$$

Om $e_m = 0$ har man alltid $c_0 = 1$. Under förutsättning att $a_1 = 1$ gäller vidare, som vi skall se i 2.3:

$$(7) \quad c_{m-1} = \frac{d_m^{m-1}}{a_1 a_2 \dots a_m}.$$

Vi kallar (6) för *Bells formel*.

För att bestämma koefficienterna $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ har man åtminstone två möjligheter.

METOD 1. Polynomet härledes direkt med ledning av rekursionsformeln (3). Detta går relativt lätt för små värden på m , men metoden blir ohanterlig för större m .

EXEMPEL. Antag att $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$ och $e_m = 0$. Vi skall då beräkna $D(3, 10k)$.

Steg 1: Genom direkt räkning finner man genast $D(2, 2k) = k + 1$ och $D(2, 2k - 1) = k$.

Steg 2: För $m = 3$ ger rekursionsformeln relationen

$$D(3, 10k) = D(2, 10k) + D(2, 10k - 5) + \dots + D(2, 0).$$

Enligt steg 1 blir detta lika med

$$(5k + 1) + (5k - 2) + (5k - 4) + (5k - 7) + \dots = 5k^2 + 4k + 1 = 1 + 9 \binom{k}{1} + 10 \binom{k}{2}.$$

METOD 2. Vänstra membrum i (6) beräknas numeriskt för $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, varefter koefficienterna $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ erhålles genom lösning av ett lineärt ekvationssystem. Med en elektronisk siffermaskin till sitt förfogande finner man, att metod 2 i allmänhet är att föredraga.

Mest som kuriositet anföres i Tabell 1 och 2 några exakta resultat i vårt vanliga myntsystem. I Tabell 1 ges antalet växlingar av alla mynt upp till 10 kronor, varvid bör observeras att den identiska växlingen är inräknad.

Tabell 1.

Antal växlingar i vanligt myntsystem.

Belopp	2	5	10	25	50	100	200	500	1000
Växlingar	2	4	11	65	407	3954	61985	5167237	266016629

I Tabell 2 ges koefficienterna c_i i Bells formel vid växling av hela multipler av myntsorterna. Även här bör observeras, att den identiska växlingen i förekommande fall är medräknad.

Tabell 2.

Koefficienter i BELLS formel vid växling i vanligt myntsystem.

(Med t. ex. beteckningen 1-10 avses myntsorterna 1, 2, 5, 10.)

Myntsorter	Belopp	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
1	k	1						
1-2	$2k$	1	1					
1-5	$10k$	1	9	10				
1-10	$10k$	1	10	19	10			
1-25	$50k$	1	405	2735	4825	2500		
1-50	$50k$	1	406	3140	7560	7325	2500	
1-100	$100k$	1	3953	54077	213505	360580	277200	80000

Om beloppen inte är hela multipler av k , modifieras koefficienterna. Den högsta koefficienten förblir dock oförändrad. Vi ger två exempel härpå: Vid växling av beloppen $50k+1$ resp. $50k+2$ i myntsorterna 1-25 finner man för $c_0, c_1, \dots, c_4$ värdena 1, 426, 2805, 4875, 2500 resp. 2, 453, 2880, 4925, 2500.

2. Allmänna resultat i approximativ form.

2.1. Allmänt. Det har förut nämnts att man inte känner några allmänna explicita uttryck för $D(m, n)$. Däremot existerar det flera olikheter som har generell giltighet. Vi skall här ange endast några av de enklaste resultaten av detta slag. Det är alltså ej tal om att åstadkomma så precisa olikheter som möjligt; då behövs andra hjälpmedel än dem som här begagnas. — I hela avdelningen antages att den lägsta myntsorten a_1 är 1, vilket inte är någon väsentlig inskränkning.

I 2.2 bevisas ett förberedande lemma. I 2.3 bevisas en enkel men tämligen grov olikhet, som sedan förbättras i 2.4.

2.2. Ett lemma. Vi skall bevisa ett lemma, som är besläktat med Euler-Maclaurins summationsformel. Sätt

$$f_k(x) = \sum_{v=0}^{\infty} (x-v)^k$$

där k är ett positivt helt tal och där summationen fortsättes så länge $x-v \geq 0$.

LEMMA. För varje $x \geq 0$ gäller

$$(8) \quad \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} \leq f_k(x) \leq \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \frac{kx^{k-1}}{8}.$$

BEVIS. Vi visar först att olikheten är sann för $k=1$. Sätt $x-[x]=\delta$, där alltså $0 \leq \delta < 1$. Antalet termer i $f_1(x)$ är $[x]+1=x+1-\delta$, så att

$$f_1(x) = x + (x-1) + \dots + \delta = \frac{1}{2}(x+\delta)(x+1-\delta) = \frac{1}{2}x(x+1) + \frac{1}{2}\delta(1-\delta).$$

Härav inses att

$$\frac{1}{2}x(x+1) \leq f_1(x) \leq \frac{1}{2}x(x+1) + \frac{1}{8},$$

vilket visar att (8) håller för $k=1$.

Vi antar nu att (8) är sann för $k-1$ ($k > 1$) och skall visa att den i så fall är sann även för k . Sätt

$$g_k(x) = f_k(x) - \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^k}{2}.$$

Om man deriverar i avseende på x finner man lätt

$$g'_k(x) = kg_{k-1}(x).$$

Eftersom (8) antogs vara sann för $k-1$ är $g_{k-1}(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$, och följaktligen $g'_k(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$. Men $g_k(0)=0$; alltså är $g_k(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$, dvs. första hälften av olikheten håller för k . Analogt bevisas att

$$h_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \frac{kx^{k-1}}{8} - f_k(x) \geq 0,$$

så att även andra hälften av (8) är sann.

2.3. Olikhet A. Om $m \geq 1$ gäller

$$(A) \quad \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{n^{m-1}}{a_1 a_2 \dots a_m} \leq D(m, n) \leq \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{(n+\Delta_m)^{m-1}}{a_1 a_2 \dots a_m},$$

där $\Delta_1=0$, $\Delta_2=a_2$ och $\Delta_m=a_2+\frac{1}{2}(a_3+\dots+a_m)$ för $m \geq 3$.

BEVIS. Av lemmat i 2.2 följer att för varje $x \geq 0$ och $k \geq 1$ gäller

$$(9) \quad \frac{x^{k+1}}{k+1} \leq x^k + (x-1)^k + (x-2)^k + \dots \leq \frac{(x+\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1},$$

ty högra medlemmen i olikheten (8) innehåller precis de tre första termerna av binomialutvecklingen för högra medlemmen i (9).

Vi använder ett induktionsbevis. (A) håller för $m=1$, ty gränserna blir då 1, och vi har ju $D(1, n)=1$. Olikheten håller även för $m=2$, ty det är lätt att se direkt — eller med hjälp av rekursionsformeln (3) — att

$$\frac{n}{a_2} \leq D(2, n) \leq \frac{n}{a_2} + 1 = \frac{n+a_2}{a_2} = \frac{n+\Delta_2}{a_2},$$

vilket är just vad olikheten utsäger.

Vi antar nu, att (A) är sann för $m \geq 2$ och skall bevisa att den då håller även för $m+1$. Enligt (3) gäller

$$(10) \quad D(m+1, n) = D(m, n) + D(m, n-a_{m+1}) + D(m, n-2a_{m+1}) + \dots$$

Användes undre gränsen i (A) på varje term i högra medlemmen erhålles

$$(11) \quad D(m+1, n) \geq \frac{\sum_i (n-ia_{m+1})^{m-1}}{(m-1)! a_1 a_2 \dots a_m}.$$

Tages $x=n/a_{m+1}$ och $k=m-1$ i första hälften av olikheten (9), får man

$$\sum_i (n-ia_{m+1})^{m-1} = a_{m+1}^{m-1} \sum_i \left(\frac{n}{a_{m+1}} - i \right)^{m-1} \geq \frac{a_{m+1}^{m-1}}{m} \left(\frac{n}{a_{m+1}} \right)^m = \frac{n^m}{ma_{m+1}},$$

varav genom insättning i (11):

$$D(m+1, n) \geq \frac{n^m}{m! a_1 a_2 \dots a_{m+1}}.$$

Undre gränsen i (A) håller alltså för m ersatt med $m+1$, såsom skulle visas.

På motsvarande sätt bevisas att, om man i den övre gränsen i (9) tager $x=(n+\Delta_m)/a_{m+1}$ och $k=m-1$,

$$\begin{aligned} \sum_i (n+\Delta_m-ia_{m+1})^{m-1} &= a_{m+1}^{m-1} \sum_i \left(\frac{n+\Delta_m}{a_{m+1}} - i \right)^{m-1} \\ &\leq \frac{a_{m+1}^{m-1}}{m} \left(\frac{n+\Delta_m}{a_{m+1}} + \frac{1}{2} \right)^m = \frac{(n+\Delta_{m+1})^m}{ma_{m+1}}, \end{aligned}$$

varav ses att även övre gränsen i (A) håller för m ersatt med $m+1$. Härmed är (A) bevisad.

En viktig konsekvens av olikhet (A) är att man för stora n har den enkla asymptotiska formeln

$$(12) \quad D(m, n) \sim \frac{n^{m-1}}{(m-1)! a_1 a_2 \dots a_m}.$$

Denna kan användas för beräkning av antalet växlingar så snart n är tillräckligt stort i förhållande till myntsorterna $a_1=1, a_2, \dots, a_m$. Hur stort n bör vara kan lätt bedömas genom beräkning av storheten Δ_m i olikhet (A). Det framgår av olikheten att (12) kan begagnas, om Δ_m är tillräckligt litet i förhållande till n .

EXEMPEL: Antag att $n=100$ kr. växlas i mynt av valörerna 1, 2, 5, 10, 25, 50 och 100 öre. Man har $m=7$ och $\Delta_m = 2 + \frac{1}{2}(5 + 10 + \dots + 100) = 97$ vilket är litet i förhållande till $n=10000$ öre. Enligt formel (12) blir antalet växlingar ungefär

$$\frac{10000^6}{6! \cdot 2 \cdot 5 \dots 100} = 1.11 \cdot 10^{14}.$$

Slutligen skall det påpekas att vi nu lätt kan bevisa det i (7) angivna uttrycket för högsta koefficienten i Bells formel (6). Av sistnämnda formel följer nämligen att, om n (och därmed också k) är stort i förhållande till myntsorterna, så gäller

$$D(m, n) \sim c_{m-1} \cdot \frac{k^{m-1}}{(m-1)!} \sim c_{m-1} \cdot \frac{(n/d_m)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Sättes det sista uttrycket lika med uttrycket i högra medrum av (12), kan man lösa ut c_{m-1} och får därvid det i (7) givna uttrycket.

2.4. Olikhet B. Vi skall nu förbättra den i föregående sektion bevisade olikheten genom att höja den undre gränsen. Det pris man måste betala härför är att den nya olikheten blir mer komplicerad.

Sätt $S_{0,m} = 1$ och

$$S_{i,m} = \sum (\frac{1}{2}a_{v_1}) \cdot (\frac{1}{2}a_{v_2}) \dots (\frac{1}{2}a_{v_i}) \quad (1 \leq i \leq m-2),$$

där summan utsträcker sig över $3 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_m \leq m$. Storheten $S_{i,m}$ är alltså helt enkelt summan av alla produkter av talen $\frac{1}{2}a_3, \frac{1}{2}a_4, \dots, \frac{1}{2}a_m$, tagna i stycken i sänder. Vi noterar för senare bruk att man har rekursionsformlerna

$$(13) \quad \begin{cases} S_{0,m+1} = S_{0,m} = 1; & S_{m-1,m+1} = \frac{1}{2}a_{m+1}S_{m-2,m}; \\ S_{i,m+1} = \frac{1}{2}a_{m+1}S_{i-1,m} + S_{i,m} & (1 \leq i \leq m-2). \end{cases}$$

Storheterna Δ_i har samma betydelse som i föregående sektion.

Om $m \geq 2$ gäller

$$(B) \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_m} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{n^{m-i-1}}{(m-i-1)!} S_{i,m} \leq D(m, n) \leq \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_m} \cdot \frac{(n + \Delta_m)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

BEVIS. Eftersom den övre gränsen är densamma som i (A), behöver vi endast syssla med den undre.

Vi ser lätt att undre gränsen håller för $m=2$. Vi antager nu, att denna gräns håller för m och skall visa att den då håller även för $m+1$. Av rekursionsformeln (10) följer

$$D(m+1, n) \geq \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_m} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{S_{i,m}}{(m-i-1)!} \sum_j (n - j a_{m+1})^{m-i-1}.$$

Tag nu $x = n/a_{m+1}$ och $k = m-i-1$ i första hälften av olikheten (8), så erhålles

$$\begin{aligned} \sum_j (n - j a_{m+1})^{m-i-1} &= a_{m+1}^{m-i-1} \sum_j \left(\frac{n}{a_{m+1}} - j \right)^{m-i-1} \\ &\geq a_{m+1}^{m-i-1} \left[\frac{1}{m-i} \left(\frac{n}{a_{m+1}} \right)^{m-i} + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{a_{m+1}} \right)^{m-i-1} \right] = \frac{n^{m-i}}{(m-i)a_{m+1}} + \frac{1}{2} n^{m-i-1}. \end{aligned}$$

Insättes detta i den dubbla summan ovan erhålles

$$\begin{aligned} D(m+1, n) &\geq \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{m+1}} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{n^{m-i}}{(m-i)!} S_{i,m} \\ &\quad + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{m+1}} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{n^{m-i-1}}{(m-i-1)!} \left(\frac{1}{2} a_{m+1} S_{i,m} \right). \end{aligned}$$

Ersätter man i andra termen i med $i-1$, slår ihop summorna och därvid använder formlerna (13), så får man

$$D(m+1, n) \geq \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{m+1}} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{n^{m-i}}{(m-i)!} S_{i,m+1}.$$

Härmed är det bevisat att undre gränsen i (B) håller för $m+1$, varmed hela olikheten är bevisad.

För att ge en uppfattning om med vilken noggrannhet man med olikhet (B) kan beräkna antalet växlingar återger vi i Tabell 3 några beräkningar, som avser beloppet $n = 1000$ öre. Man ser, att noggrannheten avtar med växande antal myntsorter, men att den är ganska god, möjligen med undantag av sista raden i tabellen. Vid givna myntsorter avtager givetvis felet, när n växer, och olikheten (B) kan därför användas för ganska noggranna uppskattningar om n är någorlunda stort i förhållande till myntsorterna.

Tabell 3.

Antalet växlingar av 1000 öre beräknat med olikhet (B).

Myntsorter	Undre gräns	Exakt	Övre gräns	Faktor
1-5	5.025	5.040	5.045	10^4
1-10	1.704	1.712	1.715	10^6
1-25	1.802	1.814	1.818	10^7
1-50	8.248	8.347	8.388	10^7
1-100	1.844	1.905	1.936	10^8
1-200	2.344	2.608	2.794	10^8

3. Binärt myntsystem.

3.1. Allmänt. Vi skall ägna hela denna avdelning åt det binära myntsystemet. Vårt problem är att exakt bestämma antalet växlingar av ett givet belopp i de binära myntsorterna $a_1=1$, $a_2=2$, ..., $a_m=2^{m-1}$. Detta kan ske på åtminstone två sätt, nämligen genom *rekursiv beräkning* och med *Bells formel*.

Vad det rekursiva beräkningssättet beträffar kan vi som vanligt använda den grundläggande rekursionsformeln (3). En ny möjlighet finns emellertid nu, såsom framgår av följande sats.

SATS. För varje helt tal $p > 1$ gäller rekursionsformeln

$$(14) \quad D(m+1, 2p) - D(m+1, 2p-2) = D(m, p).$$

Vi har här som synes förutsatt att de belopp som förekommer i vänstra membrum är jämna. Detta är emellertid ingen inskränkning, ty man inser omedelbart, att ett udda belopp kan växlas på lika många sätt som närmast lägre jämna belopp, dvs. man har $D(m, 2p+1) = D(m, 2p)$. (Ett undantag från denna regel finns dock; man har ju nämligen $D(0, 1) = 0$ men $D(0, 0) = 1$.)

BEVIS. Satsen kan lätt bevisas induktivt eller också med hjälp av genererande funktioner på följande sätt: Av (2) följer att

$$\varphi_m(t) = \{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^{2^{m-1}})\}^{-1}; \quad \varphi_{m+1}(t) = \{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^{2^m})\}^{-1}.$$

Härav inses att

$$\varphi_{m+1}(t) = \frac{1}{1-t} \varphi_m(t^2).$$

Jämföres koefficienterna för t^{2p} i båda membra, erhålles

$$(15) \quad D(m+1, 2p) = D(m, 0) + D(m, 1) + \dots + D(m, p).$$

Bildas differenserna mellan denna relation och den relation som erhålles om p ersättes med $p-1$, får man den sökta rekursionsformeln (14). — Det bör tilläggas att formel (15) givetvis också har sitt intresse som rekursionsformel på grund av sin enkla uppbyggnad.

Som illustration anges i Tabell 4 antalet växlingar $D(m, n)$ av beloppet n för några låga värden på m och n .

Tabell 4.

Antal växlingar $D(m, n)$ av beloppet n i de binära myntsorterna $1, 2, \dots, 2^{m-1}$.

$\begin{array}{c} n \\ \backslash m \end{array}$	0	1	2, 3	4, 5	6, 7	8, 9	10, 11	12, 13	14, 15	16, 17	18, 19	20, 21
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
4	1	1	2	4	6	10	14	20	26	35	44	56
5	1	1	2	4	6	10	14	20	26	36	46	60

Återstoden av denna avdelning skall vi huvudsakligen ägna åt Bells formel (6), som är av särskilt intresse i det binära fallet, därför att koefficienterna kan beräknas explicit. I överensstämmelse med (5) skriver vi det belopp som skall växlas:

$$n = k \cdot 2^{m-1} + e_m \quad (0 \leq e_m < 2^{m-1}).$$

I 3.2 behandlas fallet $e_m = 0$ och i 3.3 fallet $e_m \neq 0$. Avdelningen avslutas med ett bevis för en identitet som användes i 3.2.

3.2. Växling av multipel av tvåpotens. Antalet växlingar av beloppet $k \cdot 2^{m-1}$ i binära mynt kan enligt vår allmänna beteckning skrivas $D(m, k \cdot 2^{m-1})$. Det är bekvämt att nu införa den speciella beteckningen

$$u_{m,k} = D(m, k \cdot 2^{m-1}).$$

Rekursionsformeln (4) antager då formen

$$(16) \quad u_{m,k} = \sum_{i=0}^k u_{m-1, 2i}.$$

Denna formel kan lätt användas för direkt beräkning av antalet växlingar, åtminstone för små värden på m . I Tabell 5 ges några värden på $u_{m,k}$. Ur tabellen avläses $u_{6,3} = 8148$, vilket innebär att beloppet $3 \cdot 2^{6-1} = 96$ öre kan växlas i myntsorterna 1, 2, 4, 8, 16 och 32 öre på 8148 olika sätt.

Tabell 5.

Antal växlingar $u_{m,k}$ av beloppet $k \cdot 2^{m-1}$ i de binära myntsorterna $1, 2, \dots, 2^{m-1}$.

$\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4
1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5
3	1	4	9	16	25
4	1	10	35	84	165
5	1	36	201	656	1625
6	1	202	1827	8148	25509

Tabell 6.

Koefficienter $c_{m,i}$ i BELLS formel (17).

$\begin{smallmatrix} i \\ m \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	1	1					
3	1	3	2				
4	1	9	16	8			
5	1	35	130	160	64		
6	1	201	1424	3272	3072	1024	
7	1	1827	23682	91040	151104	114688	32768

Vi använder nu Bells formel (6) och skriver

$$(17) \quad u_{m,k} = \sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i} \binom{k}{i}.$$

Koefficienterna $c_{m,i}$ återges i Tabell 6 för låga värden på m .

Vi skall nu visa hur man kan beräkna en godtycklig rad i Tabell 6 ur närmast föregående. Låt $\Delta^p \binom{2n}{j}$ vara p :te differensen av talen $\binom{2n}{j}$, $\binom{2n+2}{j}$, $\binom{2n+4}{j}$, $\dots$, där n är ett godtyckligt helt tal. Om $2n < j$, definierar vi $\binom{2n}{j} = 0$. Vi inför även beteckningen

$$(18) \quad a_{i,j} = \Delta^{i-1} \binom{2n}{j}_{n=1},$$

där indexbeteckningen avser att n skall sättas lika med 1 efter differensbildningen. (Vi skall senare diskutera hur storheterna $a_{i,j}$ kan beräknas numeriskt.) Man har då följande sats:

SATS. För $m \geq 1$ gäller rekursionsformeln

$$(19) \quad c_{m+1,i} = \sum_{j=i-1}^{2i} a_{i,j} c_{m,j}.$$

Eftersom $\Delta^{i-1} \binom{2n}{j} = 0$ så snart $j \leq i-2$, inses att i högra medlems-
termerna med $c_{m,0}, \dots, c_{m,i-2}$ faller bort. Därmed är satsen bevisad.

Det återstår nu att diskutera hur talen $a_{i,j}$, definierade av formel (18), skall beräknas numeriskt. Det finns flera möjligheter:

- 1) Formel (18) användes direkt.
- 2) Talen beräknas rekursivt med ledning av rekursionsformeln

$$(20) \quad a_{i+1,j+1} = 2a_{i,j} + a_{i,j-1} \quad (i \geq 0, j \geq 0, a_{0,0} = 1).$$

Denna formel bevisas lätt av

$$\begin{aligned} a_{i+1,j+1} &= \Delta^i \binom{2n}{j+1} \Big|_{n=1} = \Delta^{i-1} \left\{ \binom{2n+2}{j+1} - \binom{2n}{j+1} \right\} \Big|_{n=1} \\ &= \Delta^{i-1} \left\{ \binom{2n+1}{j} + \binom{2n+1}{j+1} - \binom{2n}{j+1} \right\} \Big|_{n=1} = \Delta^{i-1} \left\{ \binom{2n+1}{j} + \binom{2n}{j} \right\} \Big|_{n=1} \\ &= \Delta^{i-1} \left\{ 2 \binom{2n}{j} + \binom{2n}{j-1} \right\} \Big|_{n=1} = 2a_{i,j} + a_{i,j-1}. \end{aligned}$$

3) Följande explicita formel begagnas:

$$(21) \quad a_{i,j} = \binom{i}{j-i} 2^{2i-j} + \binom{i-1}{j-i+1} 2^{2i-j-2}.$$

Denna formel kan man lätt bevisa med hjälp av (20). Den kan också erhållas såsom ett specialfall av en identitet, som har ett visst självständigt intresse och som därför skall diskuteras separat i 3.4.

Vi återger slutligen i Tabell 7 talen $a_{i,j}$ för några låga värden på i och j . Man kan lätt vid behov utvidga tabellen med hjälp av (20) eller (21) och har sedan möjlighet att via (17) och (19) beräkna antalet växlingar $u_{m,k}$ för varje givet värde på m och k .

Tabell 7.

Koefficienter $a_{i,j}$ i rekursionsformeln (19).

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	5	4	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	4	12	13	6	1	0	0	0	0
4	0	0	0	8	28	38	25	8	1	0	0
5	0	0	0	0	16	64	104	88	41	10	1

3.3. Växling av belopp som ej är multipel av tvåpotens. Vi skall nu utvidga diskussionen av Bells formel i föregående avsnitt till det fallet, att det belopp som skall växlas icke är en multipel av en tvåpotens. Formeln lyder då

$$(22) \quad D(m, k \cdot 2^{m-1} + e_m) = \sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i} \binom{k}{i},$$

där $0 < e_m < 2^{m-1}$. Vi påpekar att ett udda värde på e_m ger samma antal växlingar som närmast lägre jämna värde, varför vi kan antaga, att e_m är jämnt. Beträffande koefficienterna $c_{m,i}$ gäller följande:

För $m=2$ har vi beloppet $2k$, vilket representeras genom $c_{2,0}=c_{2,1}=1$. För $m=3$ får vi två fall: $4k$ resp. $4k+2$, vilka är bestämda genom $c_{3,0}=1$, $c_{3,1}=3$, $c_{3,2}=2$ resp. $c_{3,0}=2$, $c_{3,1}=4$, $c_{3,2}=2$. Allmänt betraktar vi $k \cdot 2^{m-1} + e_m$ för två konsekutiva värden på m och ställer upp schemata för koefficienterna $c_{m,i}$ radvis för successiva e_m -värden, vilka enligt vad som förut sagts sammanförts parvis. Bildar vi nu differenserna mellan konsekutiva rader i ett sådant schema, återfår vi närmast föregående schema, varvid första raden kommer i enkel och alla de andra raderna i dubbel upplaga. Nu är ju första raden i ett godtyckligt schema känd enligt föregående utredning (Tabell 6), och därmed kan vi successivt bilda samtliga sådana schemata. Vi illustrerar detta i Tabell 8, i vilken vi för fullständighets skull även medtagit udda e_m -värden samt fallet $e_m=0$.

För att bevisa de påståenden som här gjorts rörande koefficienterna $c_{m,i}$ har man endast att tillämpa den sats som bevisades i 3.1. De angivna relationerna mellan koefficientraderna i Tabell 8 är som man lätt ser en omedelbar följd av den i satsen angivna rekursionsformeln (14).

Tabell 8.

Koefficienter $c_{m,i}$ i BELLS formel (22).

m	Belopp	e_m	$c_{m,0}$	$c_{m,1}$	$c_{m,2}$	$c_{m,3}$	$c_{m,4}$
2	$2k+e_2$	0, 1	1	1			
3	$4k+e_3$	0, 1 2, 3	1 2	3 4	2 2		
4	$8k+e_4$	0, 1 2, 3 4, 5 6, 7	1 2 4 6	9 12 16 20	16 18 20 22	8 8 8 8	
5	$16k+e_5$	0, 1 2, 3 4, 5 6, 7 8, 9 10, 11 12, 13 14, 15	1 2 4 6 10 14 20 26	35 44 56 68 84 100 120 140	130 146 164 182 202 222 244 266	160 168 176 184 192 200 208 216	64 64 64 64 64 64 64 64

3.4. En identitet. Vi skall bevisa följande

SATS.

$$(23) \quad \Delta^r \binom{2n}{s} = \sum_{\nu=0}^n \binom{r+n-\nu}{s-r-n+\nu} \binom{n}{\nu} 2^{2(r+n-\nu)-s}.$$

BEVIS. Vi sätter $r+n-\nu=k$ och antar satsen riktig t. o. m. $r-1$. Således är

$$\Delta^{r-1} \binom{2n+2}{s} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{k}{s-k} \binom{n+1}{\nu} 2^{2k-s}.$$

Härav följer

$$\begin{aligned} \Delta^r \binom{2n}{s} &= \Delta^{r-1} \left\{ \Delta \binom{2n}{s} \right\} = \Delta^{r-1} \left\{ \binom{2n+2}{s} - \binom{2n}{s} \right\} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{k}{s-k} \binom{n+1}{\nu} 2^{2k-s} - \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{k}{s-k} \binom{n}{\nu-1} 2^{2k-s} = \sum_{\nu=0}^n \binom{k}{s-k} \binom{n}{\nu} 2^{2k-s}, \end{aligned}$$

vilket är ekvation (23).

Därmed återstår endast att visa, att (23) gäller för $r=0$, dvs. att

$$(24) \quad \binom{2n}{s} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n-\nu}{s-n+\nu} \binom{n}{\nu} 2^{2(n-\nu)-s}.$$

Sätt

$$P(x) = (1+2x)^n + \binom{n}{1} (1+2x)^{n-1} x^2 + \binom{n}{2} (1+2x)^{n-2} x^4 + \dots + x^{2n}.$$

Koefficienten för x^{2n-s} i denna utveckling är tydligen lika med

$$2^{2n-s} \left\{ \binom{n}{s-n} + 2^{-2} \binom{n-1}{s-n+1} \binom{n}{1} + 2^{-4} \binom{n-2}{s-n+2} \binom{n}{2} + \dots \right\},$$

vilket är lika med högra membrum av (24). Å andra sidan är $P(x) = \{(1+2x) + x^2\}^n = (1+x)^{2n}$, och koefficienten för x^{2n-s} i denna utveckling är lika med $\binom{2n}{s}$, varmed (24) och följaktligen även (23) är bevisad.

Man erhåller formel (21) i 3.2 genom att i (23) sätta $r=i-1$, $s=j$ samt $n=1$.

LITTERATUR

- [1] P. BACHMANN: *Niedere Zahlentheorie*. Leipzig 1910. Zweiter Teil, Kap. 3.
- [2] E. T. BELL: *Interpolated denumerants and Lambert series*. Amer. Journal of Math. 65 (1943), pp. 382-386.
- [3] G. H. HARDY: *Trois problèmes célèbres de la théorie des nombres*. Paris 1931.
- [4] J. RIORDAN: *An introduction to combinatorial analysis*. New York 1958. Ch. 6.

OM STRYKPROSENER, FAREY-REKKER OG KJEDEBRØK

ERNST S. SELMER

1. I to av de matematiske »emner« ved Universitetet i Bergen ble strykprosentene ifjor høst¹ 26 og 32. Reaksjonen på disse tall kan være svært varierende. De fleste vil kanskje synes at mannefallet var voldsomt, men blant lærerne var reaksjonen faktisk den motsatte: Nå er heldigvis strykprosentene kommet *ned* på et forholdsvis rimelig nivå!

Den originale indiske matematiker Ramanujan, som bl. a. var kjent for å oppdage tallteoretiske egenskaper ved bilnumre o. l.², ville sannsynligvis ha reagert på en annen måte: Det må ha vært *minst* 19 *studenter* oppe til eksamen i hvert av emnene!

I forbindelse med de først nevnte reaksjoner kan det sies og skrives meget — hvilket også har vært gjort³. Her skal vi isteden studere Ramanujans reaksjon, og bruke den som utgangspunkt for en upretensiøs lek med tall.

Først noen ord om betegnelsene. For enkelhets skyld vil vi skrive f. eks.

$$(1) \quad \frac{7}{27} = 26\%$$

(altså strykprosenten i emnet M 14), idet vi alltid avrunder til *nærmeste hele prosent*. I de få tilfeller hvor det ikke finnes noen »nærmeste« hele prosent, f. eks. $\frac{3}{8} = 0,375$, vil vi fremheve dette ved å skrive

$$(2) \quad \frac{3}{8} = 37\frac{1}{2}\% .$$

Slike brøker vil alltid bli særskilt kommentert.

¹ Stryk = *kuggning* (svensk).

I det lille emne M 14, »Algebra og tallteori«, strøk 7 av 27. I det store emne M 12, »Matematisk analyse I«, var det 15 som strøk av 47. I de øvrige emner i ren matematikk var strykprosentene meget lavere.

² Se f. eks. C. Størmer: *Indieren Ramanujan — et merkelig matematisk geni*, Norsk Mat. Tidsskr. 16 (1934), s. 1–13.

³ E. S. Selmer: *Studieordning og eksamensresultater*, StudVest (Organ for studentene i Bergen), nr. 2, 1961.

Vi innskrenker oss til å betrakte strykprosjenter ≤ 50 . Dette skyldes ikke menneskevennlighet, men det enkle faktum at prosentene mellom 50 og 100 bare representerer »speilbilledet« av prosentene mellom 0 og 50. Når $\frac{7}{27}$ representeres ved 26% med en viss tilnærming, vil $1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$ representeres ved $100 - 26 = 74\%$ med nøyaktig samme tilnærming.

Av (1) følger selvsagt at også $\frac{14}{54} = \frac{21}{81} = \dots = 26\%$. Vi vil imidlertid bare betrakte *irreduktible* (uforkortelige) brøker. — Av to forskjellige irreduktible brøkrepresentasjoner for samme prosenttall sier vi at brøken med minst nevner er *enklest* eller kommer *først*. Også ved sammenligning av vilkårlige brøker refererer ordet »enkel« seg til nevnerens størrelse.

2. Ved studiet av prosenttallenes brøkrepresentasjon kan man selvsagt gå rent »eksperimentelt« frem, ved å lage en tabell med nevnerne og

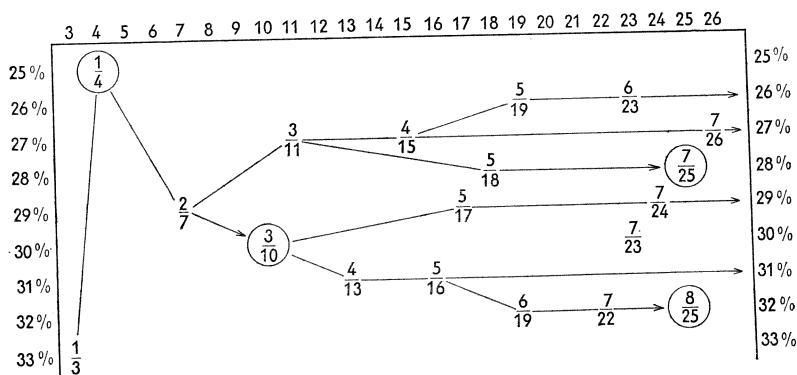


Fig. 1. Rasjonale tilnærmelser for prosentene 25%–33%. Innringet: Eksakt. Begynnelsen av kjedebrøksutviklingene for de eksakte prosenter 26%–32%.

prosjenter som henholdsvis abscisse og ordinat. Et utsnitt av en slik tabell er vist i fig. 1 (se foreløpig bort fra forbindelseslinjene). Ved konstruksjonen tar man sitt utgangspunkt i nevnerne, idet man beregner multipla av stambrøkene $1/n$. Brøker av typen (2) kan eventuelt plasseres mellom linjene, men slike brøker forekommer ikke i fig. 1.

Vi legger merke til at de enkleste brøker, som $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{4}$ i fig. 1, er *alene* om å representere sine prosenttall. Når man ikke godtar reduktible brøker som $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{8}$ osv., vil de neste brøker for 33% og 25% være

$$\frac{14}{43} = 33\%, \quad \frac{13}{51} = 25\%.$$

(Den første kan erstattes med $\frac{13}{40} = 32\frac{1}{2}\%$ hvis man forhøyer.) Enda mer markert er forholdet for den meget enkle brøk $\frac{1}{2} = 50\%$, hvor den neste representasjon er $\frac{50}{101}$.

I denne sammenheng må vi imidlertid regne $\frac{0}{1} = 0\%$ som den aller enkleste brøk. Dette innser man kanskje lettest ved å betrakte det før nevnte »speilbillede« om 50%, altså her $\frac{1}{1} = 100\%$. Den første representasjon av 0% ved en brøk $\neq 0$ kommer så langt ut som $\frac{1}{201}$ (eller $\frac{1}{200} = \frac{1}{2}\%$ hvis man ikke forhøyer).

Vi ser altså at for de enkleste brøker er avstanden mellom første og annen representasjon meget stor, og større jo enklere brøken er¹. Det er også lett å forstå at det må forholde seg slik. Hvis vi f. eks. vil representere 50% ved en brøk $< \frac{1}{2}$, må vi opplagt forsøke formen $\frac{n}{2n+1}$. Skal denne være $> 0,495$ (for å avrundes til 50%), må $n \geq 50$, altså som enkleste mulighet den ovenfor nevnte brøk $\frac{50}{101}$.

Setter vi på samme måte $\frac{n}{2n+1} > 0,485$ eller 0,475, finner vi de første representasjoner

$$(3) \quad \frac{17}{35} = 49\%, \quad \frac{10}{21} = 48\%.$$

I skalaens andre ende må vi enda lenger ut for å finne de første brøker:

$$(4) \quad \frac{1}{67} = 1\%, \quad \frac{1}{41} = 2\%, \quad \frac{1}{29} = 3\%, \quad \frac{1}{23} = 4\%.$$

(Den andre kan erstattes med $\frac{1}{40} = 2\frac{1}{2}\%$ hvis man ikke forhøyer.) *Det kreves altså store nevnerer for å representere prosenttal i nærheten av de enkleste brøker.* Dette er også tydelig i fig. 1, hvor første nevner blir mindre etterhvert som vi fjerner oss fra 25% eller fra 33%. Spesielt har de nærmeste naboer 26% og 32% begge den minste nevner 19, hvilket forklarer Ramanujans reaksjon: Det må være minst 19 eksamenskandidater for at man skal få disse strykprosjenter.

Derved er vi tilbake ved vårt utgangspunkt, og nå er det vel på tide å lage litt matematikk ut av våre mer eller mindre empiriske resultater.

3. Vi setter en øvre grense, n , for nevnerne i de brøker vi opererer med, og skriver opp alle irreduktible brøker h/k (med $k \leq n$) mellom $\frac{0}{1}$ og $\frac{1}{1}$, disse grenser inkludert. Hvis de fremkomne brøker ordnes etter størrelsen, har vi fått frem den såkalte *Farey-rekken* av orden n .

Som tidligere nevnt er det av symmetri-grunner tilstrekkelig å betrakte brøkene $\leq \frac{1}{2}$. Med f. eks. $n = 10$ får vi da første halvpert av Farey-rekken:

¹ Når $\frac{1}{3} = 33\%$ tilsynelatende bryter den siste regel, skyldes det at $\frac{1}{3}$ (i motsetning til $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$) ikke er et eksakt prosenttall.

$$(5) \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}.$$

I Hardy og Wright's kjente bok: *An introduction to the theory of numbers* (4. utgave, Oxford 1960) finnes et kapittel om Farey-rekker, hvor hovedvekten er lagt på følgende grunnleggende egenskaper:

Hvis h/k og h'/k' er to suksessive ledd i en Farey-rekke, så gjelder

$$(6) \quad kh' - hk' = 1.$$

Hvis h/k , h''/k'' og h'/k' er tre suksessive ledd i en Farey-rekke, så gjelder

$$(7) \quad \frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'}.$$

Det er lett å verifisere disse setninger for rekken (5). Når det gjelder bevisene (som er relativt enkle) må vi henviser til Hardy og Wright.

Av fig. 1 kan vi få frem følgende utsnitt av Farey-rekken for $n=26$:

$$\dots; \frac{1}{4}; \frac{6}{23}, \frac{5}{19}, \frac{4}{15}, \frac{7}{26}, \frac{3}{11}, \frac{5}{18}, \frac{2}{25}, \frac{2}{7}, \frac{7}{24}, \frac{5}{17}, \frac{3}{10}, \frac{7}{23}, \frac{4}{13}, \frac{5}{16}, \frac{6}{19}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}, \frac{1}{3}; \dots$$

Brøker svarende til samme prosenttall er gruppert mellom semikolon; rekkefølgen innen hver slik gruppe kan ikke avgjøres ut fra fig. 1. — Også her er det lett å ettervise at (6) og (7) gjelder.

Hvis vi erstatter brøkene i (5) med de tilsvarende *prosenttall*, får vi rekken

$$0, 10, 11, 12\frac{1}{2}, 14, 17, 20, 22, 25, 29, 30, 33, 37\frac{1}{2}, 40, 43, 44, 50.$$

Enda bedre inntrykk av fordelingen får vi ved å avsette brøkene langs en akse som vist i fig. 2. Vi ser bl. a. tydelig at de enkleste brøker $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ osv. ligger *isolert*, og med større avstand til naboene jo enklere brøken er. Grunnen til dette fremgår ganske enkelt av (6): For to suksessive ledd blir avstanden

$$\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} = \frac{kh' - hk'}{kk'} = \frac{1}{kk'}.$$

Hvis en av brøkene har liten nevner, vil derfor avstanden bli forholdsvis stor.

Denne isolasjon gir nå en umiddelbar forklaring på det tidligere nevnte forhold, at det kreves store nevner for å representere prosenttall i nærheten av de enkleste brøker. I Farey-rekker av for lav orden (små

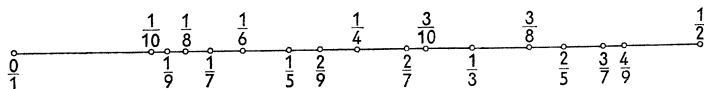


Fig. 2

nevnerne) vil disse enkle brøker ligge så isolert at de nærmeste prosenttall ikke er representert.

Vi har altså etablert en nær sammenheng mellom på den ene side prosenttallenes fordeling blant alle brøker med nevner $\leq n$, og på den annen side Farey-rekken av orden n . Vår opprinnelige problemstilling har derved fått et mer matematisk tilsnitt.

4. La oss igjen vende tilbake til Ramanujans reaksjon: Hvis nå et alminnelig menneske fikk opplyst at strykprosenten var 26, og ble spurt om det minimale antall eksamenskandidater, hvordan skulle han eller hun enklest angripe problemet?

Muligens ville den eksperimentelle metode føre raskest frem (altså eksperimenter med tall, ikke med virkelige eksamenskull). Prosenttallenes fordeling er tross alt regnemessig såpass enkel at en tabell som fig. 1 er forholdsvis fort konstruert. Arbeidet ville imidlertid bli av en helt annen størrelsesorden hvis vi isteden opererte med stryk-promiller. Selve problemstillingen, *approksimasjon av et gitt tall ved enkle brøker*, er også så almen at det kan være nyttig å oppholde seg litt ved den. Løsningen er gitt i teorien for *kjedebrøk*, som her *ikke* vil forutsettes kjent. En god fremstilling av kjedebrøker finnes i den før nevnte bok av Hardy og Wright. Atskillig lenger går Perron's kjente bok: *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (2. utgave, Leipzig 1929; opptrykk New York 1950).

For å utvikle $\frac{26}{100} = \frac{13}{50}$ i kjedebrøk, bruker vi Euklids berømte divisjonsalgoritme:

$$\begin{array}{r} 50 : 13 = 3 \\ \underline{39} \\ 13 : 11 = 1 \\ \underline{11} \\ 11 : 2 = 5 \\ \underline{10} \\ 2 : 1 = 2 \end{array}$$

Nevner og rest ved en divisjon går over til henholdsvis teller og nevner ved den etterfølgende, og prosessen fortsettes til siste divisjon går opp. Hvis den gitte brøk er irreduktibel, blir alltid siste nevner = 1.

Av divisjonsalgoritmen ovenfor slutter vi suksessivt at

$$\frac{13}{50} = \frac{1}{3 + \frac{11}{13}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}}.$$

Herved er $\frac{13}{50}$ utviklet i kjedebrøk. Deltellerne er alle 1, mens *delnevnerne* er *kvotientene i divisjonsalgoritmen*.

Ved å *bryte av* kjedebrøken etter de suksessive delnevnerne, får vi en serie av tilnærmelser til den gitte brøk $\frac{13}{50} = 0,26$:

$$(8) \quad \frac{1}{3} = 0,333, \quad \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{4} = 0,25, \quad \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = \frac{6}{23} = 0,261,$$

og til slutt den gitte brøk selv. Vi kaller leddene i rekken

$$(9) \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{6}{23}, \frac{13}{50}$$

for *kjedebrøkskonvergentene* til $\frac{13}{50}$.

Beregningen av konvergentene ved suksessivt å fjerne smånevnerne er nokså besværlig, og kan systematiseres slik:

		3	1	5	2
1	0	1	1	6	13
0	1	3	4	23	50

I første linje står delnevnerne. De to første kolonner i de siste linjer inneholder hjelpestørrelser, de øvrige kolonner gir som man ser konvergentene. Utfyllingen av disse kolonner skjer suksessivt etter skjemaet

	.	.	a_n	
...	p_{n-2}	p_{n-1}	$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$	...
...	q_{n-2}	q_{n-1}	$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$	...

F. eks. fremkommer de to siste konvergenten som

$$(10) \quad \frac{6}{23} = \frac{5 \cdot 1 + 1}{5 \cdot 4 + 3}, \quad \frac{13}{50} = \frac{2 \cdot 6 + 1}{2 \cdot 23 + 4}.$$

Det er ikke så vanskelig å innse at denne prosess nettopp svarer til å fjerne smånevnerne i den gitte kjedebrøk.

I første brøk i (10) skal 1 adderes 5 ganger i teller, og 4 skal adderes 5 ganger i nevner. Disse addisjoner kan vi også foreta *skrittvis*, og får da de såkalte *innskutte* tilnærmelsesbrøker:

$$\frac{1 \cdot 1 + 1}{1 \cdot 4 + 3} = \frac{2}{7}, \quad \frac{2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 4 + 3} = \frac{3}{11}, \quad \frac{3 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 4 + 3} = \frac{4}{15}, \quad \frac{4 \cdot 1 + 1}{4 \cdot 4 + 3} = \frac{5}{19},$$

og til slutt brøken $\frac{6}{23}$ selv. På samme måte kan vi skyte inn én brøk mellom de to siste brøker (9):

$$\frac{1 \cdot 6 + 1}{1 \cdot 23 + 4} = \frac{7}{27}.$$

Samlingen av *alle* tilnærmelsesbrøker til $\frac{13}{50}$ blir da

$$(11) \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{11}, \frac{4}{15}, \frac{5}{19}, \frac{6}{23}, \frac{7}{27}, \frac{13}{50}.$$

Vi reserverer navnet »konvergent« for tilnærmelsesbrøkene (9).

Den samme serie av tilnærmelsesbrøker fremkommer *direkte* hvis vi erstatter divisjonsalgoritmen med en *subtraksjons*-algoritme. Betydningen av dette er spesielt fremhevet av Viggo Brun¹.

Bortsett fra de to siste forekommer alle brøkene (11) i fig. 1. Ved en *forbindelseslinje* mellom brøkene har vi der markert sammenhengen med kjedebrøksutviklingen for 26%; pilespissen til høyre angir at rekken fortsetter. På samme måte er kjedebrøksutviklingene for 27%-32% angitt ved forbindelseslinjer (å kontrollere disse vil være en god øvelse i kjedebrøk for uerfarne lesere). I tre tilfeller blir utviklingene fullført innenfor fig. 1 (pilespiss mot innringet brøk).

Det finnes et ubegrenset antall brøker som vil representere et vilkårlig prosenttall uten å forekomme i kjedebrøksutviklingen. I fig. 1 ser vi én slik brøk, $\frac{7}{23} = 30\%$, som kommer etter siste konvergent $\frac{3}{10}$. I de fleste tilfeller vil man også ha slike representasjoner før kjedebrøken er fullført, f. eks. brøken $\frac{8}{31}$ (samt en rekke andre) for 26%.

Fra teorien for kjedebrøk siterer vi nå en del setninger uten bevis:

Konvergentene og de innskutte tilnærmelsesbrøker er alle irreduktible. Av (8) ser vi at konvergentene er *avvekslende større og mindre enn* det tall vi utviklet i kjedebrøk, og denne egenskap gjelder alment. Tilnærmelsen blir stadig bedre, og feilen ved en konvergent p/q er alltid $< 1/q^2$. Ingen annen brøk med nevner $\leq q$ gir en så god approksimasjon som konvergenten p/q .

Den siste egenskap er tydeligvis den viktigste for vårt formål, og spørsmålet er om den gjelder også for de *innskutte* tilnærmelsesbrøker. Svaret er et betinget ja, idet man har setningen: *Muligens bortsett fra den umiddelbart foregående konvergent gir ingen annen brøk med nevner*

¹ Se f. eks. V. Brun: *Musikk og euklidske algoritmer*, NMT 9 (1961), s. 29–36, hvor det på s. 31–32 er gjennomført en subtraksjonsalgoritme.

$\leq s$ en så god approksimasjon som den innskutte tilnærmelsesbrøk r/s . (Perron, § 16, Satz 19.)

At vi må unnta den foregående konvergent ser vi et tydelig eksempel på i fig. 1, hvor den innskutte tilnærmelsesbrøk $\frac{3}{10}$ gir en dårligere approksimasjon enn konvergenten $\frac{2}{7}$ i kjedebrøken for 29%. For vårt formål spiller imidlertid denne unntagelsen ingen rolle, da vi likevel har beregnet konvergentene.

Hvis vi regner ut tilnærmelsesbrøkene (11), finner vi at 26% først dukker opp ved $\frac{5}{19}$. Spesielt får vi ikke 26% ved den foregående brøk $\frac{4}{15}$, og derfor *heller ikke ved noen annen brøk med nevner ≤ 15* (da den umiddelbart foregående konvergent $\frac{1}{4} = 25\%$). Det var mulig at en brøk med nevner mellom 15 og 19 kunne gi 26%, men et blikk på strukturen av fig. 1 (skrålinjene av brøker med samme teller) utelukker denne mulighet. Dermed har vi vist at $\frac{5}{19}$ er den enkleste brøkrepresentasjon for prosenttallet 26.

5. Til slutt skal vi vende tilbake til de eksperimentelle resultater, og besvare et spørsmål som enkelte lesere kanskje allerede har stillet seg: Finnes det noe prosenttall hvor første brøkrepresentasjon har en nevner større enn 19?

At svaret er bekreftende, fremgår umiddelbart av (3) og (4). Men disse tilfeller, i hver ende av prosent skalaen, må nærmest sies å være trivielle, også hva bestemmelsen av de opptredende brøker angår. La oss derfor supplere spørsmålet ovenfor slik: »... noe prosenttall utenom endene av skalaen ...?»

Svaret er fortsatt bekreftende. Det finnes ett slikt tall, nemlig 34%, hvor første representasjon er gitt ved

$$\frac{10}{29} = 34\%.$$

Grunnen til den overraskende store nevner er at 34% ligger svært nær den enkle brøk $\frac{1}{3}$. Avstanden er bare $\frac{2}{3}\%$, mot en hel prosent for naboene til brøker som $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$.

For å slutte som vi begynte, med eksamensresultater, kan vi altså si at om vi hadde strøket en student til i emnet M 12, ville Ramanujans konklusjon om det minimale antall kandidater i dette emne ha vært enda mer frapperende.

REMARKS ON A PAPER BY O. KOLBERG

FRITZ HERZOG

In a recent paper [1], Kolberg has shown that e^{-z} admits a unique expansion of the form

$$(1) \quad e^{-z} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n z^n),$$

valid for $|z| < 1$. He showed, among other things, that $a_1 = -1$ and that

$$(2) \quad 0 < a_n < \frac{2}{n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

The purpose of this note is to prove an *asymptotic formula* for the coefficients a_n , which in a sense is the best possible result in this direction.

THEOREM. For $n \rightarrow \infty$,

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

but

$$(4) \quad a_n \neq \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

To prove (3) we use the relation

$$a_n - \frac{1}{n} = \sum_1 (-1)^d d^{-1} a_{n/d}^d,$$

where $\sum_1$ is taken over those divisors d of n for which $1 < d < n$. (See [1, Equation (2.2)].) We conclude that $|a_n - 1/n| \leq \sum_1 d^{-1} a_{n/d}^d$. In case n is even we treat the terms corresponding to $d=2$ and $d=n/2$ separately. These terms are, by (2),

$$\frac{1}{2} a_{n/2}^2 < \frac{1}{2} \left(\frac{4}{n}\right)^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{and} \quad \frac{2}{n} a_2^{n/2} = \frac{2}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

respectively. Thus for all n (even and odd),

$$\left| a_n - \frac{1}{n} \right| \leq \sum_2 d^{-1} a_{n/d}^d + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

where $\sum_2$ is taken over those divisors d for which $3 \leq d \leq n/3$. We conclude from (2) that $|a_n - 1/n| \leq \sum_2 d^{-1} (2d/n)^d + O(1/n^2)$ or

$$(5) \quad \left| a_n - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \sum_2 \left(\frac{2d}{n} \right)^{d-1} + O\left(\frac{1}{n^2} \right).$$

It remains to show that $\sum_2$ in (5) is $O(1/n)$, and this will be shown separately for $\sum_3$ and $\sum_4$, where these two sums are taken over the divisors d in the ranges $3 \leq d \leq n^{\frac{1}{2}}$ and $n^{\frac{1}{2}} < d \leq n/3$, respectively.

With $\tau(n)$ denoting the number of divisors of n and by use of the fact that $\tau(n) = O(n^{\frac{1}{2}})$, we obtain

$$\sum_3 \left(\frac{2d}{n} \right)^{d-1} \leq \tau(n) \left(\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \right)^2 = O\left(\frac{1}{n} \right) \quad \text{and} \quad \sum_4 \left(\frac{2d}{n} \right)^{d-1} \leq \tau(n) \left(\frac{2}{3} \right)^{n^{1/4}-1} = O\left(\frac{1}{n} \right).$$

This completes the proof of (3).

To prove (4) we let $n \rightarrow \infty$ through the values $2p$, where p is an odd prime. We obtain (see the last equation in [1])

$$a_n - \frac{1}{n} = a_{2p} - \frac{1}{2p} = \frac{1}{2p^2} \left(1 - \frac{p}{2^{p-1}} \right),$$

which is asymptotically equal to $1/2p^2 = 2/n^2$. This shows that $a_n - 1/n \neq o(1/n^2)$.

We also note that (1) leads directly to another recursion formula for the a_n , namely,

$$\sum a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_k} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

where $\sum$ is taken over all partitions $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ with $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k$. This formula, however, does not seem to lend itself as easily to an investigation of the a_n as does Kolberg's formula, which is the one used above at the beginning of the proof.

BIBLIOGRAPHY

- [1] O. KOLBERG: *A property of the coefficients in a certain product expansion of the exponential function*. NMT 8 (1960), pp. 33-34.

See also

- L. CARLITZ: *Some arithmetic properties of the coefficients in a certain expansion*. NMT 9 (1961), pp. 117-122.

BOKMELDINGER

C. C. ANDERSEN — S. A. BO — GUNNAR NIELSEN — J. DAMGAARD SØRENSEN: *Realskolens regning og matematik*. Geometri, 1. og 2. realklasse. J. H. Schultz' forlag, København 1961. 131 s. D. kr. 13.85.

(Innholdsfortegnelse i NMT 9 (1961), s. 181–182.)

POUL MOGENSEN: *Geometri for realafdelingen*. Gyldendal, København 1961. 127 s. D. kr. 8.40.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 92.)

POUL NEERUP — FRANS HANDEST: *Elementær plangeometri*. Munksgaard, København 1961. 243 s. D. kr. 24.75.

(Innholdsfortegnelse i NMT 9 (1961), s. 132.)

Danmark har nå fått en ny skoleordning, for øvrig den samme som Norge har hatt siden 1930-årene. På en 7-årig grunnskole (folkeskole) bygges en realskole, og etter 2. klasse her følger et 3-årig gymnasium. De elever som skal inn i realskolen må i 7. skoleår ha lest noe matematikk. I geometrien dreier det seg om enkle tegne- og regneøvinger, og elevene skal bli kjent med visse grunnbegrep. Det er ikke deduktiv, men intuitiv geometri.

Den bevisende geometri begynner så i det 8. skoleår i 1. realklasse, og her er det altså kommet 3 nye bøker som ser så forskjellige ut at en ved første øyekast kan ha vanskelig for å forstå at de er skrevet for det samme publikum.

La oss kalle bøkene for henholdsvis A, M og N. Mens A har 131 sider og M 127, har N 243 sider. M har størst format og N minst, men forskjellene er ikke store. Det er sannsynlig at mange vil velge A eller M fordi de er så mye kortere enn N.

I selve fremstillingen i bøkene er det et moment som jeg tror fortjener å drøftes. En deduktiv geometri må jo bygges opp med grunnbegrep og definisjoner, med aksiomer og teoremer, med postulater og problemer (konstruksjoner). Teoremene skal bevises og hvert bevis har en forutsetning og en påstand.

Følgende problem oppstår da så snart en vil lage en lærebok for unge mennesker: I hvilken grad skal boka aksentuere de nevnte punkter? Skal en som Euklid gjøre det klart og tydelig, melde at vi har en definisjon, eller et aksiom eller et postulat; skal en som vi gjør i norske bøker markere i læreboka forutsetning og påstand? Eller skal vi overlate til elevene å finne ut av dette, slik at de selv må finne alle definisjoner og

slik at de under eksaminasjon i et bevis (på tavla) selv må kunne sette opp det som er gitt og det som skal bevises?

For svake elever vil det nok være en fordel at mest mulig er poengtert i læreboka, mens det for dyktigere elever jo er både nyttig og morsomt selv å finne greie på dette.

Vi finner her en litt varierende praksis i de tre bøkene. N har noen ganger uttrykkelig satt ordet »Definition« foran en slik forklaring for å markere hva det er. Udefinerte begrep med »anskuelige« definisjoner er markert med * likesom også »selvfølgelige forutsetninger« er markert på denne måten. I en rekke setninger er brukt skjemaet:

Givet: ... Bevis: ... Beviset .

Et slikt skjema finner en ikke hos M. Her er imidlertid »grunnlagsetningene« sterkt fremhevet. De er nummerert fra I til XII og (tildels) trykt med fete typer, og slik at XII er den såkalte parallellgrunnsetning.

Hos A er grunnsetningene markert på en annen måte, nemlig ved en grønn strek i margin. Det er ikke godt å si om dette pedagogisk sett er heldigere enn den måten M har valt. A bruker ikke noe fast skjema for sine bevis, men det kan stå »Givet« eller »Vi skal (eller vil) bevise« i en setning.

Stort sett er det det samme stoff de tre bøker presenterer, og det er i alle tilfelle deduktiv geometri. Mens N går rett på stoffet med noen betraktninger om den orienterte linje, har både A og M først noen betraktninger over grunnbegrepene. Poenget blir å klargjøre overgangen fra virkelighetsgeometri til abstrakt geometri. Som lærer føler jeg meg særlig tiltalt av den grundige innledning med historiske perspektiver hos M, men det er mulig at elevene foretrekker å gå mer bent på saken slik som hos A eller N.

Tiltalende er det at N tidlig innfører mengdebegrepet. I alle tre bøkene spiller speiling, symmetri og avbildninger en viktig rolle, og de skiller seg tydelig fra de klassiske elementargeometrier. N og særlig A bruker røde og grønne farger i sine figurer (hva med de rød-grønn-blinde?), og det vil nok være en god hjelp for elevene. Men en figur som den på side 85 hos A krever et nøye studium for å bli helt ut forstått.

Å gi en mer detaljert oppgave over det faglige innhold i de tre bøker ville kreve langt mer plass enn jeg her kan legge beslag på. Jeg nøyer meg med et par punkter, først behandlingen av parallellitet.

Som kjent er det her forskjellige muligheter alt i definisjonen. M bruker den klassiske, — mindre heldige fordi den er negativ —, definisjon »som ikke skjærer hverandre«. A og N bruker den positive »som har en felles normal«. Med den sentrale plass symmetribegrepet har fått i bøkene,

kunne en ha ventet at en tredje definisjon var brukt: to rette linjer som er symmetriske om et punkt. Men det er mulig at definisjonen »med felles normal« er den som barn lettest får tak i, og på det trinn det her gjelder må unektelig de pedagogiske hensyn telle mye.

Et annet punkt jeg vil nevne er begrepet »geometrisk sted«, som også har en sentral plass på det alderstrinn det her gjelder.

Selve navnet vil vel for barn synes noe merkverdig, og jeg kan derfor godt sympatisere med M når han taler om visse *punktmengder med oppgitte egenskaper*, eller med N som taler om *bestemmelse av punktmengder*. Disse to bøkene gjør derved bruk av mengdebegrepet, noe vi må hilse med glede. På den andre siden er det praktisk å ha et enkelt navn på begrepet. Jeg foreslo engang (Norsk Mat. T. 1952, s. 100) navnet *tope*, og jeg vil holde fast ved at jeg tror dette ville være en fordel. A har alt på side 15 en grei definisjon på begrepet geometrisk sted — navnet brukes altså her — og har så på side 71 en liste over 5 slike geometriske steder.

Ellers forekommer det meg at N går lengst i å utnytte det mengdeteoritiske grunnlag, idet han taler om at en ved konstruksjoner skal søke *fellesmengden* for to mengder, dvs. to geometriske steder.

Det er ikke lett å vurdere bøkene bare etter lesning. En oppdager snart at N ligger på et høyt nivå, men jeg tror det vil bli nødvendig i ganske stor utstrekning å følge forfatterens råd og gjøre et utvalg blant øvelsene, kanhende også hoppe lett over betraktningene om ordning i starten. De to andre bøker virker mer overkommelige, og vil formodentlig ikke minst bli brukt i klasser med et svakere elevmateriale.

Sikkert er det at vi her har fått tre interessante nye bøker, som matematikklærere over hele Norden vil ha stort utbytte og glede av å studere.

Kay Piene

THOR A. BAK — JONAS LICHTENBERG: *Videregående matematik for ikke matematikere*. 362 stencilerede sider. D. kr. 40.00 — *Opgaver til Videregående matematik for ikke matematikere*. 44 stencilerede sider. D. kr. 10.00. — Jul. Gjellerups forlag, København 1960–61.

Den foreliggende bog er resultat af et kursus i matematik afholdt på Danmarks farmaceutiske højskole for farmaceutiske kandidater, læger, biokemikere m. fl., altså for folk med en vis modenhet, men med næppe presente matematiske kundskaber, selv om matematisk studentereksamen har været forudsat på kursus.

Bogens forfættende titel må forstås på denne baggrund. I bogen findes en repetition af skolekundskaberne i differential- og integralregning,

hvorved selve begreberne uddybes og flere sætninger, som f. eks. Taylors formel, medtages, medens vanskeligere beviser, der væsentlig bygger på de reelle tals kontinuitet, forbigås. Herunder foretages også en gennemgang af elementære funktioner, hvorved logaritmisk skala, Arcus-funktioner og hyperbolske funktioner medtages. Men man skal måske være lidt forsigtig med at anbefale bogen til selvstudium for virkelige »ikke matematikere«, der næppe uden vejledning i alle tilfælde vil bemærke fundamentale egenskaber, der kun anføres en passant.

Iøvrigt vil en fremstilling som den her foreliggende utvivlsomt imødekomme et stort behov hos folk, der har beskæftiget sig noget med matematik og har brug for at beskæftige sig med meget mere med henblik på anvendelserne.

På hovedbogens ca. 350 sider når man meget langt: Lineær algebra i det n -dimensionale rum, funktioner af flere variable med vektoranalyse, uendelige rækker med Laplace- og Fourier-transformationer, differential-ligninger med operatorsprog, egenværdiproblemer, variationsregning og eksempler på 2. ordens partielle differentiaalligninger samt numerisk analyse med Euler-MacLaurins formel udledt ved symbolsk regning med differenser.

At dette kan nås, skyldes naturligvis, at længere beviser (f. eks. vedrørende konvergensforhold) ikke er medtaget. Herved vinder man, at man virkelig kommer frem til resultater og får indblik i områder, som bruges i anvendelserne, uden at hovedtrækkene forstyrres af besværlige detailundersøgelser. Udover beviste og ikke beviste sætninger optræder også sætninger med skitserede beviser. Formålet hermed er naturligvis at gøre vedkommende sætninger plausible uden tyngende stringente beviser, og hvis læseren blot er klar over dette og får resultatet i præcis form, vil sådanne skitserede beviser næppe gøre skade.

Et væsentligt træk ved bogen er netop, at læseren får begrebsdannelserne motiveret ved primitive betragtninger og ikke bliver stillet over for en færdig og afpudset teori om et begreb, som han af ukendte årsager skal beskæftige sig med.

På de grundlæggende områder er bogen i det væsentlige en nedfotografering af eksisterende lærebøger ved vore andre højere læreanstalter, og forfatterne henviser selv til disse angående uddybning af sådanne emner. Til gengæld er der i den anden ende væsentlige tilføjelser.

I et tillæg har forfatterne udgivet en samling af opgaver (til dels med besvarelser), en lille formelsamling og en litteraturfortegnelse. Blandt bogens eksempler og opgaverne findes en del, der er hentet fra anvendelser i fysik og kemi, men naturligvis også mange øvelsesopgaver. I

eventuelle senere udgaver end denne foreløbige ville litteraturhenvisninger efter de enkelte afsnit være kærkomne.

Bogen er et interessant vidnesbyrd om, hvad en kemiker og en fysiker skønner, et grundkursus for kemikere og biokemikere bør omfatte (på nær sandsynlighedsregning, der har været medtaget på kursus, men ikke er medtaget i bogen), og den må hilses velkommen som en kortfattet og vidtspændende fremstilling af matematik for anvendere skrevet af folk, der anvender matematik.

Poul Neerup

VIGGO BRUN: *Regnekunsten i det gamle Norge*. Universitetsforlaget, Oslo, Bergen 1962. 125 s. N. kr. 9.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 89.)

Ovennævnte lille bog behandler tiden »fra arild til Abel«. Dette tidsinterval er skarpt afgrænset opadtil, idet Abels fremkomst virkede som en fuldstændig diskontinuitet eller, med et i bogen benyttet citat, som en eksplosion.

Bogen indleder med nogle eksempler på geometrisk ornamentik i oldtidsfund og giver derefter glimt af regnekunstens historie, således som den fremtræder i de gamle norske retsregler (Gulatingsloven, Frostatingsloven) samt i Kongespeilet. Fra Gulatingsloven nævnes således yderst detaljerede regler for størrelsen af den bod, som ved drab skulle erlægges til den dræbtes nære og fjernere slægtninge (søn, broder, farbroder, farbrodersønner, ..., farbroderdatters sønner, ..., derimod tilsyneladende ikke til den eventuelle enke eller andre af det svage køn!). Udfærdigelsen af disse bestemmelser stillede store krav til samtidens regnekunst, hvad angår brøksregning og division (der er også indløbet adskillige mindre regnefejl!).

Derefter omtales regning som fag i de norske skoler i middelalderen og de derpå følgende århundreder og i militærskolerne i tiden 1750–1800 samt oprettelsen af det første norske universitet. Hermed er vi nået så langt frem i tiden, at ordet »regnekunst« ikke længere dækker, men må erstattes med ordet »matematik«, og bogen slutter med omtale af 4 før-Abel'ske matematikere, der er »eksponenter for den felleskulturen vi [d. v. s. Norge og Danmark] den gang havde«. Med særlig interesse læser man om den sidste af de fire, Caspar Wessel, og hans berømte arbejde »Om Directionens analytiske Betegning« (1797), hvor han giver en geometrisk indførelse af de komplekse tal som punkter (vektorer) i en plan. Når vi i dag taler om den »Gauss'ske talplan«, ville det være korrektere at sige den »Wessel'ske talplan«. Man smiler ved læsningen om, hvorledes

Caspar W. ligesom sin poetisk begavede broder Johan Herman havde svært ved at få pengene til at slå til; men smilet dækker kun over venlig medfølelse.

For at hindre unødigt hovedbrud hos læseren skal her lige nævnes, at der i ligningen midt på s. 91 har indsneget sig et par fejle eksponenter. Ligningen skal hedde:

$$y = Ax + Bx^{-\frac{1}{2}} + Cx^{-2} + Dx^{-\frac{7}{2}} + \dots$$

Selv om bogen hovedsagelig behandler specifikt norske forhold og derfor i første række henvender sig til norske læsere, vil den kunne læses med interesse inden for hele den fælleskultur, som vi i dag knytter til begrebet Norden.

David Fog

JOHN N. FUJII: *An introduction to the elements of mathematics*. John Wiley & Sons, New York, London 1961. 11 + 312 pp. sh. 47/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 90.)

Denne boken er skrevet for amerikanske førsteårs collegestudenter, og er i hovedsaken en elementær, intuitiv innføring i de grunnleggende begreper innen matematisk logikk og mengdelære, samtidig som den også antyder hvordan de mer tradisjonelle matematiske disipliner kan utvikles naturlig på dette grunnlaget. Hva stoffutvalget angår, svarer boken i store trekk til kurset »Matematisk systematikk« ved Universitetet i Oslo; dette er et kursus som må tas av alle som vil undervise i matematikk i den høyere skole.

I de første kapitler av boken introduseres de elementære logiske begreper og symboler, som så benyttes ved en meget instruktiv analyse av logiske resonnementer, der bl. a. de vanligste typer av indirekte bevis omtales. I et eget kapittel behandles den aksiomatiske metode, illustrert ved et primitivt, og likevel instruktivt, eksempel. Et noe vektigere eksempel i tillegg til dette, med detaljerte bevis for en del satser, kunne imidlertid vært på sin plass.

I det følgende presenteres så de grunnleggende elementer av mengdelæren. Sannhetsmengden for et utsagn defineres, og korrespondansen mellom logikkens og mengdelærens operasjoner poengteres meget klart.

Etter dette følger et mindre vellykket kapittel (8) som hovedsakelig inneholder en nokså kjedelig opprømsing av forskjellige egenskaper binære operasjoner kan ha (kommutativitet, assosiativitet etc.), samt av aksiomsystemene for de vanligste algebraiske strukturer. Eksemplet som skal lede til definisjonen av begrepet binær operasjon i en mengde, må

sies å være hverken nærliggende eller egnet, all den stund leseren må gjennom en helt spesiell notasjon, samt en identifisering av to forskjellige mengder, før den binære operasjonen er etablert. At binære operasjoner defineres før funksjoner i sin alminnelighet — og på en helt annen måte — er også uheldig.

I neste kapitel gis en omtale av de naturlige, hele, rasjonale og reelle tall og noen av egenskapene ved disse tallsystemene. Behandlingen er temmelig overfladisk, så dette kapitlet blir nok så mange ord om nokså lite. Irriterende er det også at det innføres en rekke begreper som hverken er naturlig motivert eller blir brukt i det følgende.

Etter et par små kapitler, som ikke inneholder så svært meget, behandles så i kapitlene 12 og 13 begrepene relasjon og funksjon, som belyses ved en del eksempler. Ekvivalensrelasjoner nevnes så vidt, derimot ikke ordningsrelasjoner. Definisjonen av den deriverte funksjon er svært klosset formet, og er da også blitt gal, idet begrepene funksjon og funksjonsverdi er blandet sammen. En uheldig notasjon forekommer også: at $f(x)$ (som vanlig) betegner en funksjonsverdi mens $g(f)$ og $f(g)$ betegner funksjoner (sammensetningene av funksjonene f og g) kan bare virke forvirrende.

Endelig gis i bokens to siste kapitler en liten smakebit av kombinatorikk og sannsynlighetsregning. Fremstillingen er nok også her temmelig overfladisk, men gir på den annen side en god intuitiv forståelse av de fundamentale begrepene.

Alle emnene som behandles i denne boken er jo nå svært aktuelle i forbindelse med den modernisering av matematikkundervisningen i gymnasiet som nå forestår, og tildels foregår. Det vil derfor for mange være av interesse å skaffe seg noe kjennskap til dette stoffet. Som en første introduksjon kan denne boken — trass i de innvendinger som er nevnt — absolutt anbefales. Fremstillingen er klar og gir god intuitiv forståelse, og den er skrevet i en levende stil som gjør den lettlest. Så kan man heller i neste omgang gå løs på en grundigere og mer systematisk oppbygget lærebok.

Erling R. Hansén

GOTTFRIED KÖTHE: *Topologische lineare Räume, I.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 107.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960. 12 + 456 S. Ganzleinen DM 78.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 9 (1961), s. 82.)

Forfatteren har satt seg som mål å gi en systematisk fremstilling av de viktigste begreper, metoder og resultater i teorien for topologiske lineære

rom. Resultatet er blitt den mest omfattende bok som nå fins innen dette felt. Fremstillingen er relativt utførlig, og forfatteren har nedlagt et betydelig arbeid ved å finne de mest mulig instruktive bevis. Ja, enkelte viktige satser blir bevist på opptil tre forskjellige måter. Gjennom hele boken blir det gitt utførlige kildehenvisninger. Forfatteren har valgt ikke å gjøre bruk av oppgaver som en del av fremstillingen. På en måte er dette bekvemt, men det medfører også at oversikten blir minsket.

Kap. 1 gir en kortfattet fremstilling av de nødvendige begreper og satser fra generell topologi. Kap. 2 er av algebraisk natur, bortsett fra en fremstilling av de av Lefschetz innførte lineære topologier, d. v. s. topologier hvor nullelementet har en omegnsbasis som består av lineære underrom. Lefschetz' dualitets-teorem, som er helt analogt til Pontrjagins, blir bevist på en overmåte enkel måte. Kap. 3 og 4 gir det generelle grunnlaget for topologiske lineære rom. Litt overraskende skal et slikt rom pr. definisjon være Hausdorff. Dette fører til vanskeligheter bl. a. ved definisjon av induktive grenser, og forekommer meg å være en for hard innskrenkning. Mackeys teorem om at lokalkonvekse topologier med samme topologisk duale har de samme begrensede mengdene blir først bevist ved et kategori-resonnement og dernest ved en metode som skriver seg fra Lebesgue og Toeplitz. Kap. 5 inneholder en rekke »matnyttige« satser. Her finner vi bl. a. satsen at en lukket mengde er svakt kompakt hvis hver delfølge har et svakt adherenspunkt (Eberlein), og satsen at den lukkede konvekse envelopen til en kompakt også er kompakt (Krein). For den siste satsen gis det både et integrasjonsteoretisk og et kombinatorisk bevis. Kap. 6 behandler visse spesielle rom, og her finner en også en rekke viktige moteksempler. Jeg savnet en symbolindeks.

Dessverre er ikke boken fri for feilslutninger. Beviset for Grothendiecks kompletteringsteorem er ikke holdbart, siden det er mulig å finne et moteksempel til ulikheten (3) s. 272. Det kan også angis et moteksempel til § 21, 8 (1), og § 19, 5 (1) er gal i sin nåværende form. Feilen her er at om A snitter enhver F i et filter $\mathcal{F}$, så behøver selvsagt ikke $A \cap \mathcal{F}$ å danne en basis for $\mathcal{F}$.

Det skulle være unødvendig å tilføye at dette er en bok som enhver med interesse i topologiske vektorrom bør anskaffe seg.

Otte Hustad

YNGVE ROLLOF: *Operationsanalys*. Almqvist & Wiksell / Gebers förlag, Stockholm 1961. 256 s. Sv. kr. 35.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 92–93.)

I første kapitel definerer forfatteren operasjonsanalyse som »användning av vetenskapliga metoder vid analys av aktiviteter utanför de konventionella vetenskapliga områdena«. Med vitenskapelig metode menes i denne sammenheng at den foreliggende situasjon beskrives ved en matematisk eller spesielt sannsynlighetsteoretisk modell, hvoretter matematiske eller statistiske metoder anvendes.

Nå har en f. eks. i fysikk og mekanikk allerede lenge anvendt matematiske modeller, som siden århundreskiftet ofte har fått sannsynlighetsteoretisk formulering. I den statistiske metodelære formuleres på samme måte den såkalte a priori viten i en sannsynlighetsteoretisk modell, hvoretter en (eventuelt på grunnlag av et observasjonsmateriale) søker å ta en avgjørelse som er optimal i en eller annen henseende. Det er således ingen ny ide som innføres i og med operasjonsanalysen. Operasjonsanalyse er lansert som et slagord for øket praktisk forskningsaktivitet på områder der vitenskapelige metoder ikke tidligere ble anvendt.

I de senere år er det publisert en rekke lærebøker i operasjonsanalyse. Rollofs bok atskiller seg imidlertid fra de fleste ved at den ikke er tenkt som noen lærebok, men som »ett anspråksløst forsøk att stimulera företagsledare och andra administratörer att använda operationsanalys«. Boken bør imidlertid få en langt større lesekrete. Den gir en populær og meget underholdende fremstilling av hvorledes en i dag har tatt i bruk matematiske modeller, sannsynlighetsteoretiske overveielser og statistiske metoder på nær sagt alle områder fra ubåtkrig til trafikkundersøkelser, fra jordbruk til sport, og er derfor godt lesestoff for alle som har litt interesse for matematikken og dens anvendelser.

Boken innledes med 4 kapitler som orienterer om operasjonsanalysen. Etter et avsnitt om »matematiska modeller« og et om »Kvantitativ analys i operationsanalys«, følger så 8 kapitler (smlgn. innholdsfortegnelsen) der hvert enkelt er en oversikt over et område fra matematikk eller statistikk som i særlig grad kommer til anvendelse i operasjonsanalyse. Til slutt behandler forfatteren lagerproblemet og operasjonsanalyse anvendt på jordbruk og sport.

Skulle det reises noen innvending mot boken, måtte det være at den i alle fall for et par kapitlers vedkommende — særlig kapitlet om informasjonsteori — er noe knapt formulert, slik at leseren vanskelig får tak på hva det dreier seg om. For enkelte lesere vil dette imidlertid kunne virke som en ytterligere »appetitretare« til å lese mer, og da er vel hensikten med boken oppnådd.

Arnljot Høyland

MOTTATTE BØKER

Fr. Chr. Holb. Arentz: *Undersøgning hvorledes man paa korteste Maade kan opløse saadanne Æquationer, som indeholde flere eller mange ubekjendte Størrelser tillige*. Faksimileutgave av avhandling først trykt i »Ny Samling af det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter«, Annet Bind, Kiøbenhavn 1788, s. 251–286. Trykt i 500 nummererte eksemplarer. Norges Tekniske Høgskole, Hovedbiblioteket, Trondheim 1961. N. kr. 17.00.

Charles F. Brumfiel — Robert E. Eicholz — Merrill E. Shanks: *Fundamental concepts of elementary mathematics*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 11 + 340 pp. \$ 5.75.

Symbols and numerals: Symbols 3–13 * History of numerals 14–28 * Place value and bases 29–49 * Base ten 50–60 * Rational numbers: Definitions 63–68 * Basic principles of addition and multiplication 69–86 * Factors and prime numbers 87–95 * Number pairs, fractions, and rational numbers 96–109 * Subtraction and division 110–119 * Inequalities and the number line 120–130 * Applications 131–138 * Real numbers: Decimals 141–148 * Irrational numbers 149–154 * Real numbers 155–161 * The real line 162–166 * Algebra: Sets and variables 169–186 * Two variables and graphs 187–197 * Negative numbers 198–213 * Inequalities, the number line, and infinite sets 214–225 * “Story” problems 226–233 * Geometry: General principles 237–252 * Measurement 253–260 * Plane and space figures 261–276 * Perimeter, area and volume 277–287 * Similar triangles and trigonometry 288–312 * Answers to odd-numbered exercises 313–336 * Index 337–340.

Viggo Brun: *Regnekunsten i det gamle Norge*. Universitetsforlaget, Oslo, Bergen 1962. 125 s. N. kr. 9.50.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 84–85.)

Innledning 9–10 * Oldfunnene 11–13 * Gulatingsloven 14–18 * Frostatingsloven 19–21 * Kongespeilet 22–30 * Hauk Erlendson 31–34 * Islandsk regnekunst 35–40 * Matheus av Paris 41–42 * Talldyrkelse 43–45 * Regning som fag i norske skoler 46–60 * Den norske militære matematiske skole 1750–1798 61–66 * Bergseminaret på Kongsberg 1757–1815 67–70 * Tilløp til vitenskapelige undersøkelser innenfor matematikken i Norge før 1800 71–76 * Fire representanter for den høyere regnekunst, matematikken: Frederich Chr. Holberg Arentz 77–83 * Diderich Chr. Fester 83–87 * Jens Kraft 87–91 * Caspar Wessel 92–111 * Summary: The art of calculating in old Norway until the time of Abel 112–125.

Werner Burau: *Algebraische Kurven und Flächen, I.* (Sammlung Götschen 435.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. 153 S., 28 Fig. DM 3.60.

Literaturverzeichnis 5-6 * Einleitung. Algebraische Voraussetzungen 7-10 * Geometrische Voraussetzungen 11-14 * Analytische Voraussetzungen 14 * Geraden, Kegelschnitte und ebene Kurven 3. Ordnung und Klasse 15-72 * Allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Kurven 73-151 * Sachregister 152-153 * Namenregister 153.

Ann Cutler — Rudolph McShane: *Trachtenbergs hurtigregnesystem.* Stig Vendelkærs Forlag, København 1961. 224 s. D. kr. 19.50.

Indledning 12-16 * Multiplikation med 11, 12, 6, 7, 5, 8, 9, 4 17-46 * Hurtig multiplikation ved den direkte metode 47-68 * Hurtig- eller »tofinger«-metoden 68-88 * Addition og det rigtige facit 89-112 * Division — Hurtighed og akkurate 112-156 * Kvadrat og kvadratrods 157-190 * Aritmetisk beskrivelse af metoderne i Trachtenberg-systemet 191-224.

Andreas Diemer: *Das Wesen der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung und ihre Bedeutung für die Unternehmensleitung.* Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. 240 S., 76 Fig. DM 28.00.

Das Wesen der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung. Die Entstehung und historische Entwicklung 11-24 * Die Grundlagen der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung 24-105 * Das Zusammenwirken der Organe im Prozess der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung 106-178 * Das Verfahren der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung als Mittel zur Ordnung und Bestimmung der betriebswirtschaftlichen Prozesse. Die Grundtatbestände der ökonomischen Datenverarbeitung 180-216 * Die automatisierte elektronische Datenverarbeitung im Dienste der Unternehmensleitung 216-231 * Literaturverzeichnis 232-233 * Namen- und Sachregister 234-240.

John N. Fujii: *An introduction to the elements of mathematics.* John Wiley & Sons, New York, London 1961. 11 + 312 pp. sh. 47/-.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 85-86.)

Language 1-12 * Symbols 13-23 * Compound statements 24-40 * Arguments and proofs 41-59 * The axiomatic method 60-68 * Introduction to sets 69-88 * Logic and sets 89-105 * The structure of sets 106-123 * Number sets 124-148 * Conditions on sets 149-163 * Problem solving 164-180 * Relations 181-204 * Functions 205-229 * Counting 230-246 * Probability 247-278 * Selections for further reading 279-280 * Glossary of symbols 281-282 * Index of definitions 283-286 * Answers to many odd-numbered exercises 287-301 * Index 303-312.

Watson Fulks: *Advanced calculus. An introduction to analysis.* John Wiley & Sons, New York, London 1961. 15 + 521 pp. sh. 90/-.

The number system 3-18 * Functions, sequences, and limits 19-45 * Continuity and differentiability 46-70 * Integration 71-97 * The elementary transcendental

functions 98–114 * Limits and continuity 115–127 * Properties of differentiable functions 128–143 * Vectors and curves 147–183 * Functions of several variables. Limits and continuity 184–205 * Differentiable functions 206–235 * Transformations and implicit functions. Extreme values 236–268 * Multiple integrals 269–289 * Line and surface integrals 290–333 * Infinite series 337–359 * Sequences and series of functions. Uniform convergence 360–378 * The Taylor series 379–408 * Improper integrals 409–426 * Integral representations of functions 427–450 * Gamma and beta functions. Laplace's method and Stirling's formula 451–462 * Fourier series 463–497 * Elementary differentiation and integration formulas 499 * Answers, hints and solutions 501–516 * Index 517–521.

Peter Henrici: *Discrete variable methods in ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, New York, London 1962. 11 + 407 pp. sh. 87/–.

Introduction 1–5 * One-step methods for initial value problems. Euler's method for a single equation of the first order 7–63 * General one-step methods for a single equation of the first order 64–107 * General one-step methods for systems of equations of the first order 108–163 * One-step methods for systems of equations of higher order 164–184 * Multistep methods for initial value problems. Multistep methods for equations of the first order 187–288 * Multistep methods for special equations of the second order 289–343 * Boundary value problems. Direct methods for a class of nonlinear boundary value problems of the second order 345–388 * Bibliography 389–400 * Index 401–407.

Torben Jacobsen: *Hovedskolens nye geometri*. Gyldendal, København 1962. 66 s. D. kr. 7.75.

Indledning 7 * Punkter 7–8 * Linier 9 * Vinkler 10–15 * Trekkanter 16–23 * At nedfælde den vinkelrette 24 * Højder 25 * Ensvinklede trekkanter 26 * Fremstilling af højde- og afstandsmåler 27–28 * Højdemåling 29 * Afstandsmåling 30 * Målestoksforhold 31–35 * At tegne en vinkel lig en given 36 * At oprejse den vinkelrette 37 * Kvadrat 38–39 * Rektangel 40–41 * At tegne en linie parallel med en given 42 * At dele et liniestykke 43 * Rhombe 44–45 * Parallelogram 46–47 * Trapez 48–51 * Cirkel 52 * Areal 53–58 * Rumfang 59–64 * Pyramide 65–66.

Henning E. Jensen — Bent Rasmussen: *Sjette klassens regnebog*. Gyldendal, København 1961. 136 s. D. kr. 9.75.

Addition 5–8 * Subtraktion 8–13 * Multiplikation 14–16 * Division 16–20 * Decimaltal 21–36 * Brøker 37–52 * Procentregning 53–62 * Forholdsregning 63–73 * Handelsregning 74–84 * Areal og rumfang 85–96 * Træningstimer 97–112 * Opgaver 113–136.

Lothar Koschmieder: *Variationsrechnung, I*. Zweite Auflage. (Sammlung Götschen 1074.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. 127 S. DM 3.60.

Schrifttum 5 * Das Wesen der Variationsrechnung 6–12 * Das freie Extrem der einfachsten Grundintegrale bei festen Enden 12–58 * Bewegliche Enden 59–85 * Gebundene Extreme 86–127.

Paul Lorenz: *Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik*. Bd. III (vom Menschen). S. Hirzel Verlag, Leipzig 1961. 8 + 112 S., 19 Fig. Ganzleinen DM 14.00.

Eindimensionale Verteilungen 1–23 * Zweidimensionale Verteilungen 24–41 * Faktorentheorie und Konstitutionstheorie 42–77 * Theoretische Verteilungen 78–107 * Literatur 108 * Verzeichnis der Bilder 109 * Namenverzeichnis 110 * Sachregister 111–112.

Kurt Magnus: *Schwingungen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1961. 251 S. DM 29.80.

Grundbegriffe und Darstellungsmittel 11–25 * Eigenschwingungen 26–63 * Gedämpfte Eigenschwingungen 63–87 * Aufgaben 87–89 * Aufbau und Wirkungsweise selbsterregungsfähiger Systeme 89–94 * Berechnungsverfahren 94–103 * Beispiele von Schwingern mit Selbsterregung 103–114 * Kippschwingungen 114–125 * Aufgaben 125–126 * Beispiele von Schwingern mit Parametererregung 127–131 * Berechnung eines Schaukelschwingers 131–135 * Parametererregte Schwingungen in linearen Systemen 136–142 * Das Schwerependel mit Parametererregung 142–150 * Aufgaben 150–151 * Die Reaktion linearer Systeme auf nichtperiodische äussere Erregungen 152–160 * Periodische Erregungen in linearen Systemen 160–179 * Anwendungen der Resonanztheorie 179–189 * Erzwungene Schwingungen von nichtlinearen Schwingern 189–210 * Aufgaben 210–212 * Schwinger mit zwei Freiheitsgraden 212–225 * Schwinger mit beliebig vielen Freiheitsgraden 225–239 * Aufgaben 240–241 * Lösungen der Aufgaben 241–246 * Literatur 246 * Sachverzeichnis 247–251.

Poul Mogensen: *Geometri for realafdelingen*. Gyldendal, København 1961. 127 s. D. kr. 8.40.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 80–82.)

Grundbegreber og grundsætninger 5–22 * Paralleller og normaler. Symmetriakse 23–30 * Om cirklen 31–38 * Trekanten 39–52 * Symmetricentrum. Parallelogram. Parallelforskydning 53–68 * Vinkler i forbindelse med en cirkel. Indskreven og omskreven polygon 69–78 * Areal og omkreds af en polygon og en cirkel 79–90 * Lighedannethed 91–104 * Om konstruktioner 105–111 * Ordforklaringer 112–113 * Opgaver 114–127.

Russel V. Person: *Essentials of mathematics*. John Wiley & Sons, New York, London 1961. 8 + 646 pp. sh. 56/–.

Arithmetic 3–86 * Geometry 89–175 * Algebra 179–431 * Logarithms 435–488 * Trigonometry 491–607 * Trigonometric tables 610–635 * Index 637–646.

Yngve Roloff: *Operationsanalys*. Almqvist & Wiksell / Gebers förlag, Stockholm 1961. 256 s. Sv. kr. 35.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 87–88.)

Vad är operationsanalys? 9-10 * Varför använda operationsanalys? 11-26 * Organisation för operationsanalys 27-34 * Personal för operationsanalys 35-43 * Matematiska modeller 47-56 * Kvantitativ analys i operationsanalys 57-60 * Statistik och slumpmässigt urval (sampling) 61-75 * Symbolisk logik 76-87 * Köteori 88-108 * Sökteori eller teorin för optimal ansträngning 109-115 * Informationsteori 116-135 * Teori för strategiska spel 136-160 * Beslutsteori 161-174 * Lineär programmering 175-190 * Principer vid behandling av lagerproblem speciellt beträffande reservdelslager 193-218 * Operationsanalys inom jordbruket 219-224 * Operationsanalys i sport 225-229 * Operationsanalys och/eller sunt förnuft 230-243 * Några facktermer 244 * Formelsamling till köteori 245-250 * Namnregister 251-254 * Sakregister 255-256.

A. P. Speiser: *Digitale Rechenanlagen*. Grundlagen, Schaltungstechnik, Arbeitsweise, Betriebssicherheit. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961. 16 + 432 S., 301 Fig. Ganzleinen DM 69.00.

Abgrenzung einer digitalen Rechenanlage 1-2 * Die Darstellung von Zahlen 2-10 * BOOLEsche Algebra 10-16 * Logische Schaltkreise 16-24 * Der Gesamtaufbau einer Rechenanlage 25-34 * Zur Systematik der Funktionen und Bauteile 35-38 * Die Zusammenarbeit von elektrischen Grundsaltungen 39-48 * Dioden 48-65 * Transistoren 65-107 * Schaltungen mit Magnetkernen 107-120 * Das Parametron 120-125 * Elektronenröhren 126-132 * Relais 132-140 * Besondere Register-Schaltungen 140-145 * Verfahren in Entwicklung 145-174 * Allgemeines über den Aufbau von Rechenwerken 174-185 * Das Rechnen in Dualsystem 185-219 * Das Rechnen in Dezimalsystem 219-243 * Festes und bewegliches Komma 243-249 * Die Rundung 249-255 * Das Rechnen mit mehrfacher Genauigkeit 255-257 * Die automatische Fehlerüberwachung 257-267 * Das gespeicherte Programm 267-269 * Der Aufbau der Befehle 269-274 * Indexregister 274-278 * Das Befehlsverzeichnis 278-283 * Mikroprogrammierung 283-287 * Gesamtaufbau des Leitwerkes 287-288 * Speicherwerke. Allgemeines 288-294 * Magnetkernspeicher 294-332 * Trommel- und Plattenspeicher 332-357 * Laufzeitspeicher 357-359 * Verfahren in Entwicklung 359-371 * Eingabe und Ausgabe 372-386 * Länge und Struktur der Worte 386-388 * Der Verkehr mit dem Speicherwerk 388-393 * Der Gesamtaufbau einer Anlage 393-398 * Betriebssicherheit durch Redundanz 398-400 * Minimalmaschinen 400-401 * Nicht programmgesteuerte Digitalmaschinen 401-402 * Fehlerursachen 403-405 * Fehlerhäufigkeit 405-409 * Der Entwurf betriebssicherer Schaltkreise 409-410 * Programmierte Kontrollen und Korrekturen 411-412 * Diagnostische Programme 412-413 * Vorsorgliche Massnahmen 413-416 * Literaturverzeichnis 417-426 * Sachverzeichnis 427-432.

Erling Heide Sørensen: *Den moderne regnestav*. Cappelen forlag, Oslo 1961. 104 s. N. kr. 12.50.

Regnestavens historikk 9-11 * Beskrivelse av regnestaven 11-13 * Matematisk begrunnelse av stavregningen 13 * Avlesning på skalaene 14-19 * Multiplikasjon 19-24 * Divisjon 24-28 * Større nøyaktighet ved multiplikasjoner 28-31 * Kvadrering, tredje potens, kvadratrot, kubikkrot, sammensatte uttrykk 31-41 * Skalaen CI 41-46 * Divisjon av to tall som er nesten like store 46 * Divisjon med fler enn 3 siffer i kvotienten 46-47 * Multiplikasjon og divisjon med π^2 47-49 * Tommer til

cm og omvendt 49–51 * Pytagoras 51–54 * Løsning av ligninger 54–59 * Trigonometri 59–80 * Stereometri 80–81 * Merkene på løperen og KW, PS 81–82 * Blandede oppgaver 82–96 * Alminnelige regnemetoder 96–101 * Reparasjoner 102–104.

William J. Le Veque: *Elementary theory of numbers*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London 1962. 8 + 132 pp. \$ 5.00.

Introduction 1–21 * The Euclidean algorithm and its consequences 22–35 * Congruences 36–61 * The powers of an integer modulo m 62–72 * Continued fractions 73–95 * The Gaussian integers 96–107 * Diophantine equations 108–120 * Appendix 123–124 * Answers to problems 127–128 * Index 131–132.

Rudolf Zurmühl: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*. Dritte, neubearbeitete Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961. 16 + 459 S., 75 Fig. Ganzleinen DM 36.00.

Grundbegriffe und einfache Rechenregeln 1–15 * Das Matrizenprodukt 15–32 * Die Kehrmatrix 32–39 * Komplexe Matrizen 39–47 * Lineare Abbildungen und Koordinatentransformationen 47–61 * Der GAUSSsche Algorithmus 62–83 * Lineare Abhängigkeit und Rang 83–96 * Allgemeine lineare Gleichungssysteme 97–105 * Orthogonalsysteme 105–119 * Polynommatrizen und ganzzahlige Matrizen 119–128 * Quadratische Formen 129–140 * Einige Anwendungen des Matrizenkalküls 141–149 * Eigenwerte und Eigenvektoren 150–167 * Diagonalähnliche Matrizen 167–181 * Symmetrische Matrizen 182–194 * Normale Matrizen. Die Matrix $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$. Abschätzungen 194–210 * Eigenwerte spezieller Matrizen 210–226 * Minimumgleichung, Charakteristik und Klassifikation 228–239 * Die Normalform. Hauptvektoren und Hauptvektorketten 239–256 * Matrizenfunktionen und Matrizen-gleichungen 256–272 * Eigenwertaufgabe: Iterative Verfahren 273–313 * Eigenwertaufgabe: Direkte Verfahren 313–335 * Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme 335–351 * Matrizen in der Elektrotechnik 352–366 * Anwendungen in der Statik 366–379 * Übertragungsmatrizen zur Behandlung elastomechanischer Aufgaben 379–422 * Matrizen in der Schwingungstechnik 423–433 * Systeme linearer Differentialgleichungen 433–453 * Namen- und Sachverzeichnis 454–459.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 221–223 sendes til oppgaveredaktøren, lektor Ragnar J. Solvang, Plogveien 34B, Manglerud, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i hefte 4, være sendt innen 1. oktober 1962. Innen samme frist kan man sende inn løsninger av oppgavene 219 og 220, som det ved en feiltagelse ikke ble innkalt løsninger av i forrige hefte.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

221. I samme plan har man fire cirkler C_A , C_B , C_C og C_D . Enhver af cirklerne berører de andre udvendigt, og systemerne $C_A C_B C_C$ og $C_B C_C C_D$ er ligedannede. C_A har radien $a = 1$. Hvor store er de andre radier?

B. Thoroddsen

(Smlgn. oppg. 213, som det hittil ikke er innkommet noen løsning av.)

222. En funktion $f(x)$ satisfierar följande villkor:

- 1) $x < 0$; $f(x) \equiv 0$.
- 2) $f(+0) = e^{-y}$, $0 < y < \infty$.
- 3) $x > 0$; $f'(x) = e^{-y}[1 - f(x - y)]$.

Visa, att $f(x) \rightarrow 1$ monotont, då $x \rightarrow \infty$.

Bengt Joel Andersson

223. En følge $\{a_n\}$ av reelle tall er definert ved

$$a_{n+1}|a_{n+1}|^r = (a_n - k)|a_n - k|^{r+k},$$

der k og r er positive tall, og a_0 er gitt.

- a) Vis at $\{a_n\}$ divergerer for alle a_0 dersom $k > 2$.
- b) Er $0 < k \leq 2$, fins et entydig tall α (avhengig av k og r) slik at $\{a_n\}$ divergerer dersom $a_0 < \alpha$ og konvergerer dersom $a_0 > \alpha$. Vis for siste tilfelle at følgen konvergerer mot $k - \alpha$.

- c) Sett $a_0 > \alpha$, og bestem $\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

H. Killingbergtrø

224. La x være et positivt tall $\neq 1$, og n et naturlig tall. Bevis ulikheten

$$x + \frac{1}{x^n} > 2n \frac{x-1}{x^n-1}.$$

István Beck

225. Vis at

$$\ln 2 = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$

$$\pi = \frac{9\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(3n+1)(3n+2)}.$$

Christian Berg

LØSNINGER

212. Vis at

$$\frac{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi}} = \sqrt[4]{2}.$$

Åge Ramberg

Løsning: Brøken er et spesialtilfelle av

$$\frac{\theta_1(0)}{\theta(0)} = \frac{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}},$$

der $q = e^{\pi i \omega' / \omega}$ og $\omega' = i\omega$, altså $e_1 = -e_3$ og $e_2 = 0$, samt $q = e^{-\pi}$. Nå er

$$e_2 = \frac{\pi^2}{12\omega} (H_1^4(0) - \theta^4(0)) = 0,$$

som sammen med

$$\theta^4(0) + H_1^4(0) = \theta_1^4(0)$$

gir

$$2\theta^4(0) = \theta_1^4(0), \quad \frac{\theta_1(0)}{\theta(0)} = \sqrt[4]{2}, \text{ q. e. d.}$$

Otto Borgersen

Oppgaven er også løst av L. Carlitz og P. W. Karlsson.

214. Anvend identiteten

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{p+\nu}{\nu} = \binom{p+n+1}{n}$$

til at vise, at $\sum_{v=1}^n v^p$ kan skrives som et polynomium af $(p+1)$ -te grad i n (jfr. Chr. Gram: »Om potenssummer«, NMT 8 (1960), s. 79–80, og Ove J. Munch: »Om potensproduktsummer«, NMT 7 (1959), s. 5–19).

Poul Einar Hansen

Lösning: Låt

$$P_p(v) = (v+1)(v+2) \dots (v+p) = v^p + A_{p,1}v^{p-1} + \dots + A_{p,p}.$$

Då är

$$\binom{p+v}{v} = \frac{1}{p!} P_p(v)$$

och

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n P_p(v) &= p! \sum_{v=0}^n \binom{p+v}{v} = p! \binom{p+n+1}{n} = \frac{1}{p+1} (n+1)(n+2) \dots (n+p+1) \\ &= \frac{1}{p+1} P_{p+1}(n) = \frac{1}{p+1} (n^{p+1} + A_{p+1,1}n^p + \dots + A_{p+1,p+1}). \end{aligned}$$

Man inser lätt att koefficienterna K_r i uttrycket

$$P_p(v) + K_1 \cdot P_{p-1}(v) + \dots + K_{p-1} \cdot P_1(v) + K_p$$

kan väljas så, att detta uttryck blir lika med v^p . Man får då, att

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n v^p &= \sum_{v=0}^n v^p = \sum_{v=0}^n P_p(v) + K_1 \cdot \sum_{v=0}^n P_{p-1}(v) + \dots \\ &= \frac{1}{p+1} (n^{p+1} + A_{p+1,1}n^p + \dots) + \frac{K_1}{p} (n^p + A_{p,1}n^{p-1} + \dots) + \dots, \end{aligned}$$

varav framgår, att $\sum_{v=1}^n v^p$ är ett polynom av $(p+1)$:sta graden i n .

L. Lindskog

Opgaven er også løst av Steffen Strøbæk.

215. Av plasshensyn utstår løsningen til neste hefte.

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1961 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 13.2 W. W. Rogosinski, Århus: *Linear functionals on bounded polynomials.*
27.2 Chr. U. Jensen: *Nogle bemærkninger om den ikke-Pell'ske ligning.*
2, 23.3 W. Fenchel: *Om geometriens opbygning.*
13.3 D. Kendall, Oxford: *Some stochastic problems associated with comets.*
27.3 O. Lehto, Helsingfors: *Recent developments in the theory of quasiconformal mappings.*
24.4 A. Zygmund, Chicago: *Differentiability of smooth functions.*
12.5 G. Birkhoff, Harvard University: *What every mathematician should know about lattices.*
17.5 P. Erdős, Hungarian Academy of Sciences: *Problems and results in number theory.*
26.5 K. Sellin: *En sammenligning av klassiske og intuitionistiske utsagnslogikker.*
9.10 P. F. Schmidt, Århus: *Om Toeplitz-matricers egenverdier.*
16.10 Anton Jensen: *Lidt om kombinatorisk topologi.*
30.10 G. Baxter, Minnesota, (Århus): *Polynomials defined by a difference system.*
20.11 Fr. Fabricius-Bjerre: *Om polygoner i det projektive rum.*
4.12 A. E. Taylor, Los Angeles: *The minimum modulus of an operator and its use in spectral theory.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

Tre foredrag i forårssemestret (holdt både i København og i Århus):

- H. Tornehave: *Om kontinuitet og grænseværdi.*
17.10 B. Christiansen: *De irrationale tals stilling i realskolens matematikundervisning.*
18.10 Chr. Gram: *Lidt om regnemaskiner.*
18.10 Forevisning af Regnecentralen.

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 23.1 V. Brun, Oslo: *Om irrasjonalitetsproblemer.*
15.3 J. Manninen: *Ensi kertaluuvun osittaisdifferentiaaliyhtälöiden karakteristika-teoriasta [Om karakteristikteorin av partiella differentialekvationer av första ordningen].*
29.3 P. J. Myrberg: *Hyperpallon automorfismeista [Om automorfismer av hyper-sfär].*

- 17.4 O. Frostman, Stockholm: *Konveksa mängder av potentialer och extremala element.*
- 12.5 H. Haathi: *Tilavuusmetriikasta affiinilla monistolla* [Om volummetrik i en affin mångfaldighet].
- 17.5 E. Reich, Minnesota: *Conformal maps of infinitely-connected regions.*
- 20.9 P. J. Myrberg: *Toisen asteen polynomien iteraatioista* [Om iteration av polynom av andra graden].
- 11.10 J. Väisälä: *n-ulotteisista kvasikonformikuvauksista* [Om n-dimensionala kvasikonforma avbildningar].
- 29.11 O. Jussila: *Topologisen avaruuden peitteistä* [Om övertäckningar av topologiska rummen].

FINLANDS MATEMATIK-, FYSIK- OCH KEMILÄRARFÖRBUND.

- 26– Årsmöte. Matematikens ställning i studentexamen, inledare Urpo Kuusko-
- 27.2 ski; diskussion. De matematiska ämnenas representation i Skol(över)-styrelsen, inledare Jarmo Nyström; diskussion. Offentligt uttalande om ovanstående.
- 19– Kurs i ekonomisk fostran. Föredrag av matematiskt innehåll, bl. a. om
- 21.6 sannolikhetsskalkyl och statistik. Förevisning av databehandlingsmaskiner.
- 27– Sommardagar i Rovaniemi. På programmet bl. a. de matematisk-natur-
- 29.6 vetenskapliga ämnenas ställning i gymnasiet.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

- 1.3 Steingrímur Baldursson: *Om molekylers indre bevægelse og simple kemiske processers mekanismer.* Forevisning af film.
- 22.3 Magnus Magnusson: *Matematikundervisningen i de højere skoler og læreanstalter.* Diskussion.
- 23.6 P. Naur, København: *Algol.*
- 18.10 Generalforsamling.
- 1.11 Helgi Sigvaldason: *Om elektroniske regnemaskiner.* Derefter diskussion om Universitetets påtænkte nye Institut for de exakte videnskaber.
- 6.12 Gunnar Bøðvarsson: *Populationsteoretiske betragtninger om optimering af fiskeri.*

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 31.1 Ø. Ore, Yale University: *Problemer i graf-teori.*
- 9.3 K. Krickeberg, Heidelberg: *Surface area.*
- 26.4 M. D. Donsker, Minnesota: *Integration in function spaces.*
- 24.5 Th. Skolem: *Litt om beviser for resiprositetssatser.*
- 21.8 A. Selberg, Princeton: *Nyere undersøkelser over diskontinuerlige grupper.*
- 1.9 H. Cartan, Paris: *Sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.*
- 17.10 I. Fleischer: *Tellbarhetsspøkelset i integrasjonsteorien.*
- 21.10 P. Holm: *Kompakte grupper og nestenperiodiske funksjoner.*

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

- 22.4 I. Johansson: *Nye begrepsdannelser i matematikken.* (Hamar.)
- 22.4 E. Bøhn: *Pedagogiske og faglige problemer i den nye gymnasordningen.* (Trondheim.)

- 28.7– Sommerkurs på Risøya. Foredragsholdere: I. Johansson, H. Trefall, P. Holm
6.8 og E. Hansén.
- 20.9 K. Piene: *Nordisk komite for revisjon av matematikkundervisningen*. (Oslo.)
- 23.9 I. Johansson: *Om den mengdeteoretiske terminologi*. (Sandefjord.)
- 30.9– K. Piene: *Modernisering av matematikkpensumet i skolen*. (Värmland di-
1.10 strikt av L. R. og Hamar krets, Karlstad.)
- 7.10 R. Solvang: *Matematikken og etterutdanningen*. (Oslo.)
- 21.10 S. Selberg: *Endringer som idag bør kunne gjøres i matematikkpensumet på reallinjen*. (Trondheim.)
- 11.11 R. Solvang: *Nye planer i matematikken*. (Kristiansand S.)
- 6.12 A. Jacobsen og K. Alfsen: *Gymnaskomiteens problemopplegg*. (Oslo.)

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

- 25.3 Möte i Stockholm:
T. Ganelius: *En taubersats för distributioner*.
B. Ajne: *En uppskattning av tidsmedelvärdet av en stokastisk process*.
M. Essén: *Existens av lösningar till faltningsslikheter*.
Y. Domar: *Speciella funktioner på kommutativa halvgrupper*.
J. Friberg: *Partiella hypoelliptiska operatorer av ändlig typ*.
- 3.6 Möte i Uppsala:
F. Odquist: *Ett icke-lineärt egenvärdeproblem inom krypteorin*.
H. Gask: *Om asymptotiken vid vissa slumpvandringar*.
A. Schinzel, Warschawa: *On some problems of the arithmetical theory of continued fractions*.
S. O. Carlsson: *Ortogonalitet i normerade rum*.
L. Carleson: *Existens av randvärden till positiva harmoniska funktioner i flera variabler*.
- 18.11 Möte i Stockholm:
Orientering angående internationella matematikerkongressen i Stockholm 1962.
O. Schmidt, København: *Træk af matematikkens forantikke historie*.
F. Eriksson: *Krökningsplan i Riemannska rum*.
L. Ingelstam: *Om enhetssfärer i Banachalgebror*.
B. Brodda: *En entydighetssats för lösningar till partiella differentialekvationer*.

FÖRENINGEN I LUND FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG
UNDERVISNING.

- 16.4 Vårmöte. Föredrag av matematiskt intresse:
F. Lannér: *Elementär mängdlära*.
I övrigt ägnades mötet åt undervisningsfilm samt föredrag och demonstrationer i kemi.
- 15.10 Höstmöte, som ägnades helt åt fysiken, speciellt undervisnings- och utbildningsproblem.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM.

3-4.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 9, s. 92.

VÄSTVENSKA FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG
UNDERVISNING.

- 2.3 T. Herlestam: *Binär aritmetik.*
- 7.3 T. Herlestam: *Maskiners utformning och funktionssätt.*
- 9.3 T. Herlestam: *Allmänt om kodning.*
- 14.3 I. Dahlstrand: *Algol, ett internationellt kodspråk för datamaskiner.*
- 10.4 E. Strand: *Synpunkter och erfarenheter från eftergranskning av examensskrivningar i matematik.*
- 29.10 Årsmöte i Göteborg.
M. Matell: *Våtare vatten, ytkemi i hem och industri.*

FORENINGSNYTT

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM

höll årsmöte den 3-4 januari 1962. Till ordförande resp. vice ordförande omvaldes lektor Ernst Knave och rektor Walter Ekman samt till sekreterare resp. kassaförvaltare adjunkterna Jan O. Unenge och Jacob Isander.

Under årsmötet hölls följande föredrag och demonstrationer:

- B. Liljeqvist: *Undervisningen i radioaktivitet i skolkurserna.* Föredrag med experiment.
- A. Nilsson: *Vågfrontoptik för enkel problemlösning.*
- M. Hultin: *Naturvetenskapen och det nya gymnasiet.*
- B. Nordfors: *Fysikundervisning på nytt sätt.* Diskussion.
- L. Sandgren: *Om Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen.*
- J. Orring: *Matematiken, fysiken och kemin i Grundskolan.* Diskussion.
- S. Lindholm: *Nya fysikförsök på Grundskolans kursmoment.* Demonstrationer.
- G. Frick: *Äggvittemolekyler.*

Under årsmötet företogs visning av Wenner-Gren Center, av bl. a. Universitetsbokhandeln samt en forskarbostad.

FORENINGENES FORMENN

Nedenfor angis navn og adresse til formennene i de utgivende foreninger:

- Dansk matematisk forening: Professor Hans Tornehave, Tornebakken 45, Virum.
- Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark: Lektor Henrik Meyer, Bakkedraget 15, Birkerød.
- Finlands matematiska förening: Kansler P. J. Myrberg, Helsingfors Universitet.
- Finlands matematik-, fysik- och kemilärarförbund: Dr. Urpo Kuuskoski, Linnankoskenkatu 12 A, Helsinki.

Íslenska stærðfræðafélagið: Professor Steingrímur Baldursson, Gláðheimar 18, Reykjavík.

Norsk matematisk forening: Professor Karl Egil Aubert, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

Norsk lektorlags matematikkseksjon, Oslo krets: Lektor Torjus I. Engelskjøn, Nadderud h. skole, Bekkestua.

Svenska matematikersamfundet: Professor Åke Pleijel, Matematiska institutionen, Sölvegatan 14, Lund.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning: Rektor Johan Hemmingsson, Johannes Samrealskola och Gymnasium, Rådmansgatan 24, Malmö S.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm: Lektor Ernst Knave, Näckrovägen 14, Solna.

Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning: Rektor Arne Pleijel, Hjortmossegatan 160, Trollhättan.

UTNEVNELSER

Til professor i matematik ved Danmarks tekniske Højskole: Lektor, afdelingsleder V. Jørgensen.

Till professor i matematik vid Helsingfors Universitet: Biträdande prof., Fil. dr. O. Lehto, som efterföljer prof. P. J. Myrberg.

Till professor i tillämpad matematik vid Helsingfors Universitet: Prof., Fil. dr. P. Laasonen.

Till professor i matematik vid Turun Yliopisto: Biträdande prof., Dr. O. Hellman.

Till professorer i matematikk ved Universitetet i Oslo: Prof., dr. H. Selberg og dosent, dr. K. E. Aubert.

Till professor i statistikk ved Universitetet i Oslo: Prof., dr. O. Reiersøl.

Till biträdande professor i matematik vid Turun Yliopisto: Docent, Fil. dr. Y. Kilpi.

Till biträdande professor i matematik vid Tekniska högskolan i Helsingfors: Docent, Fil. dr. O. Tammi.

EN INTERNATIONELL MATEMATIKERKONGRESS

hålls i Stockholm den 15–22 augusti 1962. Närmare upplysningar kan erhållas från kongressens sekretariat, adress Internationella Matematikerkongressen 1962, Djursholm 1.

THE WORLD DIRECTORY OF MATHEMATICIANS

2nd ed., 1961, is now ready and is available from Tata Institute of Fundamental Research, Colaba, Bombay 5, India. The cost is \$ 1.50 or sh. 10/6 per copy, post free. Cheques, which may be in any currency, should be made payable to the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay. Orders may be placed for single copies or in bulk. In the case of bulk orders, copies will be mailed direct to the individuals concerned.

SUMMARY IN ENGLISH

C. L. GODSKE: *Oddvar Bjørgum in memoriam.* (Norwegian.)

An obituary on professor Oddvar Bjørgum, February 7, 1916 – December 22, 1961.

A. SCHINZEL: *On the composite integers of the form $c(ak+b)! \pm 1$.* (English.)

The author raises the problem whether there exist infinitely many composite integers of the form $c(ak+b)! \pm 1$. An affirmative answer in many cases when $c=1$ follows immediately from Wilson's theorem; other cases are answered in the Theorem p. 8.

TORKIL HEIEDE and HANS JØRGEN HELMS: *Set theory and transfinite cardinal numbers, I.* (Danish.)

In part I of this expository article, elementary (naive) set theory is introduced and treated up to and including the theorem of well-ordering.

HELGE TVERBERG: *On a combinatorial problem.* (Norwegian.)

The following result was first proved by Philip Hall: We want to select n different representatives, one from each of n non-empty sets. This is possible if and only if every union of k of the n sets contains at least k elements.

In the present paper, a simple proof is given of Hall's theorem. Instead of the systematic selection of representatives used in most proofs, elements are now *removed* from the sets until a system of representatives is left.

GUNNAR BLOM and CARL-ERIK FRÖBERG: *On money changing.* (Swedish.)

Let $D(m, n)$ be the number of ways in which a given amount of money n can be changed by means of m given species of coins $a_1, a_2, \dots, a_m$. The paper contains a survey of various methods by which $D(m, n)$ can be calculated.

In Part 1, an account is given of general and exact results concerning $D(m, n)$, including Bell's formula (6) p. 57. In Part 2, proofs are given of two inequalities (A) and (B) pp. 59 and 62, which are possibly new. Part 3 is devoted to a detailed examination of the binary coin system $a_1=1, a_2=2, \dots, a_m=2^{m-1}$. It is proved in 3.2 and 3.3 that, in this special case, the coefficients of Bell's formula can be calculated explicitly by means of simple recurrence relations.

ERNST S. SELMER: *On »flunk« percentages, Farey series and continued fractions.* (Norwegian.)

In an actual case, 26% and 32% (rounded off to the nearest integer) of the students failed to pass two certain examinations. One can conclude that there were at least 19 candidates at each of the examinations. In the case of 34%, the corresponding minimal number of candidates is as high as 29.

These facts are, of course, closely related to the theory of Farey series and continued fractions, and are used as the starting point for a short, elementary treatment of these two topics.

FRITZ HERZOG: *Remarks on a paper by O. Kolberg.* (English.)

The product expansion

$$e^{-z} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n z^n), \quad |z| < 1,$$

was first studied by Kolberg. It is shown that, for $n \rightarrow \infty$,

$$a_n = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{but} \quad a_n \neq \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$