

OM DEN PLANA GEOMETRINS AXIOMSYSTEM

GUNNAR AF HÄLLSTRÖM

1. Inledning. David Hilberts klassiska »Grundlagen der Geometrie« har utkommit i åtta upplagor. Det axiomsystem för euklidisk geometri som bildar framställningens kärna har härvid undergått överarbetning och förändring. Vid sidan därav har många författare givit andra alternativ för en axiomatik, uppfyllande de två grundkraven att vara motsägelsesfri och att karakterisera den ifrågavarande geometriska rymden på ett entydigt sätt så när som på isomorfa avbildningar. Ett tredje grundkrav som abstrakt forskning ställer på axiomatiken är, att grundobjekt och -relationer icke definieras, utom i och genom de axiom de skall uppfylla.

Vid sidan av dessa grundkrav bör emellertid ett gott axiomsystem uppfylla vissa skönhetskrav. Främsta strävan därvidlag torde — med rätta — vara inriktad på att tillse, att axiomen är oberoende av varandra. Denna egenskap testas i allmänhet så, att man påvisar existensen av en modell, uppfyllande alla axiom utom ett visst, a , som då befinnes oberoende av de övriga. Men även om alla axiom i denna mening är oberoende av de övriga, behöver systemet inte vara minimalt, utan en »overlapping« kan fortfarande vara för handen. Följer man de Hilbertska upplagorna, ser man också hur sådana skönhetsfläckar småningom putsas bort. I sin uppenbaraste form ser dessa ut så här: Axiom a lyder » A och C gäller«, axiom b lyder » B och C gäller«. Det är tydligt att b ej behöver följa ur a (och övriga axiom), men att i stället för b kan väljas axiomet » B gäller«. I mindre uppenbara fall är utsagan C icke uttalad i a , men följer ur de axiom som fås när b utelämnas. Jämför nedan axiom II 3, som i tidigare Hilbertupplagor innehöll utsagan i teorem 4.

Nu är det tydligt att en del författare gör avkall på strävan efter oberoende och minimala system för att vinna andra fördelar. En synpunkt är härvid att få fram enkla bevis för geometrins centrala lärosatser. En annan är av mera estetiskt-metodisk karaktär. Man vill få ut så många teorem som möjligt ur förknippningsaxiomen, innan man övergår till

anordningsaxiom, och därefter så många som möjligt utan införande av kongruensbegrepp. Om då ett axiom ur en grupp kan bortfalla eller reduceras med hjälp av axiom ur en senare grupp, föredrar man att låta det stå kvar i den tidigare gruppen.

Utöver de ovan anförda synpunkterna vill jag emellertid taga till tals ett renhetskrav, som Hilbert inte beaktar. Låt oss, liksom Hilbert, som grundobjekt betrakta punkter, rätta linjer och plan, och som grundrelationer förknippning, anordning och kongruens. Mitt krav går då ut på, att *alla* axiom uttalar sig blott om dessa objekt och relationer. Man borde alltså inte i axiomen få tala om element, som kan definieras först efter det man utnyttjat en del av axiomen eller rent av bevisat teorem på basen av dem. Jag menar alltså, att hela axiomsystemet skall kunna framställas före varje deduktion, och då genast kunna fattas i sin helhet. Ur denna synpunkt är det olämpligt att vinkelbegreppet figurerar bland axiomen och att kongruens mellan vinklar framställs som ett a priori-begrepp. Vill man vara sträng, kan man fordra att varje axiom skall vara oavhängigt av de andra även i den meningen, att det inte bygger på något sakförhållande som anges i ett annat axiom. Det skall alltså ha ett tydligt innehåll allena för sig. Geiger [6] vill med rätta reservera ordet »oberoende» för detta stränga krav, medan »obevisbar» lämpligen skulle skrivas för det jag ovan traditionsmässigt har kallat »oberoende». Av det följande torde framgå, att man i stort sett också kan upprätthålla detta strängare krav.

Den synpunkt på axiomatiken jag framhåvt har i själva verket följts av flera författare. Axiomsystem som, måhända efter en obetydlig modifikation, endast innehåller utsagor om grundobjekt och grundrelationer, har t. ex. givits av B. Kerékjártó [8] och av K. Borsuk & W. Szmielew [3]. Detsamma gäller en inspirerande föreläsningsserie av R. Nevanlinna på 1930-talet vid Helsingfors Universitet, vilken i många stycken varit vägledande även för föreliggande uppsats. I alla dessa fall har emellertid principen för möjligheten att relativt kort och elegant komma fram till centrala och till synes elementära teorem kommit till sin rätt på bekostnad av att systemet innehåller axiom och axiomelement som kan härledas ur andra. Framför allt figurerar här bland axiomen den sats, som i litet friare formulering uttrycker, att om $\triangle ABC$ och $A'B' \equiv AB$ är givna, så existerar exakt två punkter C' och C'' , så att $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$. Satsen kan dock bevisas medelst de övriga som axiom medtagna utsagorna. I själva verket har Nevanlinna senare utelämnat detta axiom i ett föredrag [10] som sedermera även införts i en lärobok i geometri av E. J. Nyström [12]. I detta sammanhang nämnes dock ingenting om *hur* man kan befria sig från det utelämnade axiomet.

Sådana anvisningar har jag endast funnit i ett arbete av H. Coxeter [4]. Där hänvisas till ett äldre arbete av H. Forder [5]. Den väg Coxeter här summariskt utpekar leder kanske inte precis till en labyrinth, men väl till en djungel. Det blir mera fråga om att satsen *kan* bevisas än om *hur* den borde bevisas. Jag har följt det utpekade spåret och därjämte gjort försök att rätta ut vägen en del för att komma fram till en acceptabel bevisgång. Detta har varit närmaste anledning till denna uppsats, i all synnerhet då som sagt ingen lärobok i ämnet mig veterligen innehåller en fullständig redogörelse för den behövliga bevisgången. — Läsare som är obekanta med axiomatik i Hilberts anda kunde draga nytta av att stifta bekantskap med den värdefulla orientering J. O. Stubban givit i denna tidskrift [13].

I det följande inskränker jag mig till den *plana* geometrin. Till en början uppställs grundobjekt och -relationer jämte beteckningssätt i ord och tecken. Så följer en förteckning över de axiom som lägges till grund för framställningen. Sist följer en framställning av de viktigaste teoremen och definitionerna ur den *absoluta* geometrin, d. v. s. den för euklidisk och hyperbolisk geometri gemensamma delen. I denna lärobyggnad utnyttjas alltså icke parallellaxiomet. För att icke göra framställningen alltför lång, har lydelsen av en del uppenbara bevis och definitioner utelämnats, medan i andra fall hänvisning har gjorts till olika läroböcker, som innehåller vederbörande bevis i en form som passar in i systemet.

Det axiomsystem och i all synnerhet det bevissystem som nedan beskrives har självfallet inga anspråk på att närma sig idealet ens ur den framhävda synvinkeln.

2. Axiomsystemet. GRUNDOBJEKT utgör *punkter* (pt, pter, betecknade med stora bokstäver $A, B, \dots$) samt *räta linjer* (rl, betecknade med små bokstäver $a, b, \dots$).

GRUNDRELATIONER: 1. *Förknippning* eller *incidens* mellan en pt och en rl, kan uttryckas med att a går genom (gm) A eller att A ligger på a eller tillhör a , i tecken $A \in a$ eller $a \ni A$. Att A ej är förknippad med a kan uttryckas med att A ligger utanför a eller med $A \notin a$. Om det existerar ($\exists$) en pt förknippad med två rl b och c , säges b och c *skära* varandra, i motsatt fall vara *parallella* (bet. $b \parallel c$). Observera att vi i motsats till de flesta författare använder ordet parallell för att beteckna varje icke-skärande i planet; alltså innefattar ordet i Bolyai-Lobatscheffskys geometri (och således i den absoluta) både gränsparalleller och överparalleller.

2. *Anordning* kan existera mellan 3 skilda punkter A, B, C och ut-

tryckas med att t. ex. B ligger mellan A och C eller mellan C och A , i tecken ABC , vilket är likabetydande med CBA .

3. *Kongruens* kan äga rum mellan två punktpar (utan avseende på ordningsföljden). Att AB är kongruent med CD betecknas $AB \equiv CD$ eller $BA \equiv CD$ eller $CD \equiv AB$ etc.

Grundobjekt och -relationer skall nu uppfylla följande axiom:

I. Förknippningsaxiom.

I 1. Det existerar åtminstone en rl, och på varje rl ligger åtminstone en pt.

I 2. Utanför varje rl finns åtminstone en pt.

I 3. Gm två pter går inte mer än en rl.

I 4 (*parallellaxiomet*) lyder i euklidisk geometri:

I 4a. Det existerar en rl a och en pt A utanför a , så att icke mer än en rl gm A är parallell med a .

I Bolyai-Lobatscheffskys geometri (hyperbolisk geometri) blir lydelsen:

I 4b. Det existerar en rl a och en pt A utanför den, så att gm A går åtminstone två rl, som båda är parallella med a .

(I absolut geometri bortfaller I 4a–b.)

II. Anordningsaxiom.

II 1. Om anordning äger rum mellan tre pter, så ligger dessa på en rl.

II 2. Mellan två pter existerar alltid en tredje.

II 3. Av tre pter är aldrig mer än en mellan de övriga.

II 4. (Pasch's axiom): Om A , B och C ej ligger på samma rl, och om rl l icke går gm C men går gm en pt mellan A och B , så finns det på l en pt mellan B och C eller en pt mellan C och A .

II 5. (*Kontinuitetsaxiomet* eller Dedekinds axiom): Om alla pter på en rl är delade i två klasser sålunda, att ingen pt ur en klass ligger mellan två pter ur den andra klassen, så existerar det en pt, som ligger mellan vilket som helst par av två övriga pter tagna ur var sin klass.

III. Kongruensaxiom.

III 1. Om A och B är två pter, och om C ligger på rl c , så existerar på c exakt två pter D och E , så att $AB \equiv CD$ och $AB \equiv CE$. Härvid är C mellan D och E .

III 2. Om $AB \equiv CD$ och $CD \equiv EF$, så är $AB \equiv EF$.

III 3. Ur ABC , $A'B'C'$, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ följer $AC \equiv A'C'$.

III 4. Ur ABC , $A'B'C'$, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $AD \equiv A'D'$, $BD \equiv B'D'$ följer $CD \equiv C'D'$.

3. Satser som kompletterar axiom. Det må framhåvas, att vi i hela den följande framställningen helt ignorerar parallellaxiomet I 4, eftersom vi blott är inställda på den absoluta plangeometrin.

Axiomen I 1, I 3, II 2, II 3 och III 1 ges vanligen en något fyligare formulering, varigenom man vinner, att de enskilda grupperna i högre grad bildar helheter för sig. T. ex. satisfieras vår axiomgrupp I av en värld innehållande en enda rl med en pt på och en utanför. Med de fyligare axiomen brukar man bevisa existensen av både tre $pter$ och tre rl .

Enligt I 1 existerar en rl och en pt , enligt I 2 ytterligare en pt , alltså et $ptpar$ AB . Låt c vara en godtycklig rl och $C \in c$. Betrakta de i III 1 nämnda D och E på c . Vi finner: På varje rl finns åtminstone tre $pter$ (vilket kompletterar I 1). Ur $AB \equiv CD$, $CD \equiv AB$ följer enligt III 2 $AB \equiv AB$, alltså

TEOREM 1¹: Ett $ptpar$ är kongruent med sig självt.

$\exists F$ med AFB enligt II 2, och enligt II 1 ligger då A , B och F på en rl . Alltså kan i st. f. I 3 fyligare utsägas²

TEOREM 2: Gm två $pter$ går alltid exakt en rl .

Tag nu i III 1 $C = B$ och $c = rl\ AB$, samt betrakta de i axiomet nämnda $pterna$ D och E . Man har $AB \equiv CD$, $AB \equiv CE$ och enligt teor. 1 jämväl $AB \equiv CA$, samt D , E och $A \in c$. Enligt utsagan »exakt två« i III 1 är då $A = D$ eller $A = E$ och enligt sista utsagan i III 1 vidare ABE resp. ABD . Som komplettering till II 2 ser vi nu att $\exists F, G, H$ på c , så att FAB , AGB , ABH , och ur II 3 framgår att F, G, H alla är olika $pter$. Så fås

TEOREM 3: Om A och B är två givna $pter$, existerar tre andra $pter$ F, G, H (på $rl\ AB$), så att FAB , AGB och ABH . FÖLJDSATS: På varje rl finns minst fem $pter$.

»Sammanbindes« 5 $pter$ av en rl med en pt utanför den, ser man lätt att $\exists$ 21 $pter$ (och 21 rl). Mer kan som känt ej bevisas ur I 1–3 och II 1–3, vilket framgår ur Veblens bekanta modell. För följande satser kräves II 4.

TEOREM 4 (komplettering av II 3): Om tre $pter$ ligger på en rl , så är en och blott en av dem mellan de övriga.

Bevis: [7, s. 6].

TEOREM 5: Ur ABC och BCD följer ABD (och ACD).

TEOREM 6: Ur ABC och ACD följer ABD och BCD .

TEOREM 7: Ur ACD och ABD följer ACB eller ABC .

¹ Tillägg till III 1 i Hilberts äldre upplagor.

² Om I 3 ersättes med teor. 2, kan i själva verket axiom II 2 helt strykas. Liksom i beviset till teor. 3 finner man nämligen då, att till A och B existerar H med ABH , varefter II 2 kan bevisas som i [7, s. 5–6].

TEOREM 8: *Ur ABC och ABD följer antingen ADC och BDC eller ACD och BCD .*

För bevisen av teor. 5–8 se [5, s. 51–52] eller för teor. 5–6 [7, s. 7], varefter 7–8 fås lätt med hjälp av 5–6.³

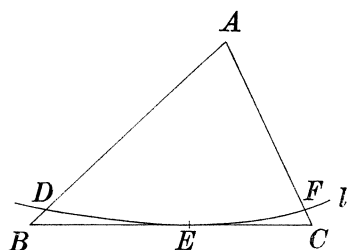


Fig. 1

Axiom II 4 utsäger icke att det vore uteslutet att l hade både en pt mellan B och C och en mellan C och A . Men det kan *bevisas*, att »eller» kan utbytas mot »antingen eller», så att en rl inte kan skära alla tringelsidor i inre pter:

TEOREM 9⁴ (fig. 1): *Antag att A , B och C ej är på en rl, samt att ADB , BEC , CFA . Då kan ej D , E och F ligga på en rl.*

Bevis: Antag t. ex. DEF . Tillämpas II 4 på A , D , F och rl BC , fås en motsägelse.

4. Satser ur den affina absoluta geometrin. Teoremen 2–9 innehåller icke kongruensbegreppet och kan därför anses tillhöra den affina geometrin. I bevisen har visserligen III 1–2 utnyttjats, men detta har blott skett, för att vi har velat utgå från ett reducerat axiomsystem. De nämnda teoremen innehåller i själva verket en viss utbyggnad av grupperna I och II, som kan anslutas till grunden för en affin (icke metriserad) geometri. I denna paragraf ger vi ytterligare några affina satser, som inte heller gör bruk av vare sig parallell- eller kontinuitetsaxiom.

Antag att alla rl ginge genom A . Välj $l \ni A$, $B (\neq A) \in l$ enligt följsatsen i teor. 3 samt $C \notin l$ enligt I 2. Enligt teor. 2 existerar m gm B och C . Om $A \in m$, är enligt I 3 $m = l$, ehuru $C \in m$ och $C \notin l$. Alltså fås

TEOREM 10: *Det finns en rl, som inte går gm en given pt.*

TEOREM 11: *Det finns oändligt många pter mellan två givna pter A och B samt oändligt många pter X så att ABX . FÖLJSATS: På varje rl finns oändligt många pter.*

Beviset erhålles genom upprepat bruk av teor. 3 med beaktande av teor. 6.

TEOREM 12: *Gm en given pt A går det oändligt många rl.*

Bevis: Välj $m \not\ni A$. Gm varje pt på m går en rl gm A .

På en rl l väljes en pt A och en hjälpppt B . En godtycklig pt $C (\neq A) \in l$ hänföres till klassen (X) , om $C = B$, ACB eller ABC , annars (d. v. s. om

³ [3, s. 26–27] upptar teor. 5–6 som axiom och bevisar teor. 7. [8, s. 19–20] upptar teor. 5 och 8 som axiom och bevisar teor. 6.

⁴ Ingår i II 4 uti Hilberts äldre upplagor.

CAB) till klassen (Y) . Om $X_1, X_2 \in (X)^5$, $Y_1, Y_2 \in (Y)$, framgår ur teor. 5, 6 och 8, att alltid Y_1AX_1 och aldrig Y_1AY_2 . Ur Y_1AX_1 , Y_1AX_2 och teor. 8 framgår då, att aldrig X_1AX_2 . Härav fås

TEOREM 13: *En godtycklig pt A på en rl l delar linjens övriga pter i två klasser, så att A aldrig ligger mellan två pter ur samma klass men alltid mellan två pter ur olika klasser.*

DEF. 1: Ptklasserna i teor. 13 kallas *strålar*, A deras *utgångspt*. Beteckning: $(X) = l' = Al' = AB \dots$, $(Y) = l'' = Al''$, varvid l' och l'' kallas *komplementära strålar*.

DEF. 2: Alla pter C med ACB bildar *sträckan* AB med ändpterna A och B . Pterna C kallas även sträckans *inre* pter, alla pter D med DAB eller ABD sträckans *yttre* pter. Om $\exists L \in l$ med ALB (och $A \notin l$), säges l *skära* AB .

TEOREM 14: *En rl l delar alla pter som ej ligger på l i två klasser, så att mellan två av dessa pter då och blott då ligger en pt $\in l$, när pterna tillhör olika klasser.*

Bevis (fig. 2): Välj $B \notin l$ som hjälppt och hänför $C \notin l$ till (X) , om ingen pt mellan B och C ligger på l , till (Y) i motsatt fall. Ur II 4 följer att l skär X_2Y_2 men ej X_1X_2 , ur teor. 9 att l ej skär Y_1Y_2 . Om de två pterna ligger i rl med B , måste dock beviset föras med teor. 5–8.

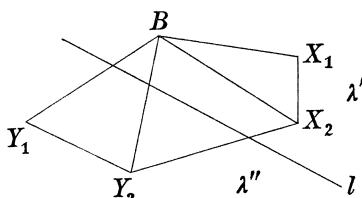


Fig. 2

DEF. 3: De i teor. 14 nämnda ptmängderna kallas *av l begränsade halvplan*. Halvplan betecknas med små grekiska bokstäver och apostrofer, t. ex. $(X) = \lambda' = lB$, $(Y) = \lambda''$.

Obs! Man bevisar lätt att klassindelningen i teor. 13 resp. 14 är oberoende av valet av hjälppt B .

DEF. 4: Två strålar h' och k' med samma utgångspt A kallas en *vinkel* ($\angle$), som är *rak* om $k' = h''$, annars *konkav*. Beteckning: $\angle A = \alpha = h'k' = h'Ak' = \angle BAC = BAK'$, om $B \in h'$, $C \in k'$. A kallas *spets*, h' och k' *ben*.

DEF. 5: $h'k'$ och $h''k''$ kallas *vertikalvinklar*, $h'k'$ och $h'k''$ *nabovinklar*.

TEOREM 15 (fig. 3): *Om en stråle (l') från spetsen (A) av en konkav vinkel ($h'k'$) skär sträckan mellan två pter på var sitt vinkelben (BC med*

⁵ Incidenstecknet $\in$ kan vi utan missförstånd allmänt använda även för ett elements tillhörighet till en klass.

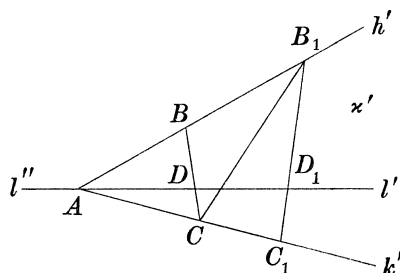


Fig. 3

$B \in h', C \in k'$), så skär den varje sådan sträcka (B_1C_1 med $B_1 \in h', C_1 \in k'$).

Bevis: Tillämpa II 4 först på B, C, B_1 , sedan på B_1, C, C_1 . Man ser då att rl l gm A , som skär BC i D , måste skära B_1C_1 i D_1 . Ur B_1BA (eller BB_1A) följer att B och B_1 ligger i samma av k bestämda halvplan κ' . Men ur CDB och $C_1D_1B_1$ följer enligt teor. 14 att även D och $D_1 \in \kappa'$. Alltså är icke DAD_1 , d. v. s. D och D_1 tillhör samma stråle från A .

DEF. 6: De i teor. 15 nämnda strålarna kallas *inre strålar* till vinkeln, och deras pter bildar den konkava vinkelns *inre* och utgör *inre pter* till vinkeln. Alla övriga pter, utom benens pter och spetsen, bildar vinkelns *yttre*. Vinkelbenen anses tillika definiera en *konvex vinkel*, vars inre pter är den konkava vinkelns yttre och vice versa. En rak vinkels ben ligger på samma rl. Den definierar två halvplan, som in casu kan definieras som vinkelns inre och yttre. Obs! Varje inre pt P av en (konkav) vinkel behöver inte vara en skärningspt av typen D i teor. 15. Det är tillräckligt att på strålen från A gm P finns sådana skärningspter. I hyperbolisk geometri finns i själva verket på varje inre stråle sådana pter, som inte ligger mellan två pter på var sitt vinkelben.

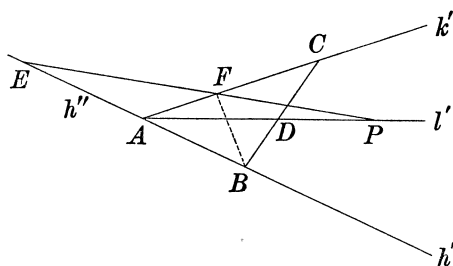


Fig. 4

TEOREM 16 (fig. 4): *Det inre av en konkav vinkel $h'k'$ utgörs av de pter, som ligger i halvplanet hC och tillika i kB , där $B \in h', C \in k'$.*

Bevis: 1) Om P utgör inre pt enligt def. 6, så existerar på $l' = AP \dots$ en pt D med BDC , så att $D \in hC$ och kB , likaså P , eftersom $P = D$ eller PDA eller DPA med $A \in h$ och k . Varje inre pt ligger alltså i de två halvplanen.

2) Antag nu att $P \in hC$ och kB . Välj $E \in h''$. Då EAB , är E i motsatt av k bestämt halvplan mot P , och $\exists F \in k$ med PFE . Ur PFE och $P \in hC$ fås t. o. m. $F \in k'$. Enligt II 4, tillämpat på B, E, F , måste PA skära BF i en inre pt, v. s. b.

DEF. 7 inför *bruten linje* och speciellt *polygon* = sluten bruten linje, *triangel* ($\triangle$), *hörnpt*, *sida*.

Pasch's axiom jämte teor. 9 kan nu omformuleras så:

TEOREM 17: *Varje rl, som träffar en triangelsida men inte går gm någon hörnpt, skär exakt två sidor i inre pter.*

DEF. 8: En *polygon* är *konvex*, om varje rl, som icke går gm två hörn, har högst två pter gemensamma med polygonen.

Ur teor. 17 fås då

TEOREM 18: *Varje triangel är konvex.*

DEF. 9: Med en konvex *polygons vinklar* förstås de konkava (eller raka) vinklar, som bildas av de från ett hörn utgående sidorna. *Närliggande* och *mellanliggande* sidor och vinklar definieras.

DEF. 10 (fig. 5): En rl (l) som skär två andra (h, k i A, B) kallas *transversal* till dessa. Låt h' og k' beteckna strålar i samma av l bestämda halvplan. Då säges vinkeln BAh' och dess vertikalvinkel vardera vara *ensliggande* till vinkeln ABk'' och till dess vertikalvinkel *mensliggande* till dessas nabovinklar.

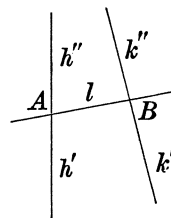


Fig. 5

5. Satser som bygger på kongruensaxiomen men icke på kontinuitetsaxiomet. Eftersom ett ptpar entydigt bestämmer en sträcka och vice versa, kan man tala om sträckors kongruens i st. f. ptpars. Efter införande av strålbegreppet kan vi också ge en omformulering på följande sätt av

AXIOM III 1. Utgående från en pt C kan man på en stråle från C entydigt »avsätta» en sträcka CD kongruent med en given AB (vilket endast skall betyda, att på strålen *existerar* precis en pt D med $CD \equiv AB$).

Grundläggande för entydigheten hos sträckors storleksordning är

TEOREM 19: Om ABC , och om B_1 och C_1 ligger på en stråle utgående från A_1 så att $A_1B_1 \equiv AB$ och $A_1C_1 \equiv AC$, så gäller $A_1B_1C_1$.

Bevis: [3, s. 83], [5, s. 92], [14, s. 23].

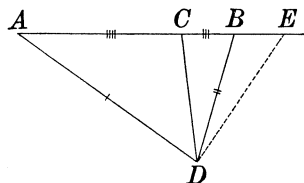


Fig. 6

TEOREM 20 (komplettering till III 3): Ur ABC , $A_1B_1C_1$, $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$ följer $BC \equiv B_1C_1$.

Bevis: [3, s. 82], [5, s. 92], [8, s. 90–91], [14, s. 23].

TEOREM 21 (komplettering till III 4, se fig. 6): Ur ACB , $A_1C_1B_1$, $AD \equiv A_1D_1$, $BD \equiv B_1D_1$, $AC \equiv A_1C_1$ (eller $AB \equiv A_1B_1$) och $BC \equiv B_1C_1$ följer $CD \equiv C_1D_1$.

Bevis ([5, s. 97–98]): Enligt III 3 och teor. 20 är de alternativa förutsättningarna likvärda. Välj E så att ABE och E_1 så att $A_1B_1E_1$ och $B_1E_1 \equiv BE$, vilket är möjligt enligt teor. 3 och III 1. Enligt III 4 är $DE \equiv D_1E_1$, enligt teor. 6 EBC och $E_1B_1C_1$, samt enligt III 4 $CD \equiv C_1D_1$.

Då vi inte har upptagit vinklars kongruens bland grundrelationerna, måste begreppet definieras. Detta underlättas av följande definition och teorem.

DEF. 11 (fig. 7): Om för vinklarna BAC och $B_1A_1C_1$ gäller $AB \equiv A_1B_1$ och $AC \equiv A_1C_1$, kallas sträckorna BC och B_1C_1 *motsvarande transversaler*.

TEOREM 22: Om för två vinklar ett par motsvarande transversaler är kongruenta, så är varje par motsvarande transversaler kongruenta.

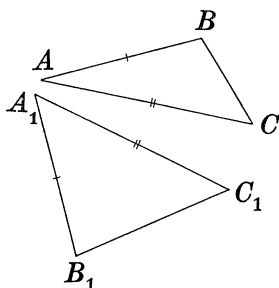


Fig. 7

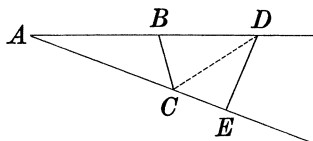


Fig. 8

Bevis (fig. 8): Antag $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$, $BC \equiv B_1C_1$, $AD \equiv A_1D_1$, $AE \equiv A_1E_1$. Enligt teor. 19 är de nämnda pternas anordning på motsv. vinkelben lika. Ur teor. 20 och III 4 eller ur teor. 21 följer först $CD \equiv C_1D_1$ och sedan $DE \equiv D_1E_1$, v. s. b.

DEF. 12: Två vinklar kallas kongruenta, när motsvarande transversaler är kongruenta. Obs! Man kan anse att även för en rak vinkel def. 11 på motsvarande transversaler gäller, varvid III 3 visar att raka vinklar är kongruenta.

TEOREM 23: Varje vinkel är kongruent med sig själv.

Bevis: Motsvarande transversaler sammanfaller och teor. 1 utnyttjas. Men viktigt är, att, om man väljer $AB \equiv AC$, slutsatsen blir att $\angle BAC \equiv \angle CAB$. D. v. s. även om man låter vinkelbenen byta plats, kvarstår kongruensen.

Lätt bevisas transitiviteten:

TEOREM 24: Två vinklar kongruenta med en tredje är sinsemellan kongruenta.

Gm O dras två r1 och på de uppkomna fyra strålarna avsättes kongruenta sträckor $OA \equiv OB \equiv OC \equiv OD$ (fig. 9).

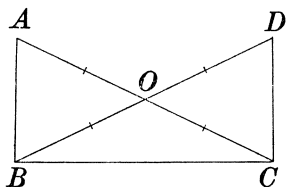


Fig. 9

Tillämpas III 4 på $AOC - B$ och $DOB - C$, fås $AB \equiv DC$ och enligt def. 12 $\angle AOB \equiv \angle DOC$, varav

TEOREM 25: Vertikalvinklar är kongruenta.

På samma sätt erhålles

TEOREM 26: Kongruenta vinklars (eller samma vinkels) nabovinklar är kongruenta.

DEF. 13: Om $\angle \alpha$ är kongruent med nabovinkeln till $\angle \beta$, kallas α och β supplementvinklar. (Ur teor. 26 följer då att kongruenta vinklars supplementvinklar är kongruenta.)

DEF. 14: Två konvexa *polygoner* kallas *kongruenta*, om sidorna i ordning jämte mellanliggande vinklar är parvis kongruenta.

Direkt ur def. 12 följer då följande två kongruensteorem:

TEOREM 27 (Kongr.-teor. I): *Två trianglar med parvis kongruenta sidor är kongruenta.*

TEOREM 28 (Kongr.-teor. II): *Två trianglar är kongruenta, om i dem två par sidor och deras mellanliggande vinklar är kongruenta.*

DEF. 15 inför *likbent triangel*, *ben*, *bas*, *spets*, *spetsvinkel*, *basvinklar*.

Ur def. 12 följer

TEOREM 29: *En likbent triangelns basvinklar är kongruenta.*

DEF. 16: Om OAB , säges OA vara *mindre* än OB (OB *större* än OA); beteckning: $OA < OB$ ($OB > OA$). Likaså definieras $OA < O'B'$ ($O'B' > OA$), om $OA \equiv O_1A_1$, $O'B' \equiv O_1B_1$ och $O_1A_1B_1$. Kongruenta sträckor säges även vara *lika* ($OA = O_1A_1$).

Att avgörandet utfaller entydigt genom att de sträckor som skall jämföras avsättes på samma stråle, garanteras av teor. 19. Att icke samtidigt $OA < OB$ och $OA = OB$ garanteras av III 1 och teor. 1.

TEOREM 30: *Om $AB < CD$ och $CD < EF$, är $AB < EF$. (Gäller även om den ena givna olikheten utbytes mot likhet.)*

Bevis enligt teor. 6; tillägget trivialt.

Vi kunde nu utan vidare *definiera* en sträckas mittpt och en vinkels bisektris (och en normal). Men för att påvisa deras *existens* behöver vi kontinuitetsaxiomet och lämnar därför hela frågan till nästa avsnitt. Existensen av mittpten hade varit mycket enkel att påvisa, om vi — såsom ofta göres — hade uppställt ett tilläggsaxiom III 5 med den i 1 nämnda innebörden.

6. Satser som utnyttjar kontinuitetsaxiomet. Det kan vara bekvämt med ett alternativ till II 5, i vilket klassindelningen inskränkes till pterna av en sträcka eller stråle och lösningens entydighet framhäves:

TEOREM 31: *Om alla pter av en sträcka AB (stråle Al') delas i två klasser, (X) och (Y) , så att ingen pt ur en klass ligger mellan två pter ur den andra, så finns i någondera klassen exakt en pt Q som ligger mellan varje par, X , Y , av andra pter ur var sin klass.*

Bevis (i fallet AB): Gäller för paret X , Y t. ex. ordningsföljden $AXYB$, så kompletteras (X) med A och alla pter P med PAB , (Y) med B och alla P med ABP . De utvidgade klasserna uppfyller II 5, och gränspen Q måste ligga i AB , då ur QXY , AXB , AYB följer AQB . Funnes en gränspnt $Q' \neq Q$, borde pterna mellan Q och Q' höra till olika klasser, vilket är omöjligt.

Man ser att Q delar sträckan AB i två delsträckor AQ och QB , vars alla pter $\in (X)$ resp. (Y) . Omvänt inses lätt följande

TEOREM 32: Varje pt Q på en rl (sträcka) delar den i två strålar (sträckor) med Q som utgångspunkt (ena ändpunkt), så att dessas pter utgör ptklasser av den i II 5 (teor. 31) nämnda arten, sedan den ena kompletterats med Q .

För strålar gäller en analog sats.

Antag $A, B \in l$ och PAB . Då är $PA < PB$. Varje pt $M \in l$ med $AM = BM$ måste alltså tillhöra sträckan AB .

DEF. 17: Om AMB och $AM = BM$, så kallas M mittpten av sträckan AB och säges halvera den.

TEOREM 33: Varje sträcka har precis en mittpt.

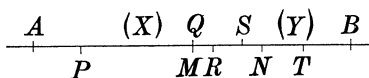


Fig. 10

Bevis (fig. 10): Antag att AB saknar mittpt. Om APB , föres P till klassen (X) om $AP < BP$, till (Y) om $BP < AP$. (Ingendera klassen är tom, ty om t. ex.

$AP < BP$, existerar enligt III 1 och teor. 19 T med $AP = BT$ och BTP , och då är enligt III 3 $AT = BP$ och $AT > BT$.) Om $\exists X_1, X_2, Y$ med $X_1 Y X_2$, skulle man t. ex. ha $AX_1 X_2$ och således ordningsföljden $AX_1 Y X_2 B$. Beaktas klassdefinitionen, fås $AX_2 < BX_2 < BY < AY < AX_2$ i strid med teor. 30. Klasserna uppfyller då teor. 31 och $\exists Q \in$ t. ex. (X) med XQY för varje $X \neq Q$. Välj enligt III 1 $N \in BA \dots$ med $BN = AQ$. Ur $AQ < AB$ följer $BN < BA$ och ANB . Ur $BN = AQ < BQ$ följer ordningen $AQNB$, d. v. s. $N \in (Y)$. Om nu QN hade en mittpt, vore den enligt III 3 även mittpt till AB . Saknar QN mittpt, så existerar enligt II 2 och III 1 R och $S \in QN$ med $QR = NS$ och ordningsföljden $QRSN$, varvid $R \in (Y)$. Trots det är enligt III 3 $BR = AS > AR$. Ur motsägelsen följer existensen av en mittpt M . För varje S med MSB är $SB < MB = AM < AS$, alltså enligt teor. 30 $SB < AS$ och S icke mittpt. $\exists$ således blott en mittpt.

DEF. 18: En inre stråle l' till en vinkel α kallas vinkelns bisektris och säges halvera vinkeln, om den med benen bildar kongruenta vinklar. Komplementärstrålen l'' till en konkav vinkels bisektris kallas bisektris till motsvarande konvexa vinkel. Hela rl l kallas bisektrisinje. Bisektrisinjen till en rak vinkel $h'h''$ säges bilda räta vinklar med benen, utgöra normal till rl h och stå vinkelrätt mot den ($l \perp h$).

DEF. 19 inför begreppen medelnormal och median.

På benen av en godtycklig konkav $\angle C$ avsättes $CA = CB$ och i den likbenta $\triangle ACB$ drages medianen CM . Enligt teor. 27 är deltriangelarna kongruenta och vi får följande två teorem:

TEOREM 34: Varje konkav (och konvex) vinkel har en bisektris.

TEOREM 35: Medianen från spetsen av en likbent triangel är bisektris till spetsvinkeln och medelnormal till basen. FÖLJDSATS: Det existerar räta vinklar.

Tillsvidare har inte bevisats att varje rak vinkel skulle ha en bisektris, ej heller att en vinkel har högst en bisektris.

TEOREM 36: Om $A \in l$, $B \in l$, $C \notin l$, och om $AC \equiv AC'$, $BC \equiv BC'$, så är C och C' i olika av l bestämda halvplan. Det existerar alltså icke en tredje pt C'' med $AC \equiv AC''$ och $BC \equiv BC''$. FÖLJDSATS: En konkav vinkel kan icke vara kongruent med en rak.

Bevis: [5, s. 98 no. 16–17 samt s. 132 no. 13].

TEOREM 37: Om två strålar bildar kongruenta vinklar med en tredje stråle l' , så måste de ligga i olika av l bestämda halvplan.

Bevis: Kallas vinklarna BAC och BAC' med motsvarande transversaler $BC \equiv BC'$, visar teor. 36 att C och C' icke kan ligga i samma halvplan.

TEOREM 38 (fig. 11): Till en given $\angle l'm'$ existerar en stråle n' i det av l bestämda halvplan som icke innehåller m' , så att $\angle l'm' \equiv \angle l'n'$.

Bevis: $\angle l'm'$ må vara AOB med $AO \equiv BO$, $A \in l'$, $B \in m'$, samt C mittpt av AB . Enligt teor. 35 är OC bisektris b' till $l'm'$. Bestäm $D \in b'$ med $OD \equiv OB$, $E \in l'$ med $OE \equiv OC$. Då är $\triangle ODE \equiv \triangle OBC$ (teor. 28), så att $\angle ODE \equiv \angle OBC$, $DE \equiv BC$. Välj D_1 med DED_1 och $D_1E \equiv DE$. Enligt teor. 28 är $\triangle ABO \equiv \triangle D_1DO$, så att $OD_1 \equiv OA \equiv OD$ och l' bisektris till $\angle DOD_1$. Välj C_1 på OD_1 med $OC_1 \equiv OC$ och $C_1B_1 \equiv AC_1$ med AC_1B_1 . Enligt teor. 28 är $\triangle OC_1A \equiv \triangle OCA$ och $\angle OAC_1 \equiv \angle OAC$ och $AC \equiv AC_1$, således enligt III 3 $AB \equiv AB_1$. Enligt teor. 28 är då $\triangle ABO \equiv \triangle AB_1O$ och således $\angle B_1OA \equiv \angle BOA$. Med $n' = OB_1 \dots$ är då satsen uppfylld.

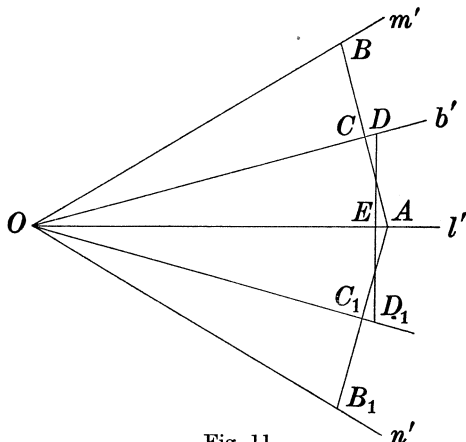


Fig. 11

Enligt teor. 37 är n' entydigt bestämd. Som följsats erhålles med beaktande av teor. 28 och 36:

TEOREM 39: Om C ligger i ett av AB bestämt halvplan, så finns i det andra halvplanet en och blott en pt C_1 , för vilken $AC_1 \equiv AC$, $BC_1 \equiv BC$.

DEF. 20: I teor. 38 säges n' vara spegelbilden av m' i avseende å l , i teor. 39 C_1 spegelbilden av C och $\triangle ABC_1$ spegelbilden av $\triangle ABC$ i avs. å rl AB , och vice versa. Spegelbilderna fås ur varandra genom spegling.

Kongruensteoremet med ett par sidor och två par vinklar nödgas vi

spjälka upp i två teorem alltefter sidans placering i förhållande till vinklarna. I det förra fallet har vi behov av följande skärpta formulering, i vilken existensen av den ena triangelns

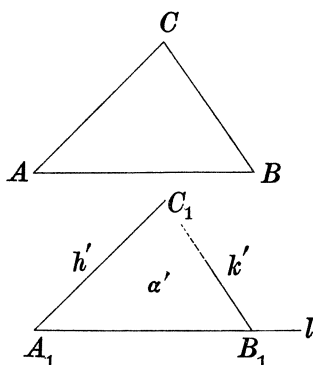


Fig. 12

tredje hörnpt inte behöver förutsättas.

TEOREM 40 (fig. 12): *Antag en $\triangle ABC$ samt pterna A_1 och B_1 på l , så att $A_1B_1 \equiv AB$, vidare strålarna h' och k' utgående från A_1 resp. B_1 i samma av l begränsade halvplan α' , så att $\angle h'A_1B_1 \equiv \angle A$, $\angle k'B_1A_1 \equiv \angle B$. Då skär h' och k' varandra i en pt C_1 , så att $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC$.*

Bevis: På h' avsättes $A_1C_1 \equiv AC$. Enligt teor. 28 är $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC$, så att $\angle C_1B_1A_1 \equiv \angle B \equiv \angle k'B_1A_1$. Enligt teor. 24 och 37 går då k' gm C_1 och satsen är bevisad. Följdsats:

TEOREM 41 (Kongr.-teor. IIIa): *Två trianglar är kongruenta, om i dem två par vinklar och mellanliggande sidor är motsvarigt kongruenta.*

TEOREM 42 (fig. 13): *Om m och n skärs av l så att ett par ensliggande vinklar är kongruenta (eller ett par oensliggande vinklar supplementvinklar) så är $m \parallel n$.*

Bevis: Ur def. 10 och teor. 25–26 följer de alternativa förutsättningarnas ekvivalens. Antites: m och n råkas i $C \in \lambda'$ begränsat av l . Enligt teor. 40 skär m och n då även varandra i λ'' , vilket strider mot I 3.

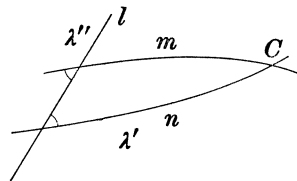


Fig. 13

TEOREM 43 (Kongr.-teor. IIIb): *Om $AB \equiv A_1B_1$, $\angle CAB \equiv \angle C_1A_1B_1$ och $\angle ACB \equiv \angle A_1C_1B_1$, så är $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.*

Bevis: På $AC \dots$ avsättes $AD \equiv A_1C_1$, varvid $\triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1C_1$ enligt teor. 28 och således $\angle ADB \equiv \angle C_1 \equiv \angle ACB$. Vore $D \neq C$, skulle man ha $BD \parallel BC$ enligt teor. 42, vilket är orimligt.

Grundläggande för vinkelmätning är följande två satser.

TEOREM 44: *Innanför två kongruenta vinklar dras strålar, som bildar kongruenta vinklar med det ena paret ben. De bildar då även kongruenta vinklar med det andra paret ben.*

Bevis: Är förstnämnda vinklar raka, följer satsen ur teor. 26. Vi kan därför betrakta konkava vinklar (fig. 14). Vi har $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$ och $\angle BAD \equiv \angle B_1A_1D_1$ med $AD \dots, A_1D_1 \dots$ som inre strålar samt förutsätter att $BC \equiv B_1C_1$ är motsvarande transversaler. Dessa skär enligt def. 6 och teor. 15 $AD \dots$ och $A_1D_1 \dots$, t. ex. i D resp. D_1 . Teor. 27 eller 28 ger $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$, varav $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$. Teor. 41 ger

$\triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1D_1$, varav $AD \equiv A_1D_1$, $BD \equiv B_1D_1$ och enligt teor. 20 $CD \equiv C_1D_1$, så att enligt def. 12 $\angle DAC \equiv \angle D_1A_1C_1$.

TEOREM 45 (fig. 14): Om $AD \dots$ och $A_1D_1 \dots$ är strålar inom vinklarna BAC och $B_1A_1C_1$, och om $\angle BAD \equiv \angle B_1A_1D_1$ och $\angle CAD \equiv \angle C_1A_1D_1$, så är $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$.

Bevis: Om vinklarna BAC och $B_1A_1C_1$ är raka, gäller påståendet. Antag därför $\angle BAC$ konkv. Man drar BC , som må skära $AD \dots$ i D , samt BD :s motsvarande transversal B_1D_1 . Man får $\triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1D_1$, därav $\angle ADB \equiv \angle A_1D_1B_1$ och enligt teor. 26 dessas nabovinklar kongruenta, varför enligt teor. 40 $B_1D_1 \dots$ skär

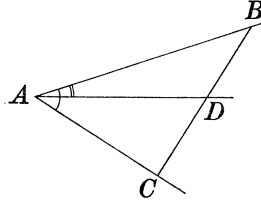


Fig. 14

$A_1C_1 \dots$ i någon pt, t. ex. C_1 , så att $\triangle A_1C_1D_1 \equiv \triangle ACD$. Härav fås $AC \equiv A_1C_1$ och $CD \equiv C_1D_1$ och enligt III 3 $BC \equiv B_1C_1$. Ur motsvarande transversalers likhet följer då att $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$.

Vi skall kort säga att vi kan *avsätta* eller *förflytta* en sträcka eller en vinkel på ett visst sätt, om det *existerar* en med den givna kongruent sträcka resp. vinkel, som uppfyller ifrågavarande krav. Att sträckan eller vinkeln avsättes, betraktas alltså icke som en konstruktion utan som en övergång till den nya sträckan eller vinkeln. Vi skall nu visa möjligheten av två vinkelavsättningar.

En $\angle ABC = \beta$ (fig. 15) kan »vridas», så att den avsättes med en given från B utgående stråle n' som ben. Utgör n' ett ben, har redan $\angle ABC$

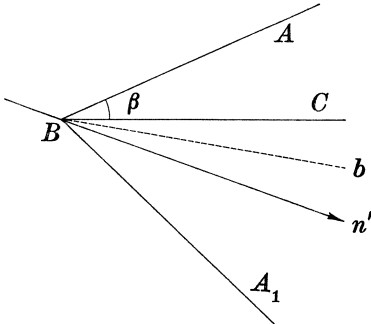


Fig. 15

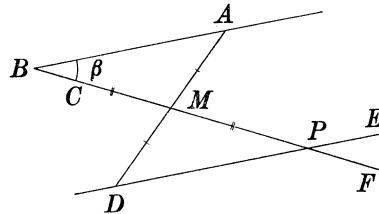


Fig. 16

det rätta läget. Annars bildar åtminstone ena benet, t. ex. BC , en konkv vinkel med n' . Vi drar bisektrislinjen b till $\angle CBn'$ och speglar BA i den, varvid fås BA_1 (jmf. teor. 38 och def. 20). Den sökta vinkeln är nu A_1Bn' , som är $\equiv \angle ABC$ enligt teor. 45 eller 44 beroende på om bisektrisen är inre stråle till β eller ej. Teor. 38 garanterar att vridningen

kan preciseras så, att vinkeln kommer att tillhöra ett givet av n bestämt halvplan.

En $\angle ABC = \beta$ (fig. 16) kan genom »parallellförskjutning» avsättas i en pt P på sitt ena ben BC . Låt M vara mittpten av BP . Man avsätter $DM = AM$ med AMD . Enligt teor. 25 och 28 är $\triangle ABM \equiv \triangle DPM$ och man har $\angle EPF \equiv \angle DPM \equiv \beta$.

Med hjälp av dessa två förflyttningsmöjligheter kan vi nu bevisa följande existenssats.

TEOREM 46: *Med en given stråle l' som ena ben existerar en och blott en vinkel kongruent med en given vinkel β , så att det andra benet går i ett givet av l bestämt halvplan.*

Bevis: Låt B vara β :s spets och P utgångspunkten för l' . Man vrider β , så att BP blir ett ben, parallellförskjuter den erhållna vinkeln till P och vrider den så att l' blir ett ben och så att det andra benet löper i det uppgivna halvplanet. Entydigheten framgår av teor. 37.

Som följsats fås omedelbart med beaktande av teor. 28 och 39:

TEOREM 47 (»Axiom III 5«): *Om $A_1B_1 \equiv AB$ i $\triangle ABC$, så existerar i vardera av A_1B_1 bestämda halvplanet exakt en pt C_1 med $AC \equiv A_1C_1$, $BC \equiv B_1C_1$.*

Den för vinklar gällande motsvarigheten till teor. 19 lyder:

TEOREM 48 (fig. 17): *Antag $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$ och $\angle ABD \equiv \angle A_1B_1D_1$. Om strålen $BD \dots$ ligger innanför $\angle ABC$, kan icke B_1C_1 ligga innanför $\angle A_1B_1D_1$.*

Bevis: I fig. är antitesen framställd. Låt AC skära BD i D och A_1D_1

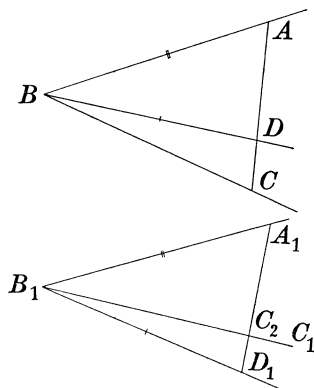


Fig. 17

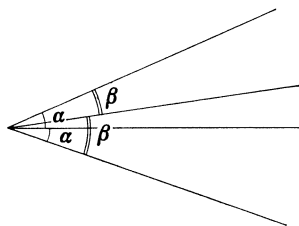


Fig. 18

vara motsvarande transversal till AD , således $AD \equiv A_1D_1$. Då är $\angle BAD \equiv \angle B_1A_1D_1$ och enligt teor. 41 $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_2$, där C_2 är skärningspt mellan A_1D_1 och B_1C_1 . Härur fås $A_1C_2 = AC > AD = A_1D_1 > A_1C_2$,

vilket är omöjligt. — Här har antagits att vinklarna är konkava. Om $\angle ABC$ och således $\angle A_1B_1C_1$ är rak, är satsen uppenbar.

Som följsats fås (jämför antitesfiguren 18):

TEOREM 49: *En vinkel har blott en bisektris.*

Att en bisektris verkligen existerar, har ådagalagts för konkava vinklar (teor. 34) och skall nu visas även för raka:

TEOREM 50: *Genom en given pt (A) går alltid en normal mot en given rl (l).*

Bevis: a) Antag (fig. 19) $A \in l$. Välj $B \notin l$ och låt $AC \dots$ vara spegelbilden av $AB \dots$ i avseende å l , samt tag D med CAD . Låt AE vara

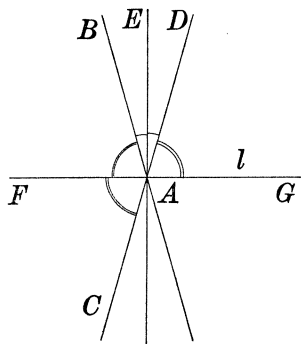


Fig. 19

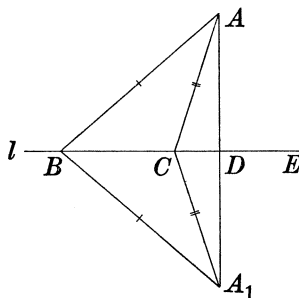


Fig. 20

bisektris till $\angle BAD$. Tag FAG på l med AF innanför $\angle BAC$. Då är $\angle BAF \equiv \angle FAC$, $\angle FAC \equiv \angle DAG$ (teor. 25), $\angle FAE \equiv \angle GAE$ (teor. 45) så att $EA \perp l$. (Om $AB \dots = AD \dots$, framgår påståendet ur teor. 25 allena.)

b) Antag (fig. 20) $A \notin l$. Välj $B, C \in l$ samt den av teor. 39 garanterade spegelpten A_1 , varvid AA_1 skär l i D . Man får först $\triangle ABC \equiv \triangle A_1BC$ och sedan $\triangle ADB \equiv \triangle A_1DB$, så att $\angle ADB \equiv \angle A_1DB \equiv \angle ADE$, $AD \perp l$.

TEOREM 51: *Alla rätta vinklar är kongruenta.*

Bevis (fig. 19): Antag FAG och $EA \perp FG$, så att $\angle FAE \equiv \angle EAG$. Avsätt en annan rät vinkel i A invid AG såsom $\angle DAG$. Om icke $AD \dots$ sammanfaller med $AE \dots$, är t. ex. $AD \dots$ inre stråle i $\angle EAG$. Då en rät vinkel är kongruent med sin nabovinkel och vinklar med kongruenta nabovinklar är kongruenta, fås $\angle FAD \equiv \angle GAD$. Teor. 48 ger en motsägelse.

Ur teor. 42 og 49 följer nu de följande tre satserna:

TEOREM 52: *Genom en pt går endast en normal till en given rl .*

TEOREM 53: *Alla normaler till en given rl är parallella.*

TEOREM 54: *I en triangel är högst en vinkel rät.*

TEOREM 55 (Kongr.-teor. IV): *Om $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv B_1C_1$ och $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, så är antingen $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$ eller $\angle ACB$ och $\angle A_1C_1B_1$ sneda (= icke räta) supplementvinklar.*

Bevis: Om $AC \equiv A_1C_1$, är triangelarna kongruenta. Om icke $AC \equiv A_1C_1$, tag C_2 på $A_1C_1 \dots$ med $A_1C_2 \equiv AC$, varvid $\triangle C_1B_1C_2$ är likbent och enligt teor. 29 $\angle B_1C_1C_2 \equiv \angle B_1C_2C_1 \equiv$ rät vinkel enligt teor. 54. Men tillika är $\angle ACB \equiv \angle A_1C_2B_1 =$ supplementvinkel till $\angle A_1C_1B_1$.

DEF. 21: Om m' är i det inre av $l'n'$, säges $\angle l'm'$ vara *mindre än* $\angle l'n'$ ($l'm' < l'n'$, $l'n' > l'm'$). Om två vinklar ej har gemensamt ben och ligger i samma halvplan i avseende å det, avsättes de i sådant läge, och den vinkel är mindre, vars ben efter förflyttningen råkar i den andras inre. — Av teor. 48 följer att def. 21 ger entydigt besked om vinklars *likhet* (= kongruens) eller *olikhet*.

DEF. 22 inför *spetsig och trubbig vinkel, spetsvinklig, trubbvinklig och rätvinklig triangel*, dennas *katet* och *hypotenusa*, samt *höjdlinjen* i en triangel.

DEF. 23 inför *mätning* av sträckor och vinklar. Axiom III 3 och teor. 19–20 garanterar måttets additivitet för sträckor, medan additiviteten hos vinklar grundar sig på teor. 44–45 och 48. Sedan en enhetssträcka och en enhetsvinkel valts godtyckligt (eller den raka vinkeln tilldelats måttet π eller 180°), erhålles upprepad halvering av den genom att bestämma sträckans mittpunkt (def. 17) resp. vinkelns bisektris (teor. 34 och 50). Vi kan på det sättet »konstruera» sträckor av längden eller mätetalet $k \cdot 2^{-n}$, där k och n är godtyckliga positiva hela tal, och detsamma gäller (konkava och raka) vinklar, om den raka vinkeln är enhet och $k \cdot 2^{-n} \leq 1$. Därefter kan varje sträcka (vinkel) till sin storlek jämföras med de ovan nämnda sträckorna (vinklarna) enligt def. 16 (21). Men den möjligheten kvarstår, att en given sträcka är större än den k -faldiga enhetssträckan för varje helt k eller mindre än 2^{-n} för varje n . Genom följande sats bortfaller dock denna möjlighet.

TEOREM 56 (Arkhimedes' axiom): *Om sträckan $a < b$, finns det ett naturligt tal k , så att $ka > b$.*

Bevis: [3, s. 154–155], [8, s. 307–308], [11, s. 36–37], [14, s. 62–64].

Härefter är varje sträcka antingen kongruent med $k \cdot 2^{-n}$ gånger enheten och erhåller detta mätetal, eller kan för varje n inneslutas i storleksföljd mellan två sträckor med mätetalsdifferensen 2^{-n} och erhåller därigenom ett mätetal i form av ett oavslutat binärt bråk. En motsvarande utsaga kan bevisas för konkava vinklar, och konvexa vinklar kan få mätetalet av två raka minus tillhörande konkava vinkel.

Det bereder nu ingen svårighet att på basen av hittillsvarande satser bevisa teoremen 57–67.

TEOREM 57: *Nabovinkeln till $\angle A$ i $\triangle ABC$ är $> \angle B$ och $> \angle C$.*

TEOREM 58: *Summan av två vinklar i en triangel är $<$ en rak.*

TEOREM 59: *En likbent triangelns basvinklar är spetsiga.*

TEOREM 60: *I en triangel står mot en större sida en större vinkel och vice versa, samt mot lika vinklar lika sidor. I en rätvinklig triangel är vardera kateten $<$ hypotenusan.*

TEOREM 61: *I en triangel är summan av (skillnaden mellan) två sidor $>$ ($<$) den tredje. För en bruten linje gående från A till B är $AB <$ summan av sidorna.*

TEOREM 62: *Om $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv B_1C_1$ men $AC > A_1C_1$, så är $\angle B > \angle B_1$ och omvänt.*

TEOREM 63: *Nabovinklars bisektriser står vinkelrätt mot varandra.*

DEF. 24 inför geometrisk ort.

TEOREM 64 om bisektrislinjen som geometrisk ort.

TEOREM 65 om medelnormalen som geometrisk ort.

TEOREM 66: *Höjdlinjen från spetsen av en trubbig vinkel och varje höjdlinje i en spetsvinklig triangel skär motstående sida i en inre pt.*

TEOREM 67: *I en triangel skär alla tre bisektriser varandra i en pt; detsamma gäller sidornas medelnormaler, ifall två av dem över huvud skär varandra.*

Den sistnämnda restriktionen är väsentlig i hyperbolisk geometri.

TEOREM 68: *Vinkelsumman i en triangel är $\leq$ en rak vinkel.*

Bevis enligt Legendre [1, s. 55–56], [2, s. 49–51], [9, s. 21–22], [14, s. 64–65]. För alternativ bevisföring se [7, sats 33–35 s. 39–42].

TEOREM 69 (fig. 21): *Om $A \notin a$ och $B \notin b$, kan icke genom A gå blott en parallell till a samtidigt som genom B går åtminstone två paralleller till b .*

— Satsen innebär således, att om det euklidiska parallellaxiomet I 4a gäller, gm varje pt utanför en godtycklig rl blott en parallell till denna existerar, samt att I 4b åter leder till att gm varje pt utanför en godtycklig rl går minst två paralleller till den.

Bevis. (Jmf. även [3, s. 162–165], [11, s. 58–59], där bevisen bygger på tidigare undersökningar över parallellvinklar och gränsparallellers transitivitet.) Drag $AA_0 \perp a$ och $BB_0 \perp b$ och antag $CA \perp AA_0$, $DB \perp BB_0$, varvid enligt teor. 53 $AC \parallel a$, $BD \parallel b$. Enligt antitesen existerar dessutom $EB \parallel b$ med $\angle EBB_0 < 90^\circ$, medan endast $AC \parallel a$ gm A .

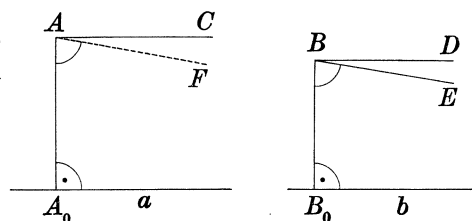


Fig. 21

1:o) Antag $AA_0 \equiv BB_0$. Avsätt $\angle FAA_0 \equiv \angle EBB_0$. Då måste AF skära a , och enligt teor. 40 skär även BE b , vilket strider mot förutsättningen.

På basen av 1:o kan vi i fortsättningen förutsätta, att $b = a$, $B_0 = A_0$ samt A och B på samma stråle $\perp a$ från A_0 .

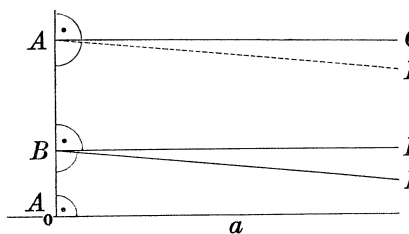


Fig. 22

2:o) Antag (fig. 22) $BA_0 < AA_0$ och låt AF ha samma betydelse som i 1:o. Enligt teor. 42 är $AF \parallel BE$. Då även $a \parallel BE$ och ABA_0 , ligger AF och a i olika av BE bestämda halvplan och kan ej råkäs. Gm A går då två paralleller till a , vilket strider mot förutsättningen.

3:o) Antag (fig. 23) $BA_0 > AA_0$.

Av fall 1:o–2:o framgår: Om antitesen är riktig, så måste det finnas en sträcka d , sådan att för $AA_0 < d$ blott en, men för $AA_0 > d$ minst två paralleller går till a gm A . Välj då $AA_0 = \frac{3}{4}d$, $BA_0 = \frac{5}{4}d$. BE , som är $\parallel a$, skär då AC t. ex. i E , eftersom $BA = \frac{1}{2}d < d$. Välj G med BEG och drag rl AG . Den skär rl AC och BE ,

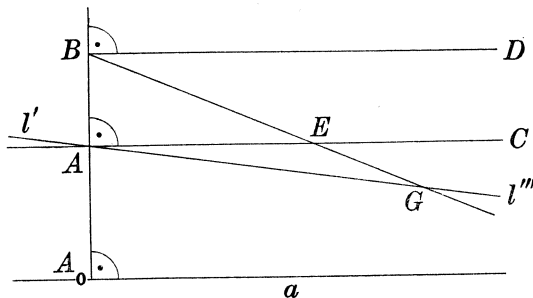


Fig. 23

båda $\parallel a$, i A och G , samt innehåller strålarna l' och l''' från A resp. G utan gemensamma pter med sträckan AG . Nu är A , E , G i samma av a begränsade halvplan aB , som då innehåller alla pter av sträckan AG . Betecknas de halvplan med gränserna AE och BG som innehåller a med α' resp. β' , så fås $l' \in \alpha''$, $l''' \in \beta''$. Därför kan ingen pt av rl AG tillhöra a , d. v. s. $AG \parallel a$, vilket strider mot att AC skulle vara enda parallell till a gm A .

7. Avslutning. De delar av plangeometrin som i det föregående behandlats har för det första valts så, att de är relevanta både i euklidisk

och hyperbolisk geometri. En annan synpunkt har varit den, att icke sådana nya objekt dragits in i blickpunkten, vilka, såsom t. ex. cirkellinjen, definieras såsom en oändlig punktmängd. Även inom en sådan ram hade naturligtvis stoffurval och framställningssätt kunnat varieras i många avseenden. Min avsikt har varit att ge en i någon mån avrundad framställning av begynnelseskedet i arbetet på den geometriska lärobyggnaden, varefter fortsättningen väl sedan löper efter i stort sett invanda, traditionella ehuru skiftande mönster.

Det är klart att fasthållandet vid absolut geometri är ägnat att något tynga och förlänga framställningen. Man kunde från början sikta direkt på endast euklidisk geometri och redan i ett tidigare stadium begagna parallellaxiomet. Om detta ges i den knappa formuleringen I 4a — och med upprätthållande av principen att undvika »overlapping» måste vi hålla på den — så blir det ändå nödvändigt att bevisa vårt teorem 69. Först därefter kan vi nämligen stöda oss på den traditionella formuleringen »Till varje rl går högst en parallell gm en godtycklig pt utanför den». Och med den här givna bevisanordningen kan denna sats tidigast införas efter teorem 53. Väsentlig förenkling fås då blott för teorem 68 om en triangels vinkelsumma. Det är sannolikt att parallellteoremet med förändrat bevis och något modifierad ordningsföljd för andra satser skulle kunna införas ännu något tidigare och därför kunde utnyttjas till förenkling av det efterföljande. Men förf. har på känn, att denna förenkling skulle kompenseras av att parallellteoremets bevis bleve avsevärt tyngre.

Framställningen har självfallet icke avsett att tjäna som grund för undervisning i ett läroverk. Där måste frejdig axiomoverlapping och referens till åskådning förmedla en inlevelse i den geometriska världen, som är ohämmad av för eleven oförståeliga spetsfundigheter. Men för studentens skolning i matematisk deduktion av en struktur ur minimala förutsättningar tror jag att en framställning i likhet med denna kan vara till nytta. Den har också småningom vuxit fram under och efter tre föreläsningsskurser som förf. hållit över ämnet.

LITTERATUR

- [1] R. BONOLA: *Non-euclidean geometry*. Reprint; Dover 1955.
- [2] R. BONOLA-H. LIEBMANN: *Die nichteuklidische Geometrie*. Teubner 1919.
- [3] K. BORSUK-W. SZMIELEW: *Foundations of geometry*. North-Holland publ. Comp. 1960.
- [4] H. COXETER: *Non-euclidean geometry*. The Univ. of Toronto Press 1957.
- [5] H. FORDER: *The foundations of Euclidean geometry*. Reprint; Dover 1958.
- [6] M. GEIGER: *Systematische Axiomatik der Euklidischen Geometrie*. Dr. Benno Filser Verlag, Augsburg, 1924.
- [7] D. HILBERT: *Grundlagen der Geometrie*. 8. Aufl. Teubner 1956.

- [8] B. KERÉKJÁRTÓ: *Les fondements de la géométrie, I.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
- [9] H. MESCHKOWSKI: *Nichteuklidische Geometrie.* Vieweg & Sohn 1954.
- [10] R. NEVANLINNA: *Huomautuksia geometrian järjestelmistä.* Matem. Aineiden Aika-
kauskirja, 1939, s. 157–187.
- [11] A. NORDEN: *Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie.* VEB Deut-
scher Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1958.
- [12] E. NYSTRÖM: *Korkeamman geometrian alkeet sovellutuksineen.* Otava, Helsinki, 1948.
- [13] J. O. STUBBAN: *Aksiomatisk grunnlag for den euklidiske geometri.* NMT 4 (1956),
s. 76–84.
- [14] G. VERRIEST: *Introduction à la géométrie non euclidienne par la méthode élémentaire.*
Gauthier-Villars 1951.

POINTSGIVNING I SPIL MED POISSONFORDELING

FREDERIK GLAVEN

5. Som supplement til betragtningerne i forrige hefte side 109–116 og som uddybning af den afsluttende bemærkning skal her kort behandles spil, hvori de to konkurrerende hold A og B hver for sig har konstant sandsynlighed for at score et mål i hvert lille tidsrum dt . Målantallene for de to hold bliver således poissonfordelt.

Betegnes middelværdierne af de antal mål, som de to hold scorer, med henholdsvis a og b , bliver sandsynligheden for kampresultatet $i, n-i$

$$p_{i,n} = \frac{a^i b^{n-i}}{e^{a+b} i! (n-i)!}.$$

For den ret typiske situation med $a=3$ og $b=1\frac{1}{2}$ bliver fordelingen af 100 spil som vist i tabel 5.

$i \backslash n-i$	0	1	2	3	4
0	1	2	1	1	
1	3	5	4	2	1
2	5	$7\frac{1}{2}$	6	3	1
3	5	$7\frac{1}{2}$	6	3	1
4	4	6	4	2	1
5	2	3	3	1	1
6	1	2	1	1	
7	1	1	1		

Tabel 5. Fordelingen af 100 spil for $a=3$ og $b=1\frac{1}{2}$.

For kampresultatet $i, n-i$ tildeles hold A $x_{i,n}$ points og hold B $x_{n-i,n}$ points, hvor $x_{n-i,n} = -x_{i,n}$.

Med de side 110 benyttede betegnelser fås

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n p_{i,n} x_{i,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (p_{i,n} - p_{n-i,n}) x_{i,n},$$

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n p_{i,n} x_{i,n}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (p_{i,n} + p_{n-i,n}) x_{i,n}^2.$$

Mindsteværdien af g/μ^2 bestemmes ved partiel differentiation m.h.t. $x_{i,n}$ for alle forekommende i, n . Den må indtræffe for

$$\mu^2 \cdot 2(p_{i,n} + p_{n-i,n}) x_{i,n} = g \cdot 2\mu(p_{i,n} - p_{n-i,n}),$$

d.v.s. for

$$x_{i,n} = \frac{g}{\mu} \cdot \frac{p_{i,n} - p_{n-i,n}}{p_{i,n} + p_{n-i,n}} = \frac{g}{\mu} \cdot \frac{a^i b^{n-i} - a^{n-i} b^i}{a^i b^{n-i} + a^{n-i} b^i}.$$

Sættes nu $g/\mu = 1$ og $2i - n = q$, fås $x_{i,n} = \frac{a^q - b^q}{a^q + b^q}$, der kun afhænger af $a:b$ og q og er identisk med $P_q(t)$ side 111, dersom man sætter $\frac{a}{a+b} = t$.

6. En sammenligning mellem skala G og skala N (se side 115) er foretaget i hosstående tabel 6.

$\frac{a}{a+b}$	a	b	$\frac{\mu}{\sigma}$	$\frac{a}{a+b}$	a	b	$\frac{\mu}{\sigma}$	$\frac{a}{a+b}$	a	b	$\frac{\mu}{\sigma}$
0,80	1	$\frac{1}{4}$	G 0,692 N 0,705	0,75	3	1	G 1,07 N 1,14	0,57	4	3	G 0,330 N 0,369
0,67	1	$\frac{1}{2}$	G 0,384 N 0,413	0,67	3	$1\frac{1}{2}$	G 0,673 N 0,740	0,83	5	1	G 2,55 N 2,52
0,60	$1\frac{1}{2}$	1	G 0,285 N 0,315	0,60	3	2	G 0,399 N 0,446	0,71	5	2	G 1,24 N 1,34
0,80	2	$\frac{1}{2}$	G 1,04 N 1,06	0,80	4	1	G 1,71 N 1,75	0,86	6	1	G 3,71 N 3,53
0,67	2	1	G 0,542 N 0,593	0,67	4	2	G 0,792 N 0,872	0,88	7	1	G 5,36 N 4,92

Tabel 6. Værdier af μ/σ for forskellige værdier af a og b .

Af tabel 6 ses ligesom af den tidligere tabel 4, at skala N er i stand til at udpege det stærkeste hold — og iøvrigt rangere de konkurrerende hold retfærdigt — med væsentlig større sikkerhed end skala G.

SOME BINOMIAL SUMS

BIRGER JANSSON

Working with a problem concerning waiting lines, the following binomial sum was found:

$$\sum_{v=1}^n \binom{n}{v} v^{v-1} (n-v)^{n-v} = n^n,$$

in which we by definition assume that $(n-v)^{n-v}=1$ when $v=n$. The sum was proved to be a member of a more general family of sums according to

SUM 1. For all x and y (except $x \neq 0$, $y=0$) we have

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (y+v)^{v-1} (x-v)^{n-v} = \frac{(x+y)^n}{y}.$$

When $x=y=0$ the sum equals 0.

This formula may be proved in many ways, for instance by induction. Let us assume the sum to be valid for $n=N$. Integration with respect to x gives

$$(1) \quad \sum_{v=0}^N \frac{\binom{N}{v} (y+v)^{v-1} (x-v)^{N-v+1}}{N-v+1} = \frac{(x+y)^{N+1}}{(N+1)y} + K_N,$$

where K_N is a constant of integration depending on N . In order to determine this constant, we put $x=N+1$ in (1) and get

$$K_N = \sum_{v=0}^N \binom{N}{v} (y+v)^{v-1} (N+1-v)^{N-v} - \frac{(N+1+y)^{N+1}}{(N+1)y} = -\frac{(N+1+y)^N}{N+1}$$

by Sum 1, which is assumed to be valid for $n=N$. Inserting this value of K_N into (1), we get after some simplification

$$\sum_{v=0}^{N+1} \binom{N+1}{v} (y+v)^{v-1} (x-v)^{N-v+1} = \frac{(x+y)^{N+1}}{y}.$$

If Sum 1 is valid for $n=N$, it is therefore also valid for $n=N+1$. It is valid for $n=1$ and is thus proved to be valid for all values of n .

By giving special values to x and y , we get a sequence of sums. If we subtract x^n/y from both members in Sum 1 (in order to make the remaining formula valid also for $y=0$) and then put $y=0$, we get

$$\sum_{v=1}^n \binom{n}{v} v^{v-1} (x-v)^{n-v} = nx^{n-1},$$

which further with $x=0, 1, -1, n, -n$ respectively gives

$$\sum_{v=1}^n (-1)^{n-v} \binom{n}{v} v^{n-1} = 0$$

$$\sum_{v=1}^n \binom{n}{v} v^{v-1} (1-v)^{n-v} = n$$

$$\sum_{v=1}^n (-1)^{n-v} \binom{n}{v} v^{v-1} (1+v)^{n-v} = (-1)^{n-1} n$$

$$\sum_{v=1}^n \binom{n}{v} v^{v-1} (n-v)^{n-v} = n^n$$

$$\sum_{v=1}^n (-1)^{n-v} \binom{n}{v} v^{v-1} (n+v)^{n-v} = (-1)^{n-1} n^n.$$

Let us now start with the sum

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (y+v)^v (x-v)^{n-v},$$

and write it as a sum of two sums:

$$y \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (y+v)^{v-1} (x-v)^{n-v} + n \sum_{v=0}^{n-1} \binom{n-1}{v} (y+1+v)^v (x-1-v)^{n-1-v}.$$

But according to Sum 1:

$$y \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (y+v)^{v-1} (x-v)^{n-v} = (x+y)^n,$$

and besides the sum

$$\sum_{v=0}^{n-1} \binom{n-1}{v} (y+1+v)^v (x-1-v)^{n-1-v}$$

may be written as two sums, the first of which can be treated by Sum 1. Repetitive use gives

SUM 2. For all x and y we have

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (y+v)^v (x-v)^{n-v} = (x+y)^n + n(x+y)^{n-1} + n(n-1)(x+y)^{n-2} + \dots \\ + n(n-1) \dots 3 \cdot 2(x+y) + n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!} (x+y)^r.$$

For $x=y=0$ we get the well known formula

$$\sum_{v=1}^n (-1)^{n-v} \binom{n}{v} v^n = n!.$$

In an analogous way, we may from Sum 1 derive many different binomial sums. Here will finally be given one further, namely

$$\sum_{v=1}^n \binom{n}{v} v^{v-1} (x-v)^{n-v-1} = \frac{nx^{n-2}(x-n+1)}{x-n}.$$

A DEDUCTION OF THE FRENET FORMULAS IN GENERAL COORDINATES

KÅRE ERIKSEN

Consider a cartesian coordinate system $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ with the metric tensor δ_{ij} (Kronecker deltas). The radius vector of a point x in space is

$$\mathbf{x} = x'^i \mathbf{e}_i,$$

where the summation convention applies. A curvilinear system is given by the n systems of curves obtained from

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

when $x^1, x^2, \dots, x^n$ in turn are allowed to vary. The jacobian determinant is presumed not to be identically zero. Then the inverse transformation

$$x^i = x^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$$

is uniquely defined. The vectors

$$\mathbf{x}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i$$

are vectors on the tangents of the curves and define a variable oblique system $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Multiplying by $\frac{\partial x^j}{\partial x'^k}$, we get

$$(1) \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{x}_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^k}.$$

The covariant components of the metric tensor of the curvilinear system are

$$a_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j,$$

and the contravariant components are given by

$$\{a^{ij}\} = \{a_{ij}\}^{-1}, \quad a^{ji}a_{ik} = \delta_k^j.$$

A vector $\mathbf{v} = v'^i \mathbf{e}_i$ is expressible by the system $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ according to (1):

$$(2) \quad \mathbf{v} = v'^i \mathbf{e}_i = v^j \mathbf{x}_j, \quad v^j = v'^i \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}.$$

The covariant components in $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ are

$$v_i = a_{ij} v^j = (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) v^j = (v^j \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_i,$$

and for the contravariant components we have

$$(3) \quad v^k = a^{ik} v_i.$$

Let $\lambda_{ij|k}$ be the covariant components of the second derivatives

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Evidently the quantities $\lambda_{ij|k}$ are symmetric in the two indices preceding the vertical dot, and we have from (1):

$$\lambda_{ij|k} = \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_k = \frac{\partial(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_k)}{\partial x^j} - \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_{kj} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \lambda_{kj|i}.$$

By suitable permutation of the indices, the following three equations result:

$$\lambda_{ji|k} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \lambda_{ki|j}, \quad \lambda_{ij|k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \lambda_{kj|i}, \quad \lambda_{ik|j} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \lambda_{jk|i}.$$

Adding the first two and subtracting the third, we have after dividing by two:

$$\lambda_{ij|k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \right) = [ij, k],$$

which are the Christoffel symbols of the first kind [1, p. 98], and the Christoffel symbols of the second kind by (3) are the contravariant components of the same vectors. Thus

$$(4) \quad \mathbf{x}_{ij} = \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} \mathbf{x}_h.$$

Finally, the convenience of using (4) in deriving some results including derivatives of higher order in differential geometry shall be demonstrated through an example. Suppose $n=3$ and a curve being given by

$$x'^i = x'^i(s), \quad x^j = x^j(s).$$

The positively oriented triple of unit vectors, $\mathbf{t}$, $\mathbf{p}$, and $\mathbf{b}$ on the tangent, principle normal and binormal respectively are

$$\mathbf{t} = \alpha'^i \mathbf{e}_i = \alpha^i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{p} = \beta'^i \mathbf{e}_i = \beta^i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{b} = \gamma'^i \mathbf{e}_i = \gamma^i \mathbf{x}_i.$$

Differentiating with respect to s and using the Frenet formulas in cartesian coordinates, we have [1, p. 25]:

$$\begin{aligned}\kappa\beta'^k e_k &= \frac{d\alpha^i}{ds} x_i + \alpha^i x_{ij} \frac{dx^j}{ds} \\ -(\kappa\alpha'^k + \tau\gamma'^k) e_k &= \frac{d\beta^i}{ds} x_i + \beta^i x_{ij} \frac{dx^j}{ds} \\ \tau\beta'^k e_k &= \frac{d\gamma^i}{ds} x_i + \gamma^i x_{ij} \frac{dx^j}{ds} .\end{aligned}$$

Inferring on the left hand side from (1) and on the right hand side from (4) and commuting the indices i and h in the last term, we obtain this result after use of (2):

$$\begin{aligned}\kappa\beta^i x_i &= \left(\frac{d\alpha^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hj \end{matrix} \right\} \alpha^h \frac{dx^j}{ds} \right) x_i \\ -(\kappa\alpha^i + \tau\gamma^i) x_i &= \left(\frac{d\beta^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hj \end{matrix} \right\} \beta^h \frac{dx^j}{ds} \right) x_i \\ \tau\beta^i x_i &= \left(\frac{d\gamma^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hj \end{matrix} \right\} \gamma^h \frac{dx^j}{ds} \right) x_i .\end{aligned}$$

When the corresponding coordinates on the left and right hand side are equalized, these are the Frenet formulas as presented by Eisenhart [1, p. 106].

LITERATURE

- [1] L. P. EISENHART: *An introduction to differential geometry*. Princeton 1947.

OM MATEMATIK OG DEMOKRATI

DAVID FOG

Nedenstående er nogle overvejelser i anledning af en matematisk opgave, der er hentet direkte fra det praktiske liv. Problemet er følgende:

Tre rygere A , B og C sidder ved et bord og benytter samme askebæger P . Hvor på bordet bør P placeres?

Som ved alle opgaver, der stammer fra praksis, består det første skridt i at omskrive problemet, så det får en præcis matematisk formulering; det er dette, man i mere højtideligt matematisk sprog kalder at vælge en matematisk model. Ved fysiske eller forsøgs-matematiske problemer finder man i reglen frem til modellen ved visse idealiseringer, gående ud på, at man ser bort fra mindre bivirkninger eller antager absolut gyldighed af love, som i praksis kun gælder med tilnærmelse. I det foreliggende tilfælde fremskaffes modellen blot ved, at man giver en exakt matematisk fortolkning af det etiske krav, som ligger i det lille ord »bør«.

Her møder vi nu forbindelsen mellem matematisk og demokratisk tankegang. For en renlivet demokrat vil den første tanke sikkert være, at askebægeret bør stå i samme afstand fra de tre personer, således at de ved brugen skal række lige langt. Selv om dette kan lyde nok så korrekt, realiserer det imidlertid kun demokrati i karikatur, jvf. fig. 1, hvor de tre personer sidder tæt ved siden af hinanden ved et stort cirkelrundt bord og alle må række helt ind til midten. Det rette demokrati kendetegnes ikke ved en ensidig gennemførelse af lighedsprincippet; dette sidste må på passende måde suppleres med praktisk sans og sund fornuft.

Den næste mulighed, som naturligt melder sig, er da måske, at summen af afstandene AP , BP og CP skal være mindst mulig, altså at de tre

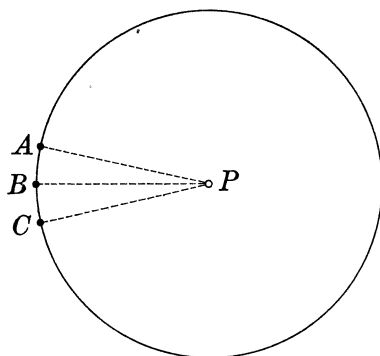


Fig. 1

personer tilsammen skal anstrenge sig så lidt som muligt for at komme af med asken. Denne formulering, der vel nok må betegnes som et fremskridt i forhold til den første, udtrykker faktisk den moderne velfærdsstats ledende princip overfor begrebet arbejde; men den er dog, som vi skal se, ikke den ideelle. Lad os et øjeblik antage, at alle vinkler i trekant ABC er mindre end 120° . Det er da velkendt, at det punkt P , for hvilket

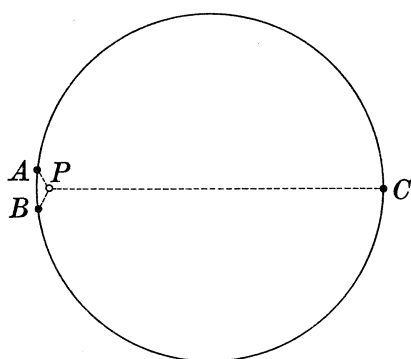


Fig. 2

ket summen $AP + BP + CP$ er mindst mulig, ligger således, at synsvinklerne fra P til alle tre sider i trekanten er 120° . Betragter vi derfor en situation som på fig. 2, hvor A og B sidder ved siden af hinanden ved det førnævnte runde bord, medens C sidder lige overfor, kommer P til at ligge i umiddelbar nærhed af A og B , men meget langt fra C . Dette ville virke som en temmelig uelskværdig behandling af C og er heller ikke udtryk for ægte demokrati, idet et sådant ikke bør praktiseres på

den måde, at de mange regerer uden at tage rimeligt hensyn til de få.

I det ideelle demokrati må det naturlige være, at nok træffer flertallet afgørelserne, men under mest mulig hensyntagen til mindretallet. Ud fra denne tankegang føres vi til den rette udlægning af ordet »bør« i vor opgave: Askebægeret skal placeres således, at den længste »rækning« bliver så kort som muligt. Opgavens eksakte matematiske formulering bliver derfor:

I en plan er givet punkterne A , B og C . Bestem det punkt P i planen, for hvilket den største af afstandene AP , BP og CP er så lille som muligt.

Således er opgaven stillet som prisopgave for danske gymnasieelever (NMT 8 (1960), side 197, opg. 5).

Løsningen er ganske elementær, men ikke triviell. Det ville være en skam at give den her og dermed fratage eventuelle læsere fornøjelsen af at finde den selv.

BOKMELDINGER

ERIK M. ALFSEN — ERLING R. HANSÉN: *Fo 4. Forkurs i matematikk* ved Universitetet i Oslo. Universitetsforlaget, Oslo, Bergen, 1960. 3 + 123 s. N. kr. 14.00. (Stensilert.)

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 181.)

For noen år siden gikk Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet ved Universitetet i Oslo over til en helt ny studieordning, som bl. a. medførte en oppdeling av det tidligere bifagsstoff i emner av vekslende omfang. I en særstilling blant disse emner står de tre *forkursene* i matematikk, som skal leses første høst, parallelt med den forberedende prøve i filosofi. »Skal« er en bevisst formulering, p. g. a. forkursenes delvis obligatoriske karakter. Alle studenter må gjennom det »praktisk« betonte analysekurset Fo 1–2. For en rekke emner i andre fag er videre Fo 4 obligatorisk, mens alle de som skal gå videre i matematikk, også må ta det mer teoretisk pregede analysekurs Fo 3.

Undervisningen i forkursene, særlig i Fo 1–2, drives temmelig skolemessig, og den voldsomme tilstrømning av studenter har gjort det til en kjempeoppgave å bringe ordningen vel i havn. Et viktig bidrag til gjennomføringen var utarbeidelsen av nytt undervisningsmaterieell, slik som det hefte i lineær algebra som her skal anmeldes. Det har undertitelen »Oppgave- og repetisjonshefte«, men fremstillingen er selvforsynt når det gjelder vektoralgebra og komplekse tall. I avsnittene om determinanter og lineære ligningssystemer henvises det derimot endel til Tambs Lyches lærebok i matematisk analyse, som ellers brukes ved undervisningen i Oslo.

Selve stoffet er »klassisk« i den grad at meget av det allerede er eller antakelig vil bli gymnasiepensum i flere nordiske land. Forfatterne gjør heller ikke mange forsøk på å forlate den slagne landevei, hvilket ikke er noen innvending mot heftet. Hovedsaken er at fremstillingen er klar, konsis og stringent, med en rekke instruktive eksempler og oppgaver. Etter min mening er også stoffvalget meget fornuftig; det var igrunnen bare en vesentlig ting jeg savnet: Lineær avhengighet og uavhengighet mellom tallsett (som ikke kalles vektorer i mer enn tre dimensjoner) innføres først i forbindelse med determinanter, og gis ikke »tilbakevirkende kraft« til den vanlige vektorregning. Den geometriske betydning i to og tre dimensjoner, spesielt at vektor- og volumproduktet forsvinner

hvis og bare hvis de inngående faktorer er lineært avhengige, kommer derfor ikke tydelig frem.

Rent typografisk legger man jo ikke så strenge mål på et stensilert hefte som på en trykt bok. Stort sett er imidlertid typografien bra, og trykkfeilene få. Den mest graverende står i grunnen på omslaget: »Reptisjonshefte«. Manglende parenteser i uttrykk som $[a b c_1 + c_2]$ kan virke litt forvirrende. Figurene er ikke nummerert til tross for at det forekommer opptil tre av dem pr. side. Den eneste direkte feil jeg har funnet, forekommer s. K_5 : Imaginærdelen til $z = x + yi$ defineres som *koeffisienten* y . Likevel gis imaginærdelen på neste side som $\frac{1}{2}(z - \bar{z})$.

Men innvendingene er få, og forfatterne har som før sagt gjort et meget godt arbeid. Og en ting kan de i hvert fall ikke lastes for: Allerede fra starten av den nye studieordning ble omfanget av forkurset Fo 4 fastsatt for høyt i forhold til *poengverdien* av emnet, som bare er gitt vekttall 1. (Normeringen av emnene forutsetter at studentene gjennomsnittlig skal ta eksamen i 20 poeng pr. år.)

La meg til slutt benytte anledningen til noen prinsipielle betraktninger om den lineære algebras stilling i den grunnleggende universitetsundervisning. I de aller fleste »emnegrupper« (20 poeng) i matematikk i Oslo er Fo 4 alene om å representere den lineære algebra. Personlig mener jeg at ett (riktignok stritt) poeng er for lite, og at særlig savnet av matriseregningen er følbart. Ved Universitetet i Bergen har vi tatt konsekvensen av dette; idag er 3 poeng lineær algebra obligatorisk i enhver emnegruppe i matematikk hos oss, og dette vil i nær fremtid bli utvidet til 4 poeng. Det obligatoriske pensum i algebra vil da omfatte hele bind I av Andersen-Bohr-Petersens lærebok i matematisk analyse, med et tillegg om vektoralgebra svarende til de første $\frac{2}{3}$ av Fo 4.

Den vekt vi i Bergen legger på lineær algebra, skyldes ikke bare rent »matnyttige« hensyn. Fra et pedagogisk synspunkt har nemlig den lineære algebra den store fordel at den forholdsvis lett kan gis en helt stringent oppbygning, uten at stringensen går over hodet på studentene. I matematisk analyse er dette vanskeligere, noe som flere års undervisnings- og eksamenserfaring til fulle har bekreftet. Særlig tydelig kommer forholdet frem under muntlig eksamen, som er avskaffet i matematikk i Oslo, men som vi i Bergen ennå har maktet å opprettholde takket være våre mindre studentkull.

Ernst S. Selmer

Archive for history of exact sciences. Editor C. Truesdell. Vol. 1, no. 1, 1961. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 106 S. DM 19.60.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 129.)

Det første nummer av dette nye tidsskriftet inneholder to meget interessante artikler. Den første er av tidsskriftets redaktør C. Truesdell: *A program toward rediscovering the rational mechanics of the age of reason*. Truesdell begynner med å sitere Popes gravskrift over Newton:

Nature and nature's laws lay hid in night

God said, let Newton be, and all was light.

Så siterer han en uttalelse fra attenhundre-tallet av Mach: »Siden Newtons tid har man ikke funnet noe vesentlig nytt prinsipp. Alt som har vært utrettet i mekanikk etter hans tid har vært en deduktiv, formell, og matematisk utvikling av mekanikken på grunnlag av Newtons lover.«

Det er dette syn Truesdell polemiserer imot. »Principia is a work of science, not a bible. It should be studied and weighed—admired, indeed, but not sworn upon.« Han fremhever og analyserer den viktige innsats som ble gjort av menn som Bernoulliene, d'Alembert, Euler og fremfor alt av Lagrange. Denne sistes »Méchanique Analitique« som Hamilton betegnet som »a kind of scientific poem« er, sier Truesdell, »little less celebrated« enn Newtons Principia, som enhver taler om men ingen leser og som ofte er gjenstand for en »honey-sauced eulogy«. Meget morsomme er Truesdells sitater fra Swift: Gullivers reiser. »While hating mathematics and music, Swift expressed grudging admiration for the achievements of the inhabitants of Laputa. . . . Laputa in real life was the mathematical sections of the academies and learned societies of Europe« sier Truesdell.

I den andre artikkelen, »Anfänge des euklidischen Axiomensystems«, tar Árpád Szabó fra Budapest opp forskjellige viktige spørsmål, fremfor alt dette: Hvordan oppsto den systematiske deduktive greske matematikk? Man vet jo nå at grekerne hadde lært meget mer av babylonere og egyptere enn man før hadde forutsatt. Men ikke noe sted finner man tegn til at babylonere eller egyptere har gjort noe forsøk på å avlede alle matematiske setninger strengt logisk fra noen første prinsipper.

Man har gitt forskjellige svar på dette spørsmålet. Forfatteren nevner spesielt A. N. Kolmogorovs fremstilling i den store russiske ensyklopedien. Jeg gjengir her i oversettelse et par linjer av artikkelen »Matematikk«, B. 26, 1954, s. 467: »Det reiste seg krav om eksakte matematiske beviser. . . . Denne forandring i den matematiske vitenskaps karakter skyldtes et mer utviklet sosialpolitisk og kulturelt liv i de greske statene, hvilket førte til at dialektikken, diskusjonskunsten, ble høyt utviklet og man ble vant til å forsvare sine påstander i kamp med motstanderen.« Andre forklaringer har også vært hevdet. Forfatteren selv fremsetter den teori at den eldste greske deduktive matematikk har sin opprinnelse i den eleatiske filosofi fra det femte århundre f. Kr. Det indirekte bevis

(*reductio in absurdum*) som var alminnelig allerede i det 5. århundre, mener han stammer fra eleaternes tankeverden. Hans standpunkt i denne artikkelen er hentet fra terminologiens historie. Hans konklusjon blir at den tidlige greske matematikk kan regnes som et spesialområde av dialektikken.

Viggo Brun

F. und R. NEVANLINNA: *Absolute Analysis*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 102.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 8 + 259 S., 4 Fig. DM 36.00, Ganzl. DM 39.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 8 (1960), s. 44–45.)

Denne boken har til hensikt å framstille den reelle analysen i flerdimensjonale rom på en mest mulig elegant og klar måte. Ordet »absolute» sikter til det å unngå bruk av koordinater.

Det første kapitel behandler lineær algebra, men på en nokså knapp måte; det forutsettes visse forkunnskaper i dette emne. Multilineære funksjoner er omtalt, og disse brukes i det annet kapitel om differensialasjon, hvor den p^{te} deriverte av en avbildning er definert som en p -lineær funksjon. Dette kapitel inneholder Taylors sats og satsen om implisitte funksjoner. Her og senere unngår forfatterne topologiske begreper når de innfører en vilkårlig metrikk.

I det tredje kapitel er integralet definert ved hjelp av simplisiale dekomposisjoner. Stokes' sats er bevist i en sterk form som ikke forutsetter deriverbarhet av integranden.

Det fjerde kapitel om differensiallikninger er særlig skarpsindig gjort. Istedenfor den vanlige Lipschitzbetingelsen bruker forfatterne den nødvendige og tilstrekkelige betingelse til Osgood for vanlige likninger, og utleder integrerbarhetsbetingelsene for partielle differensiallikninger fra kravet om at de utledede vanlige likninger over kurven fører til motsigelsesfrie løsninger.

Det siste kapitel er mindre fullstendig enn de øvrige. Det behandler endel differensialgeometriske anvendelser på kurver og flater ($(n-1)$ -dimensjonale mangfoldigheter) i det n -dimensjonale rom.

Innføringen av begrepene er i alminnelighet godt og nøyaktig motivert og boken er elegant skrevet. Den kan anbefales for dem som har litt forkunnskaper i disse emner, og skulle utvilsomt danne en utmerket innføring til mer videregående moderne teorier.

Isidore Fleischer

MOTTATTE BØKER

Erik M. Alfsen — Erling R. Hansén: *Fo 4. Forkurs i matematikk ved Universitetet i Oslo*. Universitetsforlaget, Oslo, Bergen, 1960. 3 + 123 s. N. kr. 14.00. (Stensilert.)

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 177–178.)

Vektorbegrepet 11 s. * Koordinatsystem 9 s. * Skalarprodukt, volumprodukt, vektorprodukt, sammensatte produkter 32 s. * Liknings- og parameterfremstillinger for kurver og flater, spesielt rette linjer og plan 26 s. * Komplekse tall 16 s. * Determinanter, Cramers regel 29 s.

C. C. Andersen — S. A. Bo — Gunnar Nielsen — J. Damgaard Sørensen: *Hovedskolens regnebog, 6*. J. H. Schultz' forlag, København, 1959. 160 s. D. kr. 13.85.

De naturlige tal 5–13 * Addition, multiplikation, subtraktion, division 13–46 * Brøk 47–109 * Procentregning 110–119 * Handelsregning 120–127 * Længdemål og flademål 128–137 * Rumfang og vægt 138–147 * Blandede opgaver 148–160.

C. C. Andersen — S. A. Bo — Gunnar Nielsen — J. Damgaard Sørensen: *Hovedskolens regnebog, 7*. Regning og aritmetik. J. H. Schultz' forlag, København, 1960. 164 s. D. kr. 13.85.

Samfundsregning I 5–14 * Om tal og regning med dem 15–61 * Anvendelse af bogstaver i regning 62–68 * Ligninger 68–70 * Delingsregning 71–81 * Afrunding 82–90 * Fremmed mønt 91–96 * Procentregning 97–107 * Rentesregning 108–116 * Omkreds og areal 117–133 * Overflade, rumfang og vægt 134–142 * Opgaver i talbehandling 143–149 * Samfundsregning II 150–164.

C. C. Andersen — S. A. Bo — Gunnar Nielsen — J. Damgaard Sørensen: *Hovedskolens geometri for 7. skoleår*. J. H. Schultz' forlag, København, 1960. 60 s. D. kr. 8.85.

Grundlæggende plane figurer 7–29 * Lignedannede figurer, målestoksforhold 30–35 * Rumlige figurer 36–40 * Retvinklet projektion 41–44 * Areal af plane figurer 45–55 * Overflader 56 * Rumfang 57–60.

C. C. Andersen — S. A. Bo — Gunnar Nielsen — J. Damgaard Sørensen: *Realskolens regning og matematik*. Geometri, 1. og 2. realklasse. J. H. Schultz' forlag, København, 1961. 131 s. D. kr. 13.85.

Grundläggande begreber 5-8 * Spejling i en ret linje 9-13 * Afstand (cirkel, midtnormal, halveringslinje) 14-25 * Måling af vinkler 26-27 * Drejning om et punkt 28-32 * Parallele linjer 33-35 * Parallelforskydning 36-37 * Ækvidistante linjer og punkter 38-40 * Flytninger 41 * Trekanter 42-50 * Vinkler ved cirklen 51-57 * Firkanter 58-65 * Polygoner 66-68 * Geometrisk konstruktion 69-72 * Multiplikation om et punkt (ligedannethed) 73-83 * Den retvinklede trekant 84-87 * Arealformler 88-90 * Opgaver 91-131.

F. N. David — E. S. Pearson: *Elementary statistical exercises*. Cambridge University Press, London, 1961. 8+108 pp. sh. 13/6; \$ 2.75.

Practical statistical exercises 1-82 * Examination questions in practical statistics 83-91 * Answers to the exercises in part I 92-108.

Yngvar Domar: *Matematik för 1 betyg*. Algebra och geometri I-II. (NKI-skolans akademiska kurser.) NKI-skolan, Stockholm, 1961. Bind I 170 s. Bind II 213 s.

I: Elementärmatematik 40 s. * Kombinatorik. Komplexa tal. Delbarhetsegenskaper hos naturliga tal och polynom 42 s. * Plan och räta linjer i rymden 41 s. * Fortsatt diskussion av plan och räta linjer. Delningsförhållandet. Affina avbildningar 46 s.

II: Koordinattransformationer. Plan geometri. Vektorer 51 s. * Euklidiska rymder 43 s. * Euklidiska plan 39 s. * Andragradskurvor 44 s. * Några kompletterande avsnitt av ettbetygskursen 36 s.

Franklin A. Graybill: *An introduction to linear statistical models, I*. (McGraw-Hill series in probability and statistics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1961. 13+463 pp. sh. 97/-.

Mathematical concepts 1-26 * Statistical concepts 27-47 * The multivariate normal distribution 48-73 * Distribution of quadratic forms 74-92 * Linear models 93-105 * Model 1: The general linear hypothesis of full rank 106-148 * Computing techniques 149-164 * Polynomial or curvilinear models 165-185 * Model 2: Functional relationships 186-194 * Model 3: Regression models 195-222 * Model 4: Experimental design models 223-253 * The cross-classification or factorial model 254-286 * Two-way classification with unequal numbers in subclasses 287-305 * Incomplete block models 306-317 * Some additional topics about model 4 318-336 * Model 5: Variance components; point estimation 337-367 * Model 5: Variance components; interval estimation and tests of hypotheses 368-382 * Mixed models 383-420 * Tables 421-460 * Index 461-463.

Donald Greenspan: *Introduction to partial differential equations*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1961. 8+195 pp. sh. 58/-.

Basic concepts 1-31 * Fourier series 32-65 * Second-order partial differential equations 66-88 * The wave equation 89-108 * The potential equation 109-144 *

The heat equation 145–152 * Approximate solution of partial differential equations 153–179 * Survey of other topics 180–185 * Selected bibliography 187–189 * Index 191–195.

W. Grossmann: *Grundzüge der Ausgleichungsrechnung*. Zweite, erweiterte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961. 12 + 345 S. DM 31.50.

Überblick über die Methode der kleinsten Quadrate 1–5 * Grundzüge der Fehlerlehre 5–60 * Ausgleichung von direkten Beobachtungen 61–72 * Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen 73–176 * Ausgleichung von bedingten Beobachtungen 177–267 * Sonderfälle und Grenzgebiete 268–308 * Anwendungen der Matrizenrechnung auf die Ausgleichungsrechnung 308–335 * Schrifttum (Auswahl) 335–336 * Namen und Sachverzeichnis 337–345.

Tord Hall: *Matematik för 1 betyg*. Analys I–II. (NKI-skolans akademiska kurser.) NKI-skolan, Stockholm, 1961. Bind I 162 s. Bind II 214 s.

I: Plan trigonometri 29 s. * Trigonometriska ekvationer. Exponential- och logaritmfunktionerna 32 s. * Reella tal, olikheter, medelvärden 29 s. * Funktionsbegreppet 31 s. * Gränsvärden 22 s. * Kontinuerliga funktioner 25 s.

II: Derivator I 24 s. * Derivator II 28 s. * Geometriska tillämpningar I 46 s. * Integraler 54 s. * Taylors formel, »obestämda uttryck« och oändliga serier 35 s. * Geometriska tillämpningar II 34 s.

H. Kr. Hansen: *Grundlæggende aritmetik til teknisk forberedelseksamen*. (8. skoleår.) Gyldendals forlag, København, 1961. 106 s. D. kr. 8.75.

Addition og subtraktion 9–18 * Negative tal og multiplikation 19–26 * Ligninger I 27–34 * Multiplikation af flerleddede størrelser 35–40 * Kvadratet på en toleddet størrelse 41–45 * Differensen mellem to tals kvadrater 46–50 * Regnestokken (multiplikation og division) 51–66 * Brøker 67–75 * To ligninger med to ubekendte 76–83 * Koordinatsystemet 84–97 * Ligninger II 98–101 * Blandede opgaver 102–106.

Helmut Hasse — Walter Klobe: *Aufgabensammlung zur höheren Algebra*. (Sammlung Götschen 1082.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1961. 183 S. DM 3.60.

Ringe, Körper, Integritätsbereiche 6–16 * Gruppen 16–28 * Determinantenfreie lineare Algebra 28–41 * Lineare Algebra mit Determinanten 42–71 * Die linken Seiten algebraischer Gleichungen 71–103 * Die Wurzeln algebraischer Gleichungen 103–115 * Die Körper der Wurzeln algebraischer Gleichungen 115–131 * Die Struktur der Wurzelkörper algebraischer Gleichungen 131–152 * Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Wurzelzeichen 153–181 * Namen- und Sachverzeichnis 182–183.

Arno Jaeger: *Introduction to analytic geometry and linear algebra*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961. 12 + 305 pp.

Foundations 3–87 * Linear geometry and algebra 91–182 * Multilinear geometry and algebra 185–236 * Quadratic geometry and algebra 239–286 * Appendix: Comments on the axiomatic treatment of analytic geometry 287–290 * Guide to further reading 291–292 * Index of examples 293 * Index of symbols 295–297 * Index of terms 299–305.

Jacob T. Schwartz: *Introduction to matrices and vectors*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1961. 10 + 163 pp. sh. 43/-.

Definition, equality, and addition of matrices 1–24 * Multiplication of matrices 25–55 * Division of matrices 56–80 * Vectors and linear equations 81–117 * Special matrices of particular interest 118–125 * More algebra of matrices and vectors 126–146 * Eigenvalues and Eigenvectors 147–151 * Infinite series of matrices 152–160 * Index 160–163.

Richard A. Silverman: *Academician V. I. Smirnov's linear algebra and group theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1961. 10 + 464 pp. sh. 97/-.

Determinants and their properties 3–41 * Solution of systems of linear equations 42–91 * Linear transformations 95–148 * Quadratic forms 149–200 * Infinite-dimensional spaces 201–233 * Reduction of matrices to canonical form 234–264 * Elements of the general theory of groups 267–314 * Representations of groups 315–380 * Continuous groups 381–418 * Appendix 419–428 * Bibliography 429–430 * Hints and answers 431–457 * Index 459–464.

Eduard Stiefel: *Einführung in die numerische Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1961. 234 S., 36 Fig. Leinen DM 24.80.

Lineare Algebra 11–28 * Lineare Programmierung 28–52 * Ausgleichung nach kleinsten Quadraten und definite Probleme 52–69 * Nichtlineare Algebra 69–100 * Eigenwertprobleme 101–123 * Differentialgleichungen 123–186 * Approximationen 186–214 * Rechenbeispiele 215–221 * Tabellen 222–229 * Literatur 230–231 * Sachverzeichnis 232–234.

George B. Thomas, Jr.: *Calculus*. Second edition. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1961. 13 + 850 pp. \$ 8.75.

The rate of change of a function 1–44 * Derivatives of algebraic functions 45–94 * Applications 95–160 * Integration 161–224 * Applications of the definite integral 225–290 * Polar coordinates 291–301 * Transcendental functions 302–349 * Methods of integration 350–409 * Hyperbolic functions 410–435 * Vectors and parametric equations 436–477 * Solid geometry and vectors 478–531 * Partial differentiation 532–604 * Multiple integrals 605–639 * Infinite series 640–715 * Differential equations 716–753 * Answers to problems 755–822 * Formulas from elementary mathematics 823–826 * Tables of functions 827–829 * A brief table of integrals 830–843 * Index 844–850.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 216–218 sendes til oppgaveredaktøren, lektor Ragnar J. Solvang, Plogveien 34B, Manglerud, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i Bind 10, hefte 2, være sendt innen 1. april 1962.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

216. Sök villkoren för att talföljden

$$a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{a_n + C}; \quad A \neq 0, B \neq 0,$$

där A, B, C är komplexa tal, konvergerar. Vilka villkor gäller för a_0 ?

Henrik Almström

217. Givet ett ej urartat kägelsnitt. Visa att orten för punkter, för vilka tangenterna till kägelsnittet och tangentkordan bildar en triangel med given yta, är ett kägelsnitt som kan erhållas ur det givna antingen genom en likställighetstransformation eller genom translation.

Bernt Lindström

218. I mange elementære lærebøger i talteori stilles den opgave at bevise, at

$$\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}$$

er et helt tal. Bevis, at det endog er et lige tal.

Anders Bager

219. Vis at

$$8 \int_0^{\infty} \frac{t}{1+4t^2} \cdot \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} = \ln 2 - \gamma,$$

hvor γ er Eulers konstant.

R. Solvang

220. Konstruer en sirkel som tangerer en gitt sirkel og to gitte rette linjer. (Det blir maksimalt 8 løsninger.)

H. Killingbergtrø

PRISOPGAVE FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier udskriver herved nedenstående prisopgave for danske gymnasieelever og kursuselever til studentereksamen. Opgaven ønskes besvaret så fuldstændigt som muligt, og der lægges vægt på en omhyggelig og overskuelig fremstilling. For den bedste blandt de tilfredsstillende besvarelser udsættes en præmie på 150 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstrapræmier.

Besvarelsenerne indsendes senest 31. marts 1962 til lektor Henrik Meyer, Bakke-
draget 15, Birkerød. På besvarelsen skal anføres indsenderens navn, adresse, skole
og klassetrin. Besvarelsen skal ledsages af en erklæring om, at opgaveløsningen er
selvstændigt arbejde. (Benyttelse af litteratur er dog tilladt.)

En mængde $\mathcal{M}$ kaldes et *metrisk rum*, hvis der for ethvert par, A og B ,
af elementer i $\mathcal{M}$ er defineret et reelt tal

$$d(AB),$$

som kaldes *afstanden mellem* A og B , og som opfylder følgende betingelser:

- (1) $d(AB) = d(BA)$ for alle A og B i $\mathcal{M}$;
- (2) $d(AA) = 0$ for alle A i $\mathcal{M}$;
- (3) $d(AB) > 0$ for alle A og B i $\mathcal{M}$, hvor $A \neq B$;
- (4) $d(AB) \leq d(AC) + d(CB)$ for alle A, B og C i $\mathcal{M}$.

Elementerne i $\mathcal{M}$ vil vi kalde *punkter*. Hvis A og B er givne punkter i
 $\mathcal{M}$, vil vi definere *liniestykket* AB som mængden af punkter P i $\mathcal{M}$,
for hvilke det gælder, at

$$d(AP) + d(PB) = d(AB).$$

A og B vil vi kalde *liniestykkets endepunkter*.

Et vigtigt og velkendt eksempel på et metrisk rum er følgende:

$\mathcal{M}_1$ er mængden af reelle talpar, hvor afstanden mellem to punkter

$$A = (x_1, y_1) \quad \text{og} \quad B = (x_2, y_2)$$

er defineret ved

$$d(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Vi betragter nu følgende to tilfælde:

$\mathcal{M}_2$ er mængden af reelle talpar, hvor afstanden mellem to punkter

$$A = (x_1, y_1) \quad \text{og} \quad B = (x_2, y_2)$$

er defineret ved

$$d(AB) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

og

$\mathcal{M}_3$ er mængden af reelle talpar (x, y) , hvor $y \geq 0$, og hvor afstanden mellem to punkter

$$A = (x_1, y_1) \quad \text{og} \quad B = (x_2, y_2)$$

er defineret ved

$$d(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1^2 - y_2^2)^2}.$$

Vis, at $\mathcal{M}_2$ og $\mathcal{M}_3$ er metriske rum.

Idet punkterne i $\mathcal{M}_2$ afbildes som punkter i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, skal man gøre rede for udseendet af liniestykker i det metriske rum $\mathcal{M}_2$.

Idet punkterne i $\mathcal{M}_3$ afbildes som punkter i et sædvanligt retvinklet koordinatsystems første og anden kvadrant, skal man gøre rede for udseendet af liniestykker i det metriske rum $\mathcal{M}_3$.

I den sædvanlige plangeometri (det metriske rum $\mathcal{M}_1$) gælder følgende sætninger:

Sætning 1: Hvis et punkt C er indeholdt i liniestykket AB , vil ethvert punkt, der er indeholdt i liniestykket AC , også være indeholdt i liniestykket AB .

Sætning 2: Hvis et punkt C er indeholdt i liniestykket AB , vil ethvert punkt, der er indeholdt i liniestykket AB , være indeholdt i mindst et af liniestykkerne AC og CB .

Vis, at sætning 1 er gyldig i ethvert metrisk rum.

Vis, at sætning 2 er gyldig i det metriske rum $\mathcal{M}_3$, men ikke i det metriske rum $\mathcal{M}_2$.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASELEVER

Oppgavekonkurranse for 1962, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Det innkam *ingen besvarelser* av oppgavene for 1961, og disse oppgaver gis derfor omigjen for 1962. Oppgaveteksten står i NMT 8, hefte 4, 1960, s. 195–196, og er dessuten trykt opp i *Den Høgre Skolen*, nr. 19, 1. des. 1961, s. 674. De nærmere bestemmelser om konkurransen finnes begge disse steder. Den nye frist for innsending av løsninger er 1. 6. 1962.

Vi henstiller til matematikklærerne på reallinjen om å gjøre flinke elever oppmerksom på konkurransen.

PROBLEMTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Under en följd av år har problemtävlingar för svenska gymnasister anordnats i NMT:s regi. Fr. o. m. 1961 har emellertid Svenska Matematikersamfundet i samarbete med Svenska Dagbladet arrangerat en stort upplagd tävling med en försöksomgång vid de olika läroverken följd av final i Stockholm. Med vederbörlig tillåtelse publicerar vi härmed uppgifterna i finalomgången 1961.

1. För att lösa ekvationssystemet

$$y(x^4 - y^2 + x^2) = x, \quad x(x^4 - y^2 + x^2) = 1$$

kan man byta ut den andra ekvationen mot den ekvation, som erhålles som skillnaden mellan den första ekvationen, multiplicerad med x , och den andra ekvationen, multiplicerad med y . Detta ger det nya systemet

$$y(x^4 - y^2 + x^2) = x, \quad y = x^2.$$

Visa att de båda systemen ej har samma lösningar och förklara utförligt orsaken härtill.

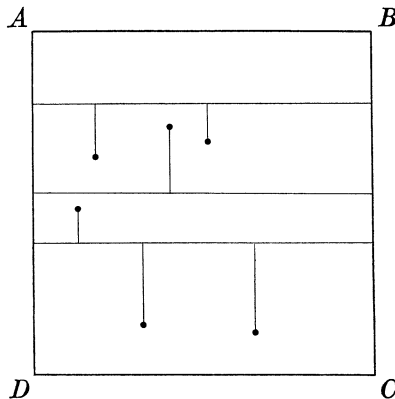
2. Låt $x_1, x_2, \dots, x_n$ vara n godtyckliga positiva tal. Bevisa olikheten

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \frac{x_3}{x_{n-2}} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

3. En person har en ljusstake för n ljus. Han har för avsikt att tillverka n likadana ljus, som skall sättas i staken och sedan brännas på följande sätt under n söndagar: Första söndagen tänder han ett ljus och släcker det efter en timme,

andra söndagen tänder han två lämpligt valda ljus och släcker dem efter en timme o.s.v. fram till den sista söndagen då han tänder alla ljusen och låter dem brinna i en timme. Problemet är nu: För vilka n kan denna ljustillverkning och ljusbränning ske på ett sådant sätt att alla ljusen är nedbrunna efter den n -te söndagen? Ange i dessa fall någon regel för vilka ljus som skall tändas de olika söndagarna.

4. $ABCD$ är en kvadrat med sidan 1 längdenhet. I kvadraten finns 288 punkter utplacerade. Man vill i kvadraten lägga in ett vägnät av följande typ: Dels skall det finnas huvudvägar som går från BC till AD och som är parallella med AB , och dels skall det vinkelrätt från dessa huvudvägar utgå en biväg till var och en av punkterna (se figuren). Visa att man kan välja vägnätet på sådant sätt att dess totala längd är mindre än 24 längdenheter. (Vägarnas bredd skall härvid försummas.) Kan man erhålla ett ännu skarpare resultat?



Det anses som en förtjänst att ha använt en metod som kan utnyttjas även när det gäller att välja korta vägnät vid godtyckligt punktantal.

5. Låt n beteckna ett positivt heltal. Visa att funktionen

$$\frac{x^6}{6} + x^2 - nx$$

har exakt ett minimivärde a_n . Bevisa att man kan finna ett tal k , sådant att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^k}$$

existerar ändligt och skilt från 0. Ange k och gränsvärdet.

Första pris tilldelades Anders Vretblad, Linköpings läroverk. Andra och tredje pris delades mellan Per Enflo, Slottsstadens läroverk, Malmö och Mats Friberg, Trollhättans läroverk.

SUMMARY IN ENGLISH

GUNNAR AF HÄLLSTRÖM: *The axioms of plane geometry.* (Swedish.)

The article contains an axiomatic development of plane absolute geometry, up to and including the theorem of parallels, but not introducing the circle. In addition to the completeness and consistency of the system of axioms, the following conditions are satisfied:

1° The axioms are formulated on the basis of the first concepts and notions only; later definitions like "angle" do not appear explicitly. Congruency of angles is based on the following axiom: If B is between A and C , B' between A' and C' , and if $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $AD \equiv A'D'$, $BD \equiv B'D'$, then $CD \equiv C'D'$.

2° It is tried to avoid "overlapping" and so to make the axioms completely independent. It is a well known – and often used – fact, that a certain redundancy in the system of axioms greatly facilitates the later development. In the article, much of the complication is contributed to the lack of an "auxiliary" axiom of the type: If $A'B' \equiv AB$, there are exactly two triangles $A'B'C'$ and $A'B'C''$, congruent to the given triangle ABC .

FREDERIK GLAVEN: *Points in games with Poisson distribution.* (Danish.)

A supplement to the author's article in the preceding issue of NMT (this vol., pp. 109–116).

BIRGER JANSSON: *Some binomial sums.* (English.)

The following formulas are proved:

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (y+v)^{v-1} (x-v)^{n-v} = \frac{(x+y)^n}{y} \quad (\text{except when } x \neq 0, y = 0);$$

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (y+v)^v (x-v)^{n-v} = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!} (x+y)^r.$$

KÅRE ERIKSEN: *A deduction of the Frenet formulas in general coordinates.* (English.)

The author gives a geometrical interpretation of the Christoffel symbols with application to the Frenet formulas.

DAVID FOG: *Mathematics and democracy.* (Danish.)

A causerie on the most "democratic" position of an ash-tray used by three smokers seated at a table.

INNHOLDSFORTEGNELSE

CHRISTIAN ANDERSEN: En generalisation af rækkerne for $\ln 2$ og $\frac{\pi}{4}$	123
ÅKE BJÖRCK: Om lösning av vissa differentialekvationer med τ -metoden	65– 70
VIGGO BRUN: Musikk og Euklidske algoritmer	29– 36
L. CARLITZ: Some arithmetic properties of the coefficients in a certain expansion.....	117–122
KÅRE ERIKSEN: A deduction of the Frenet formulas in general coordinates.....	172–174
DAVID FOG: Om matematik og demokrati.....	175–176
FREDERIK GLAVEN: Pointsgivning i spil med binomialfordeling.....	109–116
FREDERIK GLAVEN: Pointsgivning i spil med Poissonfordeling	167–168
POUL EINAR HANSEN: Konvekse figurers Jordan-indhold.....	26– 28
GUNNAR AF HÄLLSTRÖM: Om den plana geometrins axiomsystem.....	145–166
BIRGER JANSSON: Some binomial sums.....	169–171
TAGE GUTMANN MADSEN: Om matematisk logik.....	49– 57
HANS RIESEL: Om rekursionsformler för Bernoullis tal.....	44– 48
OLE RINDUNG: Et spilteoretisk problem	58– 64
ERNST S. SELMER: Om flerdimensjonal kjedebrøk.....	37– 43
NILS ÅSLUND: Informationsteoriens fundamentalsatser, I, II.....	5–25, 97–108

Bokmeldinger

CLAIRE FISHER ADLER: Modern geometry (ERNST S. SELMER).....	71
ERIK M. ALFSEN — ERLING R. HANSÉN: Fo 4. Forkurs i matematikk ved Universitetet i Oslo (ERNST S. SELMER).....	177
Archive for history of exact sciences (VIGGO BRUN).....	178
RALPH P. BOAS, JR.: A primer of real functions (OLAV NJÅSTAD).....	73
RUEL V. CHURCHILL: Complex variables and applications (HAAKON WAADELAND).....	124
WOLFGANG FRANZ: Topologie, I. Allgemeine Topologie (JOHN REED)...	73
LOTHAR HEFFTER: Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen (HAAKON WAADELAND).....	125
SOPHUS LIE: Gesammelte Abhandlungen. Band 7 (N. E. NØRLUND)....	127
HERBERT LUGOWSKI — HANNIS JOACHIM WEINERT: Grundzüge der Algebra, II, III (PER HOLM).....	75

F. und R. NEVANLINNA: Absolute Analysis (ISIDORE FLEISCHER)	180
H. K. NICKERSON — D. C. SPENCER — N. E. STEENROD: Advanced calculus (PER HOLM)	76
ISRAEL H. ROSE: A modern introduction to college mathematics (REG-NAR NORGIL)	78
KÔSAKU YOSIDA: Lectures on differential and integral equations (JÖRAN FRIBERG)	127
Mottatte bøker	81, 129, 181
Oppgaver	
Oppgaver til løsning	85, 135, 185
Løsninger	86, 136
Eksamensoppgaver	140
Prisoppgaver for gymnasiaster	186
Kronikk	89
Summary in English	95, 144, 190