

INFORMATIONSTEORIENS FUNDAMENTALSATSER, II¹

NILS ÅSLUND

13. Den icke kontrollerbara källan. Vi har hittills icke gjort några explicita förutsättningar om hur meddelandena m_i genereras som funktion av tiden och ej heller om coderns in- och utkapacitet i tiden. Vid tolkningen av 1:a fundamentalsatsen (11.5) förutsätts dock stillatigande, att en grupp om k meddelanden från källan hinner kodalas och ivägsändas av codern innan denna tas i anspråk för nästa grupp. Om codern är given (viss minneskapacitet och viss hastighet) fordras då, att källan är *kontrollerbar*, d. v. s. kan bringas att invänta codern, för att ej några meddelanden skall gå förlorade.

Ett exempel på en *icke kontrollerbar källa* är en, som genererar ett konstant antal meddelanden per tidsenhet, exempelvis ett per sekund. Vi kan tänka oss en dylik källa ansluten till en coder med ett minne för minst k stycken meddelanden m_i . Coderns minne fylls med k stycken meddelanden och den binärkodade motsvarigheten till dessa bestäms av codern genom identifiering i ett »lexikon«. Minnet kan nu tömmas och blir tillgängligt för nästa grupp om k meddelanden. Samtidigt som dessa lagras ivägsändes den binärkodade motsvarigheten till föregående grupp. Ett buffertutrymme kan tänkas tillgängligt i minnet om bestämmandet av utcoden icke sker momentant. Enligt 1:a fundamentalsatsen vet vi, att undre gränsen för medellängden av de mot meddelandena m_i svarande binära följderna är $= H(M)$ binit. Genereras ett meddelande per sekund av källan kommer alltså ovanstående system ej att fungera tillfredsställande om coderns utkapacitet är mindre än $H(M)$ binit per sekund.

Vi skall undersöka vad som inträffar, om coderns utkapacitet är större än men godtyckligt nära $H(M)$ binit per sekund, d. v. s. $= H(M)(1 + p)$, där $p > 0$.

Denna fråga fordrar tydligen en undersökning av spridningen hos längderna för de optimalkodade binärsviter, som svarar mot grupperna om k stycken m_i -meddelanden. Det gäller:

¹ Förste del sto i NMT, denne årgang, s. 5–25.

$$H(M) = \sum_{i=1}^N p(m_i)I(m_i) = E\{I(m)\}.$$

$I(m)$ är enligt förutsättningarna en diskret, ändlig stokastisk variabel som kan anta ett ändligt antal N olika värden, alltså

$$D^2\{I(m)\} = \sigma^2 < \infty.$$

Låt u_i beteckna en grupp om k stycken meddelanden ur $\{m_i\}$, d. v. s.

$$u_i = m_{i_1}m_{i_2} \dots m_{i_k}.$$

Antalet olika meddelanden u_i är ändligt och de definierar tillsammans ett fullständigt system av händelser. Vi bildar

$$H(U) = \sum_i p(u_i)I(u_i).$$

Eftersom händelserna m_i genereras oberoende så gäller enligt (4.7):

$$I(u_i) = \sum_{l=1}^k I(m_{i_l}).$$

$I(u)$ är alltså en summa av oberoende stokastiska variabler, alla med samma fördelning ($H(M)$, σ). Då gäller

$$\begin{aligned} E\{I(u)\} &= H(U) = kH(M) \quad (\text{jmf. (11.4)}), \\ D^2\{I(u)\} &= kD^2\{I(m)\} = k\sigma^2. \end{aligned}$$

(ANM.: Av centrala gränsvärdessatsen följer, att $I(u)$ är approximativt normalfördelad för stora k .)

Vi bildar sannolikheten för att $I(u)$ avviker med mer än $p_0 \cdot 100$ procent från medelvärdet $H(U)$ och tillämpar *Tchebycheffs olikhet*, d. v. s. $P\{|X - m| > n\sigma\} < 1/n^2$, där $m = E\{X\}$. Alltså:

$$P\{|I(u) - H(U)| > p_0 H(U)\} < \frac{D^2\{I(u)\}}{[p_0 H(U)]^2} = \frac{\sigma^2}{kp_0^2(H(M))^2}.$$

Härav:

$$(13.1) \quad P\{|I(u) - H(U)| > p_0 H(U)\} < \varepsilon,$$

om

$$k > \left(\frac{\sigma}{H(M)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon p_0^2} = A \cdot \frac{1}{\varepsilon p_0^2},$$

där A är oberoende av ε och p_0 . För varje $\varepsilon > 0$ och $p_0 > 0$ finnes alltså ett tal k_1 , sådant att (13.1) är uppfylld för $k > k_1$.

Bortsett från ett antal u -sviter med total sannolikhet $< \varepsilon$ ligger alltså u -sviternas självinformationer mellan gränserna $H(U)(1 \pm p_0)$.

Enligt (11.2) kan ett meddelande med självinformation $I(u_i)$ kodas binärt och avkodbart i en svit av längd n_i binitar där

$$I(u_i) \leq n_i < I(u_i) + 1.$$

Följaktligen kan varje svit u_i med självinformation mellan gränserna $H(U)(1 \pm p_0)$ kodas binärt i n_i symboler, där

$$H(U)(1 - p_0) \leq n_i < H(U)(1 + p_0) + 1 = H(U)(1 + p),$$

där

$$p = p_0 + \frac{1}{H(U)} = p_0 + \frac{1}{kH(M)}.$$

Enligt ovan kan p_0 göras godtyckligt litet om k väljes tillräckligt stort. Detsamma gäller uppenbarligen om p .

För varje $\varepsilon > 0$ och $p > 0$ kan alltså ett tal k_2 bestämmas, så att det för $k > k_2$ gäller:

Alla sviter u_i av k meddelanden ur $\{m_i\}$, bortsett från ett antal sviter, för vilka totala sannolikheten är $< \varepsilon$, har vid optimal binär kodning längder n_i , som uppfyller olikheten

$$(13.2) \quad H(U)(1 - p) \leq n_i < H(U)(1 + p).$$

Vi återknyter nu till exemplet, där ett meddelande m_i genererades per sekund. En grupp om k meddelanden genererades på k sekunder och om codern på denna tid avger $H(U)(1 + p)$ binit, d. v. s. om *utkapaciteten* är $= H(M)(1 + p)$ binit per sekund så gäller för $k > k_2$ enligt (13.2):

1) Totala sannolikheten för genererandet av k -stelliga sviter av m_i -meddelanden, som icke hinns med, är $< \varepsilon$.

2) Totala sannolikheten för utsviter kortare än $(1 - p)H(U)$ binit är likaså $< \varepsilon$.

3) För övriga utsviter gäller, att ingen har en längd, som understiger $(1 + p)H(U)$ med mer än $\frac{2p}{1 + p} \cdot 100$ procent. — Den procentuella del av utsändningstiden, under vilken codern icke avger några utsymboler, kan alltså göras godtyckligt liten.

Vid optimal kodning från en okontrollerbar källa av ovan angiven typ kommer alltså utsviten i limes att ha karaktären av en *oavbruten följd* av lika sannolika 1:or och 0:or.

14. Den störda informationskanalen. 2:a fundamentalsatsen. Tidigare har påpekats, att codern utgör en speciell typ av informationskanal. En allmännare typ av diskreta informationskanaler utgöres av dem, där identiska insviter av symboler icke nödvändigt resulterar i identiska utsviter. Dylika informationskanaler sammanfattas under benämningen *störda kanaler*. Man särskiljer störda kanaler med och utan minne. I det följande behandlas enbart den *störda kanalen utan minne*.

Beteckna insymbolerna till en störd kanal utan minne med x_i och utsymbolerna med y_j . Antalen olika in- resp. utsymboler förutsätts vara ändliga. Mottagandet av en insymbol resulterar i avgivandet av en utsymbol. Varje utfall från kanalen är oberoende av vilka insymboler och utfall, som tidigare förevarit. Utfallets beroende av den förevarande insymbolen beskrives av de *för kanalen* karakteristiska betingade sannolikheter $p(y_j|x_i)$. Dessa förutsätts vara tidsberoende.

I enlighet med vad som visats i 3-4, är uttrycket $I(X; Y)$ ett mått på den information, som utfallen y i medeltal ger beträffande händelserna x . Enligt (3.1) och (4.1) gäller

$$(14.1) \quad I(X; Y) = I(Y; X) = H(Y) - H(Y|X).$$

Uttrycket $H(Y|X) = \sum_i p(x_i)H(Y|x_i)$ bestäms av sannolikheterna $p(x_i)$ och $p(y_j|x_i)$, d. v. s. dels av för *källan*, dels av för *kanalen* karakteristiska storheter. Detsamma gäller för uttrycket $H(Y)$, eftersom $p(y_j) = \sum_i p(x_i)p(y_j|x_i)$. Den medelinformation kanalen överbringat per utfall beträffande händelserna x beror alltså dels av kanalens karakteristika, dels av sannolikhetsfördelningen för händelserna x .

Vi inför begreppet *informationskapaciteten för en kanal*:

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y),$$

där maximum skall bestämmas över alla fördelningar, som kan definieras av schemat

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix},$$

varvid n = antalet möjliga olika insymboler. *Informationskapaciteten är alltså den maximala information, som en kanal i medeltal kan överbringa per utfall, när den anslutes till gynnsammast möjliga källa.*

Vi skall speciellt behandla den *binära, symmetriska kanalen*, vilken karakteriseras av följande betingade sannolikheter:

$$p(y_0|x_0) = p(y_1|x_1) = p, \quad p(y_0|x_1) = p(y_1|x_0) = q = 1 - p.$$

Vi kallar p sannolikheten för *korrekt återgivning*. Man erhåller:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 p(x_i)p(y_j|x_i) \cdot \log p(y_j|x_i) \\ &= -p(x_0)p \log p - p(x_1)p \log p - p(x_0)q \log q - p(x_1)q \log q \\ &= -p \log p - q \log q. \end{aligned}$$

På grund av kanalens symmetriegenskaper är alltså här $H(Y|X)$ oberoende av sannolikheterna $p(x_i)$. Enligt (14.1) är följaktligen $I(X; Y)$

maximum för denna kanal när $H(Y)$ är maximum. Vi vet enligt 5 att $H_{\max}$ för ett binärt schema är $=1$. Härvid är $p(y_0)=p(y_1)=0,5$. Eftersom kanalen är symmetrisk är dessa sannolikheter lika *om och endast om sannolikheterna* $p(x_0)$ och $p(x_1)$ *även är lika*, d. v. s. om $p(x_0)=p(x_1)=0,5$, förutsatt $q \neq 0,5$ (se nedan).

Vi har alltså visat, att informationskapaciteten för den binära symmetriska kanalen är

$$(14.2) \quad C = 1 + p \log p + q \log q \text{ bits/utsymbol}.$$

I fig. 2 visas, hur informationskapaciteten C för en binär symmetrisk kanal varierar med sannolikheten q , d. v. s. med sannolikheten för att en insignal skall ge upphov till inkorrekt utsignal.

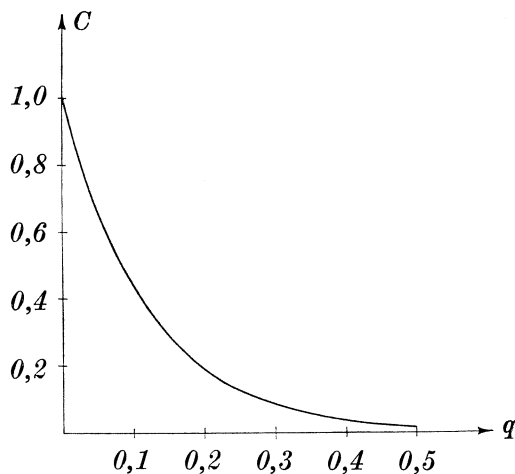


Fig. 2

I det följande skall vi förutsätta, att $0 < q < 0,5$. Om $q > 0,5$ byter vi indicering för y och skiftar beteckningarna p och q , varvid q blir $< 0,5$ med bibehållande av innebörden sannolikhet för inkorrekt utsignal. Om $q = 0,5$ är kanalkapaciteten $= 0$ och kanalen är ointressant utom för generering av slumpstal. Om slutligen $q = 0$ så är kanalen ostörd och faller utanför avsnittets rubrik. — Följaktligen gäller i fortsättningen, att $0 < C < 1$.

Ett nödvändigt villkor för att den binära symmetriska kanalen skall utnyttjas maximalt är enligt ovan $p(x_0)=p(x_1)=0,5$. Härvid kan kanalen i medeltal överbringa C bits per utsymbol. Om kanalen direkt anslutes till en källa med entropien $H(0,5, 0,5)=1$ bit per insymbol, kommer i genomsnitt $1-C$ bits att förloras per överförd symbol. Informationsförlusten svarar mot att insviter av symboler deformeras av kanalen.

Vi riktar nu intresset mot följande

PROBLEM: Hur stor medelinformation kan optimalt överföras per utfall från en störd kanal, om det fordras, att osäkerheten vid överförandet av givna meddelanden skall vara godtyckligt liten?

Det är uppenbart, att överföringssäkerheten för en kanal kan ökas genom att varje insymbol *repeteras* ett antal gånger. Härvid kommer å andra sidan medelinformationen per utsymbol att avta, d. v. s. den erforderliga tiden för att transmittera ett givet meddelande kommer att mångdubblas. Man leds härav intuitivt till uppfattningen, att överföringssäkerhet och medelinformation per utfall är komplementära storheter, d. v. s. den ena kan förbättras endast på bekostnad av den andra. Informationsteoriens kardinalresultat är, att denna uppfattning är felaktig. Det existerar en kodning sådan, att en störd informationskanal överbringar en medelinformation godtyckligt nära C bits/symbol, varvid sannolikheten för att transmitterade symbolsviter skall deformeras därhän, att de misstolkas vid kanalutgången, är godtyckligt liten.

Detta är innebörden av 2:a fundamentalsatsen, som här skall härledas för den binära, symmetriska kanalen.

15. Transformation till redundant representation. Varje informationskälla av den typ, som vi definierat i 7, kan genom en coder transformeras till en ekvivalent källa, vars entropi är godtyckligt nära $H(0,5, 0,5) = 1$. Vi utgår från en dylik binär källa, och förutsätter för enkelhets skull, att dess entropi är exakt $= 1$ bit/utfall. Betrakta speciellt sviter av längden k , genererade av denna källa. Dessa sviter kan betraktas som meddelanden avgivna av en källa M med entropien $H(M)$. Eftersom de binära utfallen är statistiskt oberoende gäller enligt (1.3) och (1.4):

$$(15.1) \quad H(M) = kH_{\max} = k.$$

Självinformationen för varje meddelande från denna källa är enligt (4.7) också $= k$ bits.

Låt nu en coder omskriva varje sådant meddelande till en annan binär representation där varje meddelande har längden n binit ($n > k$). Utsymbolerna ur denna coder är statistiskt beroende, ty av 2^n möjliga olika n -ställiga utsviter är endast 2^k stycken tillåtna och följaktligen kan det exempelvis ej ernås, att vid varje enskilt utfall sannolikheten för en 1:a är lika stor som för en 0:a. Däremot kan de *totala* sannolikheterna för 0 resp. 1 mycket väl göras lika.

Utgången från denna coder anslutes till kanalen. *Talen n och k är ej fixerade, och ej heller metoden för kodningen.*

På grund av det statistiska beroendet mellan de binära utsymbolerna representerar coderutgången en annan typ av schema respektive informationskälla än dem vi hittills behandlat. De n -ställiga utsviterna fastlägger entydigt utfallen från en källa med entropien $H(M)$ och överför därmed var och en informationsmängden k bits. Med bibehållande av entropibegreppets innebörd av medelinformation per utfall definierar vi entropien för den binära coderutgången:

$$H_R = \frac{H(M)}{n}.$$

Härav enligt (15.1):

$$(15.2) \quad H_R = \frac{k}{n} H_{\max} = \frac{k}{n}.$$

Genom denna coder övergår vi alltså från en irredundant representation till en redundant (jmf. 12).

2:a fundamentalsatsen kan nu formuleras såsom följer:

Givet en kanal med kapacitet C . Då existerar en källa sådan, att den har en entropi H_R^ godtyckligt mindre än C och sådan, att den vid direkt anslutning till kanalen tillåter en godtyckligt hög överföringssäkerhet genom kanalen.*

16. Bevis för 2:a fundamentalsatsen¹. Betrakta en symmetrisk kanal genom vilken vi sänder sviter av längden n binära symboler ($n < \infty$). Det finnes 2^n stycken olika dylika sviter. Enligt våra tidigare förutsättningar om kanalen resulterar en n -ställig ingångssvit u_{in} i en n -ställig utgångssvit v_{ut} . Låt respektive sviter representeras av punkter i en *punktmängd* E om 2^n element. Transmission av en svit innebär att en punkt i mängden antingen avbildas på en annan punkt i mängden eller eventuellt på sig själv.

På grund av kanalens symmetriegenskaper gäller, att sannolikheten för att punkten (sviten) u skall avbildas på punkten v är lika stor som sannolikheten att v skall avbildas på u , d. v. s.

$$(16.1) \quad P(u_{\text{in}}, v_{\text{ut}}) = P(v_{\text{in}}, u_{\text{ut}}).$$

I motsvarande positioner bytes i ena fallet 1:or mot 0:or och i andra fallet 0:or mot 1:or, och sannolikheterna för dessa byten är enligt förutsättningarna lika stora.

Vi definierar: *Avståndet* l mellan två punkter (sviter) = antalet fall, där sviterna i motsvarande positioner har olika binära symboler.

¹ Den följande bevismetoden är föreslagen av D. Slepian.

Antalet punkter, som ligger exakt på avståndet l från en given punkt är då lika med antalet olika möjligheter att utvälja l element bland n , d. v. s. $= \binom{n}{l}$.

Sannolikheten att en enskild symbol skall ändras vid transmissionen är $=q$. Då ändringarna är statistiskt oberoende gäller, att sannolikheten för att en given punkt skall avbildas på en annan given punkt, som ligger på avståndet l från den förstnämnda, är $=q^l(1-q)^{n-l}$. Sannolikheten för att en given punkt skall avbildas på *någon* punkt på avståndet l är då $= \binom{n}{l} q^l (1-q)^{n-l}$.

Inför den stokastiska variabeln W = antalet symboländringar vid en transmission = avståndet mellan insvit och erhållen utsvit. Då gäller

$$P\{W \leq l\} = \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}.$$

Variabeln W är alltså binomialfördelad och följaktligen gäller

$$E\{W\} = nq, \quad D^2\{W\} = nq(1-q) = \sigma^2.$$

Vi önskar nu bestämma radien i en sfär $S(u)$ kring punkten u , där $u \in E$, sådan, att sannolikheten att u skall avbildas utanför denna sfär är $< \frac{1}{2}\varepsilon$, där ε är ett godtyckligt, *fixt* tal.

Enligt Tchebycheffs sats gäller

$$P\{W - nq > k\sigma\} \leq P\{|W - nq| > k\sigma\} < \frac{1}{k^2}.$$

Låt sfärens radie vara $nq + b$. Då gäller

$$P\{W > nq + b\} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

om

$$(16.2) \quad b = k\sigma = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{nq(1-q)} = B\sqrt{n}.$$

Vi önskar vidare bestämma en majorant till antalet punkter ur E , som ryms inom och på denna sfär. Kalla antalet punkter för N_S och låt $r = [nq + b]$ vara det största heltalet $\leq nq + b$. Då gäller

$$(16.3) \quad N_S = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k}.$$

Vidare gäller $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$ om $k \leq \frac{1}{2}n$. — Enligt förutsättningarna är $q < \frac{1}{2}$. Då finnes ett tal $n_0 > 0$ sådant, att för $n \geq n_0$ gäller

$$nq + b = nq + B\sqrt{n} \leq \frac{1}{2}n - 1.$$

Om $n \geq n_0$ är alltså $r \leq \frac{1}{2}n - 1$ och då är ingen term i (16.3) större än $\binom{n}{r}$. Härav:

$$(16.4) \quad N_S \leq (r+1) \binom{n}{r} \leq \frac{n}{2} \binom{n}{r}.$$

Det gäller:

$$(16.5) \quad \binom{n}{r} \leq \frac{n^n}{r^r(n-r)^{n-r}}.$$

Bevis: Det finnes n^n olika tal med högst n siffror, alla ur ett siffer-system med basen n . Bland dessa tal finnes ett antal tal $A \leq n^n$ för vilka gäller, att r stycken av siffrorna är $\leq r$ och $(n-r)$ stycken är $> r$. Vi skall visa att

$$A = \binom{n}{r} r^r (n-r)^{n-r}.$$

De r siffrornas positioner kan utväljas på $\binom{n}{r}$ olika sätt, och till varje sådan kombination av positioner finnes r^r olika möjliga tal. I de $(n-r)$ övriga positionerna kan $(n-r)^{n-r}$ olika tal bildas av de $(n-r)$ stycken siffrorna $r+1, r+2, \dots, n$, varmed (16.5) är bevisad.

Ur (16.4) och (16.5) erhålles

$$N_S \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{n^n}{r^r(n-r)^{n-r}} \quad (n \geq n_0).$$

För fixt n antar (16.5) maximum när $r = \frac{1}{2}n$, vilket lätt inses genom derivering. Av $r \leq nq + b < \frac{1}{2}n$ erhålles då

$$(16.6) \quad N_S \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{n^n}{(nq+b)^{nq+b}(np-b)^{np-b}} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\left(q + \frac{b}{n}\right)^{nq+b} \left(p - \frac{b}{n}\right)^{np-b}}.$$

Vi skall nu utvälja en delmängd $\{U_k\}$ ur E . Elementen i $\{U_k\}$ kallar vi *kodpunkter*. Vid transmittering genom kanalen användes uteslutande kodpunkter som insviter.

Varje kodpunkt U_k tillordnas ett *identifieringsområde* $I(U_k)$ som utgör en delmängd av E . Om en utsvit tillhör $I(U_k)$ identifierar vi insviten som U_k .

Vi väljer U_1 godtyckligt. Låt $I(U_1) = S(U_1)$. Sannolikheten att U_1 skall avbildas utanför $I(U_1)$ är då $< \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$.

Låt $I(U_2)$ vara den delmängd av $S(U_2)$, som är disjunkt från $I(U_1)$. Vi väljer U_2 så att sannolikheten att U_2 skall avbildas i skärningen

mellan $I(U_1)$ och $S(U_2)$ är $\leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Sannolikheten att U_2 skall avbildas utanför $I(U_2)$ är då $< \varepsilon$.

Vi fortsätter analogt, och låter $I(U_i)$ vara den delmängd av $S(U_i)$, som är disjunkt från $I(U_1), I(U_2), \dots, I(U_{i-1})$. Vi väljer U_i så att sannolikheten att U_i skall avbildas i skärningen mellan $S(U_i)$ och någon av dessa mängder är $\leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Sannolikheten att U_i skall avbildas utanför $I(U_i)$ är då $< \varepsilon$.

Vi fortsätter på detta sätt tills ingen ytterligare kodpunkt kan definieras. Antag vi med givet ε och för visst n finner K stycken kodpunkter. Vi vet att $K \geq 1$ ty $I(U_1)$ existerar alltid.

Inför beteckningen R för mängden av alla punkter ur E , som tillhör något identifieringsområde. Om en kodpunkt avbildas i en punkt, som icke tillhör R , är utsviten över huvud icke identifierbar.

Antag R innehåller N_R stycken punkter. Eftersom inget identifieringsområde kan innehålla fler punkter än N_S stycken så gäller

$$(16.7) \quad K \geq \frac{N_R}{N_S}.$$

Vi har redan bestämt en majorant till N_S , och önskar nu bestämma en minorant till N_R . Detta är ett kombinatoriskt problem, som med fördel löses genom införandet av fiktiva sannolikheter. Observera att detta är ett tillfälligt konstgrepp, som inte innebär någon specialisering vad beträffar de verkliga meddelandenas sannolikhetsfördelning.

Antag alla möjliga olika insviter är lika sannolika så att var och en har sannolikheten $P(u_{\text{in}}) = 2^{-n}$. Då gäller enligt (16.1):

$$\begin{aligned} \frac{N_R}{2^n} &= P\{u_{\text{in}} \in R\} = \sum_{u_{\text{in}} \in R} P(u_{\text{in}}) = \sum_{u_{\text{in}} \in R} \sum_{v_{\text{ut}} \in E} P(u_{\text{in}}, v_{\text{ut}}) \\ &= \sum_{u_{\text{ut}} \in R} \sum_{v_{\text{in}} \in E} P(u_{\text{ut}}, v_{\text{in}}) = \sum_{u_{\text{ut}} \in R} P(u_{\text{ut}}) = P\{u_{\text{ut}} \in R\}. \end{aligned}$$

Men

$$P\{u_{\text{ut}} \in R\} = \sum_{v_{\text{in}} \in E} P(v_{\text{in}}) \cdot P(u_{\text{ut}} \in R | v_{\text{in}}).$$

Vi skall visa att

$$(16.8) \quad P(u_{\text{ut}} \in R | v_{\text{in}}) \geq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

där ε har samma innebörd som tidigare i detta bevis. (Observera att dylika betingade sannolikheter är helt oavhängiga av förutsättningen om insviternas sannolikheter.)

Om v_{in} är en kodpunkt är påståendet (16.8) säkert sant. (Det förutsätts $\varepsilon < 1$.) Antag v_{in} icke är en kodpunkt och att $P(u_{\text{ut}} \in R | v_{\text{in}}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Då gäller även, att sannolikheten att u_{ut} ligger i skärningen mellan $S(v_{\text{in}})$

och R är $< \frac{1}{2}\varepsilon$. Följaktligen uppfyller punkten v_{in} villkoren för en kodpunkt. Varje sådan punkt utnyttjas emellertid redan som kodpunkt, varför resultatet motsäger antagandet. Alltså gäller (16.8), och därför

$$\sum_{u_{\text{ut}} \in R} P(u_{\text{ut}}) \geq \sum_{v_{\text{in}} \in E} P(v_{\text{in}}) \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon,$$

alltså

$$N_R \geq 2^n \cdot \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Enligt (16.7) och (16.6) erhålles då slutligen

$$(16.9) \quad K \geq \frac{N_R}{N_S} \geq 2^n \frac{\varepsilon}{n} \left(q + \frac{b}{n}\right)^{nq+b} \left(p - \frac{b}{n}\right)^{np-b} \quad (n \geq n_0).$$

Med en felsannolikhet $< \varepsilon$ kan minst K stycken olika n -ställiga sviter transmitteras genom kanalen. Den coder, som levererar dessa K olika sviter mottar på sin ingång K stycken binärsviter från en icke redundant källa. Enligt vårt tidigare antagande har dessa alla längden k , d. v. s. har självinformation k bits. Det finnes 2^k stycken olika dylika sviter. Övannämnda överföringssäkerhet kan alltså upprätthållas om k uppfyller $2^k \leq K$.

Vi väljer k så att $2^k \leq K < 2^{k+1}$, varvid $k > \log K - 1$. Logaritmering av (16.9) och insättning av (16.2) ger

$$\frac{k}{n} > \frac{\log K - 1}{n} \geq 1 + q \log q + p \log p - O(n^{-1}).$$

Enligt (15.2) och (14.2) erhålles då

$$H_R^* > C - O(n^{-1}), \quad \text{V.S.V.}$$

Observera, att 2:a fundamentalsatsen är ett *existens-teorem*. Någon metod för att explicit bestämma den kod, som för given källa, kanal och överföringssäkerhet ger maximal medelinformation per utfall finnes ännu ej utarbetad. Å andra sidan finnes icke-optimala metoder, som garanterar önskad överföringssäkerhet, exempelvis parity-check metoden.

17. Sammanfattning. Enligt 2:a fundamentalsatsen kan vi ernå godtyckligt liten felsannolikhet vid transmissionen genom en störd kanal utan att sviterna från den icke-redundanta källan behöver förlängas mer än med en faktor n/k , där n/k överstiger $1/C$ godtyckligt litet. Sammanställer vi detta resultat med vad som visats beträffande kodningen för den icke kontrollerbara källan så erhålles följande:

Antag vi har en diskret källa med entropien $H(M)$ och som genererar

N stycken meddelanden per sekund. Med upprätthållande av godtyckligt liten felsannolikhet vid transmissionen är det då möjligt att

1) transformera denna källa till en icke-redundant binär källa, vars utkapacitet godtyckligt litet överstiger $H(M) \cdot N$ binit/s per sekund (1:a huvudsatsen);

2) transformera denna senare källa till en redundant binär källa, som direkt kan anslutas till en binär symmetrisk kanal med kapaciteten C bits/symbol. Härvid måste codern ha en utkapacitet och kanalen en transmissionskapacitet på $H(M) \cdot N \cdot \frac{n}{k}$ binit/s, där $\frac{k}{n}$ är mindre än men godtyckligt nära C (2:a huvudsatsen).

POINTSGIVNING I SPIL MED BINOMIALFORDELING

FREDERIK GLAVEN

1. I forskellige konkurrencer og spil er det almindeligt at benytte en eller anden form for pointsgivning, ved hjælp af hvilken man finder frem til den af konkurrencedeltagerne, der skal erklæres for vinder. Det kan dreje sig om en række konkurrencer mellem to deltagere eller om en sammensat konkurrence mellem flere deltagere, der konkurrerer to og to i en række delkonkurrencer. Som eksempler kan nævnes kamprækker i håndbold og fodbold.

Man kan stille sig den opgave at finde den mest hensigtsmæssige pointsgivning, hvorved man forstår den, med hvilken der er størst sandsynlighed for, at den stærkeste deltager vinder konkurrencerækken, d. v. s. får størst pointssum. Som arbejds eksempel vælges her fodboldturneringer.

Ved serieturneringer i fodbold har man hidtil givet 2, 1 og 0 points for henholdsvis vundet, uafgjort og tabt kamp. Det vindende hold har fået 2 points, ganske uanset målstillingen. Da tilfældigheder spiller en stor rolle i fodboldkampe, kunne det synes uhensigtsmæssigt at give 2 points både for en sejr på 4-3 og en på 7-0, idet den første sejr let kan bero på en tilfældighed, hvorimod ikke den anden. Det synes mere rimeligt at lade sejrherren i 4-3-kampen nøjes med f. eks. $1\frac{1}{2}$ points og give taberen $\frac{1}{2}$ point.

Med udgangspunkt i denne betragtning skal følgende teoretiske fodboldarrangement undersøges. To fodboldhold A og B spiller f. eks. 4 kampe mod hinanden, således at hver kamp stoppes, når antallet af de scorede mål er 5. Desuden går man ud fra, at hold A har sandsynligheden 60% for at vinde hvert mål og B altså 40%. Der benyttes to forskellige pointsgivninger I og II, således at kampresultaterne 5-0, 4-1, 3-2, 2-3, 1-4 og 0-5 efter I (det hidtil benyttede system) tildeles henholdsvis 2, 2, 2, 0, 0 og 0 points, men efter II henholdsvis 8, 7, 5, 3, 1 og 0 points.

Efter pointsgivning I får A's pointsgennemsnit middelværdien 1,3651 og spredningen 0,4655 (der regnes med 4 dec.). For at B skal kunne

vinde den lille turnering på 4 kampe, skal A's pointsgennemsnit afvige fra middelværdien med mindst 0,3651 i nedadgående retning, altså med $0,3651:0,4655=0,7844$ gange spredningen. Med normalt fordelt pointsgennemsnit svarer dette til, at A vinder turneringen i 78,3% af tilfældene og B i 21,7% af disse.

Efter pointsberegning II får A's pointsgennemsnit middelværdien 4,9325 og spredningen 1,0172. B vinder, når A's pointsgennemsnit afviger med mindst $0,9325:1,0172=0,9167$ gange spredningen i nedadgående retning. Dette svarer til, at A vinder i 82,0% af tilfældene og B i 18,0% af disse.

Iøvrigt viser en direkte udregning, at A efter pointsgivning I vinder i 62,1%, opnår uafgjort i 28,2% og taber i 9,7% af tilfældene, medens tallene efter pointsgivning II er henholdsvis 76,1%, 10,6% og 13,3%. Afgøres de uafgjorte tilfælde ved lodtrækning, vinder A efter I i 76,2% og efter II i 81,4% af tilfældene.

Det er hermed godtgjort, at pointsberegning II er mere hensigtsmæssig end I i det her beskrevne teoretiske fodboldspil, idet den i de fleste tilfælde giver den »rigtige« sejrherre.

2. Idet der stadig skal betragtes teoretiske fodboldspil i lighed med det, der er beskrevet ovenfor, er opgaven i det følgende at finde den bedste pointsgivning, d. v. s. den, ved hvilken det hold, der har størst sandsynlighed for at score et mål, også har størst sandsynlighed for at vinde turneringen.

Der regnes med n mål i hver kamp, og A's sandsynlighed for at score et mål kaldes t , hvor t er konstant og $> \frac{1}{2}$. Scorer hold A i af de n mål — sandsynligheden herfor er $p_i = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ —, får det x_i points, og B får $-x_i$ points, hvor $x_i < 0$ for $i < n-i$. Middelværdien af A's points i en kamp er da $\mu = \sum p_i x_i > 0$. Sættes det andet moment $\sum p_i x_i^2 = g$, bliver variansen $\sigma^2 = g - \mu^2$. Ved de anførte summationer skal i gennemløbe værdierne 0, 1, ..., n .

Af de i 1 foretagne betragtninger ses, at det gælder om at finde størsteværdi for μ/σ eller mindsteværdi for $\sigma^2/\mu^2 = g/\mu^2 - 1$ eller for g/μ^2 . En sådan mindsteværdi må sikkert eksistere.

Da $x_{n-i} = -x_i$, er $\mu = \sum (p_i - p_{n-i}) x_i$ og $g = \sum (p_i + p_{n-i}) x_i^2$ for $i = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$.

Ved partiel differentiation af g/μ^2 med hensyn til x_i ($i = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$) ses, at den søgte mindsteværdi indtræffer for

$$\mu^2 \cdot 2(p_i + p_{n-i})x_i = g \cdot 2\mu(p_i - p_{n-i}),$$

d. v. s. for

$$x_i = \frac{g}{\mu} \cdot \frac{p_i - p_{n-i}}{p_i + p_{n-i}}$$

eller

$$x_i = \frac{g}{\mu} \cdot \frac{t^{2i-n} - (1-t)^{2i-n}}{t^{2i-n} + (1-t)^{2i-n}}.$$

Da pointsgivningen i realiteten bliver den samme, når alle x_i multipliceres med samme vilkårlige positive konstant, får man, idet man sætter eksponenten $2i-n=q$, der angiver det antal mål, som A har scoret mere end B i en kamp,

$$x_i = c \cdot \frac{t^q - (1-t)^q}{t^q + (1-t)^q}.$$

Sættes konstanten c lig med 1, får man automatisk $g=\mu$.

Points afhænger foruden af t kun af det overskydende antal q af scorede mål. I stedet for med x_i betegnes nu de nævnte points ($c=1$) med $P_q(t)$, hvor $P_q(1-t) = -P_q(t)$. Tabel 1 viser nogle værdier af $P_q(t)$ med 3 decimaler.

$$P_q(t) = \frac{t^q - (1-t)^q}{t^q + (1-t)^q}$$

$q \backslash t$	0,55	0,60	0,65	0,70	0,80	0,90	0,95
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,100	0,200	0,300	0,400	0,600	0,800	0,900
2	0,198	0,385	0,551	0,690	0,882	0,976	0,994
3	0,292	0,543	0,730	0,854	0,969	0,997	1,000
4	0,381	0,670	0,845	0,935	0,992	1,000	1,000
5	0,463	0,767	0,913	0,971	0,998	1,000	1,000
6	0,538	0,839	0,952	0,988	1,000	1,000	1,000

Tabel 1.

3. Problemet skal nu generaliseres, idet man lader de to hold A og B spille

k_1 kampe med ialt 1 mål ,
 k_2 kampe med ialt 2 mål ,

 k_r kampe med ialt r mål ,

altså ialt $k_1 + k_2 + \dots + k_r = K$ kampe.

¹ Beviset er i denne form for n vilkårlig meddelt forf. af docent Gunnar Blom.

For hver af de k_n kampe med ialt n mål fastsættes følgende: A får for i scorede mål af de n tildelt $x_{i,n}$ points og B $-x_{i,n}$ points. Disse points betragtes foreløbig som givne konstante tal. Middelværdien af A's points betegnes med μ_n og spredningen med σ_n , der begge er konstante for hver værdi af t . Desuden betegnes det andet moment med g_n , også konstant foreløbig.

Problemet består i at finde den pointsgivning, ved hvilken hold A, hvis konstante målsandsynlighed t antages større end $\frac{1}{2}$, har størst sandsynlighed for at vinde turneringen, d. v. s. få størst pointssum i de K kampe.

Til det formål indføres de variable vægtfaktorer y_n således, at A i stedet for de ovenanførte $x_{i,n}$ points får $y_n x_{i,n}$ points for scoring af i mål, samtidig med at B får $-y_n x_{i,n}$ points for scoring af $n-i$ mål; $n=1, 2, \dots, r$.

A's pointssum i turneringen får da middelværdien $\mu = \sum k_n \mu_n y_n$ og variansen $\sigma^2 = \sum k_n \sigma_n^2 y_n^2$; $n=1, 2, \dots, r$.

Vægtfaktorerne y_n skal da bestemmes således, at μ^2/σ^2 har størsteværdi. Ved partiel differentiation af μ^2/σ^2 m. h. t. y_n ($n=1, 2, \dots, r$) ses, at størsteværdien indtræffer for $\sigma^2 \cdot 2\mu \cdot k_n \mu_n = \mu^2 \cdot 2k_n \sigma_n^2 y_n$, d. v. s.

for $y_n = \frac{\sigma^2 \mu_n}{\mu \sigma_n^2}$. Størsteværdien bliver da μ^2/σ^2 , hvor

$$\mu = \sum k_n \mu_n \cdot \frac{\sigma^2 \mu_n}{\mu \sigma_n^2} = \frac{\sigma^2}{\mu} \sum k_n \cdot \frac{\mu_n^2}{\sigma_n^2}$$

og

$$\sigma^2 = \sum k_n \sigma_n^2 \cdot \frac{\sigma^4 \mu_n^2}{\mu^2 \sigma_n^4} = \frac{\sigma^4}{\mu^2} \sum k_n \cdot \frac{\mu_n^2}{\sigma_n^2},$$

således at

$$\frac{\mu^2}{\sigma^2} = \sum k_n \cdot \frac{\mu_n^2}{\sigma_n^2}.$$

Den »allerstørste« værdi for μ^2/σ^2 indtræffer således, når alle μ_n^2/σ_n^2 er størst, d. v. s. ifølge 2 for $x_{i,n} = P_q(t)$, hvor $q=2i-n$. Man skal altså

i en kamp med målantallet n ($n=1, 2, \dots, r$) give A $y_n x_{i,n} = \frac{\mu_n}{\sigma_n^2} P_q(t)$ points (for scoring af i af de n mål), idet faktoren σ^2/μ erstattes med 1.

Nu er $\sigma_n^2 = g_n - \mu_n^2$, hvor ifølge 2 $g_n = \mu_n$, altså $\sigma_n^2 = \mu_n(1 - \mu_n)$, hvorved $y_n = 1/(1 - \mu_n)$. A skal således i en kamp med ialt n mål have

$\frac{1}{1 - \mu_n} P_q(t)$ points. — Man bemærker, at y_n afhænger af n , men ikke af k_n . Tabel 2 viser nogle få værdier af $1/(1 - \mu_n)$. Værdierne vokser omtrent i takt med n , dog lidt stærkere, og stiger med t .

		$\frac{1}{1-\mu_n}$	
n	t	0,60	0,70
1		1,0417	1,1905
2		1,0833	1,3810
3		1,1253	1,5890
4		1,1676	
5		1,2105	
10		1,4353	

Tabel 2.

Tabel 3 a-b viser de optimale points for scoring af i mål mod modstanderens $n-i$ mål svarende til $t=0,60$ for n op til 10 og enkelte værdier svarende til $t=0,70$.

$n-i \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,00	-0,21	-0,42	-0,61	-0,78	-0,93	-1,05	-1,15	-1,24	-1,31	-1,39
1	0,21	0,00	-0,23	-0,45	-0,66	-0,84	-0,99	-1,12	-1,23	-1,33	
2	0,42	0,23	0,00	-0,24	-0,48	-0,70	-0,90	-1,07	-1,20		
3	0,61	0,45	0,24	0,00	-0,26	-0,52	-0,75	-0,96			
4	0,78	0,66	0,48	0,26	0,00	-0,28	-0,55				
5	0,93	0,84	0,70	0,52	0,28	0,00					
6	1,05	0,99	0,90	0,75	0,55						
7	1,15	1,12	1,07	0,96							
8	1,24	1,23	1,20								
9	1,31	1,33									
10	1,39										

Tabel 3 a. Optimale points for scoring, svarende til $t=0,60$ og forskellige værdier af i og $n-i$.

$i \backslash n-i$	0	1	2	3
0	0,00	-0,48	-0,95	-1,36
1	0,48	0,00	-0,64	
2	0,95	0,64		
3	1,36			

Tabel 3 b. Optimale points for scoring, svarende til $t=0,70$ og forskellige værdier af i og $n-i$.

Man ser, at en sejr på f. eks. 3-2 tildeles flere points end en sejr på 1-0, selv om måldifferensen er den samme. Det er i overensstemmelse med, at et væsentligt svagere hold godt kan vinde 1-0, men sjældnere 3-2.

4. Ved praktiske anvendelser ses der i det følgende bort fra følgende komplikationer:

1° at der er 3 eller flere hold, der spiller indbyrdes to og to,

2° at t ikke er konstant under en kamp og

3° at holdenes indbyrdes styrke ændres fra kamp til kamp.

Rækkevidden af de følgende overvejelser synes dog ikke i væsentlig grad at blive berørt af disse forudsætninger.

Der skal nu tages standpunkt til, hvilken pointsskala der må anses for at være den mest hensigtsmæssige at benytte i fodbold, idet der specielt tages sigte på kampene i Danmarks 1., 2. og 3. division.

Resultaterne fra 1959 lægges til grund. Målantallets gennemsnit (n) i de 396 kampe var 3,88 og spredningen 2,00. Gennemsnittet af det overskydende antal mål (q) i en kamp var 1,79 og spredningen 1,32. Efter resultatfordelingen vil det være rimeligt at ansætte middelværdien af målsandsynligheden (t) til omkring 0,63.

Da alle kampe er på 2 gange 45 minutter, er det rimeligt at tillægge dem samme vægt, i den forstand, at kun det overskydende målantalt (q) er bestemmende for points, eller med andre ord ikke at tage faktoren $1/(1-\mu_n)$ med. Pointstabellen vil iøvrigt derved blive mere overskuelig. Det afgørende for denne beslutning er, i forbindelse med den begrænsede spilletid, at det er rimeligt at regne en sejr på 1-0 ækvivalent med en på 3-2, idet halvlegsresultaterne kan have været henholdsvis 0-0, 1-0 og 2-2, 1-0. Det bemærkes, at der i de teoretiske fodboldkampe ikke var tale om nogen tidsbegrænsning.

Den egentlige vanskelighed ved at anvende den opstillede teori er, at de optimale points $P_q(t)$ varierer med t , som er ubekendt. Det er jo til en vis grad holdenes styrkeforhold, der skal bestemmes.

Benytter man — i alle kampe — pointsskalaen $P_q(s)$ med $s=0,63$, vil denne pointsgivning være bedre, d. v. s. give større værdi for μ/σ , end den for tiden benyttede pointsgivning, ved kampe, hvor t (for det stærkeste hold) er mindre end ca. 0,75, men dårligere for større t -værdier. Man står sig ved at bruge points $P_q(s)$ med en s -værdi, der er noget større end den anslåede middelværdi for t , idet man derved får en pointsgivning, der er bedre end den for tiden benyttede, også for t -værdier, der er større end 0,75, f. eks. op til omkring 0,80. Da t -værdier på omkring 0,80 og derover er ret sjældne og værdien af σ for disse er relativt lille,

vil den »skade«, der sker ved disse ret få kampe, være uden videre betydning for pointsgivningens resultat.

I overensstemmelse med det lige anførte vælges i nærværende tilfælde en skala $P_q(s)$ svarende til en s -værdi omkring 0,68–0,69, idet man tager i betragtning, at en skala alene bestemmes af sine differenskquotienter. Denne skalas talværdier afrundes, idet man bl. a. sørger for, at skalaens største talværdi svarer til en værdi af q , som kun overgår i omkring 5% af kampene. Man kommer således til skalaen:

q	−4 o. s. v.	−3	−2	−1	0	1	2	3	4 o. s. v.
Points	0,0	0,1	0,3	0,6	1,0	1,4	1,7	1,9	2,0

hvor kommaet eventuelt kan slettes.

Det, at skalaen har få trin, eller rettere for q større end et lille tal (her 3) har konstante talværdier, bevirker, at komplikation 3° ikke griber for stærkt ind.

Denne skalas virkemåde i forhold til den hidtil benyttede fremgår af tabel 4. Skalaen betegnes med N (nye) og den hidtil benyttede med G (gamle).

$n \backslash t$		0,60	0,70	0,80	0,90
1	G	0,204	0,436	0,750	1,33
	N				
2	G	0,289	0,617	1,06	1,89
	N				
3	G	0,310	0,690	1,42	2,86
	N	0,352	0,767	1,36	2,55
4	G	0,393	0,884	1,69	3,85
	N	0,407	0,901	1,66	3,35
5	G	0,392	0,912	1,89	5,33
	N	0,453	1,03	2,00	4,60
6	G	0,475	1,12	2,39	7,06
	N	0,498	1,15	2,35	6,03
7	G	0,463	1,13	2,60	9,53
	N	0,644	1,28	3,47	8,13

Tabel 4. Værdier af μ/σ for forskellige værdier af t og n .

Det bemærkes, at afrundingen af skala N synes at have været heldig, idet de til den svarende værdier af μ/σ for $0,50 < t \leq 0,70$ ligger nær det maksimale ($s=t$), der for $t=0,60$ og $n=3, 4$ og 5 er henholdsvis $0,354$, $0,409$ og $0,459$, samt for $t=0,70$ og $n=3$ er $0,767$.

Det fremgår af tabellen, at skala N er bedre end G for $0,50 < t \leq$ ca. $0,75$. For $n=3$ og 4 og $t=0,80$ ses μ/σ at være noget større med G end med N; men t -værdier $> 0,75$ forekommer ikke ofte, og μ/σ har her en stor værdi i forbindelse med, at σ er lille og kun får ringe indflydelse på pointssummens σ .

Ved at vælge s større end $0,70$ kunne man opnå, at N var bedre end G for flere t -værdier, måske op til $0,90$. Men så ville fordelene ved at bruge N i stedet for G ikke blive udnyttet for t -værdier mellem $0,50$ og $0,70$.

Imidlertid må man ikke glemme, at resultatet af en turnering ikke alene er, at det bestemmer nr. 1, men også, hvilket hold der bliver nr. 2, sidst og næstsist, ja fastlægger hele rangfølgen. Af ovenstående følger nu, at chancen for forkerte inversioner i rangfølgen er væsentlig mindre ved benyttelse af N i stedet for G.

Ændres pointsskalaen fra G til N, vil kampenes forløb antagelig samtidig ændres lidt i retning af, at målantallet bliver større. Bliver denne eventuelle forøgelse ikke betydelig, er der dog ingen grund til at gøre skalaen mere differentieret end N.

Til slut skal lige bemærkes, at når man i spil går over til en mere hensigtsmæssig pointsgivning, er der mulighed for, at selve spillet derved udvikles i gunstig retning.

Dersom man ønsker at indføre tidsmomentet i betragtningerne, vil det være mere rationelt i 2 at regne med poissonfordelt målantallet for hold A og hold B. Gør man det, bliver resultatet næsten identisk med det i 2, ligesom konklusionerne må blive de samme som ovenfor i 4.

SOME ARITHMETIC PROPERTIES OF THE COEFFICIENTS IN A CERTAIN EXPANSION

L. CARLITZ

1. In a recent paper [3] Kolberg put

$$(1) \quad e^{-x} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n x^n)$$

and showed that $a_n = 1/n$ if and only if n is a prime.

It follows from (1) that $a_1 = -1$ and

$$(2) \quad \sum_{rs=n} \frac{(-1)^r}{r} a_s^r = 0 \quad (n > 1).$$

If we put

$$(3) \quad a_n = \frac{c_n}{n!}$$

it is clear that (2) becomes

$$(4) \quad \sum_{rs=n} (-1)^r \frac{n!}{r(s!)^r} c_s^r = 0 \quad (n > 1).$$

It is familiar that the quotient [1, p. 57]

$$(5) \quad Q_{r,s} = \frac{(rs)!}{r!(s!)^r}$$

is integral for all $r, s \geq 1$. Thus the coefficient of c_s^r in (4) is integral; moreover the coefficient of c_n is equal to -1 . It follows that the c_n are rational integers.

We shall prove the following arithmetic properties of c_n :

THEOREM 1. *Let p be a prime divisor of n . Then*

$$(6) \quad c_{pn} \equiv c_n \pmod{p};$$

in particular

$$(7) \quad c_{p^r} \equiv -1 \pmod{p} \quad (r = 1, 2, \dots).$$

THEOREM 2. Let p be a prime such that $p < n$, $p \nmid n$. Then

$$(8) \quad c_n \equiv 0 \pmod{p}.$$

2. PROOF OF THEOREM 1. If $r > p$, it is clear from (5) that the quotient

$$(9) \quad \frac{(rs)!}{r(s!)^r}$$

is divisible by p . Thus (4) becomes

$$(10) \quad \sum_{\substack{rs=n \\ r \leq p}} (-1)^r \frac{n!}{r(s!)^r} c_s^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

Let $n = pm$. If $p^{\mu(k)}$ denotes the highest power of p dividing $k!$ then

$$(11) \quad \mu(k) = \left[\frac{k}{p} \right] + \left[\frac{k}{p^2} \right] + \dots$$

Then the quotient

$$(12) \quad \frac{(pm)!}{p(m!)^p}$$

is prime to p if and only if $m + \mu(m) = 1 + p \cdot \mu(m)$, that is

$$(13) \quad (p-1) \cdot \mu(m) = m-1.$$

However if

$$m = a_0 p^t + \dots + a_t \quad (0 \leq a_j < p; a_0 > 0),$$

then by (11)

$$(p-1) \cdot \mu(m) = m - (a_0 + \dots + a_t).$$

Thus (13) becomes $a_0 + \dots + a_t = 1$. It follows that (12) is prime to p if and only if $n = p^t$. In this case we have (cf. Lemma 1 below)

$$\frac{p^t!}{p(p^{t-1}!)^p} \equiv -1 \pmod{p},$$

so that (10) yields

$$c_{p^t} \equiv c_{p^{t-1}} \pmod{p} \quad (t \geq 1).$$

This evidently proves (7).

Now let $n \geq pm \neq p^t$. Then (10) reduces to

$$(14) \quad \sum_{\substack{rs=m \\ r < p}} (-1)^r \frac{(pm)!}{r((ps)!)^r} c_{ps}^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

Since

$$\binom{pm}{pa} \equiv \binom{m}{a} \pmod{p},$$

it follows that

$$\frac{(pm)!}{((ps)!)^r} \equiv \frac{m!}{(s!)^r} \pmod{p},$$

so that (14) becomes

$$\sum_{\substack{rs=m \\ r < p}} (-1)^r \frac{m!}{r(s!)^r} c_{ps}^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

Since we have also

$$\sum_{\substack{rs=m \\ r < p}} (-1)^r \frac{m!}{r(s!)^r} c_s^r \equiv 0 \pmod{p}$$

and $c_p \equiv c_1 \pmod{p}$, it follows immediately that $c_{pm} \equiv c_m \pmod{p}$. This proves (6) when $n \neq p^t$. Hence (6) holds for all n .

3. PROOF OF THEOREM 2. Let $p \nmid n$ so that (10) becomes

$$(15) \quad \sum_{\substack{rs=n \\ r < p}} (-1)^r \frac{n!}{r(s!)^r} c_s^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

Assume (8) false and let n be the smallest integer such that $p \nmid n$, $n > p$ and $c_n \not\equiv 0 \pmod{p}$. If $s > p$, then since $p \nmid s$ we have $c_s \equiv 0 \pmod{p}$ so that (15) reduces to

$$(16) \quad -c_n + \sum_{\substack{rs=n \\ r < p, s < p}} (-1)^r \frac{n!}{r(s!)^r} c_s^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

However if $r < p$, $s < p$ while $n > p$, we have

$$\frac{n}{r(s!)^r} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hence (16) implies $c_n \equiv 0 \pmod{p}$. This evidently completes the proof of Theorem 2.

4. As an analog of (1) we may consider

$$(17) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\alpha_n x^n} - 1).$$

Expanding the right member, we find that (17) is equivalent to

$$(18) \quad \sum_{rs=n} \frac{1}{r!} \alpha_s^r = 0 \quad (n > 1), \quad \alpha_1 = 1.$$

If we put

$$(19) \quad \alpha_n = \frac{\gamma_n}{n!},$$

(18) becomes

$$(20) \quad \sum_{rs=n} \frac{n!}{r! (s!)^r} \gamma_s^r = 0 \quad (n > 1), \quad \gamma_1 = 1.$$

It follows that the γ_n are rational integers. In particular

$$(21) \quad \gamma_p = -1,$$

where p is an arbitrary prime.

We shall prove

THEOREM 3. *Let p be a prime divisor of n , $p < n$. Then if n is odd or if $p = 2$, we have*

$$(22) \quad \gamma_n \equiv 0 \pmod{p}.$$

For the proof we require the following lemmas:

LEMMA 1. *If $r = p^i$, $s = p^j$, then*

$$Q_{r,s} \equiv 1 \pmod{p},$$

where $Q_{r,s}$ is given by (5).

PROOF. The result is an immediate consequence of the identity

$$(23) \quad \frac{(rs)!}{r! (s!)^r} = \prod_{k=1}^r \binom{ks-1}{s-1}.$$

LEMMA 2. *Let $p \mid r$. Then $Q_{r,s}$ is prime to p if and only if $s = p^j$.*

PROOF. Put $r = pt$. Then $Q_{r,s}$ is prime to p if and only if

$$ts + \mu(ts) = t + \mu(t) + pt \cdot \mu(s),$$

that is,

$$(24) \quad t(s-1) = (p-1)t \cdot \mu(s) + \mu(t) + t \cdot \mu(s) - \mu(ts).$$

As we have seen in 2, $(p-1) \cdot \mu(s) \leq s-1$, with strict inequality except when $s = p^j$. Thus (23) becomes (when $s \neq p^j$)

$$t(s-1) < t(s-1) + \mu(t) + t \cdot \mu(s) - \mu(ts),$$

which is impossible. On the other hand, when $s = p^j$ it is easily verified that

$$\mu(tp^j) = t \cdot \mu(p^j) + \mu(t),$$

so that (24) is satisfied.

LEMMA 3. For arbitrary r , $t \geq 1$,

$$(25) \quad Q_{r,pt} \equiv Q_{r,t} \pmod{p}.$$

PROOF. By (23)

$$(26) \quad Q_{r,pt} = \prod_{j=1}^r \binom{jpt-1}{pt-1}.$$

It follows from

$$(1+x)^{jpt-1} \equiv (1+x^p)^{jt-1}(1+x)^{p-1} \pmod{p}$$

that

$$\binom{jpt-1}{pt-1} \equiv \binom{jt-1}{t-1} \pmod{p}.$$

Thus (26) becomes

$$Q_{r,pt} \equiv \prod_{j=1}^r \binom{jt-1}{t-1} \equiv Q_{r,t} \pmod{p}.$$

5. PROOF OF THEOREM 3. Let $n = p^t$. Then, by Lemma 1 and Fermat's theorem, (20) becomes

$$\sum_{j=0}^t \gamma_{p^j} \equiv 0 \pmod{p} \quad (t \geq 1).$$

Clearly this implies

$$(27) \quad \gamma_{p^t} \equiv 0 \pmod{p} \quad (t > 1),$$

in agreement with (22).

Now let $p \mid n$, $p < n$ and assume that either n is odd or, when n is even, $p = 2$. If in the left member of (20), r is divisible by p , then by Lemma 2 we need only consider those terms in which s is a power of p ; hence by (27) we may take $s = 1$ or p . For r not divisible by p it follows that s is divisible by p . Thus in any case, aside from $s = 1$, we may suppose that s is divisible by p . Applying Lemma 3, (20) becomes

$$(28) \quad 1 + \sum_{rs=n/p} Q_{r,s} \gamma_{ps}^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

Let p be a fixed prime and assume (22) false. Let n be the smallest integer such that $p \mid n$, $p < n$ and $\gamma_n \not\equiv 0 \pmod{p}$. Then (28) reduces to

$$1 + \gamma_p^{n/p} + \gamma_n \equiv 0 \pmod{p},$$

which implies $\gamma_n \equiv 0 \pmod{p}$. This completes the proof of the theorem.

6. The congruence (27) can be improved. It is proved in [2, p. 310] that if $p \mid r$ and $p > 3$ then

$$\frac{(rp^j)!}{r! (p^j)^r} \equiv 1 \pmod{p^4}.$$

Thus, when $n=p^t$, (20) reduces to

$$1 + \sum_{j=1}^t \gamma_{p^j}^{p^{t-j}} \equiv 0 \pmod{p^4} \quad (p > 3).$$

This evidently implies

$$(29) \quad \gamma_{p^t} \equiv 0 \pmod{p^4} \quad (p > 3, t > 1).$$

For $p=3$ we have

$$\gamma_{3^t} \equiv 0 \pmod{3^2} \quad (t > 1).$$

For $p=2$, we note that $\gamma_4 = -4$ but

$$\gamma_8 \equiv 2 \pmod{4}.$$

REFERENCES

- [1] P. BACHMANN: *Niedere Zahlentheorie*, Bd. 1, Leipzig 1902.
- [2] L. CARLITZ: *A theorem of Glaisher*. Canadian J. of Math. 5 (1953), pp. 306-316.
- [3] O. KOLBERG: *A property of the coefficients in a certain product expansion of the exponential function*. NMT 8 (1960), pp. 33-34.

EN GENERALISATION AF RÆKKERNE FOR $\ln 2$ OG $\frac{\pi}{4}$

CHRISTIAN ANDERSEN

I en artikel i NMT [1] har David Fog vist, at de to rækker

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

og

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

er specialtilfælde af en og samme formel

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{p-1} x dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+4} - \dots \quad (p \text{ positiv hel}),$$

svarende til henholdsvis $p=2$ og $p=1$.

Der skal her gøres opmærksom på en anden integralfremstilling, for hvilken det også gælder, at de to rækker er specialtilfælde. Af den for $|t| < 1$ gyldige rækkeudvikling

$$\frac{1}{1+t^p} = 1 - t^p + t^{2p} - \dots \quad (p \text{ positiv hel})$$

fås

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{dt}{1+t^p} = 1 - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+1} - \dots,$$

hvor lovligheden af at benytte øvre integrationsgrænse 1 følger af Abels sætning.

Rækkerne for $\ln 2$ og $\frac{\pi}{4}$ fås heraf for $p=1$ og $p=2$. Også større værdier af p har her interesse. Således giver $p=3$ efter udregning af integralet

$$\frac{3 \ln 2 + \pi \sqrt{3}}{9} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots$$

Formlen (2) såvel som dens anvendelse på små p -værdier ($p \leq 4$) findes hos Knopp [2].

LITTERATUR

- [1] D. FOG: *En bemærkning om to rækker*. NMT 6 (1958), p. 83.
- [2] K. KNOPP: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. 3. Auflage, Berlin 1931, p. 244.

BOKMELDINGER

RUEL V. CHURCHILL: *Complex variables and applications*. 2nd edition. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1960. 9 + 297 pp. sh. 52/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT 8 (1960), s. 96–97.)

Denne bok er en utvidet utgave av Churchill's bok fra 1948. Først og fremst er framstillingen mer utførlig — og strengere gjennomført. Der nest er antallet av øvingsoppgaver betraktelig øket, og endelig er det tatt med et kapitel om integralframstillinger av Poisson-type.

De første 8 kapitler er innføring i de deler av den klassiske funksjonsteori som har størst betydning for anvendelsene. På bakgrunn av den engstelse man ofte (kanskje uberettiget) føler når ordet »application« inngår i en boktittel, er det gledelig at forfatteren har ofret tilstrekkelig plass til en stringent oppbygging. I avsnittene om brudne lineærtransformasjoner kunne med fordel speilingsprinsippet ha vært tatt med.

Kapitlene 9 og 10 omhandler konform avbildning, med illustrerende eksempler på anvendelse i termodynamikk, hydrodynamikk og elektrisitetstærlære.

I kapitel 11 kommer en lærerik sammenstilling av integralformler av Poisson-type for endel områder (sirkel, halvsirkel, halvplan, halvstripe o. l.) til løsning av Dirichlets problem, Neumanns problem og liknende randverdioppgaver ved den 2-dimensjonale Laplace-likning. Det ville kanskje ha vært naturlig å avslutte kapitlet med en kort omtale av Greens funksjon (uten å gå inn på vanskelige eksistensspørsmål), samt dennes anvendelse til løsning av randverdioppgaver. Utledning av de forskjellige Poisson-formler fra Greens formel ville ha vært lærerike øvingsoppgaver for leseren.

Boken slutter med et kapitel om analytisk fortsettelse og Riemannske flater.

I to tillegg gir forfatteren en fortegnelse over litteratur som knytter seg til det stoff han behandler, samt en grei oversikt (med figurer) over viktige konforme avbildninger.

Boken kan anbefales som grunnlag for forelesninger i funksjonsteori ved en teknisk høyskole.

Haakon Waadeland

LOTHAR HEFFTER: *Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen*. Zweite, verbesserte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 8 + 64 S., 13 Fig. DM 19.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT 8 (1960), s. 179.)

Det er en fornuftig vane å lese forordet til en bok før man kaster seg over innholdet. En slik liten hors-d'œuvre kan være nyttig som appetittvekker foran hovedretten — eller som advarsel mot den.

Hermed være forordet i Heffters bok anbefalt på det varmeste. Som appetittvekker? Ja. Som advarsel? Også ja. Eller kanskje forvarsel er et bedre ord — forvarsel om at hovedretten *også* er tilpasset andre og enklere ganer enn dem som menyen på permen i første rekke virker tiltrekkende på.

Her er vi ved bokens paradoks. Mens tittelen appellerer til folk med interesse for funksjonsteori, hevdes det i forordet at boken er lesbar for studenter fra 2. semester av. Dette bekreftes av de 56 pedagogisk vel-skrevne sider, hvorav de 30 første, avsnitt A, inneholder »Vorkenntnisse«, som utelukkende bygger på kjennskapet til de komplekse tall og deres representasjon i det gaussiske plan. Man spør seg imidlertid, d. v. s. jeg spurte meg, om studentene i 2. semester er særlig interesserte i å vite noe om forskjellige måter å begrunne funksjonsteorien på. *Behovet* for en slik viten må antas å oppstå *etter* at man, ad en eller annen vei, har trengt et lite stykke inn i teorien for komplekse funksjoner.

Avsnitt A bringer, enkelt og oversiktlig satt opp, det nødtørftige stoff for forståelsen av avsnitt B, som er bokens hovedavsnitt. Bortsett fra et par bemerkninger, skulle det ikke være nødvendig å gå inn på dette avsnitt i detalj. Framstillingen er svært elementær. F. eks. er det Riemanns integral definert ved ekvidistant intervalloppdeling, og kurveintegraler er bare definert over akseparallelle polygontrekk og over kurver sammensatt av konsentriske sirkelbuer og radier. Pointet med dette er kanskje ikke så meget å gjøre boken lett lesbar som å presisere de enkle forutsetninger den bygger på.

Det forfatteren kaller »zusammenhängendes offenes Gebiet« ville i samsvar med den mest vanlige definisjon hete »offenes Gebiet« (eller bare »Gebiet«). Videre er det uheldig at han ved definisjonen av sammenhengstall bruker lukkede områder. Hans påstand om at et n ganger sammenhengende lukket område ved $n - 1$ disjunkte snittlinjer kan omgjøres til et enkeltssammenhengende lukket område, holder jo ikke stikk — for bare å nevne en uheldig konsekvens.

I avsnitt B bringes 6 forskjellige innføringer i funksjonsteorien. Dette er gjort på den måten at han velger ut en definisjon. De 6 måtene frem-

trer da som satser som under forskjellige forutsetninger utsier at en funksjon er analytisk i et visst område.

I definisjonen av en analytisk funksjon følger han nærmest Weierstrass, men den har fått en noe uheldig formulering, idet han definerer en analytisk funksjon i det *lukkede* område G , som en i G entydig og kontinuerlig funksjon som i en omegn av hvert indre punkt a av G kan framstilles som potensrekke $P(z-a)$. — Etter denne definisjon skulle jo f. eks. funksjonen $f(z) = \sqrt{1-z}$, $f(0) = 1$ være analytisk i $z = 1$. Dessuten er det uheldig pedagogisk, da karakteren av omegnsegenskap ikke kommer tydelig nok fram.

I alle 6 innføringer er entydighet og kontinuitet en fast forutsetning. De tre første veier er Cauchys med kontinuitet av $f'(z)$, Goursats med eksistensen av $f'(z)$ og Looman–Menchoffs sats. Sistnevnte er, som rimelig kan være, bare nevnt. I stedet er vist en sats som forfatteren kaller en spesialisert L–M’s sats, hvor forutsetningene er uniform partiell deriverbarhet av u og v samt gyldighet av de Cauchy–Riemannslike likninger. Berettigelsen av navnet kan kanskje diskuteres, da det ved L–M’s sats er den svekkelse av forutsetningene som unntaksmengdene representerer, som er det essensielle. Dessuten følger (som Heffter også bemerker) av den uniforme partielle deriverbarhet kontinuiteten av de partiellderivate.

De tre siste metoder bygger på forutsetningen om entydig integrerbarhet. Først omtales Morera–Osgoods vei, hvor dessuten partiell deriverbarhet er forutsatt (implisitt, idet man går veien om Cauchy, eventuelt Goursat). Til slutt omtales to enkle veier av forfatteren selv, den ene med akseparallell entydig integrerbarhet som forutsetning, hvor han bygger på setningen

$$\left[\oint_R f(z) dz = 0, h'(z) \text{ kontinuerlig i } R \right] \Rightarrow \oint_R f(z) \cdot h(z) dz = 0,$$

R et rektangel, og den andre med tilsvarende forutsetninger i polarkoordinater. Det er litt uheldig å bruke $f_{ab}(x)$ om middelverdien av $f(x)$ i $[a, b]$.

Avsnitt B avsluttes med en fin skjematisk oversikt over de 6 forskjellige veier. Forutsetningene er »dekomponert«, slik at sammenlikningen skal være enkel.

Avsnitt C er en omfattende litteraturfortegnelse, der ved hvert omtalte arbeide er tatt med en kort angivelse av innholdet.

Heffters lille skrift, som representerer en sammenstilling av eldre veier og en del av forfatterens egne resultater gjennom de siste 50 år,

er et arbeide som er all ære verd. Trass i de innvendinger som er nevnt ovenfor, og som står for anmelderens egen regning, kan boken anbefales, spesielt til den som foreleser funksjonsteori og vil ta seg tid til å dvele litt ved innføringens historikk.

Haakon Waadeland

SOPHUS LIE: *Gesammelte Abhandlungen*. Band 7. Herausgegeben von Friedrich Engel. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig; H. Aschehoug & Co., Oslo, 1960. 10 + 476 S. DM 40.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 83.)

Et nytt bind af Sophus Lie's værker er en begivenhed i matematikens verden. Det nu foreliggende bind indeholder 31 afhandlinger og udgør et udvalg af de vigtigste manuskripter, som Lie har efterladt sig. De fleste af disse afhandlinger behandler transformationsgruppernes teori og de partielle differentiaalligninger. Adskillige af de resultater, hvormed Lie har beriget videnskaben, bliver her yderligere uddybet eller formuleret i en lidt generaliseret form. Det er med stort udbytte, man læser de pågældende afhandlinger, hvoraf mange dog kun er fragmenter. De er prægede af Lie's entusiasme og sjældne penetrationsevne.

Han beskæftigede sig indgående med differentiaalligningernes teori og betragtede denne som den vigtigste gren af matematiken. Side 175–219 får man en interessant redegørelse for den historiske udvikling af teorien for de partielle differentiaalligninger af første orden, navnlig forholdet mellem A. Mayer's og Lie's egne arbejder, der påbegyndtes omtrent samtidig. Angående adskillige forfattere fremsætter Lie meget kritiske udtalelser, men undertiden er hans kritik overdreven.

Bogen slutter med en gengivelse af den tiltrædelsesforelæsning, som Lie holdt i 1886 i aulaen på universitetet i Leipzig, hvor han var blevet udnævnt til Felix Klein's efterfølger, efter at denne havde modtaget en kaldelse til Göttingen. Lie giver heri en meget bemærkelsesværdig oversigt over matematikens historiske udvikling, og han opholder sig navnlig ved vekselvirkningen mellem geometrien og analysen. Endvidere skildrer han den rolle, vigtige begreber som gruppe og invariant spiller i matematiken.

Manuskriptet til det omhandlede bind blev allerede før krigen af Fr. Engel gjort færdig til trykning.

N. E. Nørlund

KÔSAKU YOSIDA: *Lectures on differential and integral equations*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 10.) Interscience Publ., New York, London, 1960. 9 + 220 pp. \$ 7.00.

(Innehållsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 84.)

Detta är den engelska upplagan av en bok, som ursprungligen publicerats på japanska.

Bokens första kapitel behandlar utförligt existens- och regularitetsfrågor för lösningar till begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer, studerar sedan speciellt olika lösningsmetoder för lineära ekvationer av n -te ordningen och slutar med ett avsnitt om andra ordningens differentialekvationer av Fuchs' typ.

I nästa kapitel visas hur randvärdesproblemen av Sturm-Liouville-typ kan överföras till integralekvationer med symmetrisk kärna genom användning av Greens funktion. Detta leder sedan till en sats om utveckling efter egenfunktioner, varvid de vanliga typerna av ortogonala polynom får tjäna som exempel. Slutligen ägnas några sidor åt härledning av asymptotiska uttryck för egenvärden och egenfunktioner med Liouvilles metod.

Tredje kapitlet behandlar Fredholms integralekvationer och bevisar alternativsatsen utan användning av Fredholms determinanter. För att visa nödvändigheten hos förutsättningarna följer sedan några exempel på singulära integraloperatorer, för vilka resultaten inte gäller. Åt integralekvationer av Volterra-typ ägnas också ett kapitel, och vissa utvidgningar av de tidigare resultaten till icke-lineära integralekvationer förekommer i bokens sjätte och sista kapitel.

Nära en fjärdedel av bokens omfång upptages av det femte kapitlet, som redogör för Weyls teori för det singulära randvärdesproblemet för en ordinär andragradens differentialekvation. Här ges också ett bevis för Weyl-Stones allmänna utvecklingssats för det aktuella problemet, kompletterad med Titchmarsh-Kodairas formel för täthetsmatrisen. Som avslutning följer inte mindre än sex stycken i detalj genomförda exempel på tillämpningen av Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodairas resultat.

Av det ovanstående referatet är det uppenbart att den här behandlade boken innehåller åtskilligt mer än vad man kunde vänta sig av det relativt ringa antalet boksidor. Detta har författaren kunnat åstadkomma genom att gå rakt på sak utan sidoblickar och genom att inte införa fler nya begrepp än vad som är absolut nödvändigt. Som en följd härav är t. ex. sambandet med den allmänna funktionalanalysen mycket svagt betonat och Lebesgue-integraler förekommer överhuvudtaget inte. Möjligen blir framställningens enkelhet lidande på detta men i gengäld vinner man att alla resonemang och bevis är, åtminstone i princip, elementära. Boken borde därför i sin helhet kunna vara en god inledning till och exempelsamling för vidare studier i ämnet.

Jöran Friberg

MOTTATTE BØKER

Archive for history of exact sciences. Editor C. Truesdell. Vol. 1, no. 1, 1961. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg. 106 S. DM 19.60.

C. Truesdell: A program toward rediscovering the rational mechanics of the age of reason 1-36 * Arpad Szabo: Anfänge des euklidischen Axiomensystems 37-106.

Martin Barner: *Differential- und Integralrechnung.* (Sammlung Götschen 86/86a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1961. 176 S. DM 5.80.

Literatur 4 * Eigenschaften der reellen Zahlen 5-21 * Mengen reeller Zahlen 21-37 * Funktionen reeller Zahlen 37-53 * Folgen reeller Zahlen 53-83 * Stetige Funktionen 83-112 * Logarithmusfunktion und Exponentialfunktion 112-125 * Differenzierbare Funktionen 125-159 * Winkelfunktionen 159-174 * Symbole 174-175 * Sachverzeichnis 175-176.

Charles F. Brumfiel — Robert E. Eicholz — Merrill E. Shanks: *Algebra, I.* Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1961. 11 + 371 pp. \$ 4.75.

Sets and counting 1-16 * Symbols in arithmetic and algebra 17-26 * Logic 27-41 * Addition and multiplication 42-68 * Subtraction 69-78 * The integers 79-101 * Some applications of the integers 102-112 * Division 113-125 * The rational numbers 126-146 * Computing with rational numbers 147-175 * Sentences, relations, graphs, and functions 176-199 * Polynomials 200-233 * Equations involving several variables 234-252 * Extensions of the rational number system 253-270 * Real numbers 271-298 * Quadratic equations 299-316 * Similar triangles and trigonometry 317-332 * Number systems 333-336 * Miscellaneous exercises 337-366 * Index 367-371.

Charles F. Brumfiel — Robert E. Eicholz — Merrill E. Shanks: *Introduction to mathematics.* Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1961. 11 + 323 pp. \$ 4.00.

Symbols 3-13 * History of numerals 14-30 * Place value and bases 31-51 * Base ten 52-63 * Definitions 67-72 * Basic principles of addition and multiplication 73-91 * Factors and prime numbers 92-100 * Number pairs, fractions, and rational numbers 101-114 * Subtraction and division 115-124 * Inequalities and the number line 125-135 * Applications 136-144 * Decimals 147-154 * Irrational numbers 155-160 * Real numbers 161-167 * The real line 168-172 * Sets and variables

175–192 * Two variables and graphs 193–203 * Negative numbers 204–219 * Inequalities, the number line, and infinite sets 220–231 * »Story« problems 232–240 * General principles 243–258 * Measurement 259–266 * Plane and space figures 267–282 * Perimeter, area, and volume 283–293 * Similar triangles and trigonometry 294–318 * Index 319–323.

J. C. Burkill — H. M. Cundy: *Mathematical scholarship problems*. Cambridge University Press, London, 1961. 6 + 118 pp. sh. 7/6.

Algebra 1–17 * Geometry 18–31 * Trigonometry 32–35 * Calculus 36–51 * Mechanics 52–73 * Miscellaneous 74–79 * Hints and solutions 80–118.

H. S. M. Coxeter: *Introduction to geometry*. John Wiley & Sons, London, New York, 1961. 15 + 443 pp. sh. 80/–.

Triangles 3–25 * Regular polygons 26–38 * Isometry in the Euclidean plane 39–49 * Two-dimensional crystallography 50–66 * Similarity in the Euclidean plane 67–76 * Circles and spheres 77–95 * Isometry and similarity in Euclidean space 96–104 * Coordinates 107–134 * Complex numbers 135–147 * Five platonic solids 148–159 * The golden section and phyllotaxis 160–172 * Ordered geometry 175–190 * Affine geometry 191–228 * Projective geometry 229–262 * Absolute geometry 263–286 * Hyperbolic geometry 287–304 * Differential geometry of curves 307–327 * The tensor notation 328–341 * Differential geometry of surfaces 342–365 * Geodesics 366–378 * Topology of surfaces 379–395 * Four-dimensional geometry 396–412 * Tables 413–414 * References 415–417 * Answers to exercises 419–432 * Index 433–443.

Paul H. Daus — William M. Whyburn: *Algebra with applications to business and economics*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1961. 11 + 354 pp. \$ 6.75.

The real number system, addition and subtraction 1–21 * Multiplication 22–31 * Division and fractions 32–63 * Linear equations 64–96 * Simultaneous linear equations 97–128 * Quadratic equations 129–162 * Laws of algebra. Equality and inequality 163–186 * Introduction to matrix algebra and linear programming 187–244 * Exponents, radicals, and logarithms 245–268 * Mathematical induction, progressions, binomial theorem, and annuities 269–300 * Equations of a plane 301–304 * Division process for $\sqrt[n]{n}$ 305–306 * Tables 307–327 * Answers to problems 329–347 * Index 349–354.

S. K. Friedlander — Leonard Topper: *Turbulence*. (Classic papers on statistical theory.) Interscience Publ., New York, London, 1961. 9 + 187 pp. \$ 6.00.

G. I. Taylor: Diffusion by continuous movements (1921) 1–16 * L. F. Richardson: Note on a theorem by G. I. Taylor (1921) 16–17 * G. I. Taylor: Statistical theory of turbulence. Parts I–IV (1935) 18–75 * T. von Karman — L. Howarth: On the statistical theory of isotropic turbulence (1938) 76–99 * G. I. Taylor: The

spectrum of turbulence (1938) 100–114 * H. L. Dryden: A review of the statistical theory of turbulence (1943) 115–150 * A. N. Kolmogoroff: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers (1941) 151–155 * A. N. Kolmogoroff: On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid (1941) 156–158 * A. N. Kolmogoroff: Dissipation of energy in locally isotropic turbulence (1941) 159–161 * T. von Karman: Progress in the statistical theory of turbulence (1948) 162–174 * C. C. Lin: Note on the law of decay of isotropic turbulence (1948) 175–178 * T. von Karman — C. C. Lin: On the concept of similarity in the theory of isotropic turbulence (1949) 179–186 * Index 187.

I. M. Gel'fand: *Lectures on linear algebra*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 9.) Interscience Publ., New York, London, 1961. 9 + 185 pp. \$ 6.00.

n -dimensional spaces. Linear and bilinear forms 1–69 * Linear transformations 70–131 * The canonical form of an arbitrary linear transformation 132–163 * Introduction to tensors 164–185.

John E. Hafstrom: *Basic concepts in modern mathematics*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1961. 10 + 195 pp. \$ 6.75.

Introduction 1–5 * The natural numbers 6–34 * Sets, variables, and statement forms 35–51 * Mappings and operations 52–68 * Groups 69–82 * Relations and partitions 83–94 * The integers 95–122 * The rational numbers 123–141 * The real numbers 142–191 * Index 193–195.

Richard E. Johnson — Lona Lee Lendsey — William E. Slesnick: *Modern algebra, first course*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1961. 9 + 628 pp. \$ 4.95.

Numbers and numerals 1–26 * The language of mathematics 27–54 * Equations 55–79 * Number patterns 80–119 * Positive and negative numbers 120–180 * Sets 181–208 * Real numbers 209–240 * Graphs 241–308 * Systems of linear equations 309–356 * Polynomials in one variable 357–406 * Polynomials in two variables 407–424 * Rational algebraic expressions 425–469 * Radical expressions 470–511 * Quadratic equations 512–555 * Trigonometry 556–585 * Statistics 586–614 * Tables 616–617 * Index 621–628.

Robert M. Kozelka: *Elements of statistical inference*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1961. 10 + 150 pp. \$ 5.00.

Sets 1–15 * Probability 16–34 * Moments and samples 35–50 * Discrete density functions 51–71 * Continuous density functions 72–90 * Generalizing from samples 91–108 * Interval estimates 109–124 * The bivariate case 125–141 * Answers 142–147 * Index 149–150.

A. E. Labarre, Jr.: *Elementary mathematical analysis*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1961. 12 + 706 pp. \$ 7.75.

Elementary algebra: Basic concepts and operations 1-48 * The real numbers: The points on a straight line 49-71 * The plane. The notion of a function and its graph. The linear function 72-121 * Sets. The analytic method in plane geometry. The finite induction principle 122-152 * Vectors. Complex numbers 153-183 * The notion of a limit 184-211 * A special limit: The derivative 212-247 * Applications of differentiation 248-270 * Polynomials 271-315 * Rational functions. Techniques in curve sketching 316-332 * Periodic functions. The trigonometric functions 333-366 * Further properties of the trigonometric functions. Inverse functions 367-390 * Some applications of the trigonometric functions 391-419 * Exponents and logarithms. Applications 420-458 * The conic sections 459-503 * Another special limit: The integral 504-528 * Parametric representation of curves 529-545 * Determinants and matrices 546-571 * Functions of two variables 572-610 * Counting. An introduction to probability 611-646 * Tables 647-649 * Answers to odd-numbered exercises 651-699 * Index 701-706.

Poul Neerup — Frans Handest: *Elementær plangeometri*. Munksgaard, København, 1961. 243 s. D.kr. 24.75.

Orienteret linje, linjestykke og halvlinje 9-13 * Halvplan, vinkel, polygon 13-21 * Måltal for linjestykker, cirkelbuer og vinkler 21-32 * Symmetri om en linje 32-38 * Parallelle linjer I 38-43 * Parallelprojektion 43 * Kongruens 44-51 * Symmetriakser 51-53 * Symmetriaksen for to punkter 53-58 * Trekanter med en symmetriakse 58-61 * Firkanter med en symmetriakse 61-65 * Firkanter med to på hinanden vinkelrette symmetriakser 65-69 * Parallelle linjer II 69-71 * Omskrevne cirkel 71-73 * Afstande til punkter af en linje fra et punkt uden for denne 73-76 * Sider og vinkler i samme trekant 76 * Indbyrdes beliggenhed af en cirkel og en linje 77-78 * Indbyrdes beliggenhed af en cirkel og et punkt 78-79 * Indbyrdes beliggenhed af to cirkler 79-82 * Vinkelhalveringslinjer 82-85 * Indskrevne cirkel 85-87 * Symmetri om et punkt 87-92 * Firkanter med et symmetricenter 92-95 * Vektorer, ens og modsatte vektorer 95-98 * Parallelforskydning 98-104 * Vinkel mellem to orienterede linjer 104-106 * Projektion af ens vektorer 106-109 * Højde og median 109-112 * Drejning 112-116 * Opløsning af kongruenser 116-121 * Kongruente polygoner 121-127 * Vinkler og cirkelbuer 127-135 * Synsvinkelbuer 135-140 * Indskrivelige og omskrivelige firkanter 140-144 * Eksempler på bestemmelse af punktmængder 144-147 * Eksempler på konstruktioner 147-153 * Multiplikation af en vektor med et positivt tal 153-157 * Multiplikation om et punkt 157-161 * Eksempler på anvendelse af multiplikation om et punkt 161-166 * Regulære polygoner 166-169 * Projektion af parallelle vektorer 169-171 * Projektionssætningen 171-173 * Deling af et linjestykke 173-178 * Lighedannethed 178-180 * Lighedannede trekanter 180-186 * Opløsning af en lighedannethed 186-189 * Den retvinklede trekant 189-194 * Polygonarealer 194-201 * Arealer af lighedannede polygoner 201-202 * Areal af en cirkelskive 202-206 * Eksempler på beregninger 206-209 * Opgaver 209-243.

Ivan Niven: *Calculus. An introductory approach*. (The University

series in undergraduate mathematics.) D. van Nostrand Co., Princeton, Toronto, London, New York, 1961. 8+172 pp. \$ 4.75.

What is calculus 1-16 * Limits 17-47 * Integration 48-66 * Differentiation 67-99 * The fundamental theorem 100-111 * The trigonometric functions 112-120 * The logarithmic and exponential functions 121-142 * Further applications 43-160 * Appendix: On the existence of the definite integral 161-165 * Answers to some problems 166-169 * Index 171-172.

William Prager: *Introduction to mechanics of continua*. Ginn and Co., New York, Toronto, London, 1961. 10+230 pp. \$ 8.00.

Geometrical foundations 3-42 * State of stress 43-61 * Instantaneous motion 62-80 * Fundamental laws 81-94 * Perfect fluids 95-113 * Viscous fluids 114-135 * Visco-plastic and perfectly plastic materials 136-153 * Hypoelastic materials; classical theory of elasticity 154-187 * Finite strain 188-203 * Elastic and hyper-elastic materials 204-222 * Index 223-230.

Robert Sauer: *Ingenieur-Mathematik, II*. Differentialgleichungen und Funktionentheorie. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961. 11+180 S. Ganzleinen DM 18.00.

Gradient, Divergenz und Rotation 1-6 * Übergang zu Zylinder- und Kugelkoordinaten 6-7 * Wirbelfreie und quellenfreie Vektorfelder 8-12 * Geometrische Deutung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und Existenzsatz 13-16 * Graphische und numerische Integrationsverfahren für die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung 16-23 * Elementar integrierbare Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung 23-31 * Kurvenscharen, singuläre Integrale 31-37 * Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen 37-44 * Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung 44-51 * Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 51-58 * Anwendung auf Schwingungsprobleme 58-64 * Fourier-Reihen 64-75 * Rand- und Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 76-82 * Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen 82-88 * Differentialquotient und Integral 88-93 * Konforme Abbildung 94-100 * Lineare Funktion 101-111 * Logarithmus, Exponentialfunktion und Potenzfunktion 111-117 * Kreis- und Hyperbelfunktionen 117-121 * Anwendungen in Aerodynamik und Elektrotechnik 121-126 * Cauchysche Integralformel 126-129 * Darstellung analytischer Funktionen durch Potenzreihen 129-138 * Singuläre Stellen 138-143 * Residuensatz, Auswertung uneigentlicher Integrale im Komplexen 143-150 * Ausblick auf weitere Begriffe und Sätze der Funktionentheorie 150-154 * Polygonabbildung nach Schwarz und Christoffel 154-160 * Potentialgleichung 160-166 * Anhang 167-176 * Sachverzeichnis 177-180.

Karl Steinbuch: *Automat und Mensch*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961. 8+253 S. Kunststoffband DM 28.50.

Vorüberlegungen 1-4 * Rationalisierung des Geistigen 4-13 * Signal und Nachricht 13-22 * Informationstheorie 23-40 * Logische Verknüpfungen und Zuordner

40–57 * Signale in Raum und Zeit 57–68 * Sprache 68–76 * Zeichenerkennung 77–92 * Speicher 93–109 * Nachrichtenverarbeitung 109–125 * Regelung 125–135 * Lernende Automaten 135–153 * Bedingte Reflexe, die Lernmatrix 153–176 * Aufnahme und Verarbeitung von Nachrichten durch den Menschen 177–190 * Motive 190–195 * Intelligenz 195–201 * Gullivers Experiment 201–212 * Das ökonomische Prinzip 212–220 * Spiel ohne Plan 220–223 * Automat und Mensch 224–230 * Literaturverzeichnis 231–247 * Sachverzeichnis 248–253.

J. Weber: *General relativity and gravitational waves*. (Interscience tracts on physics and astronomy 10.) Interscience Publ., New York, London, 1961. 8 + 200 pp. \$ 2.50.

The equivalence principle 1–10 * Generalization of the special theory of relativity 11–16 * Riemannian geometry and tensor calculus 17–42 * Equations of general relativity and electromagnetism 43–55 * Experimental tests of general relativity 56–69 * The conservation laws 70–86 * Gravitational waves 87–123 * Detection and generation of gravitational waves 124–145 * Selected topics in general relativity 146–190 * Exercises 191–193 * Index 194–200.

R. Zurmühl: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Dritte, verbesserte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961. 15 + 548 S. Ganzleinen DM 29.40.

Einführung, Hilfsmittel 2–5 * Allgemeine Gleichungen mit einer Unbekannten 5–30 * Algebraische Gleichungen. Gleichungen dritten und vierten Grades 31–61 * Algebraische Gleichungen höheren Grades: Verfahren von Graeffe 61–78 * Stabilitätskriterien 79–92 * Der Gauss'sche Algorithmus 92–115 * Matrizen 115–129 * Die Kehrmatrix 130–141 * Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme 141–148 * Das Eigenwertproblem 149–160 * Eigenwertaufgabe: Iterative Methoden 161–181 * Allgemeine Interpolationsformeln 182–193 * Spezielle Interpolationsformeln 193–205 * Numerische Integration 205–229 * Graphische Integration 229–237 * Verteilung der Grundgesamtheit 237–254 * Die Stichprobe 254–264 * Die Stichprobenverteilungen 264–273 * Ausgleichsrechnung: Direkte Beobachtungen 273–283 * Ausgleich vermittelnder Beobachtungen 283–300 * Statistische Prüfverfahren 301–317 * Harmonische Analyse 317–343 * Ausgleichsparabeln 343–354 * Annäherung willkürlicher Funktionen 354–370 * Grundgedanken. Zeichnerische Verfahren 371–393 * Differenzenverfahren 393–411 * Das Runge-Kutta-Verfahren 412–431 * Einführung 431–445 * Behandlung als Anfangswertaufgabe 445–465 * Differenzenverfahren 465–485 * Verfahren von Rayleigh-Ritz 486–526 * Verfahren der schrittweisen Näherung (Iteration) 527–541 * Namen- und Sachverzeichnis 542–548.

OPPGAVER TIL LØSNING

I fremtiden vil løsninger av oppgavene i NMT bli *publisert to hefter frem*, altså f. eks. i Bind 10, hefte 1 for løsninger av oppgavene nedenfor. På denne måte kan løsningsfristen settes senere, samtidig som det er lettere å få de enkelte hefter redigert og sendt ut med passende mellomrom.

Inntil videre har NMT *ny oppgaveredaktør*: Lektor Ragnar J. Solvang, Plogveien 34 B, Manglerud, Oslo. Løsninger av oppgavene 211–215 sendes til ham. Slike løsninger vil bli trykt i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i Bind 10, hefte 1, være sendt innen 15. januar 1962.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

211. Finn følgende summer:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k^r \binom{2n}{k} \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)^r \binom{2n}{k},$$

hvor r er et naturlig tall.

D. S. Mitrinović (Beograd)

(Teksten er oversatt til norsk av red.)

212. Vis at

$$\frac{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi}} = \sqrt[4]{2}.$$

Åge Ramberg

213. Man har fem klot K_A , K_B , K_C , K_D och K_E . Varje klot tangerar de fyra andra utantill, och klotkonfigurationerna $K_A K_B K_C K_D$ och $K_B K_C K_D K_E$ är likformiga. K_A har radien $R_A = 1$ cm. Hur stora är radierna i de övriga kloten?

Harry Björk

214. Anvend identiteten

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{p+\nu}{\nu} = \binom{p+n+1}{n}$$

til at vise, at $\sum_{p=1}^n p^p$ kan skrives som et polynomium af $(p+1)$ -te grad i n (jfr. Chr. Gram: »Om potenssummer«, NMT 8 (1960), s. 79–80, og Ove J. Munch: »Om potensproduktsummer«, NMT 7 (1959), s. 5–19).

Poul Einar Hansen

215. Vis, at hvis to talfølger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ for alle n tilfredsstiller

$$a_{n+1} = a_1 a_n + b_1 b_n \quad \text{og} \quad b_{n+1} = a_1 b_n + b_1 a_n,$$

så gælder for $k=2, 3, \dots$

$$a_{n+k} = a_k a_n + b_k b_n \quad \text{og} \quad b_{n+k} = a_k b_n + b_k a_n.$$

Ove J. Munch

LØSNINGER

206. Antag att ekvationen

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots \pm a_{n-1} z + (-1)^n \alpha = 0,$$

där $n > 1$ och $0 < \alpha < 1$, har alla sina rötter inom eller på enhetscirkeln. Bestäm för varje koefficient a_k det största möjliga absolutvärdet. (Problemet ställs i en uppsats om system av differentialekvationer med periodiska koefficienter, V. M. Starzhinskii: On the stability of a trivial solution of a linear system with periodic coefficients, Appl. Math. and Mech. 1958, p. 913, där i. ö. specialfallet $k=1$ behandlas inkorrekt.)

Magnus Tideman

Lösning: Koeffisienten

$$a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}$$

er en sum av $\binom{n}{k}$ produkt av k og k rötter. Da røttenes produkt er reelt og lik α må $|z_i| \in [\alpha, 1]$, $i=1, 2, \dots, n$. Settes $|z_i|=r_i$, fåes altså $\prod r_i = \alpha$. Herav sluttes: 1) Enten er f. eks. $r_1 = \alpha$, $r_2 = r_3 = \dots = r_n = 1$, eller 2) minst to rötter har modul i intervallet $\langle \alpha, 1 \rangle$; de andre, hvis slike finnes, har modul 1.

Skal en plasere røttene slik at $|a_k|$ blir størst mulig, gjør en det slik at produktene i a_k får samme argument. Settes f. eks. $z_i = r_i$, fåes $|a_k| = \sum r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}$.

Anta så at $|a_k|$ blir størst når

$$r_1, r_2, \dots, r_a \in \langle \alpha, 1 \rangle, \quad 2 \leq a \leq n; \quad r_{a+1} = r_{a+2} = \dots = r_n = 1.$$

La $r_1 \leq r_2, \dots, r_a$; og $r_2 \geq r_1, r_3, \dots, r_a$. Lar en nå r_1 og r_2 variere innenfor tillatte grenser, mens de andre r_i holdes konstant, kan $|a_k|$ oppfattes som funksjon av r_1 , da $r_2 = \frac{\text{konst.}}{r_1}$, og $|a_k|$ kan skrives: $|a_k| = r_1 r_2 K_1 + (r_1 + r_2) K_2 + K_3$.

En ser da ved derivasjon m.h.p. r_1 at enhver tenkt konstellasjon av røttene ikke gir maksimum for $|a_k|$. Varierer r_1 mot venstre på tallinjen, vil r_2 variere mot høyre og $|a_k|$ vil vokse.

Herav sluttes at konstellasjonen $r_1 = \alpha, r_2 = \dots = r_n = 1$ gjør $|a_k|$ størst. En får da at

$$|a_k|_{\max} = \binom{n-1}{k-1} \alpha + \binom{n-1}{k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} [n + k(\alpha - 1)].$$

Norvald Midttun

207. Den normala fördelningsfunktionen $\Phi(x)$ är definierad genom

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Om $a \geq 0$ och $b \geq 0$, visa att

$$\Phi(-a-b) \leq 2\Phi(-a)\Phi(-b).$$

Carl-Gustav Esseen

Lösning: Sätt $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, varav

$$(1) \quad y' = xy - 1.$$

Vi skall visa

$$(2) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{y(a+b)e^{-ab}}{y(a)y(b)} \leq 1, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0,$$

där likhet gäller för $b=0$. Deriveras v.l. i (2) logaritmiskt m. a. på b erhålles

$$\frac{1}{y(b)} - \frac{1}{y(a+b)} \leq 0,$$

då y avtar enligt (1).

Magnus Tideman

Oppgaven er også løst av Per Roar Andenæs, Harry Björk, D. Djoković, S. Eriksson, Rolf Hovstad, Martti Luoma, Bengt Markman og Torsten Ström.

208. Hvilke vilkår må de komplekse tall p og q oppfylle dersom funksjonen

$$f(z) = \sin pz - \cos qz,$$

foruten nullpunkter av første orden, også skal ha nullpunkter av annen orden? Bestem i tilfelle disse nullpunktene av annen orden.

D. S. Mitrinović (Beograd)

Løsning: Om någon rot skall finnas måste $f(z)=0$, d. v. s.

$$(1) \quad \sin pz = \cos qz$$

för något z . För att rötter med ordningstal ≥ 2 skall existera fordras dessutom att $f'(z)=0$, d. v. s.

$$(2) \quad p \cos pz + q \sin qz = 0.$$

Av (1) följer $1 - \sin^2 pz = 1 - \cos^2 qz$ eller $\cos pz = \pm \sin qz$. (2) ger då:

$$(\pm p + q) \sin qz = 0.$$

$\sin qz = 0$ ger $qz = m\pi$. Men $\cos(pz - \frac{1}{2}\pi) = \cos qz$ ur (1), d. v. s. $pz - \frac{1}{2}\pi = \pm qz + 2n\pi$, alltså

$$\frac{p}{q} = \frac{1+4n}{2m} \pm 1 \text{ om } m, q \neq 0,$$

$$pz = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ om } q = 0.$$

Alternativen $p = \pm q$ ger båda systemet

$$\sin pz = \cos pz, \quad \cos pz = -\sin pz,$$

som ej kan uppfyllas.

Bengt Markman

Oppgaven er også løst av Norvald Midttun og Torsten Ström.

209. La a, b, c være tre innbyrdes ulike reelle tall. Sett $a+b+c=p$, $a^2+b^2+c^2=q$, $ab+bc+ca=r$, og bevis riktigheten av ulikhetene

$$3 \min(a, b, c) < p - \sqrt{q-r} < p + \sqrt{q-r} < 3 \max(a, b, c).$$

D. S. Mitrinović

Løsning: Det betyr ingen innskrenkning om vi setter $a < b < c$. Da blir $m=c-b$ og $n=b-a$ positive tall. Vi innser at

eller

$$\sqrt{(m+n)^2 + m^2 + n^2} < \sqrt{2}(m+n)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(c-a)^2 + (c-b)^2 + (b-a)^2} < 2c + b - p,$$

d. v. s.

$$p + \sqrt{q-r} < 2c + b < 3c.$$

Oppgavens venstre ulikhet fåes på analog måte, idet vi også har at $m+n=p-2a-b$.

Johs. Lohne

Oppgaven er også løst av Bernhard Andersen, Istvan Beck, Gunnbjörg Gis-marvik, Rolf Hovstad, P. W. Karlsson, Bengt Markman, Stieg Mellin-Olsen, Nor-vald Midttun, Arne Sandrum, Torsten Ström og Björn Textorius.

210. I et rettvinklet koordinatsystem fyller et glasslegeme den kva-drant hvor både x og y er positive. En lysstråle med retningskosiner $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ går inn i glasset gjennom planet $y=0$. Hvis strålen forlater glasset gjennom planet $x=0$, blir z -aksen brytende kant. Hvilke retningskosiner α, β, γ har strålen etter utgangen, uttrykt ved $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ og brytningstallet n ?

Johs. Lohne

Løsning: Der indføres retnings-cosini $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ for strålen, når den er i det brydende stof. Man har nu følgende ligninger:

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

samt fysikkens brydningslov, der kan uttrykkes således:

$$\sqrt{1-\beta_0^2} = n\sqrt{1-\beta_1^2}, \quad \sqrt{1-\alpha^2} = n\sqrt{1-\alpha_1^2},$$

samt

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

eller

$$\alpha_0\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0, \quad \beta_1\gamma = \gamma_1\beta.$$

Ved hjelp af ligningerne ovenfor finder man let resultatet

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} = \left\{ -\sqrt{1-n^2+\alpha_0^2}, \sqrt{n^2-1+\beta_0^2}, \gamma_0 \right\},$$

hvor fortegnets bestemmelse er triviel.

Per W. Karlsson

Oppgaven er også løst av Einar Brurberg og Torsten Ström.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1961 på de matematiske gymnasielinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. To tal har summen 1, og summen af deres kvadrater er -1 . Find tallene. Find summen af de to tals n 'te potenser for 1) $n=33$ og 2) $n=7$.
2. I et trapez $ABCD$ er vinkel $A = \text{vinkel } D = 60^\circ$, og dets omkreds er 56. Bestem siderne i trapezet, således at dets areal bliver så stort som muligt. Bestem dernæst siderne i trapezet, således at rumfanget af det legeme, der fremkommer ved en drejning af trapezet 360° om siden AD , bliver så stort som muligt.
3. p , q og R er givne liniestykker og v en given spids vinkel. Konstruer en firkant $ABCD$, hvori diagonalen BD halverer vinkel B , vinkel $BAC = v$, $AB:BC = p:q$, og således at firkanten kan indskrives i en cirkel med radius R . Diskussion kræves.
Beregn firkantens vinkler og sider, når $p=4$, $q=5$, $R=3$ og $v=70^\circ, 78$.

Matematik II.

1. $ABCD$ er et rektangel, hvori siden $AB=a$ og siden $BC=2a$. P er et punkt på siden AB . Linien gennem P parallel med diagonalen BD skærer siden AD i punktet Q . Cirklen med A som centrum og AP som radius skærer cirklen over AB som diameter i punkterne H og K . S er skæringspunktet mellem linien HK og linien gennem Q parallel med AB .

Bestem det geometriske sted for S , når P gennemløber siden AB .

Angiv art og beliggenhed af det fundne geometriske sted.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \sin 2x + 2 \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og x -aksen.

Beregn desuden rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den omtalte figur drejes 360° om x -aksen.

3. I terningen $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, hvor kanterne AA_1 , BB_1 , CC_1 og DD_1 er parallelle, er kantlængden 2. Midtpunkterne af kanterne C_1D_1 , BB_1 og CD kaldes henholdsvis M , N og P .

Beregn siderne i trekant AMN samt trekantens areal.

Beregn topplansvinklen mellem planerne AMN og $ABCD$.

Beregn rumfanget af pyramiden $A-BNMP$.

FINLAND

Längre kursen.

1. Vid en viss tidpunkt funnos i ett land $a\%$ flera kvinnor än män; vid en senare tidpunkt var motsvarande procenttal b ($>a$). Med huru många procent hade männens antal ökats under tiden, om hela befolkningens tillväxt utgjorde $p\%$? Huru stort måste p åtminstone vara (vid givna värden på a och b) för att antalet män icke skall ha minskats?

2. Huru många termer av den geometriska serien $1+x+x^2+\dots$ böra åtminstone medtagas, för att deras summa skall avvika från hela seriens summa med mindre än $0,1$ för alla värden på x inom intervallen $0 < x \leq \frac{1}{2}$?

3. Skillnaden mellan två positiva tal är 1 , skillnaden mellan deras logaritmer är 2 , och skillnaden mellan deras kuber är 3 . Bestäm basen för det ifrågavarande logaritmsystemet (exakt värde samt närmevärde med 3 decimaler).

4. I vilken punkt på parabeln $y=x^2$ bör man dra normalen till densamma, för att den av kurvan begränsade sträckan på normalen skall ha en så kort projektion på x -axeln som möjligt? Rita figur.

5. Bevisa, att den i en cirkel inskrivna reguljära tiohörningens sida är = den större delen av radien, då denna delas i kontinuerlig proportion. Rita en reguljär tiohörning.

6. Från mittpunkten P av en cirkelbåge AB dragas två räta linjer, vilka skära kordan AB i punkterna C och D , samt cirkelperiferin (förutom i P) i punkterna E och F . Bevisa, att en cirkel kan omskrivas kring fyrhörningen $CEFD$.

7. Tre sidor i ett trapets äro $=a$. Huru lång bör den fjärde sidan vara, för att figurens area skall vara så stor som möjligt?

8. Kring en sfär är omskriven en stympad kon, vars sidolinjer bilda vinkeln 60° med basen. Beräkna förhållandet mellan volymerna av de två delar av den stympade konen, vilka falla ytterom sfären.

9. Bevisa, att $3+4\cos x+\cos 2x \geq 0$ för alla värden på x . När gäller likhetstecknet?

10. I en likbent triangel ABC dras höjdlinjen från spetsen C . Dess mittpunkt må vara D . I vilket förhållande delas sidan BC av den räta linjen AD ?

ÍSLAND

I.

1. Tetraedret $ABCD$ har kanterne $AB=DB=BC=AC=1$; $AB=DC=x$.

1) Vis at tetraedrets volumen er $V = \frac{x^2}{12} \cdot \sqrt{4-2x^2}$.

2) Find grænserne for x .

3) Bestem x således, at V antager sin størsteværdi.

4) Beregn vinklerne mellem sammenstødende sideflader, når tetraedrets volumen er så stort som muligt.

2. Rødderne i en anden grads ligning er sådanne tal, at deres differens, sum og produkt danner tre på hinanden følgende led i en differensrække, medens differensen, produktet og summen er tre på hinanden følgende led i en kvotientrække. Bestem ligningen.

3. Til parablen $y^2 = 9x$ trækkes normalen i punktet $P(4, 6)$. Derpå tegnes en cirkel med centrum i normalens skæringspunkt med X -aksen, således at cirklen rører parablen i P . Endvidere tegnes en cirkel, som rører parablen udvendigt i P og rører Y -aksen. Opskriv ligningerne for disse cirkler og bestem deres ydre lighedspunkt.

II.

1. Undersøg kurven

$$y = \frac{(x-1)(x-4)}{x},$$

tegn den og bestem arealet af det område, der begrænses af X -aksen og kurven. Påvis, at midtpunkterne af de med X -aksen parallelle korder til kurven ligger på en ret linie, samt at kurvens tangenter i skæringspunkterne med X -aksen skærer hinanden på denne linie.

2. A. Beregn integralerne:

$$\text{a) } \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx; \quad \text{b) } \int \cos x \sqrt{\sin x + 2} dx; \quad \text{c) } \int x^2 \ln 3x dx.$$

B. Find den fuldstændige løsning til ligningen

$$2,736 \cos x + 1,736 \sin x = 3,175.$$

3. a) $x^3 = 4(\sqrt{3} - i)$. Find x .

b) $x^3 + kx^2 + 3x + 1 = 0$. Bestem k således, at ligningen har en rational rod, og løs derefter ligningen.

c) Bestem k således, at $4x^2 + 8xy + ky^2 = 9$ fremstiller to rette linier.

NORGE

Reallinjen.

1. Finn x av likningen

$$(x^2 + p)(x^2 + 4px + 1) = 0,$$

der p er et kjent tall. Hva for verdier av p gir reelle røtter? Når er antallet reelle røtter 4, 3, 2 eller 1?

Vi har gitt likningen

$$\sin^2 2v - 6 \sin v \cos 2v + 5 \cos^2 v - 3 \sin v - 2 = 0.$$

Før inn $\sin v$ som eneste ukjent, og vis at likningen da kan få samme form som den første likningen i oppgaven. Bruk dette til å finne de verdier for v mellom 0° og 360° som passer i likningen.

2. I en trekantet pyramide $ABCD$ står sidekanten BD vinkelrett på grunnflaten ABC . $AB = a$, $BC = 2a$, $\angle ABC = 120^\circ$ og $\angle ADC = 90^\circ$. Finn AC uttrykt ved a . Vis så ved utregning at $BD = a$, og finn bøyningvinkelen mellom flatene ACD og ABC .

Legg et plan gjennom B vinkelrett på AD . Planet skjærer AD i E og AC i F . Vis at EF er parallell med CD . Finn sidene i trekanten BEF uttrykt ved a .

Finn til slutt forholdet mellom volumene til pyramidene $ABFE$ og $ABCD$.

3. Skriv opp likningen for en sirkel som tangerer y -aksen, har sentrum på den positive delen av x -aksen og har radius R .

Finn polen (x_0, y_0) til den rette linjen $x + y + 2 = 0$ med hensyn til sirkelen. Vis at polen, når R varierer, følger en kurve som har likningen $y = x^2/(x - 2)$.

Finn den deriverte til y , drøft fortegnet til den deriverte og finn de maksimal- og minimalpunkter kurven har.

Tegn kurven på millimeterpapiret med enhet 1 cm. Polen kan ligge bare på en del av kurven. Dra opp denne delen med hel strek, og prikk resten av kurven.

SVERIGE

Matematiska grenen.

1. En ellips, som har medelpunkten i origo och storaxeln utefter x -axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem, har excentriciteten $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ och tangerar linjen $2x - y + 3 = 0$. Bestäm ellipsens ekvation.

2. De båda plattorna i en kondensator med kapacitansen C farad är förenade med ett motstånd med resistansen R ohm. Om spänningen mellan kondensatorplattorna i ett visst ögonblick är U_0 volt och t sekunder senare U_t volt, gäller sambandet $U_t = U_0 \cdot e^{-t/RC}$. Vid experiment med en kondensator, för vilken $C = 10^{-5}$, har man funnit $U_0 = 20$ och $U_1 = 1$. Beräkna R .

3. I en konvergent oändlig geometrisk serie är den andra termen 2. Bestäm seriens summa som funktion av den första termen, och ange funktionens definitionsområde. Representera slutligen funktionen grafiskt med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.

4. Punkterna $A(6; 0)$ och $B(0; 4)$ är punkter i ett rätvinkligt koordinatsystem. En rät linje, parallell med linjen $x + y = 0$, skär x -axeln i punkten C och y -axeln i punkten D . Bestäm och upprita orten för skärningspunkten mellan de räta linjerna AD och BC .

5. I en triangel är en vinkel 30° och den motstående sidan medelproportional till de övriga sidorna. Beräkna triangelns övriga vinklar.

6. I en triangel är en höjd 10 cm. Den halveras av en av de andra höjderna. Ange triangelns yta som funktion av den spetsiga vinkeln mellan dessa höjder, och bestäm denna ytas minsta värde.

7. Undersök kurvan $y = x + 2 \cos^2 x$ med avseende på maximi- och minimipunkter samt inflexionspunkter. Visa, att kurvan ett obegränsat antal gånger tangerar var och en av de räta linjerna $y = x$ och $y = x + 2$. Upprita kurvan i dess huvuddrag. Punkterna A och B är två på varandra följande kontaktpunkter med linjen $y = x$. Beräkna ytan av det ändliga område i koordinatplanet, som begränsas av kurvan och sträckan AB .

8. En klotsektors volym är $\frac{4}{3}\pi$ cm³. Ange sektorns totala yta som funktion av sfärens radie, och bestäm denna funktions eventuella maxima och minima.

SUMMARY IN ENGLISH

NILS ÅSLUND: *The fundamental theorems of information theory, II.* (Swedish.)

In part II of the article, the second fundamental theorem of information theory is proved for the binary, symmetrical channel.

FREDERIK GLAVEN: *Points in games with binomial distribution.* (Danish.)

In many competitions and games, the winner is the one who gets the greatest score of points. Using the theory of probability, the author examines different ways of giving such points, in order to obtain the most appropriate way, that is, the point scale by which the best participant has the largest probability of winning the competition. Football matches are used as an example, and an alternative giving of points is suggested instead of the commonly used 2-1-0 scale.

L. CARLITZ: *Some arithmetic properties of the coefficients in a certain expansion.* (English.)

In the expansions

$$e^{-x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c_n}{n!} x^n \right), \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\gamma_n}{n!} x^n} - 1 \right),$$

the following properties are proved for the (integer) coefficients c_n and γ_n : Let p be a prime; then

If $p|n$, then $c_{pn} \equiv c_n \pmod{p}$; $c_{p^t} \equiv -1 \pmod{p}$.

If $p < n$, $p \nmid n$, then $c_n \equiv 0 \pmod{p}$.

If $p < n$, $p|n$, $p = 2$ if $2|n$, then $\gamma_n \equiv 0 \pmod{p}$,

also $\gamma_{p^t} \equiv 0 \pmod{p^4}$, $p > 3$, $t > 1$.

CHRISTIAN ANDERSEN: *A generalization of the series for $\ln 2$ and $\frac{\pi}{4}$.* (Danish.)

It is pointed out that the two series of the title are particular cases of formula (2) p. 123.