

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

Utgivere:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Matemaattisten aineiden opettajien liitto – Matematik-, fysik-
och kemilärarförbundet.

Íslenzka stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Adresse:

Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

Abonnement:	Pris pr. år i	Ordinært	Redusert
	Danmark	kr. 26	kr. 13
	Finland	mk. 1000	mk. 500
	Ísland	kr. 140	kr. 70
	Norge	kr. 26	kr. 13
	Sverige	kr. 20	kr. 10

Abonnenter i andre land betaler kr. 29 i norsk valuta.

De anførte priser gjelder f. o. m. Bind 9, 1961.

Rett til redusert pris har

a) medlemmer av de utgivende foreninger

b) nordiske undervisningsinstitusjoner (skoler) og deres studerende (elever).

Anmodning om sådant abonnement skal rettes direkte til ovenstående adresse.

Abonnement til ordinær pris kan tegnes samme sted.

Innbetalingsadresser:

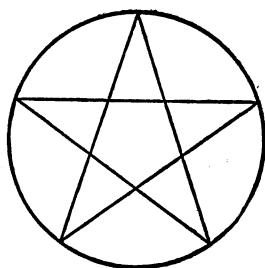
Danmark	Postkonto nr. 552 07, Nord. Mat. Tidskr., Nøjsomhedsvej 20, København Ø.
Finland	Postiirtotili no. 20 257, Nord. Mat. Tidskr., Rajasaarenk. 5, as. 5, Helsinki.
Ísland	Gjaldkeri Íslenzka stærðfræðafélagsins, cand. act. Jón E. Þorláksson, Skólagerði 16, Kópavogi.
Norge	Postgirokonto nr. 164 52, Nord. Mat. Tidskr., Mat. Institutt, Blindern, Oslo.
Sverige	Svenskt postgirokonto nr. 15 45 52, Nord. Mat. Tidskr., Mat. Institutt, Blindern, Oslo.

Godhetsfullt betal snarest for 1961

hvis det ikke allerede er gjort. De som ikke har betalt for 1960, bes gjøre det samtidig. Direkte abonnenter i Norden bør helst bruke ovenstående innbetalingsadresser. Innbetalingskort til postgiro fåes på postkontorene.

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 9



OSLO 1961

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.
Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.
Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.
Matemaattisten aineiden opettajien liitto – Matematik-, fysik-
och kemiläraryöbundet.
Íslenzka stæröfræðafélagiö.
Norsk matematisk forening.
Norsk lektorlags matematikkseksjon.
Svenska matematikersamfundet.
Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.
Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.
Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

REDAKSJON:

David Fog, Carl-Erik Fröberg, G. af Hällström,
Bo Kjellberg, Regnar Norgil, Bertil Nyman, Kay Piene,
Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.
Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSER:

Redaksjon: Matematisk Institutt, Allégt. 34, Bergen.
Ekspedisjon: Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

INFORMATIONSTEORIENS FUNDAMENTALSATSER, I¹

NILS ÅSLUND

Inledning. Riksdagsmannautskottsuppleantbostadsstäderskevikariebarnbarnsbyxor² är ett mindre ofta anlitat ord. Om man låter detta praktord ersätta ordet nej i svensk normalprosa så blir den intellektuella behållningen av diskussioner och konversationer densamma som förut, men replikföringen kommer som regel att ta längre tid. Å andra sidan utgör ordet nej ofta ett sådant diskussionsinpass, där debattören önskar få sin tanke understödd av all den auktoritet, som en invecklad artikulation förmår frammana, en omständighet, som talar till praktordets fördel. De moderna språkens utformning visar emellertid, att dylika synpunkter sällan varit vägledande, d. v. s. ordens längder är mindre beroende av ordens innebörd än av andra faktorer, framför allt av önskan att i obegränsad omfattning hinna ge uttryck för ihärdigt återkommande tankestråk. En av de första som insåg, att en matematisk modell för informationsöverföring på motsvarande sätt bör vara frigjord från ordens eller meddelandenas innebörd, var R. V. L. Hartley (1928). Ur observationen framväxte småningom informationsteoriens 1:a huvudsats, formulerad av C. Shannon (1948), vari utsäges vilken yttersta effektivitetsgräns som kan ernås genom att ofta avgivna meddelanden göres korta medan mera exotiska tankeyttringar tillåtes ta längre tid i anspråk.

Dionysosbysten på Rådhusplatsen uppgavs i gårdagens tidning vara gjord av mormor. Den är självfallet gjord av farmor. — Bokstavs- och ljudförvrängningar av detta slag kan alltså ha förödande konsekvenser för innehållet och återspeglar en svaghet hos det svenska språket som medium för informationstransmission. Ett oändligt upprepande av ordet marmor skulle visserligen, såframt åhöraren icke är stendöv, undanröja risken för missförstånd, men ett dylikt upprepande är icke ett nödvändigt villkor för att risken för missförstånd skall bli godtyckligt liten. Det är i själva verket möjligt att trots närvaron av slumpmässiga förväx-

¹ Seminarieföredrag höstterminen 1958 vid Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm.

² Falstaff, fakir: En var sin egen professor.

lingar upprätthålla en godtyckligt hög transmissionssäkerhet och ändå komma den ovan nämnda yttersta effektivitetsgränsen godtyckligt nära. Detta förvånande resultat har formulerats abstrakt i form av informationsteoriens 2:a huvudsats.

I det följande kommer informationsteoriens båda huvudsatser att härledas. Bevisen genomföres ej under allmännast möjliga förutsättningar, varigenom en förhållandevis enkel matematisk teknik blir tillfyllest. — Förutom huvudsatserna kommer ett ytterligare informations-teoretiskt resultat att demonstreras, berörande frågan hur ett informationsöverbringande system kommer att vara belastat i tiden, d. v. s. om pauser eller tidsöverdrag kommer att bli vanliga. Tillsammans bildar de ovan nämnda resultaten en logisk enhet av stor betydelse vid analyserandet och syntetiserandet av informationsöverförande system av mångskiftande slag.

Som exempel på områden, där informationsteorien redan fått stor praktisk betydelse, kan nämnas telekommunikationstekniken, matematisk maskintekniken och rymdforskningstekniken. Inom det senare området utgör överförandet av mätdata från satelliter till stationer på jorden ett centralt problem och fordrar ett informationsöverförande system med mycket hög kapacitet och liten störningskänslighet. — Teoriens tillämpningsmöjligheter är emellertid ingalunda begränsade till tekniska fackområden utan innefattar även exempelvis ärfthighetsforskning och språkanalys.

Informationsteorien är en abstrakt, matematisk modell och vid dess uppbyggande förekommer ej några bevissteg, som helt eller delvis är avhängiga av experimentella iakttagelser. För att understryka denna abstrakta karaktär hos informationsteorien förekommer ej några konkreta exempel eller praktiska hänvisningar i den föreliggande framställningen. En läsare, som önskar framställningen kompletterad i detta avseende, hänvisas till följande litteratur, särskilt boken av Jaglom och Jaglom:

A. J. Chintschin — A. N. Kolmogoroff, m. fl.: *Arbeiten zur Informationstheorie, I*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.

A. Feinstein: *Foundations of information theory*. McGraw-Hill, New York 1958.

A. M. Jaglom — I. M. Jaglom: *Wahrscheinlichkeit und Information*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

Författaren önskar slutligen framföra sitt tack till laborator Germund Dahlquist, som bidragit med ett flertal värdefulla ändringsförslag av det ursprungliga manuskriptet.

1. Definition av $H(X)$. Vi betraktar ett fullständigt system av händelser:

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Vid varje försök inträffar en och endast en av dessa händelser.

Vi förutsätter, att mot detta system svarar ett fullständigt system av sannolikheter:

$$p_1, p_2, \dots, p_n; 0 \leq p_i \leq 1; \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Systemet karakteriseras av ett *schema* X :

$$(1.1) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Hos olika dylika scheman kan man intuitivt tala om olika grad av *obestämdhet*. Betrakta t. ex. följande tre scheman med två händelser:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0,99 & 0,01 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Schemat till vänster är fullt bestämt. Schemat till höger är starkt obestämt medan det mellersta schemat kan karakteriseras som föga obestämt.

Å andra sidan kan man jämföra följande två scheman med olika antal alternativ:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

varvid obestämdheten förefaller vara större i det större schemat.

Vi önskar bestämma ett mått $H(X)$ för den egenskap som ovan lösligt kallats obestämdhet. Vi skall därför sätta upp ett antal postulat, som rimligen bör vara uppfyllda, och sedan visa att dessa entydigt bestämmer formen på $H(X)$.

POSTULAT 1. $H(X)$ är en funktion endast av sannolikheterna $p_1, p_2, \dots, p_n$ och är kontinuerlig i området

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Vi skall i det följande använda beteckningarna $H(X)$ och $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ i samma betydelse.

POSTULAT 2. Om man till schemat X fogar en eller flera händelser, som aldrig kan inträffa, förblir H oförändrad, d. v. s.

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n, 0) = H(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

POSTULAT 3. Obestämdheten i ett schema av n lika sannolika händelser, d. v. s. $H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, är en *växande* funktion av n .

Följande scheman visar hur postulaten anknyter till de inledande betraktelserna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1-\delta & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\xrightarrow{H \text{ oförändrad.}}$

$\xrightarrow{\text{Kontinuerlig variation innebärande ökning av } H \text{ från } H(1) \text{ till } H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).}$

Betrakta nu två händelsescheman:

X med händelserna x_i ($1 \leq i \leq n$),

Y med händelserna y_j ($1 \leq j \leq m$).

Händelserna x_i beror eventuellt av händelserna y_j . Det fullständiga schemat av de $m \cdot n$ sammansatta händelserna $x_i y_j$ betecknas XY , och dess obestämdhet betecknas $H(XY)$. Vi skall nu resonera oss fram till ett fjärde postulat, som just rör sammansättning av händelsescheman. Först skall två specialfall betraktas.

SPECIALFALL I: Antag att X består av 1000 händelser, vardera med sannolikheten $\frac{1}{1000}$, och att Y består av 100 händelser vardera med sannolikheten $\frac{1}{100}$. Vi antar att händelserna i X är *oberoende* av händelserna i Y . Tre decimala siffror $A_1 A_2 A_3$, bildande något tal från 000 till 999, är alltså okända före ett X -försök men fixeras genom detta. Analogt är två decimala siffror $B_1 B_2$, som bildar något tal från 00 till 99, okända före ett Y -försök men fixeras genom detta. En händelse i XY -schemat karakteriseras därför av fem decimala siffror $A_1 A_2 A_3 B_1 B_2$, och de 10^5 möjliga kombinationerna har — på grund av antagandet om oberoende — vardera sannolikheten 10^{-5} .

Det förefaller rimligt, att i detta specialfall låta antalet obekanta och statistiskt sett likvärda siffror utgöra mått på motsvarande schemas obestämdhet. Exemplet kan varieras genom val av annan bas än 10, och andra värden på m och n . Eftersom antalet siffror adderas, när scheman sammansätts, så är det rimligt att göra följande ansats generellt:

$$H(XY) = H(X) + H(Y) \quad (\text{om } X \text{ och } Y \text{ oberoende}).$$

SPECIALFALL II: Den föregående ansatsen är emellertid orimlig om X och Y är beroende. Betrakta den extrema situationen att utfallet av ett

X -försök entydigt bestämmer utfallet av ett Y -försök. I detta fall synes det rimligt att ansätta

$$H(XY) = H(X) \quad (\text{om } x \text{ entydigt bestämmer } y).$$

För att komma tillrätta med de situationer, som ligger mellan de betraktade ytterlighetsfallen, skall vi införa begreppet betingad obestämmdhet: Med $H(Y|x_i)$ menas obestämmdheten i schemat

$$(Y|x_i) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ p(y_1|x_i) & p(y_2|x_i) & \cdots & p(y_m|x_i) \end{pmatrix},$$

där $p(y_j|x_i)$ är den av x_i betingade sannolikheten för y_j .

Vi skall även införa beteckningen $H(Y|X)$ för ett mått på den obestämmdhet i Y som i *medeltal* kommer att finnas kvar, sedan utfallet i schemat X blivit känt. Vi *definiera* därför

$$(1.2) \quad H(Y|X) = \sum_{i=1}^n p(x_i)H(Y|x_i).$$

Betrakta åter de två specialfallen. Om X och Y är oberoende, så gäller $p(y_j|x_i) = p(y_j)$, alltså $H(Y|x_i) = H(Y)$, varav följer

$$(1.3) \quad H(Y|X) = H(Y) \quad (\text{om } X \text{ och } Y \text{ oberoende}).$$

Om däremot x_i entydigt bestämmer utfallet av Y -försöket, så finns det ingen obestämmdhet efter X -försöket. Det är då rimligt att sätta $H(Y|x_i) = 0$ varav följer

$$H(Y|X) = 0 \quad (\text{om } x \text{ entydigt bestämmer } y).$$

Bägge specialfallen blir tillgodosedda, om vi inför följande postulat:

POSTULAT 4.

$$(1.4) \quad H(XY) = H(X) + H(Y|X).$$

SATS: Postulaten 1-4 definierar funktionen H entydigt (bortsett från en multiplikativ konstant). Det gäller:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) = -\lambda \sum_{i=1}^n p_i \log p_i; \quad \lambda \geq 0.$$

Om p_i är noll för något i , skall $p_i \log p_i$ sättas lika med noll.

BEVIS: Inför funktionen

$$L(n) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

Enligt postulat 3 skall $L(n)$ vara en växande funktion av n . Vi skall först visa att

$$L(n) = \lambda \log n; \quad \lambda \geq 0.$$

Låt m och r vara naturliga tal. Betrakta m oavhängiga scheman $S_1, S_2, \dots, S_m$ som vart och ett innefattar r lika sannolika händelser, d. v. s.

$$H(S_k) = H\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}\right) = L(r); \quad 1 \leq k \leq m.$$

Enligt postulat 4 och p. g. a. oavhängigheten är

$$H(S_1 S_2 \dots S_m) = \sum_{k=1}^m H(S_k) = mL(r).$$

Schemat $S_1 S_2 \dots S_m$ innefattar r^m oberoende händelser med samma sannolikheter r^{-m} . Alltså är

$$H(S_1 S_2 \dots S_m) = L(r^m), \text{ d. v. s. } L(r^m) = mL(r).$$

Analogt gäller $L(s^n) = nL(s)$ för varje talpar av naturliga tal n och s .

Välj nu godtyckliga positiva heltal r, s och n som uppfyller villkoret $s^n \geq r > 1$ och bestäm m (positivt heltal) så att $r^m \leq s^n < r^{m+1}$. Härav följer

$$m \cdot {}^a \log r \leq n \cdot {}^a \log s < (m+1) \cdot {}^a \log r, \quad \text{d. v. s.} \quad \frac{m}{n} \leq \frac{{}^a \log s}{{}^a \log r} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Relationen gäller för varje logaritmbas $a > 1$. Eftersom $L(n)$ är en växande funktion av n gäller $L(r^m) \leq L(s^n) \leq L(r^{m+1})$, d. v. s.

$$mL(r) \leq nL(s) \leq (m+1)L(r) \quad \text{eller} \quad \frac{m}{n} \leq \frac{L(s)}{L(r)} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

$\frac{L(s)}{L(r)}$ och $\frac{{}^a \log s}{{}^a \log r}$ ligger båda i samma intervall av längden $\frac{1}{n}$ och alltså gäller

$$\left| \frac{L(s)}{L(r)} - \frac{{}^a \log s}{{}^a \log r} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Eftersom s och r är godtyckliga och n kan väljas godtyckligt stort så gäller

$$\frac{L(s)}{{}^a \log s} = \frac{L(r)}{{}^a \log r} = \text{konst.} = \lambda \quad (r, s > 1).$$

Alltså är

$$L(n) = \lambda \cdot {}^a \log n.$$

Relationen gäller även för $n=1$, ty $kL(1) = L(1^k)$, d. v. s. $L(1) = 0$. Alltså gäller relationen för alla naturliga tal n . Eftersom $L(n)$ är icke avtagande är $\lambda \geq 0$.

Av ${}^b\log x = {}^b\log a \cdot {}^a\log x = \lambda \cdot {}^a\log x$ följer, att vi kan sätta $\lambda = 1$ och låta den multiplikativa konstanten uttryckas av logaritmbasen, som vi senare kommer att fixera. Vi skriver till vidare »log» och införstår därmed, att basen ej är fixerad.

Satsen är därmed bevisad i specialfallet $p_i = 1/n$. Låt nu p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, vara godtyckliga positiva *rationella* tal, g_i positiva heltal, och låt

$$p(x_i) = p_i = \frac{g_i}{g}; \quad \sum_{i=1}^n g_i = g.$$

Vi inför ett schema Z , som är avhängigt av X enligt följande: Z innefattar g stycken händelser $z_1, z_2, \dots, z_g$. Vi indelar dessa i n stycken grupper $G_1, G_2, \dots, G_n$. Gruppen G_k innefattar g_k sinsemellan lika sannolika händelser. Vi antar, att händelsen x_k implicerar, att en av händelserna i G_k inträffar. Däremot inträffar ej någon händelse i någon av de andra grupperna. Alltså:

$$p(z_j | x_k) = \begin{cases} 0, & \text{om } z_j \notin G_k \\ 1/g_k, & \text{om } z_j \in G_k. \end{cases}$$

Då gäller

$$H(Z | x_k) = H\left(\frac{1}{g_k}, \frac{1}{g_k}, \dots, \frac{1}{g_k}\right) = L(g_k) = \log g_k,$$

och härav enligt (1.2):

$$H(Z | X) = \sum_{i=1}^n p_i H(Z | x_i) = \sum_{i=1}^n p_i \log g_i = \sum_{i=1}^n p_i \log p_i + \log g.$$

Låt oss undersöka $H(XZ)$. Händelsen $x_k z_j$ är möjlig endast om z_j ingår i gruppen G_k . I denna grupp ingår g_k stycken händelser. Totala antalet möjliga händelser $x_k z_j$ är då

$$\sum_{k=1}^n g_k = g.$$

Sannolikheten för händelsen $x_k z_j$ är $p_k \cdot \frac{1}{g_k} = \frac{1}{g}$ d. v. s. densamma för alla g händelserna. Då gäller $H(XZ) = L(g) = \log g$, och enligt postulat 4 gäller $H(XZ) = H(X) + H(Z | X)$, alltså

$$(1.5) \quad H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i.$$

Ovanstående är giltigt för alla positiva rationella tal $p_1, p_2, \dots, p_n$, för vilka $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Då $H(X)$ enligt postulat 1 är kontinuerlig i $p_1, p_2, \dots, p_n$, så gäller uttrycket även för irrationella $p_i > 0$.

Postulat 2 (eller postulat 1) fordrar slutligen att vi definierar

$$(1.6) \quad 0 \cdot \log 0 = 0.$$

Det återstår att visa att postulaten 1–4 verkligen är satisfierade av funktionen, som definieras av (1.5) och (1.6). Härledningen hittills visar, att (1.5) tillsammans med (1.6) ger den enda återstående möjligheten, men det kan ju tänkas, att postulaternas krav är så hårda, att de överhuvud icke kan uppfyllas.

De tre första postulaten följer tämligen direkt. För att verifiera postulat 4 betraktar vi, med beaktande av relationen $p(x_i)p(y_j|x_i) = p(x_i y_j)$ och definitionen (1.2), den betingade obestämtheten $H(Y|X)$:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \sum_i p(x_i) \sum_j p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \\ &= - \sum_i \sum_j p(x_i y_j) (\log p(x_i y_j) - \log p(x_i)) \\ &= H(XY) + \sum_i \sum_j p(x_i y_j) \log p(x_i). \end{aligned}$$

Men $\sum_j p(x_i y_j) = p(x_i)$, alltså

$$H(Y|X) = H(XY) + \sum_i p(x_i) \log p(x_i) = H(XY) - H(X).$$

Härav följer att postulat 4 är satisfierat. Hela satsen är härmed bevisad.

2. Egenskaper hos $H(X)$.

1) $H(X) \geq 0$.

2) $H(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0$. Obestämtheten i ett förutbestämt system är noll.

3) $-H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ är en strikt konvex funktion av var och en av variablerna p_i för $0 \leq p_i \leq 1$.

En funktion $\Phi(x)$ kallas *strikt konvex* i ett intervall, om det för alla tal x_1 och x_2 i intervallet och för alla tal μ mellan 0 och 1 gäller

$$\Phi(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) < \mu \Phi(x_1) + (1-\mu)\Phi(x_2).$$

Om tecknet $<$ i denna definition ersättes med $\leq$, kallas funktionen $\Phi(x)$ *konvex* (utan tillägget strikt). Geometriskt innebär *strikt konvexitet*, att kurvan $y = \Phi(x)$ mellan x_1 och x_2 ligger *under* kordan. (När endast *konvexitet* förutsätts, kan kurvan vara styckevis rätlinjig.) Om $\Phi''(x)$ existerar överallt i ett intervall, så är $\Phi''(x) > 0$ ett tillräckligt villkor för strikt konvexitet.

Betrakta funktionen $\Phi(x) = x \log x$. Då är $\Phi''(x) = 1/x > 0$ för $x > 0$. Av (1.6) följer att konvexitetsområdet kan utsträckas till $x \geq 0$. Alltså är $-H(X)$ en strikt konvex funktion av var och en av variablerna p_i för $p_i \geq 0$.

Antag att man placerar icke-negativa massor $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ i n punkter $z_1, z_2, \dots, z_n$ på en strikt konvex kurvbåge. Det är då uppenbart, att tyngdpunkten för denna massfördelning ligger ovanför kurvbågen, såvida ej alla masspunkterna sammanfaller, i vilket fall tyngdpunkten ligger på själva kurvbågen. Denna betraktelse leder till en mycket användbar olikhet:

GENERELL OLIKHET FÖR STRIKT KONVEXA FUNKTIONER. Låt $\mu_j \geq 0$, $\sum_j \mu_j = 1$, $\Phi(z)$ strikt konvex i ett intervall, som innehåller alla punkterna z_j . Då gäller:

$$(2.1) \quad \Phi\left(\sum_j \mu_j z_j\right) \leq \sum_j \mu_j \Phi(z_j).$$

Likhetstecknet gäller om och endast om alla z_j är lika. (Ett strängt bevis finns i Hardy-Littlewood-Polya: *Inequalities*, p. 70.)

4) Denna generella olikhet skall nu användas för bevis av den viktiga olikheten

$$(2.2) \quad H(X) \geq H(X|Y).$$

Likhet gäller om och endast om X och Y är oberoende.

BEVIS: Sätt i den generella olikheten för konvexa funktioner (2.1):

$$\mu_j = p(y_j), \quad z_j = p(x_i|y_j), \quad \Phi(z) = z \log z.$$

Enligt (1.2) gäller

$$-H(X|Y) = -\sum_{j=1}^m p(y_j)H(X|y_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_j \Phi(z_j) \geq \sum_{i=1}^n \Phi\left(\sum_{j=1}^m \mu_j z_j\right).$$

Men

$$\sum_{j=1}^m \mu_j z_j = \sum_{j=1}^m p(y_j)p(x_i|y_j) = p(x_i),$$

alltså

$$-H(X|Y) \geq \sum_{i=1}^n \Phi(p(x_i)) = \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i) = -H(X),$$

varav (2.2) direkt följer.

5) Av (2.2) och (1.4) följer

$$(2.3) \quad H(XY) \leq H(X) + H(Y).$$

Likhet gäller om och endast om X och Y är oberoende.

6) Slutligen skall en annan viktig egenskap visas:

$$(2.4) \quad H(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \log n.$$

Likhet gäller om och endast om $p_i = 1/n$ för alla i .

BEVIS: Sätt i (2.1)

$$\mu_j = \frac{1}{n}, \quad z_j = p_j, \quad \Phi(z) = z \log z.$$

Man får

$$\frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{n} \right) = \Phi \left(\frac{1}{n} \right) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \Phi(p_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_j \log p_j.$$

Härav följer (2.4) direkt.

Av alla schema med samma antal alternativ är obestämdheten störst när alla sannolikheter är lika, jmf. betraktelserna på sid. 7–8.

3. Informationsbegreppet. Betrakta två scheman X och Y . Händelserna x och y förutsättes kunna bero av varandra. Obestämdheten i X -schemat innan y har fixerats är $H(X)$.

Ett schema X har för en iakttagare en viss obestämdhet $H(X)$. Han kan ej iaktta vilken händelse x_i , som utfallit vid ett visst försök; däremot känner han till sannolikheterna för de olika möjliga händelserna.

Iakttagaren kan notera utfallet av en händelse y_j i ett schema Y . Om det finnes ett statistiskt beroende mellan X och Y bör noterandet av y_j ge en viss information om vilken händelse x_i , som förevarit. $H(X|Y)$ är ett mått på den obestämdhet, som i medeltal kommer att finnas kvar sedan utfallet i schemat Y blivit känt.

Kunskapen om y ändrar alltså i medeltal obestämdheten i X -schemat från $H(X)$ till $H(X|Y)$. Enligt (2.2) är $H(X) \geq H(X|Y)$.

Den icke-negativa kvantiteten $H(X) - H(X|Y)$ är den ändring i obestämdhet i X -systemet, som kunskapen om y i medeltal ger. Vi kallar denna kvantitet för *den information försöket Y i medeltal ger om x* och betecknar den $I(X; Y)$. Vi har

$$\begin{aligned} (3.1) \quad I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) = - \sum_i p(x_i) \log p(x_i) \\ &\quad + \sum_j p(y_j) \sum_i p(x_i|y_j) \log p(x_i|y_j) \\ &= - \sum_i \sum_j p(x_i y_j) \log p(x_i) + \sum_i \sum_j p(x_i y_j) \log p(x_i|y_j) \\ &= \sum_i \sum_j p(x_i y_j) \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}. \end{aligned}$$

Detta är en medelvärdesbildning av uttrycket $I(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}$.

Med hänsyn till ovanstående är det rimligt att uppfatta detta uttryck som *den information inträffandet av händelsen y_j ger om x_i* . Vi skall kalla detta uttryck för *den ömsesidiga informationen* mellan x_i och y_j , vilket motiveras av att

$$(3.2) \quad I(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = \log \frac{p(x_i y_j)}{p(x_i)p(y_j)} = \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} = I(y_j; x_i).$$

Den information inträffandet av x_i ger beträffande y_j är *densamma*, som inträffandet av y_j ger beträffande x_i .

4. Egenskaper hos I .

1) Enligt (3.2) är $I(x_i; y_j) = I(y_j; x_i)$. Härav följer för medelvärdena:

$$(4.1) \quad I(X; Y) = I(Y; X).$$

2) $I(x_i; y_j) = 0$ om x_i och y_j oberoende, d. v. s. om

$$(4.2) \quad p(x_i y_j) = p(x_i)p(y_j).$$

3) För fixt $p(x_i)$ är $I(x_i; y_j)$ max när $p(x_i|y_j) = 1$. Utfallet y_j innebär då, att x_i är en *säker* händelse.

$$(4.3) \quad \{I(x_i; y_j)\}_{\max} = -\log p(x_i) = I(x_i) \geq 0.$$

$I(x_i)$ är alltså den maximala information, som någon händelse y_j kan ge beträffande händelsen x_i , och kallas *självinformationen* hos händelsen x_i . Det är den informationsmängd, som någon annan händelse måste överbringa beträffande x_i , för att x_i skall vara fullständigt specificerad.

4) Definitionsmässigt gäller

$$I(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i y_j)}{p(x_i)p(y_j)} = \underbrace{\log p(y_j|x_i)}_{\leq 0} + I(y_j) = \underbrace{\log p(x_i|y_j)}_{\leq 0} + I(x_i),$$

d. v. s.

$$(4.4) \quad \begin{matrix} I(x_i) \geq \\ I(y_j) \geq \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} I(x_i; y_j) = I(y_j; x_i). \end{matrix} \right.$$

$I(x_i)$ är alltså dels den maximala information som över huvud kan erhållas beträffande x_i genom någon annan händelse (information nödvändig för att specificera x_i , jmf. (4.3)), dels den maximala information som händelsen x_i kan överbringa beträffande någon annan händelse (jmf. $I(x_i) \geq I(y_j; x_i)$).

Observera att det alltid gäller $I(x_i) \geq 0$ och $I(y_j) \geq 0$, medan det kan gälla $I(x_i; y_j) < 0$, nämligen när $p(x_i y_j) < p(x_i)p(y_j)$. Däremot gäller enligt föregående för medelvärdet av $I(x_i; y_j)$ att $I(X; Y) \geq 0$.

5) För medelvärdet $I(X)$ av självinformationerna $I(x_i)$ gäller

$$(4.5) \quad I(X) = \sum_i p(x_i)I(x_i) = - \sum_i p(x_i) \log p(x_i) = H(X).$$

$H(X)$ är alltså medelvärdet av de informationsmängder, som erfordras för

att specificera varje enskild händelse x_i , eller (jmf. (4.4)) den maximala information, som händelserna x_i med givna sannolikheter i medeltal kan överbringa per händelse.

$H(X)$ och $I(X)$ är alltså beteckningar för en och samma sak, men den ena eller andra beteckningen är att föredra beroende på om vi talar om obestämthet eller om information, vilka begrepp vi nu relaterat fast till varandra.

6) I överensstämmelse med definitionen av $I(x_i)$ bildar vi självinformation hos den sammansatta händelsen $x_i y_j$:

$$I(x_i y_j) = -\log p(x_i y_j).$$

För medelvärde $I(XY)$ gäller då

$$I(XY) = \sum_{i,j} p(x_i y_j) I(x_i y_j) = - \sum_{i,j} p(x_i y_j) \log p(x_i y_j) = H(XY).$$

Då gäller enligt (2.3):

$$(4.6) \quad I(XY) \leq I(X) + I(Y).$$

Likhet gäller om x och y är oberoende.

Statistiskt beroende mellan delhändelserna kan ej öka medelinformationen per sammansatt händelse utöver vad som kan ernås när delhändelserna är statistiskt oberoende.

Att likhet gäller i (4.6) om x och y är oberoende inses även ur (4.2), som ger $-\log p(x_i y_j) = -\log p(x_i) - \log p(y_j)$, alltså

$$(4.7) \quad I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j).$$

5. Det binära schemat. Logaritmbasen. Betrakta nu det enklaste av alla möjliga icke förutbestämda scheman:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Enligt (2.4) är

$$H_{\max} = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\right) = -\log \frac{1}{2}.$$

Detta är alltså (jmf. (4.5)) den maximala medelinformation, som detta schema *över huvud* kan överbringa per händelse. Självinformation hos händelserna x_1 och x_2 är härvid lika stor och också $= -\log \frac{1}{2}$.

Det synes rimligt att göra denna informationsmängd till *enhet*, d. v. s. fastlägga logaritmbasen ur relationen $-\log \frac{1}{2} = 1$. Detta ger basen 2. I det följande förstår vi med beteckningen »log» att logaritmbasen är 2. Enheten för informationen kallas *bit*.

Ett binärt schema (tvåläges-schema) kan enligt ovan i *genomsnitt*

maximalt överbringa informationen 1 bit per händelse. Härvid är självinformationen för vardera händelsen = 1 bit. Observera, att självinformationen för ena händelsen i ett binärt schema kan vara större än 1 bit; den kan i verkligheten vara hur stor som helst, nämligen när sannolikheten för händelsen är hur liten som helst. Medelinformationen per händelse kan å andra sidan aldrig vara större än 1 bit men väl mindre. Härav inses att det exempelvis är olämpligt att, såsom i en del litteratur, låta bit vara synonym för binär siffra. En binär siffra överbringar informationen 1 bit när den inträffar med a priori-sannolikheten $\frac{1}{2}$, d. v. s. har självinformation 1 bit, men kan i andra fall överbringa såväl större som mindre självinformation än 1 bit. — En invändningsfri synonym för binär siffra är däremot *binit* (binary digit).

Vi belyser ovanstående med fig. 1, där händelsen x_1 har sannolikheten p och x_2 sannolikheten $1-p$, d. v. s.

$$H(X) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$$

$$I(x_1) = -\log p, I(x_2) = -\log (1-p).$$

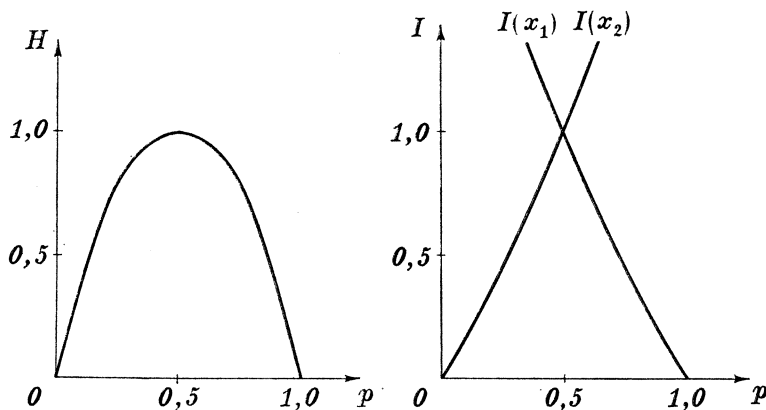


Fig. 1

6. Anmärkning beträffande innebörden av $H(X)$. Vi arbetade i början med täckbenämningen »obestämdhet» för $H(X)$; på ett senare stadium fann vi skäl för att tillskriva $H(X)$ benämningen »medelinformation per händelse». Helt oavsett om dessa namn har någon fysikalisk relevans eller ej kan vi nu fastslå följande beträffande $H(X)$:

1° Varje fullständigt system av händelser med motsvarande sannolikheter, d. v. s. varje schema X , definierar entydigt ett uttryck $H(X)$.

2° Uttrycket $H(X)$ lyder vissa enkla relationer (jmf. 2), som har direkta anknytningar till de statistiska egenskaperna hos ett schema av den typ, som vi utgått ifrån.

Dessa omständigheter är skäl nog för att uttrycket $H(X)$ är av intresse ur rent statistisk synpunkt. För vissa fysikaliska system, som kan underordnas ett schema X , visar sig uttrycket $H(X)$ vara av fundamental betydelse vid beskrivandet av systemet och dess egenskaper. Ett dylikt system är den termodynamiska fasrymden. Ur denna tillämpning härleder sig beteckningen *entropi* för $H(X)$. I det följande kommer denna benämning att användas för $H(X)$, även när andra system beskrives.

Ehuru vi motiverat en del operationer vi företagit med entropiuttrycket $H(X)$ genom att anspela på informationsbegreppet (exempelvis vid bildandet av $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$), har vi hittills icke erhållit någon bekräftelse på, att $H(X)$ har någon konkret fysikalisk innebörd av intresse vid beskrivandet av ett system för informationsöverföring. En dylik bekräftelse kommer vi nu att erhålla i form av den s. k. *första fundamentalsatsen*.

7. Begreppet informationskälla. Kalla händelserna i ett schema enligt (1.1) för *meddelanden* m_i ($1 \leq i \leq N$). Ett försök utgöres av att ett meddelande slumpmässigt utväljes ur mängden $\{m_i\}$. Vid upprepade försök är resultatet vid varje försök oberoende av resultaten vid övriga försök. Sannolikheten för att m_i utväljes är $p(m_i)$. Försöken ske i tidsföljd och $p(m_i)$ förutsättes vara tidsoberoende. En följd av försök resulterar i genererandet av en följd statistiskt oberoende meddelanden.

Ovanstående definierar en speciell typ av *informationskälla*, nämligen en diskret, stationär källa genererande statistiskt oberoende meddelanden. Vi skall förutsätta, att källan genererar lägre enheter än meddelanden, men att dessa lägre enheter kan sammanfattas till meddelanden, så att vi fortfarande kan definiera källan enligt ovan. I det allmänna fallet kan man förutsätta, att denna sönderdelning (segmentering) av meddelandena kan ske på olika *nivåer*, varvid man erhåller exempelvis meningar, ord, bokstäver, tecken etc. *Meddelande-nivån* är den lägsta, som uppdelar symbolföljden ur källan i *statistiskt oberoende enheter*. I den följande framställningen skall vi förutsätta, att meddelandena kan segmenteras på den lägre nivån *symboler*. Den ändliga mängden förekommande olika symboler skall vi kalla *alfabetet*.

En allmännare typ av diskreta informationskällor utgöres av dem, där en segmentering av den utgående symbolföljden i statistiskt oberoende ändliga enheter är omöjlig. En första generalisering utgör de källor, som genererar Markov-kedjor (behandlade av Shannon m. fl.). McMillan har definierat (1953) en typ av diskreta källor, s. k. *ergodiska* källor, som möjliggör en matematisk uppbyggnad av informationsteorien under synnerligen allmänna förutsättningar om symbolföljdens statistiska

natur. Denna framställning fordrar emellertid avancerade metoder, och kommer ej att beröras här.

8. Begreppet coder. Med en *coder* skall vi förstå en anordning, som på ingångssidan tar emot symboler eller grupper av symboler, tillhörande ett visst alfabet, och som på utgångssidan avger symboler tillhörande ett annat alfabet. En *coder* är deterministisk, d. v. s. identiska ingångssviter av symboler resulterar i identiska utgångssviter. Codern utgör ett specialfall av en *informationskanal*, nämligen en ostörd kanal med minne.

Meddelanden, som codern mottar på ingångssidan, resulterar i att meddelanden avges på utgångssidan. Vi skall tills vidare förutsätta, att codern behandlar varje ingångsmeddelande för sig, d. v. s. lagrar de separata insymbolerna i meddelandet och därefter *kodar hela meddelandet som en enhet*. Beroende på efter vilken metod kodningen sker och på hur många symboler, som ingår i alfabetet på utgångssidan, kommer ett visst givet ingångsmeddelande att resultera i utgångsmeddelanden av olika längd (olika antal symboler) vid olika coders. Vi kan då ställa problemet:

Givet en källa definierad enligt ovan, genererande meddelanden ur en ändlig mängd $\{m_i\}$. Vidare givet en *coder*, som omskriver de av källan genererade meddelandena i symboler ur ett givet alfabet om D symboler. Metoden för kodningen är ej fixerad.

PROBLEM: Finnes det någon *optimal* kodning i bemärkelsen, att statistiska medelvärdet av längderna av de ur codern erhållna meddelandena är minimum med bibehållande av ett entydighetsvillkor innebärande, att varje svit av meddelanden på ingångssidan entydigt kan identifieras ur symbolsviten på utgångssidan?

Svaret på denna problemställning kommer vi att erhålla genom utnyttjandet av två olikhetsrelationer.

9. Kraft-Szilard's olikhet. Antag vi har ett alfabet $\{a_k\}$ med D stycken olika symboler $a_1, a_2, \dots, a_D$. Låt de N stycken meddelandena m_i kodas i ändliga, ordnade följder av symboler a_k . Inför beteckningen s_i för den a -kodade motsvarigheten till m_i . Meddelandet s_i har längden n_i , om det uppbyggs av n_i stycken element ur $\{a_k\}$. Dessa element behöver icke alla vara olika. En följd av meddelanden (dragna med återläggning) ur $\{s_i\}$ kallar vi en s -följd.

DEFINITION: Mängden $\{s_i\}$ säges vara *avkodbar* (decodable) om icke-identiska m -följder svarar mot icke-identiska a -följder.

SATS: *Nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall finnas en avkodbar mängd $\{s_i\}$ vars element har längderna $n_1, n_2, \dots, n_N$ är att*

$$(9.1) \quad \sum_{i=1}^N D^{-n_i} \leq 1.$$

BEVIS: Antag $\{s_i\}$ är avkodbar, och inför

$M = \max \{n_1, n_2, \dots, n_N\} = \text{längden av längsta meddelandet i } \{s_i\};$

$\omega_j = \text{antalet meddelanden i } \{s_i\}, \text{ som har längden } j;$

$N(k) = \text{antalet } s\text{-följder, som har längden } k \text{ stycken } a\text{-element.}$

Vi sätter $N(k) = 0$ för $k < 0$. Då gäller enligt definitionen på avkodbarhet:

$$N(k) = \omega_1 N(k-1) + \omega_2 N(k-2) + \dots + \omega_M N(k-M) = \sum_{j=1}^M \omega_j N(k-j).$$

Antalet olika a -följder av längden k är D^k , varför det säkert gäller att $N(k) \leq D^k$. Definiera $N(0) = 1$ varvid olikheten även gäller för $k = 0$. Är z en komplex variabel så gäller som bekant att potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} (Dz)^k = \sum_{k=0}^{\infty} D^k z^k$ har konvergensradie D^{-1} . Potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} N(k) z^k$ har följaktligen en konvergensradie $\geq D^{-1}$. Enligt en känd sats ur funktions-teorien representerar varje potensserie en analytisk funktion innanför sin konvergenscirkel. Alltså är $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} N(k) z^k$ en analytisk funktion för $|z| < D^{-1}$. Det gäller:

$$\begin{aligned} F(z) - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} N(k) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{j=1}^M \omega_j N(k-j) \\ &= \sum_{j=1}^M \omega_j z^j \sum_{k=1}^{\infty} N(k-j) z^{k-j} = \sum_{j=1}^M \omega_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} N(k) z^k. \end{aligned}$$

(Observera att $N(k-j) = 0$ för $k < j$.) Med $Q(z) = \sum_{j=1}^M \omega_j z^j$ gäller därför $F(z) - 1 = Q(z) \cdot F(z)$, alltså

$$F(z) = \frac{1}{1 - Q(z)}.$$

Låt x vara reell och > 0 . Eftersom $F(z)$ är analytisk för $|z| < D^{-1}$, så kan $1 - Q(x)$ ej ha något nollställe för $x < D^{-1}$. Då $1 - Q(0) = 1$ följer $1 - Q(x) > 0$, d. v. s.

$$Q(x) = \sum_{j=1}^M \omega_j x^j < 1 \text{ för } x < D^{-1}.$$

För $x = D^{-1}$ gäller då, eftersom $Q(x)$ är kontinuerlig, att

$$(9.2) \quad \sum_{j=1}^M \omega_j D^{-j} \equiv \sum_{n_i=1}^M \omega_{n_i} D^{-n_i} \equiv \sum_{i=1}^N D^{-n_i} \leq 1.$$

Detta är ett *nödvändigt* villkor för att $\{s_i\}$ är avkodbar.

Vi skall så visa, att om relationen (9.2) gäller, så går det att konstruera

ω_1 stycken distinkta s_i -meddelanden av längden 1, ω_2 stycken av längden 2 a -element etc., vilka alla är avkodbara.

Vi undersöker några olika M -värden:

$$M=1: \quad \omega_1 D^{-1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \omega_1 \leq D.$$

$$M=2: \quad \omega_1 D^{-1} + \omega_2 D^{-2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \omega_2 \leq (D - \omega_1)D.$$

$$M=3: \quad \omega_1 D^{-1} + \omega_2 D^{-2} + \omega_3 D^{-3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \omega_3 \leq [(D - \omega_1)D - \omega_2]D,$$

etc.

Eftersom ω_i aldrig är negativ finner man, att varje sådan olikhet implicerar alla de ovanför stående. — Sedan längderna fixerats på sådant sätt, att olikheterna är uppfyllda, är det exempelvis möjligt att successivt bygga upp $\{s_i\}$ enligt regeln, att intet meddelande skall kunna bildas ur något av de övriga genom tillägg av en ändelse av a -element. Denna regel innebär uppenbart ett hårdare krav än avkodbarhet, varför (9.2) är ett *tillräckligt* villkor för att det skall finnas en avkodbar mängd $\{s_i\}$ med föreskrivna längder $n_1, n_2, \dots, n_N$.

EXEMPEL: Antag $D=2$; $a_1=0$, $a_2=1$.

$$\begin{aligned} \omega_1 &\leq 2; & \text{välj } \omega_1 &= 1. \\ \omega_2 &\leq (2 - \omega_1)2 = 2; & \text{välj } \omega_2 &= 1. \\ \omega_3 &\leq [(2 - \omega_1)2 - \omega_2]2 = 2; & \text{välj } \omega_3 &= 2. \\ \omega_k &= 0 \text{ för } k \geq 4, \text{ ty } \omega_1 D^{-1} + \omega_2 D^{-2} + \omega_3 D^{-3} = 1. \end{aligned}$$

Man har exempelvis

$$s_1 = 0, s_2 = 11, s_3 = 100, s_4 = 101.$$

10. En hjälpsats.

SATS: Om $q_i \geq 0$; $\sum_{i=1}^n q_i = 1$, och om vidare $p_i \geq 0$; $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, så gäller

$$(10.1) \quad -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \leq -\sum_{i=1}^n p_i \log q_i.$$

Likhet gäller om och endast om $q_i = p_i$ för $i=1, 2, \dots, n$.

BEVIS: Sätt i den generella olikheten (2.1) för strikt konvexa funktioner:

$$\mu_j = p_j, \quad z_j = q_j/p_j, \quad \Phi(z) = -\log z.$$

$\Phi(z)$ är konvex ty $\Phi''(z) = z^{-2} \log e > 0$. Man finner att

$$\sum_j p_j (-\log q_j + \log p_j) \geq \Phi(1) = 0.$$

11. Första fundamentalsatsen. Låt enligt 7 en källa generera meddelanden ur en mängd $\{m_i\}$, där $1 \leq i \leq N$, definierande ett schema M med sannolikheter $p(m_i)$. Låt vidare som förut n_i beteckna längden av

det mot m_i svarande s_i -meddelandet från en till källan ansluten coder med ett utgångsalfabet om D stycken symboler. Det sökta medelvärde (jmf. problemställningen i 8) är

$$(11.1) \quad L = \sum_{i=1}^N p(m_i) n_i .$$

Inför vi $q_i = \frac{D^{-n_i}}{\sum_{k=1}^N D^{-n_k}}$, varvid $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^N q_i = 1$, så gäller

$$- \sum_{i=1}^N p(m_i) \log q_i = \sum_{i=1}^N p(m_i) n_i \log D + \log \sum_{i=1}^N D^{-n_i} = L \log D + \log \sum_{i=1}^N D^{-n_i} .$$

Enligt olikheten (9.1) är vid avkodbara s_i -meddelanden den sista logaritmen ≤ 0 , alltså

$$L \log D \geq - \sum_{i=1}^N p(m_i) \log q_i \geq - \sum_{i=1}^N p(m_i) \log p(m_i) = H(M) ,$$

där sista olikheten följer av (10.1). Alltså är

$$L = \sum_{i=1}^N p(m_i) n_i \geq \frac{H(M)}{\log D} .$$

Villkor för likhet är

$$D^{-n_i} = p(m_i); \quad i = 1, 2, \dots, N ,$$

ty härvid är $\sum_{i=1}^N D^{-n_i} = 1$ och $q_i = p(m_i)$, d. v. s. villkoren för likhet är uppfyllda i båda olikheterna. Villkoret för likhet är alltså uppfyllt om kvoterna $-\frac{\log p(m_i)}{\log D} = \frac{I(m_i)}{\log D}$ är *heltal* för alla index i , och vi väljer respektive n_i lika med dessa heltal.

I det allmänna fallet är $\frac{I(m_i)}{\log D}$ icke heltal för alla index i . Emellertid kan vi välja heltalen n_i så att för alla index i gäller

$$(11.2) \quad \frac{I(m_i)}{\log D} \leq n_i < \frac{I(m_i)}{\log D} + 1 .$$

Vi visar först, att det då finns avkodbara s_i -meddelanden med längder n_i , d. v. s. att (9.1) är satisfierad. Av (11.2) följer $n_i \log D \geq I(m_i) = -\log p(m_i)$ eller $\log D^{-n_i} \leq \log p(m_i)$, alltså

$$\sum_{i=1}^N D^{-n_i} \leq \sum_{i=1}^N p(m_i) = 1 .$$

För medellängden L^* vid denna kodning gäller

$$\frac{H(M)}{\log D} \leq \sum_{i=1}^N p(m_i) n_i = L^* < \frac{H(M)}{\log D} + 1 .$$

Vi har alltså visat, att de mot m_i svarande avkodbara meddelandena s_i kan ges längder n_i , så att statistiska medellängden L^* för dessa meddelanden lyder olikheten

$$(11.3) \quad \frac{H(M)}{\log D} \leq L^* < \frac{H(M)}{\log D} + 1.$$

En dylik kodning existerar, däremot existerar ingen kodning sådan att $L < \frac{H(M)}{\log D}$, ty detta skulle fordra ett upphävande av det *nödvändiga* villkoret för avkodbarhet.

Vi utnyttjar nu det förhållandet, att meddelandena m_i är statistiskt oberoende. En grupp om k stycken meddelanden m_i kan då tänkas genererad genom den sammansatta händelsen, att k stycken oberoende men identiska källor, alla med entropien $H(M)$, avger var sitt meddelande. Då är enligt (2.3):

$$(11.4) \quad H(M_1 M_2 \dots M_k) = kH(M).$$

Codern mottar nu övermeddelanden av längden k stycken m_i -meddelanden och kodar dessa grupp efter grupp. Då gäller

$$\frac{kH(M)}{\log D} \leq L_k^* < \frac{kH(M)}{\log D} + 1,$$

där L_k^* är statistiska medellängden av utgångssviten svarande mot grupperna om k meddelanden. I genomsnitt svarar då $L_k^*/k = L^*$ utgångssymboler mot varje ingångsmeddelande, alltså

$$(11.5) \quad \frac{H(M)}{\log D} \leq L^* < \frac{H(M)}{\log D} + \frac{1}{k}.$$

Detta är *första fundamentalsatsen*.

12. Tolkning av första fundamentalsatsen. Välj speciellt $D=2$, d. v. s. låt coderns utalfabet vara binärt. Då gäller enligt (11.5):

$$H(M) \leq L^* < H(M) + \frac{1}{k}.$$

Entropien $H(M)$ för en informationskälla är alltså *undre gränsen för medelantalet binära siffror, som vid optimal kodning erfordras per meddelande m_i* .

Denna gräns kan uppnås godtyckligt nära genom att m_i -meddelandena kodas i tillräckligt stora grupper, vilket förutsätter ett tillräckligt stort minne hos codern.

Detta resultat verifierar slutgiltigt det berättigade i beteckningen medelinformation per händelse för $H(M)$ och bekräftar entropibegreppets fundamentala betydelse vid beskrivandet av informationssystem.

Vi önskar undersöka innebörden av likheten

$$H(M) = L^*$$

när $k=1$, d. v. s. när varje meddelande m_i kodalas separat (jmf. (11.3)). Likhet gäller, såsom vi tidigare konstaterat, om och endast om uttrycken $-\log p(m_i) = I(m_i)$ är heltal för $i=1, 2, \dots, N$, och koderna för respektive m_i ges längder lika med dessa heltal, d. v. s. om

$$n_i = I(m_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

För alla meddelanden m_i gäller då, att *självinformationen i bits är lika med antalet binära siffror, som ingår i den binärkodade motsvarigheten till meddelandet.*

Under förutsättning att de binära utfallen är *statistiskt oberoende* har då enligt (4.7) dessa enskilda utfall i medeltal självinformationen 1 bit. Vore de statistiskt beroende skulle enligt (4.6) större medelsjälvinformation än 1 bit per utfall erfordras för att specificera meddelandena entydigt. Enligt 5 kan å andra sidan ett binärt schema i medeltal *maximalt* överbringa självinformationen 1 bit per utfall, varvid fordras, att respektive händelser har a priori-sannolikheten $\frac{1}{2}$. Eftersom vi vet (genom avkodbarhetsvillkoret), att meddelandena är entydigt specificerade av binärkoderna har vi då bevisat, *dels att de binära utfallen är statistiskt oberoende, dels att a priori-sannolikheterna för respektive utfall är $\frac{1}{2}$. Utgången från codern representerar följaktligen en informationskälla av den typ vi definierat i 7 och har entropien $H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$.*

De egenskaper vi ovan härlett för utföljden gäller i fallet $H(M) = L^*$. Man kan generalisera till det allmänna fallet, där $\lim_{k \rightarrow \infty} L^* = H(M)$, och

konstaterar, att även här utföljden i limes antar de ovan nämnda egenskaperna vid optimal kodning.

Om medellängden för meddelandena från en coder är L så utgör den positiva kvantiteten

$$r = \frac{L - L^*}{L} = 1 - \frac{L^*}{L}; \quad 0 \leq r \leq 1$$

ett mått på kodningens ineffektivitet. Denna kvantitet kallas *redundansen*.

Innebörden av 1:a fundamentalsatsen kan uttryckas så, att en redundant källa (redundansen $\neq 0$) genom kodning kan transformeras till en ekvivalent källa, vars redundans är godtyckligt nära noll.

EXEMPEL på optimal kodning: Vi kodar binärt följande 8 meddelanden, vilkas sannolikheter alla är av formen 2^{-k} , så att motsvarande självinformationer är heltal (jmf. (11.2)).

i	$p(m_i)$	$I(m_i) = -\log p(m_i)$	s_i
1	0,25	2	00
2	0,25	2	01
3	0,125	3	100
4	0,125	3	101
5	0,0625	4	1100
6	0,0625	4	1101
7	0,0625	4	1110
8	0,0625	4	1111

Man finner, att $H(M) = 2,75$ bits/meddelande, och alltså är det möjligt att ernå $L^* = 2,75$ binit/meddelande. — Observera, att i förslaget till kod-ord s_i är i varje kolumn sannolikheten för en 0:a lika stor som för en 1:a.

Systematiska metoder för bestämmandet av binärkoder för givna scheman har utarbetats av bl. a. Huffman och Fano.

(Fortsättning i nästa häfte.)

KONVEKSE FIGURERS JORDAN-INDHOLD

POUL EINAR HANSEN

Vi betragter konvekse punktmængder i det n -dimensionale euklidiske rum E^n . Idet E^n opfattes som et lineært rum, betegner man som bekendt en delmængde M af E^n som konveks, dersom det gælder, at når to punkter med stedvektorer x og y tilhører M , vil også hele liniestykket, der forbinder dem, tilhøre M , altså

$$(1 - \theta)x + \theta y \in M \quad \text{for} \quad x \in M, y \in M, 0 \leq \theta \leq 1.$$

I det følgende vil vi overalt forudsætte om de konvekse figurer, vi betragter, at de er begrænsede; endvidere er det naturligt at tænke sig dem som virkelig n -dimensionale, d. v. s. M tilhører ikke nogen lineær mangfoldighed af lavere dimension end n .

Formålet med denne artikel er at give et bevis for sætningen:

En begrænset konveks mængde M i E^n har et indhold.

Allerede i H. Minkowski's klassiske undersøgelser af de konvekse figurer [4] gøres der opmærksom på det forhold, at en rumlig figur alene ud fra den forudsætning, at den er konveks, har et rumfang, altså hvad vi i dag ville kalde et Jordan-indhold, og der føres bevis herfor. Også W. Blaschke behandler spørgsmålet i en af sine bøger [2], og J. Hjelmslev gav i 1903 det første publicerede bevis [5] for sætningen — Minkowski's er et efterladt arbejde. I de nævnte behandlinger ville en overføring til rum af vilkårlig dimension være kompliceret.

I 1935 gav F. Behrend [1] et elegant bidrag til emnet. Han beviste to sætninger, der i hans behandling viste sig at være ret nært sammenknyttede, nemlig:

(i) Lad M være en vilkårlig begrænset mængde i E^n og $\varepsilon > 0$. M_ε skal betegne mængden af punkter med afstande $< \varepsilon$ til M , d. v. s.

$$M_\varepsilon = \{x \mid \exists y \in M, |x - y| < \varepsilon\}.$$

Der gælder da, at M_ε har et indhold.

(ii) En begrænset mængde i E^n , som er forening af konvekse mængder, der hver indeholder en kugle med radius $\varepsilon > 0$, har et indhold.

Da man let viser, at en n -dimensional konveks mængde indeholder et indre punkt og følgelig en kugle, giver (ii) som specialtilfælde Minkowski's gamle resultat, nu i n dimensioner. Vi giver nu et andet bevis for dette specialtilfælde. Herved vil kun den grundlæggende egenskab ved konvekse mængder blive benyttet.

E^n dækkes med et net af terninger med kantlængde a . Hvis der er K terninger mere i den mindste ydre end i den største indre terningfigur for M , og hvis $\bar{I}(M)$ og $\underline{I}(M)$ betegner M 's ydre og indre Jordan-indhold, gælder altså

$$0 \leq \bar{I}(M) - \underline{I}(M) \leq Ka^n.$$

Nu betragtes en mellemliggende terning T , d. v. s. en terning, som har punkter fælles med M uden helt at tilhøre M ; af praktiske grunde indføres et nyt koordinatsystem $Z_1 \dots Z_n$, så T her bliver enhedsterning i første kvadrant. T 's kanter tredeles, hvorved T deles i 3^n terninger, hver med indholdet $a^n/3^n$ (i forhold til metrikken i E^n). Vi påstår, at mindst én af disse terninger (ved den tilsvarende inddeling af hele E^n) enten går til den indre eller ud af den ydre terningfigur for M . Enten er nemlig en af »hjørneterningerne« (dem, hvor der for intet z_v gælder $\frac{1}{3} < z_v < \frac{2}{3}$) fri for punkter fra M og går altså ud af den ydre figur, eller de indeholder alle et M -punkt, i hvilket tilfælde vi nu godtgør, at midterterningen T^* , hvor for alle z_v gælder $\frac{1}{3} \leq z_v \leq \frac{2}{3}$, er indeholdt i M og dermed går ind i den indre figur. Dette er trivielt for $n=1$ og antages i dimension $n-1$. Vi skærer med hyperplanen $z_1=k$, hvor $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$; den betegnes P , og det viser sig nu, at vi her får $T^* \cap P$ i samme situation i forhold til $T \cap P$ som før T^* i forhold til T . Svarende til en hjørneterning i $T \cap P$, hvor altså $z_1=k$ og $0 \leq z_v \leq \frac{1}{3}$ for visse v , medens $\frac{2}{3} \leq z_v \leq 1$ for de øvrige, findes jo $z' = (z'_1, \dots, z'_n)$ og $z'' = (z''_1, \dots, z''_n)$ i M med $0 \leq z'_1 \leq \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \leq z''_1 \leq 1$ og de øvrige koordinater i samme intervaller som ved punkterne i den betragtede $(n-1)$ -dimensionale hjørneterning. Bestemmes nu θ , så $0 \leq \theta \leq 1$ og $(1-\theta)z'_1 + \theta z''_1 = k$ (dette kan åbenbart gøres), da vil punktet $(1-\theta)z' + \theta z''$ tilhøre både M og hjørneterningen. Dette gøres for alle hjørneterninger i $T \cap P$. Idet $M \cap P$ er konveks (hvilket er meget let at vise), vil efter induktionsantagelsen hele midterterningen $T^* \cap P$ tilhøre M , og da dette gælder for alle k i det betragtede midterinterval, har vi vist det påståede $T^* \subset M$. Endelig giver induktion gyldigheden for $n=2, 3, \dots$.

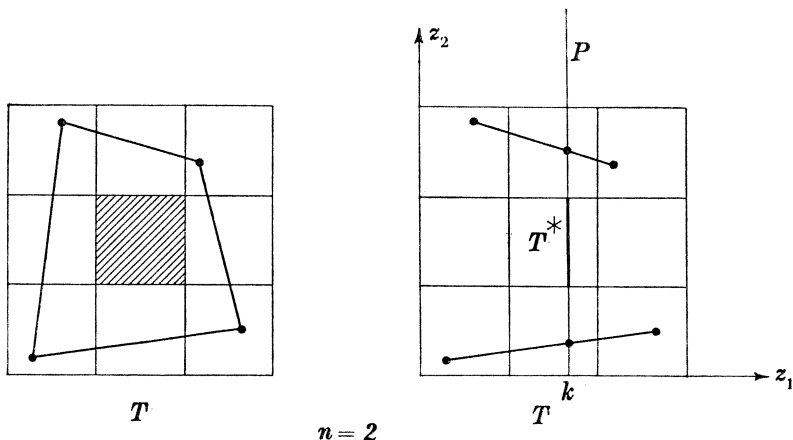
Efter 3^n -deling af alle mellemterninger vil der altså højst være $K(3^n - 1)$ af de nye terninger i mellemfiguren, med andre ord

$$0 \leq \bar{I}(M) - \underline{I}(M) \leq \frac{3^n - 1}{3^n} Ka^n.$$

Ved p gentagelser af hele processen fås

$$0 \leq \bar{I}(M) - \underline{I}(M) \leq \left(\frac{3^n - 1}{3^n} \right)^p K a^n \rightarrow 0 \quad \text{for } p \rightarrow \infty,$$

d. v. s. $\bar{I}(M) - \underline{I}(M) = 0$, hvorved sætningen er vist.



På figuren er vist sagens simple karakter i tilfældet $n=2$, hvor også ideen i det givne bevis er antydnet.

Læsere, som måtte være interesserede i en moderne indførelse i de konvekse figurers teori, kan f. eks. henvises til Eggleston's bog om emnet [3].

LITTERATUR

- [1] F. BEHREND: *Bemerkung zur Inhaltstheorie*. Math. Ann. 111 (1935), pp. 289–292.
- [2] W. BLASCHKE: *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916, § 17.
- [3] H. G. EGGLESTON: *Convexity*. Cambridge 1958.
- [4] H. MINKOWSKI: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, p. 142 ff.
- [5] J. PETERSEN (=HJELMSLEV): *Om konvekse legemer*. Nyt Tidsskr. for Mat. A 14 (1903), pp. 1–10.

MUSIKK OG EUKLIDSKE ALGORITMER

VIGGO BRUN

I musikkteorien har følgende fire problemer vært behandlet:

PROBLEM 1. Finn to naturlige tall x og y slik at

$$(1) \quad \frac{\log 2}{x} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{y}.$$

Her betyr $\approx$ »tilnærmet lik«. Tilnærmelsen bør være så god som mulig, uten at x og y blir for store. Det er likegyldig hvilket logaritmesystem vi bruker, da det bare er forholdet mellom de to tellere som har noe å si. Problemet er behandlet av L. Euler i avhandlingen »Tentamen novae theoriae musicae« [8]. Euler benytter seg av kjedebrøken

$$\frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

og regner ut tilnærmelsesbrøkene

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{17}{10}, \dots$$

Euler har da tatt med også de såkalte »innskutte tilnærmelsesbrøker«, altså de man får når man skriver kjedebrøken som

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + 1 + 1 + \dots}}}}$$

og etterhvert avbryter den foran ett av plusstegnene. Som løsning av (1) finner han da for eksempel $x=17$, $y=10$.

PROBLEM 2. Finn tre naturlige tall x , y og z slik at

$$(2) \quad \frac{\log 2}{x} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{y} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{z}.$$

I. M. Barbour har behandlet dette problem i en artikkel »Music and continued fractions« [1] fra 1948. Han benyttet Jacobis generalisering av kjedebrøken; dette er en raskt konvergerende divisjonsalgoritme, som er særlig inngående studert av O. Perron [10]. Barbour fikk bruk for to modifikasjoner av metoden for å oppnå brukbare løsninger. I en artikkel [3] med samme tittel som Barbours viste jeg i 1950 at den generalisering av kjedebrøken [2] som jeg hadde innført i 1919 førte frem ved langt enklere midler.

PROBLEM 3. Finn fire naturlige tall x , y , z og u slik at

$$(3) \quad \frac{\log 2}{x} \approx \frac{\log \frac{7}{4}}{y} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{z} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{u}.$$

A. D. Fokker har i 1947 behandlet denne relasjonen [9]. Han nevner (s. 27) løsningene

$$x = 31, \quad y = 25, \quad z = 18, \quad u = 10,$$

og tilføyer:

»Nous retrouvons le tempérament de Huygens avec trente-et-un cinquièmes de tons dans l'octave. Cette méthode est empirique. Les mathématiques peuvent fournir une méthode directe pour trouver des approximations en nombres entiers du rapport de deux nombres irrationnels. Le problème de trois, ou même de quatre nombres irrationnels à la fois dépasse de loin les forces des mathématiciens d'aujourd'hui.«

PROBLEM 4. I en brevveksling med meg fra desember 1960 har Fokker også stillet problemet: Finn fem naturlige tall x , y , z , u og v slik at

$$(4) \quad \frac{\log 2}{x} \approx \frac{\log \frac{14}{8}}{y} \approx \frac{\log \frac{12}{8}}{z} \approx \frac{\log \frac{11}{8}}{u} \approx \frac{\log \frac{10}{8}}{v}.$$

Jeg skal her behandle disse fire problemer under samme synsvinkel, idet jeg benytter den generalisering av den Euklidske subtraksjonsalgoritme som jeg foreslo i 1919 og har ført videre i 1957 [4] og i 1959 [5].

Utvidelsen av Euklids algoritme til å gjelde tre tall er forholdsvis fullstendig behandlet av meg og også av N. Pipping [11]. Sammenlign også M. Davids arbeide [6]. Utvidelsen til å gjelde fire tall er mindre fullstendig behandlet av meg [4] mens utvidelsen til å gjelde flere enn fire tall er helt utilfredsstillende behandlet [2]. Her står meget tilbake å gjøre. Særlig ville det være viktig å studere graden av approksimasjon, som bare er helt ut kjent ved Euklids algoritme for to tall.

Jeg begynner med å studere problem 1. Den løsning jeg her skal gi faller helt sammen med den Euler ga. Jeg gir bare Euklids algoritme — som jo er ensbetydende med kjedebroksutviklingen — en ny form, idet jeg gir algoritmen som en rekke subtraksjoner og ikke som en rekke divisjoner. Dette har to fordeler. For det første opptrer da de »innskutte tilnærmelsesbrøker« som likeverdige med de vanlige tilnærmelsesbrøker, mens de »innskutte« ved kjedebroksutviklingen er alt for anonyme. For det annet blir da algoritmen brukbar til generalisering, hvilket neppe kan sies om divisjonsalgoritmen. Det er også verd å legge merke til at Euklid selv, i sine Elementer [7], bare benytter seg av subtraksjon og ikke av divisjon. Jeg gir da Euklids algoritme følgende form:

Gitt to reelle positive størrelser a og b med $a > b$, og de fire naturlige tall x_1, y_1 og x_2, y_2 . Jeg erstatter skjemaet

$$\begin{array}{c|cc} a & x_1 & y_1 \\ b & x_2 & y_2 \end{array}$$

med skjemaet

$$\begin{array}{c|cc} a-b & x_1 & y_1 \\ b & x_1+x_2 & y_1+y_2 \end{array}$$

Hvis her $a-b > b$, som jeg betegner som tilfellet α , kan regnestykket gjentas. Hvis derimot $a-b < b$, som jeg betegner som tilfellet β , må første linje bytte plass med annen linje for at det største av tallene $a-b$ og b kan komme øverst. Hvis $a-b = b$ stanser algoritmen opp.

Algoritmen begynner ved Eulers eksempel med verdiene

$$a = \log 2 = 0,3010, \quad b = \log \frac{3}{2} = 0,1761,$$

når vi nøyer oss med fire desimaler. Som begynnelsesverdier for (x_1, y_1) og (x_2, y_2) velges $(1, 0)$ og $(0, 1)$. Regnestykket ser da slik ut:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{c|c} 0,3010 & 1 \ 0 \\ \hline 0,1761 & 0 \ 1 \end{array} \\
1 \left\{ \begin{array}{c|c} \beta \begin{array}{c|c} 0,1249 & 1 \ 0 \\ \hline 0,1761 & 1 \ 1 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0,1761 & 1 \ 1 \\ \hline 0,1249 & 1 \ 0 \end{array} \end{array} \right. \\
\begin{array}{c} 1 \left\{ \begin{array}{c|c} \beta \begin{array}{c|c} 0,0512 & 1 \ 1 \\ \hline 0,1249 & 2 \ 1 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0,1249 & 2 \ 1 \\ \hline 0,0512 & 1 \ 1 \end{array} \end{array} \right. \\
\begin{array}{c} 2 \left\{ \begin{array}{c|c} \alpha \begin{array}{c|c} 0,0737 & 2 \ 1 \\ \hline 0,0512 & 3 \ 2 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0,0512 & 5 \ 3 \\ \hline 0,0225 & 2 \ 1 \end{array} \end{array} \right. \\
\begin{array}{c} 2 \left\{ \begin{array}{c|c} \alpha \begin{array}{c|c} 0,0287 & 5 \ 3 \\ \hline 0,0225 & 7 \ 4 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0,0225 & 12 \ 7 \\ \hline 0,0062 & 5 \ 3 \end{array} \end{array} \right. \\
\begin{array}{c} 3 \left\{ \begin{array}{c|c} \alpha \begin{array}{c|c} 0,0163 & 12 \ 7 \\ \hline 0,0062 & 17 \ 10 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0,0062 & 12 \ 7 \\ \hline 0,0039 & 12 \ 7 \end{array} \end{array} \right. \\
\begin{array}{c} \beta \begin{array}{c|c} 0,0039 & 12 \ 7 \\ \hline 0,0062 & 41 \ 24 \end{array} \end{array}
\end{array}$$

Som løsning på problem 1 finner man da for eksempel

$$\frac{\log 2}{17} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{10}.$$

Det var den løsning Euler fant. Løsningen

$$\frac{\log 2}{41} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{24}$$

gir bedre approksimasjon, men også større nevner. Tallene 1, 1, 2, 2 og 3 som er tilføyet er overflødige, men er satt til for å vise sammenhengen med Eulers kjedebrøksutvikling. Tallene angir antall »etasjer« mellom to av de dobbelte vertikallstreker. Som en erstatning for kjedebrøksutviklingen kan man sette bokstavrekken

$$\beta \beta \alpha \beta \alpha \beta \alpha \alpha \beta \dots$$

Kjedebrøkens partialnevner 1, 1, 2, 2, 3 kan man da avlese ved å legge til en ener til antallet av α 'er som står foran hvert av bokstavene β .

La oss så se på problem 2, som kan behandles etter en tilsvarende

algoritme. La a , b og c være tre reelle positive tall slik at $a > b > c$. Jeg erstatter skjemaet

$$\begin{array}{c|ccc} a & x_1 & y_1 & z_1 \\ b & x_2 & y_2 & z_2 \\ c & x_3 & y_3 & z_3 \end{array}$$

med skjemaet

$$\begin{array}{c|ccc} a-b & x_1 & y_1 & z_1 \\ b & x_1+x_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ c & x_3 & y_3 & z_3 \end{array}$$

Tre tilfeller (α , β eller γ) kan da inntreffe ettersom $a-b$ er størst, mellomst eller minst i det siste skjemaet. Linjene omordnes, om nødvendig, slik at størrelsene $a-b$, b og c blir en synkende tallfølge. Prosessen kan så fortsette.

Ved vårt problem 2 er de tre gitte reelle tall

$$a = \log 2 = 0,3010, \quad b = \log \frac{3}{2} = 0,1761, \quad c = \log \frac{5}{4} = 0,0969.$$

Begynnelsen av algoritmen får da dette forløpet:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c|ccc} 0,3010 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1761 & 0 & 1 & 0 \\ 0,0969 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \beta \quad \begin{array}{c|ccc} 0,1249 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1761 & 1 & 1 & 0 \\ 0,0969 & 0 & 0 & 1 \end{array} \parallel \begin{array}{c|ccc} 0,1761 & 1 & 1 & 0 \\ 0,1249 & 1 & 0 & 0 \\ 0,0969 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \quad \begin{array}{c|ccc} 0,0512 & 1 & 1 & 0 \\ \gamma \quad 0,1249 & 2 & 1 & 0 \\ \quad 0,0969 & 0 & 0 & 1 \end{array} \parallel \begin{array}{c|ccc} 0,1249 & 2 & 1 & 0 \\ 0,0969 & 0 & 0 & 1 \\ 0,0512 & 1 & 1 & 0 \end{array} \\ \quad \quad \begin{array}{c|ccc} 0,0280 & 2 & 1 & 0 \\ \gamma \quad 0,0969 & 2 & 1 & 1 \\ \quad 0,0512 & 1 & 1 & 0 \end{array} \parallel \begin{array}{c|ccc} 0,0969 & 2 & 1 & 1 \\ 0,0512 & 1 & 1 & 0 \\ 0,0280 & 2 & 1 & 0 \end{array} \\ \quad \quad \quad \begin{array}{c|ccc} 0,0457 & 2 & 1 & 1 \\ \beta \quad 0,0512 & 3 & 2 & 1 \\ \quad 0,0280 & 2 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

Hvis regnestykket fortsettes, får man etterhvert bokstavrekken

$$\beta\gamma\gamma\beta\gamma\beta\beta\beta\gamma\gamma\beta\gamma \dots,$$

og for størrelsene x , y og z talltriplene

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2, 1, 1), (3, 2, 1), (5, 3, 2), (7, 4, 2), (12, 7, 4), (19, 11, 6), \\ (31, 18, 10), (34, 20, 11), (53, 31, 17), (87, 51, 28), \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Som en løsning på problem 2 får man da for eksempel

$$\frac{\log 2}{31} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{18} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{10},$$

eller utregnet

$$971 \cdot 10^{-5} \approx 978 \cdot 10^{-5} \approx 969 \cdot 10^{-5}.$$

Metoden lar seg uten videre overføre til fire tall. Skjemaet

a	x_1	y_1	z_1	u_1
b	x_2	y_2	z_2	u_2
c	x_3	y_3	z_3	u_3
d	x_4	y_4	z_4	u_4

overføres da til skjemaet

$a-b$	x_1	y_1	z_1	u_1
b	x_1+x_2	y_1+y_2	z_1+z_2	u_1+u_2
c	x_3	y_3	z_3	u_3
d	x_4	y_4	z_4	u_4

hvoretter linjene om nødvendig omordnes slik at tallfølgen $a-b, b, c, d$ blir synkende.

I problem 3 er de gitte reelle tall

$$a = \log 2 = 0,3010, \quad b = \log \frac{7}{4} = 0,2430, \quad c = \log \frac{6}{4} = 0,1761, \\ d = \log \frac{5}{4} = 0,0969.$$

Begynnelsesverdiene for (x, y, z, u) er da

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0) \quad \text{og} \quad (0, 0, 0, 1).$$

Algoritmen gir etterhvert følgende kvadrupler for x, y, z og u :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2, 2, 2, 1), (3, 3, 2, 1), (4, 3, 2, 1), (5, 4, 3, 2), (9, 7, 5, 3), \\ (13, 10, 7, 4), (15, 12, 9, 5), (18, 15, 11, 6), (31, 25, 18, 10), \\ (35, 28, 20, 11), (53, 43, 31, 17), (68, 55, 40, 22), \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Vi får for eksempel følgende løsning på problem 3:

$$\frac{\log 2}{31} \approx \frac{\log \frac{7}{4}}{25} \approx \frac{\log \frac{6}{4}}{18} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{10},$$

eller

$$9711 \cdot 10^{-6} \approx 9722 \cdot 10^{-6} \approx 9782 \cdot 10^{-6} \approx 9691 \cdot 10^{-6}.$$

La oss til slutt studere problem 4. Her er begynnelsesverdiene

$$\log 2 = 0,30103, \quad \log \frac{14}{8} = 0,24304, \quad \log \frac{12}{8} = 0,17609, \\ \log \frac{11}{8} = 0,13830, \quad \log \frac{10}{8} = 0,09691.$$

Algoritmen gir her følgende sett av løsninger (x, y, z, u, v) :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4, 3, 2, 2, 1), (5, 4, 3, 2, 1), (6, 5, 4, 3, 2), (9, 7, 5, 4, 3), \\ (15, 12, 9, 7, 5), (17, 14, 10, 8, 6), (22, 18, 13, 10, 7), \\ (37, 30, 22, 17, 12), (41, 33, 24, 19, 13), (63, 51, 37, 29, 20), \\ (72, 58, 42, 33, 23), \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Som løsning på problem 4 får vi da for eksempel

$$\frac{\log 2}{41} \approx \frac{\log \frac{14}{8}}{33} \approx \frac{\log \frac{12}{8}}{24} \approx \frac{\log \frac{11}{8}}{19} \approx \frac{\log \frac{10}{8}}{13},$$

eller utregnet

$$7341 \cdot 10^{-6} \approx 7365 \cdot 10^{-6} \approx 7337 \cdot 10^{-6} \approx 7279 \cdot 10^{-6} \approx 7454 \cdot 10^{-6}.$$

Approximasjonen blir bedre, men nevnerne større, ved løsningen

$$\frac{\log 2}{72} \approx \frac{\log \frac{14}{8}}{58} \approx \frac{\log \frac{12}{8}}{42} \approx \frac{\log \frac{11}{8}}{33} \approx \frac{\log \frac{10}{8}}{23},$$

eller utregnet

$$4181 \cdot 10^{-6} \approx 4190 \cdot 10^{-6} \approx 4193 \cdot 10^{-6} \approx 4191 \cdot 10^{-6} \approx 4213 \cdot 10^{-6}.$$

Avvikelsene fra middelveiden av disse fem tallene beløper seg til mindre enn en halv prosent av middelveiden for samtlige fem tall.

Til tross for at det teoretiske grunnlag for disse Euklidske algoritmer ennå er utilstrekkelig behandlet, viser det seg altså ved disse eksempler at man med fordel kan bruke algoritmene til å løse slike musikkteoretiske problemer.

Jeg tilføyer at den algoritme jeg har benyttet ikke er den eneste mulige. Ved problem 2 hvor det var oppgitt tre tall a , b og c , hvor $a > b > c$, erstattet jeg disse tre med $a-b$, b og c . Man kan også velge en annen algoritme, idet man erstatter a , b og c med $a-c$, b og c . Bruker man begge algoritmer *samtidig* får man de to algoritmer

$$\begin{array}{cc} a & \\ b & \\ c & \\ \hline a-b & a-c \\ b & b \\ c & c \end{array}$$

Begge de to nye talltrippler kan da, etter at leddene er omordnet så de blir synkende, behandles på samme vis som det opprinnelige talltrippel. Man får da den *forgrenete* kjedebrøk som Pipping har studert i en rekke artikler [11]. Forgreningen gjør at algoritmen blir mindre brukbar i mange tilfeller. Men når det gjelder disse musikkteoretiske problemer vil muligens regningene bli overkommelige.

Man kan også, som E. Selmer har gjort det, bare erstatte a , b og c med $a-c$, b og c . Han behandler dette nærmere i det etterfølgende arbeid [12].

LITTERATUR

- [1] I. M. BARBOUR: *Music and continued fractions*. Amer. Math. Monthly 55 (1948), pp. 545–551.
- [2] V. BRUN: *En generalisation av kjedebrøken* (avec un résumé en français) I og II. Videnskabselskapets skrifter, Mat.-Nat. Klasse, Oslo 1919 Nr. 6, og 1920 Nr. 6.
- [3] V. BRUN: *Music and ternary continued fractions*. Kgl. norske vid. selsk. Forh., Bd. 23 (1950), Nr. 10.
- [4] V. BRUN: *Algorithmes Euclidiens pour trois et quatre nombres*. XIII Congr. Math. Scand. (1957), pp. 45–64.
- [5] V. BRUN: *Mehrdimensionale Algorithmen, welche die Eulersche Kettenbruchentwicklung der Zahl e verallgemeinern*. Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, pp. 87–100. Akademie-Verlag, Berlin 1959.
- [6] M. DAVID: *Contribution à l'étude algorithmique des approximations rationnelles simultanées de deux irrationnels*. Publ. Sci. Univ. Alger, Ser. A, Tome III (1956).
- [7] EUKLID: *Elementer*. Bok VII, 2 og Bok X, 3.
- [8] L. EULER: *Opera omnia*. Series III, Vol. I, p. 197.
- [9] A. D. FOKKER: *Les mathématiques et la musique*. Archives du musée Teyler. M. Nijhoff, La Hage 1947, pp. 21–31.
- [10] O. PERRON: *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenalgorithmus*. Math. Ann. 64 (1907), pp. 1–76.
- [11] N. PIPPING: *Approximation zweier reellen Zahlen durch rationale Zahlen mit gemeinsamen Nenner*. Acta Acad. Aboensis, Mathematica et Physica XXI, 1, Åbo 1957.
- [12] E. S. SELMER: *Om flerdimensjonal kjedebrøk*. NMT 9 (1961), pp. 37–43.

OM FLERDIMENSJONAL KJEDEBRØK

ERNST S. SELMER

I tilknytning til Viggo Bruns undersøkelser over generalisert kjedebrøk arbeidet jeg for noen år siden med det samme problem. Da jeg som redaksjonssekretær mottok Bruns ovenstående artikkel [1] om dette emne, var det naturlig for meg å prøve min egen algoritme på hans musikk-teoretiske problemer. I det følgende skal jeg gjøre rede for resultatene av disse regninger, samt for noen andre resultater som jeg tidligere har kommet til. De nødvendige litteraturhenvisninger finnes i Bruns artikkel.

Den umiddelbare generalisasjon av kjedebrøks-algoritmen til tre eller flere tall er Jacobis divisjonsalgoritme. Denne algoritme kan imidlertid, p. g. a. sin raske konvergens, »hoppe over« en rekke brukbare approksimasjoner. En slik ulempe gjør seg mindre gjeldende ved Bruns subtraksjonsalgoritme, som konvergerer meget langsommere.

Hvis man følger dette prinsipp til sin ytterste konsekvens, vil det være logisk å innføre en algoritme som *konvergerer så langsomt som mulig*. Dette må bli en subtraksjonsalgoritme hvor man danner den størst mulige differens. Istedenfor som Brun å trekke det neststørste tall fra det største, vil jeg derfor *erstatte det største tall med differensen mellom det største og det minste*, og så omordne det fremkomne tallsett i størrelsesorden. Denne omordning vil jeg, som ved Bruns algoritme, kalle en α -, β - eller γ -operasjon, ettersom den nye differens er størst, mellomst eller minst.

En forenkling ved min algoritme trer straks frem: Innledningsvis kan vi selvsagt få noen α -operasjoner, men såsnart det opptrer en β eller γ , vil algoritmen *fortsette med bare β - og γ -operasjoner*. La oss nemlig anta at vi på et visst trinn av algoritmen opererer med restene a_n , b_n og c_n , hvor $a_n > b_n > c_n$. Vi skal erstatte a_n med $a_n - c_n$ og omordne etter størrelsen. Ved en β -operasjon får vi

$$a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = a_n - c_n, \quad c_{n+1} = c_n,$$

og skal neste gang erstatte a_{n+1} med $a_{n+1} - c_{n+1}$. Men

$$a_{n+1} - c_{n+1} = b_n - c_n < a_n - c_n = b_{n+1}$$

(da $b_n < a_n$), så operasjonen α er utelukket. Og på samme måte ser man at dette også gjelder etter en γ -operasjon.

Ved Bruns algoritme kan alle operasjoner α , β og γ opptre i vilkårlige kombinasjoner. Ved visse anvendelser — særlig i forbindelse med *periodiske* utviklinger, som omtales nedenfor — byr min algoritme med bare *to* operasjoner på systematiske fordeler. (Ved *lineær avhengighet* mellom utgangstallene er imidlertid Bruns algoritme overlegen.)

Som ved Bruns algoritme bygger jeg opp en slags «*konvergentmatrise*» (hos Brun betegnet med bokstavene x , y og z). For å gi en nærmere begrunnelse av de inngående operasjoner skal jeg imidlertid også innføre en «*koeffisientmatrise*», for derved å vise at rekkene i konvergentmatrisen gir tilnærmelser til de gitte utgangsforhold. Jeg illustrerer fremgangsmåten ved min algoritme, men prinsippet kan anvendes på enhver «*N*-dimensjonal kjedebroks-algoritme», hva enten denne bygger på divisjon eller subtraksjon. Spesielt kan metoden, ved passende rekke-ombyttinger, umiddelbart overføres til Bruns algoritme.

La utgangstallene være de reelle, positive tall $a_0 = a$, $b_0 = b$ og $c_0 = c$, med $a > b > c$. Etter n skritt kaller vi restene (fortsatt ordnet etter størrelsen) for a_n , b_n og c_n . Vi tilordner til hvert trinn en konvergentmatrise X_n og en koeffisientmatrise E_n etter skjemaet

$$(1) \quad \begin{array}{c|ccc|ccc} a_n & x_n & y_n & z_n & \xi_n & \eta_n & \zeta_n \\ b_n & x'_n & y'_n & z'_n & \xi'_n & \eta'_n & \zeta'_n \\ c_n & x''_n & y''_n & z''_n & \xi''_n & \eta''_n & \zeta''_n \end{array}$$

Her skal E_n angi hvorledes a_n , b_n og c_n er uttrykt ved de gitte tall a , b og c :

$$(2) \quad \begin{aligned} a_n &= a\xi_n + b\eta_n + c\zeta_n \\ b_n &= a\xi'_n + b\eta'_n + c\zeta'_n \\ c_n &= a\xi''_n + b\eta''_n + c\zeta''_n. \end{aligned}$$

Ved utgangspunktet må derfor E_0 være *enhetsmatrisen*, og ved dannelsen av $a_n - c_n$ må koeffisientmatrisen modifiseres slik:

$$(3) \quad \begin{array}{c|ccc|ccc} a_n - c_n & x_n & y_n & z_n & \xi_n - \xi''_n & \eta_n - \eta''_n & \zeta_n - \zeta''_n \\ b_n & x'_n & y'_n & z'_n & \xi'_n & \eta'_n & \zeta'_n \\ c_n & x_n + x''_n & y_n + y''_n & z_n + z''_n & \xi''_n & \eta''_n & \zeta''_n \end{array}$$

Samtidig er konvergentmatrisen modifisert i analogi med fremgangsmåten ved Bruns algoritme. Ved å omordne rekkene så tallene $a_n - c_n$, b_n og c_n kommer i størrelsesorden, fremkommer samtidig de nye matriser X_{n+1} og E_{n+1} .

Vi lar også utgangsmatrisen X_0 være enhetsmatrisen, slik at spesielt

produktsummen av korresponderende rekker i X_0 og E_0 er 1, av ikke-korresponderende rekker 0. Da har også to vilkårlige sammenhørende matriser X_n og E_n denne egenskap, for hvis den gjelder i skjema (1), ser vi lett at den også gjelder i (3). Hver av de heltallige matriser X_n og E_n er altså den *transponerte inverse* av den annen.

Utgangsmatrisene X_0 og E_0 har determinanten 1. Da rekkeoperasjoner ikke endrer verdien av en determinant, og da rekkeombyttinger β eller γ (de *samme* for X og E) bare kan endre tegnet, må vi for determinantene ha

$$(4) \quad X_n = E_n = \pm 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ved gjentatt anvendelse av subtraksjonsalgoritmen vil restene a_n , b_n og c_n bli stadig mindre. Da determinanten $E_n \neq 0$, kan vi ikke erstatte samtlige venstresider i (2) med 0. Utelukker vi imidlertid en av disse ligninger, f. eks. den første, kan vi si at a , b og c må være tilnærmet proporsjonale med løsningene av de homogene ligninger

$$x\xi'_n + y\eta'_n + z\zeta'_n = 0, \quad x\xi''_n + y\eta''_n + z\zeta''_n = 0.$$

Disse har imidlertid løsningen

$$x:y:z = x_n:y_n:z_n,$$

og på samme måte får vi frem de øvrige rekker i konvergentmatrisen ved å utelukke en av de andre ligninger i (2). Dermed har vi begrunnet at *rekken i konvergentmatrisen må ventes å gi gode tilnærmelser til de gitte forholdstall $a:b:c$.*

Som også nevnt av Brun, er spørsmålet om *graden av approksimasjon* meget vanskeligere å avgjøre. Dette problem er langt fra fullstendig løst.

Jeg har brukt min algoritme på det samme tallsett som anvendt av Brun i hans problem 2:

$$a = \log 2 = 0,3010, \quad b = \log \frac{3}{2} = 0,1761, \quad c = \log \frac{5}{4} = 0,0969.$$

Man får følgende serie av operasjoner:

$$\alpha\beta\gamma\gamma\beta\beta\beta\gamma\gamma\gamma\beta\gamma\gamma\gamma\beta\gamma\gamma\beta \dots$$

De konvergent-tripler hvor alle tall er > 0 blir

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2, 1, 1), (3, 1, 1), (4, 2, 1), (6, 3, 2), (7, 4, 2), (3, 2, 1), \\ (9, 5, 3), (10, 6, 3), (19, 11, 6), (12, 7, 4), (22, 13, 7), \\ (31, 18, 10), (34, 20, 11), (65, 38, 21), (53, 31, 17), (87, 51, 28), \text{ etc.} \end{array} \right.$$

De understrekede tripler forekommer også ved Bruns algoritme. Jeg får ikke med alle hans konvergener, idet triplet (5, 3, 2) mangler oven-

for. På den annen side konvergerer min algoritme langsommere, så jeg får med en rekke tripler som ikke dukker opp hos Brun. Vi legger også merke til at mine tripler, i motsetning til Bruns, ikke fremkommer i monotont voksende rekkefølge.

Uten å komme inn på et mål for den oppnådde nøyaktighet, kan vi si at approksimasjonen bør være bedre jo større tallene i triplet er. En undersøkelse ut fra denne forutsetning viser at de konvergener som forekommer hos meg men ikke hos Brun, er omtrent like gode som våre felles konvergener. De siste gir kanskje i gjennomsnitt noe bedre tilnærmelser, hvilket også er å vente ved en raskere konvergerende algoritme. Vi har det samme forhold ved vanlig kjedebøk, hvor de ordinære tilnærmelsesbrøker er meget nøyaktigere enn de »innskutte« brøker som kommer i tillegg ved Euklids subtraksjonsalgoritme for to tall (smlgn. Bruns artikkel).

Det er klart at min algoritme også kan brukes for *flere enn tre* tall. Derved fremkommer nye konvergener i Bruns problemer 3 og 4, men det har liten hensikt å komme inn på tallregningene her. Vi kan bare nevne at for fire tall kan vi også ha en *»mellom-algoritme«*, hvor det nestminste tall trekkes fra det største. I høyere dimensjoner får vi flere slike mellom-algoritmer.

Hvis vi anvender min algoritme på N tall, ved å trekke det minste tall fra det største, kan det tenkes at den fremkomne differens kommer på 1., 2., ..., N -te plass etter størrelsen. De tilsvarende operasjoner vil vi betegne med $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Som for $N=3$ er det da lett å vise at *etter et visst antall skritt forekommer bare operasjonene α_{N-1} og α_N* . Ved Bruns algoritme kan alle operasjoner $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ opptre i vilkårlige kombinasjoner.

Da jeg innførte min subtraksjonsalgoritme, var det ikke for å bestemme tilnærmelser til gitte tall, men for å undersøke forholdene ved *periodiske utviklinger*. For vanlig kjedebøk er det velkjent at en periodisk utvikling svarer til en kvadratisk irrasjonalitet $A + B\sqrt{D}$ ($D > 0$), og at omvendt et slikt uttrykk gir en periodisk kjedebøk. I flere dimensjoner er det fortsatt lett å vise at periodisitet gir en algebraisk irrasjonalitet, men det omvendte problem er her ennå uløst.

Vi skal illustrere problemet for $N=3$, og antar at vi har en eller annen kjedebøks-algoritme, f. eks. Bruns eller min. Utviklingen av $a:b:c$ vil være entydig bestemt hvis vi kjenner den fullstendige følge av symboler α, β og γ . *Periodisitet* opptrer hvis og bare hvis vi får samme forhold mellom restene på to forskjellige trinn av utviklingen:

$$a_m : b_m : c_m = a_{m+n} : b_{m+n} : c_{m+n}.$$

Hvis n er det minste naturlige tall for hvilket dette er oppfylt, blir periodelengden n .

For $m=0$ har vi en rent periodisk utvikling ut fra de gitte tall a , b og c . Tar vi imidlertid (for $m>0$) $a_m=a'$, $b_m=b'$ og $c_m=c'$ til *utgangspunkt* for utviklingen, blir denne rent periodisk med

$$a' : b' : c' = a'_n : b'_n : c'_n,$$

eller

$$a'_n = \lambda a', \quad b'_n = \lambda b', \quad c'_n = \lambda c',$$

hvor λ er *periodeforholdet*. Ved innsetning i (2) (med merkede a , b og c) blir derfor

$$\begin{aligned} a'(\xi_n - \lambda) + b'\eta_n + c'\zeta_n &= 0 \\ a'\xi'_n + b'(\eta'_n - \lambda) + c'\zeta'_n &= 0 \\ a'\xi''_n + b'\eta''_n + c'(\zeta''_n - \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

som viser at λ er en *egenverdi* for *koeffisientmatrisen* Ξ_n :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \xi_n - \lambda & \eta_n & \zeta_n \\ \xi'_n & \eta'_n - \lambda & \zeta'_n \\ \xi''_n & \eta''_n & \zeta''_n - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Periodeforholdet λ er altså rot i en tredjegradslikning. Hvis denne er irreduktibel, blir λ en *kubisk irrasjonalitet*.

Ved utregning og med benyttelse av (4) får ligningen (6) etter tegnskifte formen

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda \mp 1 = 0,$$

med visse heltallige koeffisienter A og B . Da koeffisienten for høyeste ledd er 1, blir λ et såkalt *helt algebraisk tall*. Kalles ligningens øvrige røtter for λ' og λ'' , så viser konstantleddet at

$$\lambda\lambda'\lambda'' = \pm 1.$$

Hele algebraiske tall som oppfyller denne relasjon kalles *enheter*, og periodeforholdet λ er derfor en slik enhet.

Vi skal her nøye oss med denne meget korte skisse av teorien. Den kan utvikles videre i forskjellige retninger. To typiske problemstillinger er f. eks. gitt ved:

1° En systematisk undersøkelse av periodeforholdet for alle de korteste perioder. Da min algoritme bare gir operasjonene β og γ , er det her meget lettere å holde rede på kombinasjonsmulighetene enn ved Bruns algoritme, hvor også α opptrer. Selv for korte perioder blir slike undersøkelser nokså omfattende (men regningene skulle ligge vel til rette for anvendelse av elektronisk regnemaskin).

2° La tallene a , b og c tilhøre en og samme kubiske tallring (eller tallkropp). Undersøk om kjedebrøken for $a:b:c$ blir periodisk, slik at vi finner en enhet i tallringen. — Problemstillingen har antagelig bare rent teoretisk interesse. For det første er det slett ikke sikkert at man finner noen periodisitet, og selv om man gjør det, kan den resulterende enhet λ bestemmes langt raskere ved andre metoder.

Et enkelt eksempel er den rent-kubiske tallring $R(\sqrt[3]{D})$, hvor D er et naturlig tall. Tallene i ringen er gitt ved

$$p + q\sqrt[3]{D} + r\sqrt[3]{D^2},$$

med hele rasjonale koeffisienter p , q og r . Man kan vise at det finnes en eneste *grunnenhet* ε_0 , slik at alle enheter er uttrykt ved

$$\varepsilon = \pm \varepsilon_0^t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En nærliggende fremgangsmåte for å bestemme en enhet er å anvende en kjedebrøks-algoritme på utgangstallene

$$(7) \quad \sqrt[3]{D^2} : \sqrt[3]{D} : 1.$$

Brun har gjennomført dette for sin algoritme med $D=2$, og fant at etter en operasjon γ fulgte en periodisk utvikling med periodelengde 18:

$$\gamma \underbrace{\gamma \alpha \alpha \gamma \beta \alpha \alpha \beta \gamma \alpha \alpha \gamma \beta \gamma \gamma \gamma \gamma \beta \gamma \alpha \alpha \gamma}_{\text{periode}} \dots$$

Det viser seg at periodeforholdet er 5-te *potens* av grunnenheten.

Jeg har forsøkt Bruns metode for $D=3$, men klarte ikke å finne noen periodisitet. Ulempen ved slike regninger er at restene etterhvert blir unøyaktige p. g. a. avrundingsfeil. Dette skjedde etter ca. 110 skritt, til tross for at jeg brukte 24 desimaler i utgangsverdiene. (Hele regningen gjennomføres selvsagt ikke med denne nøyaktighet. I begynnelsen brukte jeg 6 desimaler; fra et visst punkt gikk jeg over til 12, så til 18 osv. Ved hver overgang kan de nøyaktigere rester beregnes som lineærkombinasjoner ut fra koeffisientmatrisen.)

Ved min algoritme kan vi imidlertid håpe på enklere perioder, p. g. a. den langsommere konvergens. Derved øker nemlig sannsynligheten for at vi ikke skal «hoppe over» konvergent-tripler med forhold som har opptrådt tidligere. Dette bekreftes også delvis av regningene.

For $D=2$, 3 og 4 gir min metode, anvendt på tallene (7), rentperiodiske utviklinger som alle har *grunnenheten* som periodeforhold:

$$\begin{array}{lll}
 D = 2, & 5 \text{ skritt, periode } & \gamma\beta\gamma\gamma\beta \\
 D = 3, & 10 \quad \text{»} \quad , \quad \text{»} & \beta\gamma\beta\beta\gamma\beta\beta\gamma\gamma\beta \\
 D = 4, & 11 \quad \text{»} \quad , \quad \text{»} & \beta\gamma\beta\gamma\beta\gamma\beta\beta\gamma\gamma\beta.
 \end{array}$$

Med stor optimisme gikk jeg så løs på $D=5$. Her begynner utviklingen med en α -operasjon (som ikke kan gå inn i perioden); vi erstatter altså tallene (7) med

$$(\sqrt[3]{25}-1):\sqrt[3]{5}:1.$$

For disse utgangstall fant jeg faktisk en rentperiodisk utvikling, men den er på 109 skritt, og periodeforholdet er 5-te potens av grunnenheten.

For $D=6$ og $D=7$ klarte jeg ikke å finne noen periodisitet, til tross for 24 desimaler i utgangsverdiene.

Utgangstallene (7) er selvsagt de mest nærliggende ved den rentkubiske tallring. Men det må presiseres at vilkårlige lineærkombinasjoner av disse tall også kan brukes som utgangstall, som godt kan tenkes å gi enkle perioder selv om (7) ikke gjør det. Ved valget av mulige lineærkombinasjoner har man imidlertid ingen holdepunkter.

LITTERATUR

- [1] V. BRUN: *Musikk og Euklidske algoritmer*. NMT 9 (1961), s. 29–36.

OM REKURSIONSFORMLER FÖR BERNOULLIS TAL

HANS RIESEL

Nedan härledas vissa rekursionsformler för Bernoullis tal med »symbolisk» metod. Formlerna äro sedan länge kända; de finnas i Ramanujans förstlingsarbete [2]. Vidare givas de välbekanta formlerna för potenssummorna uttryckta i Bernoullis polynom samt analoga formler innehållande Eulers tal.

Definiera som vanligt Bernoullis tal genom de symboliska rekursionsformlerna

$$(1) \quad (B+1)^m = B^m, \quad m = 2, 3, \dots,$$

där B^i ersättes med B_i efter utveckling av $(B+1)^m$. Vidare sättes $B_0 = 1$. Då blir (se [1], sid. 17):

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, \\ B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, \dots$$

Det kan vara på sin plats att påpeka, att följande operation är tillåten för system av rekursionsformler av typen (1): Bildning av godtyckliga lineärkombinationer av relationerna i systemet samt reduktion av formlerna i symbolisk form. Efteråt sättes $B^i = B_i$.

Innan vi gå vidare, vilja vi undersöka (1) för fallen $m=0$ och $m=1$. Här ger $m=0$ en riktig formel, nämligen $(B+1)^0 = B^0$ eller $1 = 1 (=B_0)$. Däremot är $(B+1)^1 \neq B^1$.

Låt x vara ett godtyckligt komplext tal. Ur (1) följer

$$\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (B+1)^i x^{k-i} = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} B^i x^{k-i}$$

eller

$$(B+1+x)^k - k(B+1)x^{k-1} = (B+x)^k - kBx^{k-1}$$

eller

$$(2) \quad (B+1+x)^k - (B+x)^k = kx^{k-1}.$$

Uttrycket $(B+x)^n$ är som bekant Bernoulli-polynomet $B_n(x)$ framställt i symbolisk form. Genom att summera (2) för $x=0, 1, 2, \dots, n-1$ erhålles

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^{k-1} = \frac{1}{k} [(B+n)^k - B^k] = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i n^{k-i},$$

vilket äro de bekanta formlerna för potenssummorna.

Genom att välja olika speciella värden för x i (2) kan man härleda olika samband mellan Bernoullis tal. Den enklaste av dessa egenskaper är, att

$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0.$$

Detta kan visas på följande sätt: $x = -\frac{1}{2}$ ger i (2)

$$(3) \quad (B + \tfrac{1}{2})^k - (B - \tfrac{1}{2})^k = k(-\tfrac{1}{2})^{k-1}.$$

I dessa relationer ingå endast vartannat Bernoulli-tal; i utskrivnen form fås

$$\frac{1}{2} \binom{k}{1} B_{k-1} + \frac{1}{2^3} \binom{k}{3} B_{k-3} + \frac{1}{2^5} \binom{k}{5} B_{k-5} + \dots = -k(-\tfrac{1}{2})^k.$$

Om k är jämnt kommer vänstra ledet att sluta med termen

$$\frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{1} B_1 = -k(-\tfrac{1}{2})^k,$$

eftersom $B_1 = -\frac{1}{2}$. Denna term kommer därför precis att upphäva högra ledet; kvar står en homogen relation mellan $B_3, B_5, B_7, \dots, B_{k-1}$, där $k=6, 8, 10, \dots$. Eftersom $B_3=0$ följer att $B_i=0$ för $i=5, 7, 9, \dots$. Detta faktum kan i symbolisk form tecknas

$$(B-x)^k - (B+x)^k = kx^{k-1}$$

för alla komplexa x , om k är jämnt.

Andra samband, innehållande vartannat Bernoulli-tal får man genom att i (2) sätta $x=0$ och $x=-1$ samt addera:

$$(4) \quad (B+1)^k - (B-1)^k = k(-1)^{k-1}.$$

Genom att i stället subtrahera får man

$$(5) \quad (B+1)^k + (B-1)^k - 2B^k = k(-1)^k.$$

Relationerna (3), (4) och (5) äro desamma som (2), (4) och (3) hos Ramanujan [2]. Givetvis kan man få ytterligare samband av liknande slag genom att addera (2) för ett antal konsekutiva heltalsvärden på x , nämligen följande:

$$(B+r)^k - (B-r)^k = k \sum_{m=-r}^{r-1} m^{k-1}.$$

Om k är jämnt kan högra ledet förenklas till $-kr^{k-1}$.

Relationer innehållande vart fjärde Bernoulli-tal kunna fås genom att i (2) sätta $x = \frac{i-1}{2}$:

$$\left(B + \frac{i+1}{2}\right)^k - \left(B + \frac{i-1}{2}\right)^k = k \left(\frac{i-1}{2}\right)^{k-1}$$

eller

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} B_{k-m} \left[\left(\frac{i+1}{2}\right)^m - \left(\frac{i-1}{2}\right)^m \right] = k \left(\frac{i-1}{2}\right)^{k-1},$$

vilket kan skrivas

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} B_{k-m} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m e^{-\frac{\pi i m}{4}} [(-i)^m - 1] = k \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} e^{-\frac{\pi i (k-1)}{4}}.$$

Uttrycket $e^{-\frac{\pi i m}{4}} [(-i)^m - 1]$ antar för $m \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ resp. 7 (mod 8) värdena 0, $-\sqrt{2}$, $2i$, $\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$, $-2i$ och $-\sqrt{2}$. Tar man imaginära delen får man därför

$$\binom{k}{2} B_{k-2} - \frac{1}{2^2} \binom{k}{6} B_{k-6} + \frac{1}{2^4} \binom{k}{10} B_{k-10} - \dots = -k \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} \sin \frac{\pi(k-1)}{4}.$$

Denna och liknande relationer, som äro intressanta endast för jämna k , finnas också hos Ramanujan [2].

Vidare kan man på liknande sätt ganska enkelt härleda relationer innehållande endast vart sjätte Bernoulli-tal. Sättes $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ i (2), så fås

$$\left(B + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^k - \left(B + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^k = k \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}$$

eller

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} B_{k-m} \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m - \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m \right] = k \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1},$$

vilket kan skrivas

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} B_{k-m} e^{\frac{2\pi i m}{3}} \left[\left(-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^m - 1 \right] = k e^{\frac{2\pi i (k-1)}{3}}.$$

Uttrycket $e^{\frac{2\pi i m}{3}} \left[\left(-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^m - 1 \right]$ antar för $m \equiv 0, 1, 2, 3, 4$ och 5 (mod 6) värdena 0, 1, $i\sqrt{3}$, -2 , $-i\sqrt{3}$ och 1 resp. Tar man reella och imaginära delarna, får man

$$(6) \quad \binom{k}{1} B_{k-1} - 2 \binom{k}{3} B_{k-3} + \binom{k}{5} B_{k-5} + \binom{k}{7} B_{k-7} - \dots = k \cos \frac{2\pi(k-1)}{3}$$

och

$$\binom{k}{2} B_{k-2} - \binom{k}{4} B_{k-4} + \binom{k}{8} B_{k-8} - \binom{k}{10} B_{k-10} + \dots = \frac{k}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi(k-1)}{3}.$$

Genom att kombinera (6) med (4) får man

$$\binom{k}{3} B_{k-3} + \binom{k}{9} B_{k-9} + \binom{k}{15} B_{k-15} + \dots = \frac{k}{6} (-1)^{k-1} - \frac{k}{3} \cos \frac{2\pi(k-1)}{3},$$

som återfinnes som formel (12) hos Ramanujan [2]. Genom att arbeta med enhetsrötter av högre ordning kan man på analogt sätt härleda formler innehållande precis vart p :te Bernoulli-tal.

I anslutning till dessa formler av Ramanujan kan det ha sitt intresse att påpeka, att hans teorem 14 i [2] är fel. Där påstås nämligen, att täljaren i $\frac{B_n}{n}$ är primtal, men för $B_{20} = -\frac{174611}{330}$ gäller $174611 = 283 \cdot 617$, vilket visar, att satsen är fel. Även sats 18, som är en enkel följsats av sats 14 samt de förtydligande exemplen i [2] till dessa satser äro därför felaktiga.

Liksom man på ett enkelt sätt kan härleda potenssummorna $\sum_{m=1}^{n-1} m^k$ uttryckta i Bernoullis polynom, kan man uttrycka $\sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m (2m+1)^k$ med motsvarande Eulers polynom.

Definiera härför som vanligt Eulers tal genom rekursionsformlerna

$$(7) \quad (E+1)^m + (E-1)^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

där E^i sättes $= E_i$ efter utveckling. Vidare sättes $E_0 = 1$. Då blir (se [1], sid. 23):

$$E_0 = 1, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = -1, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = 5,$$

$$E_5 = 0, \quad E_6 = -61, \quad E_7 = 0, \quad E_8 = 1385, \dots$$

För $m=0$ gäller ej (7), utan $(E+1)^0 + (E-1)^0 = 2$. Med samma metod som tidigare fås, om x är ett godtyckligt komplext tal:

$$\sum_{i \neq 0} \binom{k}{i} (E+1)^i x^{k-i} + \sum_{i \neq 0} \binom{k}{i} (E-1)^i x^{k-i} = 0$$

eller

$$(8) \quad (E+1+x)^k + (E-1+x)^k = 2x^k.$$

Genom att i (8) successivt sätta $x = 1, 3, 5, \dots, 4n-1$ samt omväxlande addera och subtrahera de erhållna relationerna, får man

$$E^k - (E + 4n)^k = 2[1^k - 3^k + 5^k - \dots - (4n-1)^k]$$

eller

$$\sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m (2m+1)^k = -\frac{1}{2} [(E+4n)^k - E^k] = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} E_i (4n)^{k-i},$$

vilket är den sökta formeln.

Liksom fallet är med Bernoullis tal, äro även Euler-talen av udda index $= 0$, dock börjar detta redan med E_1 . Påståendet följer direkt av att definitionsformlerna (7) endast innehålla vartannat Euler-tal och äro homogena, om m är udda. Detta medför för övrigt, att relationerna äro intressanta endast för jämna m -värden. Analogt med de härledda formelnerna för Bernoullis tal kan man få motsvarigheter för Eulers tal. Sätt $x = i$ i (8):

$$(E + 1 + i)^k + (E - 1 + i)^k = 2i^k.$$

Tar man reella delen, får man

$$E_k - 2^2 \binom{k}{4} E_{k-4} + 2^4 \binom{k}{8} E_{k-8} - \dots = (-1)^{k/2}$$

(om k förutsättes vara jämnt).

Sättes $x = i\sqrt{3}$ i (8), blir

$$(E + 1 + i\sqrt{3})^k + (E - 1 + i\sqrt{3})^k = 2(i\sqrt{3})^k,$$

eller, sedan reella delarna tagits:

$$(9) \quad 2 \cdot 2^0 \binom{k}{0} E_k - 2^2 \binom{k}{2} E_{k-2} + 2^4 \binom{k}{4} E_{k-4} - 2^6 \binom{k}{6} E_{k-6} + \dots = 2(-3)^{k/2},$$

om k är jämnt. Genom att i (8) sätta $x = 1$ och addera (9), får man

$$E_k + 2^6 \binom{k}{6} E_{k-6} + 2^{12} \binom{k}{12} E_{k-12} + \dots = \frac{2(1 + (-3)^{k/2}) - E_k}{3}.$$

LITTERATUR

- [1] N. E. NØRLUND: *Differenzenrechnung*. København 1923.
- [2] S. RAMANUJAN: *Collected papers*, pp. 1-14. Cambridge 1927.

OM MATEMATISK LOGIK¹

TAGE GUTMANN MADSEN

I

Klassisk logik kender De alle noget til. Jeg skal blot til illustration anføre et enkelt slutningsmønster med et tilsvarende konkret eksempel:

intet M	er	P	ingen neger kan flyve
nogle S	er	M	nogle mennesker er negre
intet S er ikke P ,			nogle mennesker kan ikke flyve.

Den konkrete slutning får man frem, når M , P og S tillægges følgende betydning:

M : ting med *egenskab* at være neger, dvs. neger,

P : ting med *egenskab* at kunne flyve,

S : ting med *egenskab* at være menneske, dvs. menneske.

Den klassiske logik er grundlagt af Aristoteles (384–322 f. Kr.). 2000 år senere skriver Kant (1724–1804) i forordet til 2. udgave af *Kritik der reinen Vernunft*: »Merkwürdig ist noch an der Logik, daß sie auch bis jetzt (seit Aristoteles) keinen Schritt vorwärts hat tun können und also allem Anschein nach geschlossen und vollendet zu sein scheint.«

I virkeligheden rækker dog den klassiske logik ikke langt. Den afgørende mangel er, at den kun er en egenskabslogik; den behandler *egenskaber* ved en ting (at være neger, at kunne flyve, at være primtal), men ikke *relationer* mellem flere ting. Eksempelvis er kongruens en relation: der skal to figurer til, før man kan tale om kongruens. Nu bagefter kan man mene, det er forbløffende, at logikerne ikke var opmærksomme herpå. Det skyldes vel til dels, at sproget ikke har noget særligt udtryk for relationer. Prøv at læse op: $3 < 7$. Sætningen kommer til at lyde, som var talen om en egenskab ved det ene tal, skønt den skulle udtrykke, at

¹ Foredrag holdt ved efterårsmødet 1960 i Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier i Danmark.

3 og 7 ligeberettigede står i en vis relation. »Lis og Gerda er studenter« betyder »Lis er student, og Gerda er student«; sml. »Lis og Gerda er kusiner«.

II

Matematisk logik er logik udtrykt i formelsprog. Det særlige er således blot en udformning med udstrakt anvendelse af symboler efter matematisk forbillede. Herved opnås, at logisk tænken afspejles eller ligefrem erstattes af en bogstavregning, som man kender den i algebra siden omkring 1600.

Et eksempel til belysning:

Lad der være givet en talfølge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ samt et tal a .

Vi betragter udsagnet: »talfølgen konvergerer mod a «. Det er måske sandt, måske falsk — betyder i hvert fald

»til ethvert ε findes et N , så for ethvert $n > N$ gælder: $|a_n - a| < \varepsilon$ »,

hvor ε refererer til positive reelle tal, N og n til numre. — Mere bekvem for os er formen

»til ethvert ε findes et N , så for ethvert n gælder: $n \leq N$ eller $|a_n - a| < \varepsilon$ »,

i symbolik:

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n (n \leq N \vee |a_n - a| < \varepsilon).$$

Eller, $\vee$, er brugt i betydningen: mindst en af delene.

De skal nu se, hvorledes man ganske mekanisk kan finde udtryk for udsagnets negation, altså for, hvad det vil sige, at »talfølgen ikke konvergerer mod a «, — noget, der ellers ofte kan volde en del kvaler:

$$\exists \varepsilon \forall N \exists n (n > N \ \& \ |a_n - a| \geq \varepsilon),$$

altså:

»der findes et ε , så for ethvert N findes et n , hvor $n > N$ og $|a_n - a| \geq \varepsilon$ «.

De kan selv formulere den benyttede regneregul; bemærk at $n > N$ er negation til $n \leq N$.

Et vigtigt eksempel, De nu kan more Dem med: Lad der være givet en funktion $y=f(x)$ i et interval I . Udtryk i symbolik: funktionen er kontinuert i et punkt x_1 , funktionen er kontinuert i intervallet, funktionen er ligelig kontinuert i intervallet. Sammenlign. At negere udsagnene skulle falde Dem let.

I algebraen ligger symbolikkens betydning i følgende: 1° Man opnår en lettelse, en *god økonomi* med sin åndelige indsats, idet meget går

mekanisk, og alt er mere overskueligt. 2° Man opnår større *nøjagtighed*; det er lettere at undgå tvetydigheder og misforståelser.

Under den matematiske logiks udvikling var målet at vinde tilsvarende fordele.

Leibniz (1646–1716) er den første, der har klare planer om en matematisk logik. Hans tanke var at skabe »et alment symbolsprog, hvor alt, der beror på fornuften, er reduceret til en art kalkyle. Det kunne samtidig være et internationalt skriftsprog, men uendelig forskelligt fra alle, man hidtil har foreslået; thi selve skrifttegnene og ordene ville styre tanken, og fejlene ... ville kun være regnefejl, les erreurs ... n'y seroient que des erreurs de calcul. Il seroit très difficile de former ou d'inventer cette langue ...; mais très aisé de l'apprendre sans aucuns dictionnaires.« (1666). Senere skriver han: »Den, der ikke er profet eller fyrste, kan aldrig udrette noget, der vil bidrage mere til menneskeslægtens gode og Guds ære.«

Det forblev dog for Leibniz' eget vedkommende ved planer og udkast, væsentligt i håndskrifter, som lå upåagtede hen på det kurfyrstelige bibliotek i Hannover til omkring 1900.

George Boole (1815–64) regnes da for den matematiske logiks grundlægger. Hans to bøger: *The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*, 1847, og *An investigation of the laws of thought*, 1854, er let læselige, tillige let tilgængelige, da de er optrykt inden for de senere år. De ville have fornøjelse af at blade i de originale værker, at få forfatterens oprindelige fremstilling af en teori, han selv har skabt.

Booles logik har ikke større rækkevidde end den klassiske; det nye er udformningen. Man kan sige, det er den klassiske logik i algebraens sprog:

Lad os betragte en mængde τ . I det følgende vil vi ikke interessere os for individer udenfor; vi kan da kalde τ *totalmængden* eller »*universe*«. (Boole bruger altid samme τ ; det er da en nok så inhomogen mængde rummende mennesker, får, floder, tal, funktioner, Vi vil hellere ved forskellige lejligheder benytte forskellige totalmængder. I Booles eksempler nedenfor skal De blot tænke Dem τ valgt tilstrækkelig omfattende.)

Med $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ vil vi betegne *delmængder* af τ , »*classes*«. — »Let us then agree to represent the class of individuals to which a particular name or description is applicable, by a single letter, as α . If the name is

“men”, for instance, let α represent “all men”, or the class “men”.« Boole gør opmærksom på, at et navn eller en beskrivelse kan passe på et enkelt, alle eller slet ingen individer i τ . Som delmængder regnes da også sådanne, som kun indeholder ét element, τ selv og den tomme mængde. Den sidste vil vi betegne 0.

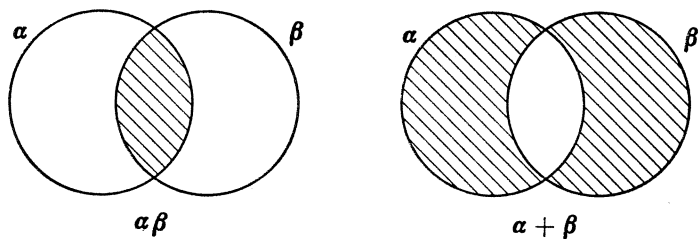
Nu noget afgørende: »Let it further be agreed, that by the combination $\alpha\beta$ shall be represented that class of things to which the names or descriptions represented by α and β are simultaneously applicable. Thus, if α alone stands for “white things”, and β for “sheep”, let $\alpha\beta$ stand for “white sheep”.«

$\alpha\beta$ skal altså betegne mængden af elementer, som er fælles for α og β .

+ benytter Boole som »sign of that mental operation whereby we collect parts into a whole«. Han skriver derfor kun $\alpha + \beta$, når α og β betegner adskilte klasser, dvs. når $\alpha\beta = 0$; f. eks. α : mænd, β : kvinder. Denne indskrænkning er imidlertid ubekvem, og vi udvider hans regneoperation, så også overlappende klasser kan adderes:

$\alpha + \beta$ skal betegne mængden af elementer, som tilhører netop én af mængderne α og β .¹

Hosstående figurer illustrerer de to regneoperationer. τ er ikke tegnet ind.



Der gælder nu en række regneregler, det ikke er vanskeligt at verificere. De kan støtte Dem til figurer i smag med de viste.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \beta + \alpha, & (\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma), & \alpha + 0 &= \alpha, & \alpha + x &= 0 \text{ har løsning,} \\ \alpha\beta &= \beta\alpha, & (\alpha\beta)\gamma &= \alpha(\beta\gamma), & & & (\alpha + \beta)\gamma &= \alpha\gamma + \beta\gamma. \end{aligned}$$

Af de anførte regler følger andre, løst sagt de fra talregning kendte, når man ser bort fra alt, der vedrører division eller størrelse. Med moderne abstrakt algebras terminologi står vi over for en *kommutativ ring*. Bl. a. gælder

¹ Ofte træffes $\alpha + \beta$ i betydningen: mængden af elementer, som tilhører mindst en af mængderne α og β . Overensstemmelsen med sædvanlig bogstavregning bliver da mindre.

$\alpha + x = 0$ har netop én løsning; denne betegnes $-\alpha$,
 $\alpha + x = \beta$ har netop én løsning, nemlig $\beta + (-\alpha)$; man skriver også $\beta - \alpha$,
 $\alpha 0 = 0$.

Rigtigheden af de nævnte påstande indses i øvrigt let direkte. Prøv.
 Sluttelig skal jeg anføre følgende to simple regler:

$$\alpha\tau = \alpha, \alpha\alpha = \alpha.$$

Den første giver anledning til, at vi med Boole også vil benytte betegnelsen 1 for vort »universe« τ .

Den anden er mere bemærkelsesværdig. I denne regel, i modsætning til de øvrige usædvanlig for den, der er fortrolig med tallenes algebra, ligger i virkeligheden gemt alt det, der er særligt for klassernes algebra. En ring, hvor denne regel gælder, kalder man derfor nu en *Boole ring*.

En mærkværdighed, De måske har bemærket ovenfor: $-\alpha = \alpha$ og dermed $\beta - \alpha = \beta + \alpha$, kan således føres tilbage til reglen $\alpha^2 = \alpha$. Det drejer sig om at udlede $\alpha + \alpha = 0$; dette fås af

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 = (\alpha + \alpha)(\alpha + \alpha) = \alpha + \alpha,$$

idet man benytter, at ligningen $\alpha + \alpha + x = \alpha + \alpha$ kun har én løsning, 0.

Vi kender nu de vigtigste regler for at manipulere med bogstaver i Booles kalkyle. Lad os da prøve en anvendelse, føre et problem over i denne symbolik: Vi vil udlede konklusionen af præmisserne i den syllogisme, jeg skrev op ved foredragets begyndelse.

Forberedelse. Når A står for: ting med vis egenskab, vil vi med α betegne mængden af alle A , dvs. af alle ting med den pågældende egenskab; tilsvarende for andre bogstaver. Vi kan da udtrykke udsagn af formerne

intet A	er	B :	$\alpha\beta = 0$,
nogle A	er	B :	$\alpha\beta \neq 0$,
nogle A	er ikke	B :	$\alpha(1-\beta) \neq 0$,
alle A	er	B :	$\alpha(1-\beta) = 0$.

Tegn figur. Bemærk at »nogle« betyder »mindst en«, og at »alle A er B « regnes sandt, når der slet ingen A findes.

Nu syllogismen. Givet: $\mu\pi = 0$, $\sigma\mu \neq 0$. Vis: $\sigma(1-\pi) \neq 0$.

Af første præmis fås $\sigma\mu\pi = 0$. Sammen med anden præmis giver dette $\sigma\mu - \sigma\mu\pi \neq 0$. Idet

$$\sigma\mu - \sigma\mu\pi = \sigma\mu 1 - \sigma\mu\pi = \sigma\mu(1-\pi) = \mu(\sigma(1-\pi)),$$

har vi altså $\mu(\sigma(1-\pi)) \neq 0$. Og heraf følger $\sigma(1-\pi) \neq 0$.

I Booles logik er der lige så lidt som i den klassiske tænkt på relationer mellem flere ting. Et udsagn som »hvis et primtal går op i 2310, så også i 33 eller 70« kan man udtrykke, idet talen er om forskellige egenskaber, et tal kan have. Som univers kan vi f. eks. benytte de naturlige tal; lader vi π betegne mængden af primtal, γ , δ , ε mængderne af divisorer i henholdsvis 2310, 33, 70, får vi $\pi\gamma(1-(\delta+\varepsilon))=0$; sml. »alle A er B «. Derimod kunne Boole ikke udtrykke: »hvis et primtal går op i et produkt, så i mindst en af faktorerne«.

Gottlob Frege (1848–1925) og Giuseppe Peano (1858–1932) skabte symbolsprog med udtryksmuligheder svarende til matematikkens behov. Det er virkelig nye symbolsprog; de låner ikke som Boole et gammelkendt. Peano udgav tillige, sammen med en række medarbejdere, en *Formulaire de mathématiques*, 1895–1908, som skulle rumme alle kendte sætninger, skrevet udelukkende i symboler: »Maintenant une Société de Mathématiciens publie un formulaire qui se propose de contenir toutes les propositions connues sur certains sujets de Mathématique. Ce formulaire, écrit entièrement en symboles, est publié par la *Rivista di Matematica*. Ont déjà paru les formules de logique, de l'algèbre élémentaire, de l'arithmétique, la théorie des grandeurs, la théorie des ensembles de points, et sont sous presse la théorie des limites, des séries, des fonctions continues, des dérivées, etc.«

Fremskridtet beror på følgende iagttagelse: En matematisk sætning er oftest bygget op af dele, som ikke selv er udsagn, men »udsagn med variable«. Et par eksempler:

p går op i ab , kort $p|ab$. Når de »variable« p , a og b tillægges talværdier — og først da — fås et udsagn, sandt eller falsk. F. eks. p , a , $b=7$, 2, 5. p er et primtal, kort $\Pi(p)$.

Peano forklarer (1888): »En proposizione kan udtrykke en sammenhæng mellem ganske bestemte størrelser; den skal da kaldes *categorica*; den kan kun være sand eller falsk. Eller en proposizione kan indeholde ubestemte størrelser (variable), den skal da kaldes *condizionale*; betingelsen udtrykt ved en sådan proposizione er i almindelighed opfyldt af visse størrelser, ikke af andre; dog kan den være opfyldt af alle størrelserne eller af ingen. Enhver påstand gøres med en proposizione categorica; en proposizione condizionale kan kun være del af en proposizione categorica. Således er f. eks. » $x^2-3x+2=0$ « en proposizione condizionale, indeholdende det ubestemte tal x ; »ligningen $x^2-3x+2=0$ har rødderne 1 og 2« er en proposizione categorica.«

Skrevet på formen: »hvis p er et primtal og $p|ab$, så $p|a$ eller $p|b$ «, er det tydeligt, at den tidligere omtalte sætning indordner sig under dette synspunkt. Betydningen af *hvis ... , så ...*, brugt mellem to proposizioni condizionali, forklarer Peano: »quelles que soient les valeurs de $p, a, b, \dots$ pourvu qu'elles satisfassent à la première condition, elles satisferont aussi à la seconde.«

At en proposizione condizionale, et »udsagn med variable«, slet ikke er et udsagn — så lidt som $\sin x$ er et tal — understreger Bertrand Russell godt ved at benytte navnet *propositional function* (1903); det er velvalgt: der er jo tale om funktioner, hvis værdier er udsagn. Ordet *proposition* har han da til rådighed for en proposizione categorica. På dansk kan vi sige *udsagn* og *udsagnsfunktion*.

Det er da opbygningen af en matematisk sætning af udsagnsfunktioner, der overføres i symbolik:

$$(\Pi(p) \ \& \ p|ab) \Rightarrow (p|a \vee p|b) .$$

Peano konkluderer (1894): »On peut changer la forme des signes, ... on peut en supprimer, ou en ajouter d'autres, modifier quelques conventions, etc. Mais nous sommes maintenant en cas d'exprimer toutes les propositions de Mathématique au moyen de peu de signes, ayant une signification précise, et assujettis à des règles bien déterminées.«

»Après avoir énoncé les propositions d'une branche des Mathématiques, et reconnu entre elles les définitions, il faut prouver la vérité des autres; et à cela est d'une grande utilité la logique mathématique.

Certainement on a raisonné, et très bien, pendant longtemps, sans recourir aux lois de cette science tout à fait nouvelle. Mais aussi Diophante a résolu, sans connaître d'Algèbre, un grand nombre des problèmes algébriques parmi les plus difficiles.

Les règles de la logique, pour transformer un ensemble d'hypothèses dans la thèse à prouver, sont analogues aux lois de l'Algèbre pour transformer un ensemble d'équations dans une forme où elles soient résolues par rapport aux inconnues.«

Man bemærke, at Peano sigter mod begge de mål, vi har noteret: *god økonomi* og *nøjagtighed*.

Medens Peano var den første, som udtrykte en hel teori, sætninger, definitioner og beviser, fuldstændigt i symboler: *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, 1889, var Frege først med at skabe et symbolsprog, hvori det kunne gøres: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, 1879.

Freges Begriffsschrift — begrebsskrift, ideografi — er klodset, og »regning« i den besværlig. Hans motiv var nu heller ikke at udvikle en simpel kalkyle:

I 1800'erne møder vi en udtalt tendens mod strenge beviser, skarpe definitioner, forkastelse af den mere intuitive betragtningsmåde. Frege interesserede sig for grundlagsproblemer i aritmetikken; han fandt her det sædvanlige sprog for unøjagtigt, derfor skabte han sin Begriffsschrift. »Meine Absicht ist also auf lückenlose Strenge der Beweisführung und größte logische Genauigkeit gerichtet, daneben auf Übersichtlichkeit und Kürze.«

Det tunge i brugen af Begriffsschrift er til dels prisen for i højere grad at undgå tvetydighed og uklarhed. I virkeligheden går de to formål: *god økonomi* og *stor nøjagtighed* ikke i spand. Den overskuelighed, man kender fra sædvanlig algebra, beror ofte på, at meget underforstås. Stor nøjagtighed kræver, at alt tages med.

En status i dag over den matematiske logik vil vise, at man er blevet skuffet i forhåbningen om en afgørende lettelse i matematiske ræsonnementer; der er ikke udgivet nogen *Formulaire* siden 1908. Derimod anvendes den matematiske logiks symbolsprog uafledigt i grundlagsforskningen.

Jeg kan beskrive situationen ud fra et Frege-citat: »Wenn ich die Arithmetik mit einem Baume vergleiche, der sich oben in eine Mannigfaltigkeit von Methoden und Lehrsätzen entfaltet, während die Wurzel in die Tiefe strebt, so scheint mir der Wurzeltrieb, in Deutschland wenigstens, schwach zu sein. Selbst in einem Werke, das man dieser Richtung zuzählen möchte, der *Algebra der Logik* des Herrn E. Schröder, gewinnt doch bald der Wipfeltrieb wieder die Oberhand, bevor noch eine größere Tiefe erreicht ist, bewirkt ein Umbiegen nach oben und eine Entfaltung in Methoden und Lehrsätze.« — Det er i studiet af rodnettet, den matematiske logik har fundet sin anvendelse.

Det skal dog tilføjes, at en behersket brug af symboler undertiden kan være en hjælp for overblikket. Idet små bogstaver refererer til rette linier, store til punkter, kan parallelaksiomet formuleres

$\forall l \forall P$ (der går højst en parallel til l gennem P),

»for enhver linie l og ethvert punkt P gælder, at der går højst en parallel til l gennem P «. Det er her let at overse, hvad det betyder, at parallelaksiomet ikke er opfyldt:

$\exists l \exists P$ (der går mindst to paralleller til l gennem P).

Vil man føre symboliseringen videre, går det ud over overskueligheden, som i følgende fremstilling af parallelaksiomet ($\neg$ står for »ikke«):

$$\forall l \forall P \forall m \forall n (\neg(m \neq l \ \& \ P \text{ på } m \ \& \ n \neq l \ \& \ P \text{ på } n) \vee m = n).$$

Her kan endelig parallelitet udtrykkes ved den grundlæggende relation »punkt på linie«:

For $m \neq l$ skal De da indføre $\neg \exists Q (Q \text{ på } m \ \& \ Q \text{ på } l)$.

Dette vil man tænke sig gjort, når man driver grundlagsforskning.

Frege siger, at hans Begriffsschrift forholder sig til sædvanligt sprog som mikroskop til øje. Den matematiske logik er især egnet til det dybe indblik i matematikkens grundlag. Måske kan den dog også være gymnasieeleven til hjælp — når læreren har vurderet, hvad der er egnet til at betragtes i mikroskopet, og hvilken forstørrelse der giver mest.

LITTERATUR

- A. CHURCH: *Introduction to mathematical logic*. Princeton 1956.
 D. HILBERT – W. ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen Logik*. 4. Aufl., Berlin 1959.
 W. QUINE: *Methods of logic*. New York 1950.
 A. TARSKI: *Introduction to logic*. New York 1941.

ET SPILTEORETISK PROBLEM

OLE RINDUNG

Det spil, der her skal behandles, spilles efter følgende regler:

I en urne anbringes 100 sedler, hver påskrevet et reelt tal. De 100 reelle tal er to og to forskellige. Af urnen udtrækkes sedlerne én ad gangen. Spilleren, der ikke ved, hvilke tal der forekommer på sedlerne, men som bliver bekendt med tallene, efterhånden som de udtrækkes, har til opgave at standse udtrækningen af sedler på et af ham selv valgt tidspunkt. Hvis han standser udtrækningen umiddelbart efter, at det største af tallene er udtrukket, har han vundet spillet. I modsat fald har han tabt.

Hvilken strategi skal spilleren vælge, når sandsynligheden for gevinst skal være størst mulig, og hvor stor er den maximale gevinstsandsynlighed?

Da det er fuldstændig ubestemt, hvilke tal der forekommer på de 100 sedler, vil man ved en første overvejelse være tilbøjelig til at mene, at gevinstsandsynligheden er overordentlig ringe. Det forekommer derfor overraskende, at det — som påvist i det følgende — er muligt at tilrettelægge en strategi, der bringer gevinstsandsynligheden helt op på 37%. Der skal desuden her føres bevis for, at denne strategi er den bedst mulige.

Begrebet »en strategi« vil vi definere på følgende måde:

Med Π vil vi betegne mængden af ordnede, reelle talsæt

$$(a_1, a_2, \dots, a_p),$$

hvor $p \leq 100$, og tallene $a_1, a_2, \dots, a_p$ er indbyrdes forskellige. Ved »en strategi« vil vi forstå en funktion s , defineret på mængden Π , med følgende egenskaber:

1° Hvis de p først udtrukne tal danner talsættet α , angiver $s(\alpha)$ sandsynligheden for, at spilleren siger »stop« umiddelbart efter udtrækningen af det p -te tal.

2° Hvis $P(G_p|\alpha) = P(G_p|\beta)$, så er $s(\alpha) = s(\beta)$. Her betegner $P(G_p|\alpha)$ den betingede sandsynlighed for, at stop efter den p -te seddels udtræk-

ning vil føre til gevinst, under forudsætning af, at de p først udtrukne tal danner talsættet α .

Betingelse 2° er udtryk for, at vi ikke tager sådanne tilfælde i betragtning, hvor spilleren lader sig lede af uvedkommende motiver.

Vi vil skelne imellem talsæt af A -type og talsæt af B -type. Et talsæt $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \Pi$ vil vi klassificere som værende af A -type, hvis

$$a_p > a_i \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \dots, p-1.$$

Alle andre talsæt i Π skal siges at være af B -type.

Hvis det efter udtrækningen af det p -te tal foreliggende talsæt α er af B -type, vil det naturligvis gælde, at

$$(1) \quad P(G_p|\alpha) = 0.$$

Det er derfor klart, at når det gælder om at maximere den samlede gevinstsandsynlighed, må man sætte

$$(2) \quad s(\alpha) = 0, \text{ når } \alpha \text{ er af } B\text{-type}.$$

Vi vil derefter betragte $P(G_p|\alpha)$, når α er af A -type. Lad os antage, at talsættene

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_p) \quad \text{og} \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_p)$$

begge er af A -type. Da det er fuldstændig ubestemt, hvilket talsæt på 100 tal der forekommer på sedlerne, må man sætte sandsynligheden for, at alle tal i sættet er $\leq a_p$, lig med sandsynligheden for, at alle tal i sættet er $\leq b_p$. Dette betyder imidlertid, at

$$(3) \quad P(G_p|\alpha) = P(G_p|\beta), \text{ når } \alpha \text{ og } \beta \text{ begge er af } A\text{-type}.$$

I henhold til 2° gælder det derfor, at

$$(4) \quad s(\alpha) = s(\beta), \text{ når } \alpha \text{ og } \beta \text{ begge er af } A\text{-type}.$$

På grund af (2), (3) og (4) vil vi i stedet for funktionerne $P(G_p|\alpha)$ og $s(\alpha)$ operere med funktionerne $P(G_p|t)$ og $s(p, t)$, hvor t er en variabel, der kan antage to forskellige værdier, A eller B , alt efter typen af talsættet α , der foreligger efter udtrækningen af det p -te tal.

Af (1) og (2) følger, at

$$P(G_p|B) = s(p, B) = 0 \quad \text{for} \quad p = 2, 3, \dots, 100.$$

Bestemmelsen af $P(G_p|A)$ foretager vi ved en opgørelse af nogle permutations-antal for sættet $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{100})$ af tal, der forekommer på de 100 sedler.

Antallet af permutationer af dette sæt, hvor det af de p første tal dannede delset er af A -type, er

$$(5) \quad \binom{100}{p} (p-1)! (100-p)! = \frac{100!}{p}.$$

Antallet af permutationer, hvor det største tal står på den p -te plads, er $99!$, og vi får derfor

$$(6) \quad P(G_p|A) = \frac{99! p}{100!} = \frac{p}{100}.$$

Idet vi lader A_p være betegnelse for den hændelse, at det af de p først udtrukne tal dannede talsæt er af A -type, og B_p være betegnelse for den komplementære hændelse, søger vi følgende betingede sandsynligheder:

$$\begin{array}{cc} P(A_{p+1}|A_p) & P(A_{p+1}|B_p) \\ P(B_{p+1}|A_p) & P(B_{p+1}|B_p). \end{array}$$

Antallet af permutationer af talsættet $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{100})$, der tilhører $A_{p+1} \cap A_p$, er

$$(7) \quad \binom{100}{p+1} (p-1)! (99-p)! = \frac{100!}{p(p+1)}.$$

Antallet af permutationer, der tilhører A_p , er givet ved (5). Vi har derfor

$$(8) \quad P(A_{p+1}|A_p) = \frac{1}{p+1}.$$

Heraf finder man, at

$$(9) \quad P(B_{p+1}|A_p) = 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}.$$

Antallet af permutationer, der tilhører $A_{p+1} \cap B_p$, er ifølge (5) og (7)

$$\frac{100!}{p+1} - \frac{100!}{p(p+1)} = \frac{100! (p-1)}{p(p+1)},$$

og antallet af permutationer, der tilhører B_p , er ifølge (5)

$$100! - \frac{100!}{p} = \frac{100! (p-1)}{p}.$$

Heraf får vi da, at

$$(10) \quad P(A_{p+1}|B_p) = \frac{1}{p+1},$$

og dermed, at

$$(11) \quad P(B_{p+1}|B_p) = \frac{p}{p+1}.$$

Vi vil for kortheds skyld sætte

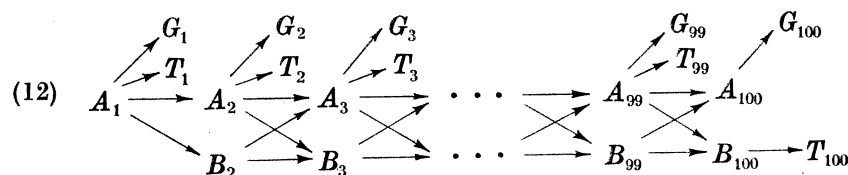
$$s(p, A) = s_p, \quad p = 1, 2, \dots, 100.$$

Strategien er fuldstændigt bestemt, når vi har bestemt talsættet

$$(s_1, s_2, \dots, s_{100}).$$

Ligesom G_p betegner gevinstsituation ved stop efter det p -te tals udtrækning, lader vi T_p betegne tabssituation ved stop efter det p -te tals udtrækning.

Hele spillets forløb kan nu beskrives som »en vej« fra venstre mod højre i følgende skema:



Overgangssandsynlighederne er ifølge (6), (8), (9), (10) og (11) angivet ved følgende skema:

Fra \ Til	G_p	T_p	A_{p+1}	B_{p+1}
A_p	$s_p \frac{p}{100}$	$s_p \left(1 - \frac{p}{100}\right)$	$(1 - s_p) \frac{1}{p+1}$	$(1 - s_p) \frac{p}{p+1}$
B_p	—	—	$\frac{1}{p+1}$	$\frac{p}{p+1}$

Lad a_p betegne sandsynligheden for, at punktet A_p i skema (12) passeres, og b_p sandsynligheden for, at punktet B_p passeres. Vi kan da opstille følgende rekursionsformler:

$$a_{p+1} = a_p(1 - s_p) \frac{1}{p+1} + b_p \frac{1}{p+1}$$

$$b_{p+1} = a_p(1 - s_p) \frac{p}{p+1} + b_p \frac{p}{p+1}$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0.$$

Ved løsning heraf finder man

$$a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} (k - s_k) \quad \text{og} \quad b_n = (n-1)a_n.$$

Sandsynligheden for, at vejen gennem (12) ender i punktet G_n , er derfor

$$\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} (k - s_k) \cdot s_n \cdot \frac{n}{100} \quad \text{for } n = 2, 3, \dots, 100$$

og

$$\frac{s_1}{100} \quad \text{for } n = 1.$$

Sandsynligheden for, at spillet i det hele taget får gevinstudgang, er derfor

$$(13) \quad P(G) = \frac{s_1}{100} + \sum_{n=2}^{100} \frac{n s_n}{100 n!} \prod_{k=1}^{n-1} (k - s_k) = \frac{1}{100} \left\{ s_1 + \sum_{n=2}^{100} s_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{s_k}{k} \right) \right\}.$$

Det er derefter vor opgave at bestemme tallene $s_1, s_2, \dots, s_{100}$ således, at $P(G)$ bliver størst mulig.

Da udtrækningen skal standses senest efter udtrækningen af seddel nr. 100, er $s_{100} = 1$. Vi vil bevise, at $P(G)$ får sin maksimale værdi, når man vælger

$$(14) \quad \begin{cases} s_1 = s_2 = s_3 = \dots = s_{37} = 0 \\ s_{38} = s_{39} = s_{40} = \dots = s_{100} = 1. \end{cases}$$

Vi fører beviset ved en art induktion fra s_{100} ned til s_1 . Vi antager, at vi for et eller andet m , hvor

$$38 \leq m < 100,$$

har valgt

$$(15) \quad s_{m+1} = s_{m+2} = \dots = s_{100} = 1,$$

og skal da vise, at vi for at maximere $P(G)$ må sætte $s_m = 1$, uanset valget af $s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$.

Vi har

$$(16) \quad P(G) = \frac{1}{100} \left\{ s_1 + \sum_{n=2}^{m-1} s_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{s_k}{k} \right) \right\} + \frac{1}{100} \sum_{n=m}^{100} s_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{s_k}{k} \right).$$

Første led afhænger kun af $s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$. Sidste led kan ifølge (15) skrives

$$\frac{1}{100} \prod_{i=1}^{m-1} \left(1 - \frac{s_i}{i} \right) \left[s_m + \left(1 - \frac{s_m}{m} \right) \left\{ 1 + \sum_{n=m+2}^{100} \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right\} \right].$$

Da faktoren foran parentesen $[]$ er positiv og kun afhænger af $s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$, behøver vi kun at betragte parentesen $[]$ med henblik på maximering.

Da

$$\prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{m}{n-1},$$

kan den nævnte parentes skrives

$$(17) \quad s_m + \left(1 - \frac{s_m}{m}\right) \left\{1 + \sum_{n=m+2}^{100} \frac{m}{n-1}\right\} = 1 + m \sum_{n=m+1}^{99} \frac{1}{n} + s_m \left(1 - \sum_{n=m}^{99} \frac{1}{n}\right).$$

Da

$$\sum_{n=m}^{99} \frac{1}{n} < 1 \quad \text{for} \quad 38 \leq m < 100,$$

må vi vælge $s_m = 1$ for at gøre (17) så stor som muligt. Dermed har vi vist den sidste linie i (14).

Ovenstående betragtninger frem til formel (17) har også gyldighed for $m = 37$, men da

$$\sum_{n=37}^{99} \frac{1}{n} > 1,$$

viser formel (17), at vi må vælge $s_{37} = 0$ for at opnå maximering.

Lad os derefter antage, at vi for en værdi m , hvor

$$1 \leq m < 37,$$

har valgt

$$\begin{aligned} s_{m+1} &= s_{m+2} = \dots = s_{37} = 0 \\ s_{38} &= s_{39} = \dots = s_{100} = 1. \end{aligned}$$

Vi skal da vise, at vi — uanset valget af $s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$ — må vælge $s_m = 0$.

Ved en tilsvarende spaltning af $P(G)$ som i (16) foretaget får vi

$$\begin{aligned} P(G) &= \frac{1}{100} \left(s_1 + \sum_{n=2}^{m-1} s_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{s_k}{k}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{100} \prod_{i=1}^{m-1} \left(1 - \frac{s_i}{i}\right) \left[s_m + \left(1 - \frac{s_m}{m}\right) \left\{1 + \sum_{n=39}^{100} \prod_{k=38}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right\} \right]. \end{aligned}$$

Ganske som før kan man indskrænke sig til at betragte parentesen [] med henblik på maximering.

Denne parentes kan omskrives til

$$1 + 37 \sum_{n=38}^{99} \frac{1}{n} + s_m \cdot \frac{37}{m} \left(\frac{m}{37} - \sum_{n=37}^{99} \frac{1}{n} \right).$$

Da

$$\frac{m}{37} < 1 \quad \text{og} \quad \sum_{n=37}^{99} \frac{1}{n} > 1,$$

er koefficienten til s_m negativ, og s_m må derfor vælges lig med 0.

Dermed er det bevist, at den fordelagtigste strategi er bestemt ved (14).

Ved indsættelse i formel (13) får vi gevinstsandsynligheden

$$P(G) = \frac{1}{100} \left(1 + 37 \sum_{n=38}^{99} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{100} (1 + 37 \cdot 0,9758) = 0,37 .$$

Hvis antallet af sedler i urnen er N i stedet for, som her, 100, skal man bestemme det mindste hele tal $q > 0$, for hvilket det gælder, at

$$\sum_{n=q}^{N-1} \frac{1}{n} < 1 .$$

Den bedste strategi vil da være bestemt ved

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 &= \dots = s_{q-1} = 0 \\ s_q = s_{q+1} &= \dots = s_N = 1 , \end{aligned}$$

og den vil svare til gevinstsandsynligheden

$$P(G) = \frac{1}{N} \left(1 + (q-1) \sum_{n=q}^{N-1} \frac{1}{n} \right) .$$

For værdier af N , som ikke er helt små, har man med tilnærmelse:

$$q = \frac{N}{e} \quad \text{og} \quad P(G) = \frac{1}{e} .$$

OM LÖSNING AV VISSA DIFFERENTIALEKVATIONER MED τ -METODEN

ÅKE BJÖRCK

Vi skall betrakta en funktion $y(x)$, kontinuerlig på intervallet $[0, \beta]$ av reella axeln, för vilken $y(0) = a_0 = 1$. Vi antar vidare att $y(x)$ satisfierar en lineär homogen differentialekvation med polynomkoefficienter, vilken vi skriver

$$(1) \quad L(D)y(x) = 0.$$

Enligt en sats av Weierstrass kan funktionen $y(x)$, då den är kontinuerlig på ett slutet ändligt intervall, godtyckligt noga likformigt approximeras med ett polynom. Låt oss för $y(x)$ formellt ansätta MacLaurin-serien

$$(2) \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Substitueras denna i differentialekvationen erhålles rekursionsformler för koefficienterna a_k , varur dessa enkelt kan lösas. Den n :te partialsumman betecknar vi

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Konvergensens av den på detta vis erhållna serien fordrar dock en särskild undersökning.

C. Lanczos har i [1] utvecklat den s. k. τ -metoden att bestämma en följd polynom

$$(3) \quad y_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k(n) x^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

så att $y_n(x)$ konvergerar likformigt mot $y(x)$ snabbare än $S_n(x)$ och under betydligt svagare villkor. Koefficienterna $b_k(n)$ bestäms ur rekursionsformlerna för a_k . Vårt antagande att differentialekvationen har polynomkoefficienter medför att dessa rekursionsformler får ändlig ordning. För att i det följande kunna ge explicita uttryck för koefficienterna

$b_k(n)$ skall vi ytterligare inskränka oss till att a_k *satisfierar en tvåterms rekursionsformel*. (För en generalisering till rekursionsformler av högre ordning hänvisas till [2].)

Antag att vid insättning av serien (2) i differentialekvationen (1) koefficienten för x^k blir $M_{k+1}a_{k+1} + N_k a_k$. Rekursionsformeln lyder då

$$(4) \quad M_{k+1}a_{k+1} + N_k a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Om vi försöker satisfiera differentialekvationen med $S_n(x)$ blir i (4) den $(n+1)$:sta ekvationen i regel ej uppfylld, då vi har $n+1$ ekvationer för de n obekanta koefficienterna $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tydligt satisfierar emellertid $S_n(x)$ differentialekvationen

$$L(D)S_n(x) = N_n a_n x^n.$$

Högra ledet kan här uppfattas som en felterm, vilken vi infört för att göra differentialekvationen lösbar med en ändlig potensserie. Denna felterm är visserligen liten för små x , men är inte lämplig som ersättning för högerledet 0 i (1) i hela intervallet $[0, \beta]$.

Vi kan analogt, med en mer generell felterm $\tau P_n(x)$ som högerled, bestämma τ så att differentialekvationen $L(D)y(x) = \tau P_n(x)$ får en lösning av formen (3). Med $P_n(x)$ avses t. v. ett godtyckligt polynom av n :te graden. För att få en felterm, som är liten i hela intervallet $[0, \beta]$, visar det sig ofta lämpligt att använda de till detta intervall hörande Tschebyscheffpolynomen.

Tschebyscheffpolynomen på intervallet $[-1, 1]$ betecknas $\{T_n(x)\}$ och kan definieras av

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

Ur definitionen följer att $|T_n(x)| \leq 1$ för $|x| \leq 1$. Man verifierar även lätt att $T_n(x)/2^{n-1}$ har högstgradskoefficienten lika med 1.

Dessa polynom har följande fundamentala egenskaper, som här anföres utan bevis (se t. ex. Ove J. Munch: »Om nogle uligheder af W. A. Markoff«, NMT 8 (1960), s. 21–23):

LEMMA. Låt $P_n(x)$ vara ett godtyckligt polynom av n :te graden med högstgradskoefficienten lika med 1. Då gäller

$$\max_{|x| \leq 1} |P_n(x)| \geq \max_{|x| \leq 1} |T_n(x)/2^{n-1}| = 1/2^{n-1}.$$

Polynomet $T_n(x)/2^{n-1}$ kan i denna mening anses vara det normerade polynom av n :te graden, som på intervallet $[-1, 1]$ minst avviker från noll.

Vi gör nu en linjär transformation av intervallet $[-1, 1]$ på intervallet $[0, 1]$ och får de skiftade Tschebyscheffpolynomen

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1) = \sum_{k=0}^n c_n^{(k)} x^k.$$

Koefficienterna $c_n^{(k)}$ är heltal och finns tabellerade för $n=1(1)20$ i [2].

Vi skall nu som felterm välja $\tau T_n^*(x/\beta)$ och löser alltså

$$(5) \quad L(D)y(x) = \tau T_n^*(x/\beta).$$

Insättning av serien (3) häri ger följande inhomogena system rekursionsformler för b_k :

$$(6) \quad M_{k+1}b_{k+1} + N_k b_k = \begin{cases} \tau c_n^{(k)}/\beta^k, & k = 0, 1, \dots, n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Antag att vi löst MacLaurin-koefficienterna a_k . Vi väljer $b_0 = a_0 = 1$ så att $y_n(0) = y(0)$. Det visar sig sedan lämpligt att införa kvantiteter w_r genom relationerna

$$(7) \quad b_k = a_k \left(1 + \tau \sum_{r=0}^{k-1} w_r \right), \quad k = 1, 2, \dots, n+1.$$

Insättning i (6) ger, då a_k satisfierar motsvarande homogena rekursionsformel (4):

$$M_{k+1}a_{k+1}\tau w_k = \tau c_n^{(k)}/\beta^k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Vi löser härur w_k och får

$$(8) \quad w_k = \frac{c_n^{(k)}}{M_{k+1}a_{k+1}\beta^k} = -\frac{c_n^{(k)}}{N_k a_k \beta^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Storheten τ blir bestämd ur villkoret att $y_n(x)$ skall vara ett polynom av gradtalet n dvs.

$$b_{n+1} = a_{n+1} \left(1 + \tau \sum_{r=0}^n w_r \right) = 0,$$

vilket ger

$$(9) \quad \frac{1}{\tau} = -\sum_{r=0}^n w_r.$$

Det följer sedan av (6) att $b_k = 0$ även för $k > n+1$. Med användning av (9) förenklas slutligen (7) till

$$(10) \quad b_k = a_k \tau \left(\frac{1}{\tau} + \sum_{r=0}^{k-1} w_r \right) = -a_k \tau \sum_{r=k}^n w_r, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Vi skall nu visa en tolkning av storheterna w_r . Insätt (10) i (3) och byt summationsordning:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[x^k (-\tau) a_k \sum_{r=k}^n w_r \right] = -\tau \sum_{r=0}^n w_r \left(\sum_{k=0}^r a_k x^k \right).$$

Detta kan skrivas

$$(11) \quad y_n(x) = \frac{\sum_{r=0}^n w_r S_r(x)}{\sum_{r=0}^n w_r},$$

vilket är en viktning av de n första partialsummorna av MacLaurin-serien. Viktkoefficienterna w_r är avpassade efter antalet termer n som medtages, till den speciella differentialekvationen samt till intervallets längd β .

Ett flertal viktiga transcendentfunktioner satisfierar, eventuellt efter någon enkel transformation, en differentialekvation av ovanstående typ. Vi skall som avslutning behandla två numeriska exempel och väljer först Besselfunktionen $J_p(z)$, som satisfierar

$$z^2 J_p'' + z J_p' + (z^2 - p^2) J_p = 0.$$

Gör vi här transformationen

$$z = 2\sqrt{x}, \quad J_p(z) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^p y(x),$$

får vi för $y(x)$ differentialekvationen

$$xy'' + (1+p)y' + y = 0$$

med begynnelsevillkoret $y(0)=1$. Insättning av (2) ger nu

$$(k+1)(k+1+p)a_{k+1} + a_k = 0.$$

Speciellt för $p=0$ blir med tidigare beteckningar

$$N_k = 1, \quad a_k = (-1)^k / (k!)^2.$$

Vi skall genomföra beräkningarna av b_k ur ekvationerna (8), (9) och (10) för $n=5$ og $\beta=4$. Räkningarna har uppställts i tabell 1.

Tabell 1.

r, k	$c_5^{(r)}$	$1/a_r$	w_r	$\sum_{r=k}^5 w_r$	$21647b_k$
5	512	-14400	7200	7200	-1
4	-1280	576	2880	10080	35
3	1120	-36	630	10710	-595
2	-400	4	100	10810	5405
1	50	-1	12,5	10822,5	-21645
0	-1	1	1	10823,5	21647

Approximativt gäller då i intervallet $0 \leq x \leq 4$:

$$J_0(2\sqrt{x}) = \frac{1}{21647}(21647 - 21645x + 5405x^2 - 595x^3 + 35x^4 - x^5).$$

Maximifelet är ca: $3 \cdot 10^{-5}$. Den avkortade MacLaurinserien med samma antal termer har maximifelet $7 \cdot 10^{-3}$. Anmärkas bör dock att τ -metoden ger en interpolerande approximation, dvs. utanför intervallet $[0, \beta]$ stiger felet mycket snabbt.

I detta exempel konvergerar även MacLaurinserien i hela intervallet. Vid viktningen av partialsummorna lägges här också större vikt vid de av högre ordning (se tabell 1).

Vi skall nu studera ett exempel på ett motsatt extremfall, när MacLaurinserien divergerar för alla $x \neq 0$.

Exponentialintegralen $E_i(z)$ definieras som

$$E_i(z) = \int_{-\infty}^z t^{-1} e^t dt.$$

Denna integral är konvergent för $z < 0$. Vi önskar studera $E_i(z)$ för stora negativa värden på z och sätter

$$y(x) = -\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} E_i\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Vi finner då att $y(x)$ satisfierar differentialekvationen

$$x^2 y' + (1+x)y = 1.$$

Denna differentialekvation är dock ej homogen. Om vi emellertid som felterm här använder $\tau x T_n^*(x)$ ger insättning av (3):

$$b_0 + x \sum_{k=0}^n [b_{k+1} + (k+1)b_k] x^k = 1 + \tau x \sum_{k=0}^n c_n^{(k)} x^k.$$

Tabell 2.

r	$c_5^{(r)}$	a_{r+1}	$45w_r$	$S_r(1)$	$45w_r S_r(1)$
5	512	720	32	-100	-3200
4	-1280	-120	480	20	9600
3	1120	24	2100	-4	-8400
2	-400	-6	3000	2	6000
1	50	2	1125	0	0
0	-1	-1	45	1	45
Σ			6782		4045

Alltså är $b_0 = 1$ och med $M_k = 1$, $N_k = k + 1$ fås åter rekursionsformlerna (6) för b_k . Då kan de tidigare härledda formlerna användas även här.

MacLaurinserien blir

$$y(x) = 1 - x + 2!x^2 - 3!x^3 + \dots,$$

och divergerar för alla $x \neq 0$.

Efter tabell 2 kan $y_5(1)$ beräknas som en viktning av de fem första partialsummorna enl. (11) dvs. med $\beta = 1$ och $n = 5$:

$$y(1) = \frac{4045}{6782} = 0,59643 \quad (\text{korrekt } 0,59635).$$

Viktningen har här tydligt dämpat de högre partialsummornas konvergensförstörande verkan.

LITTERATUR

- [1] C. LANCZOS: *Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions*. J. Math. Phys. 17 (1938), pp. 123–199.
- [2] C. LANCZOS: *Tables of the Chebychev polynomials $S_n(x)$ and $C_n(x)$* . National Bureau of Standards AMS 9 (1952).
- [3] C. LANCZOS: *Applied analysis*. London 1957.
- [4] Y. L. LUKE: *Remarks on the Tau-method for the solution of linear differential equations with rational coefficients*. J. Soc. Indust. Appl. Math. 3 (1955), pp. 179–191.

BOKMELDINGER

CLAIRE FISHER ADLER: *Modern geometry*. An integrated first course. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1958. 14 + 215 pp. sh. 50/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT 8 (1960), s. 178.)

Geometrien inntar i mange land en nokså dominerende stilling innen matematikkundervisningen i den høyere skole, særlig på dens lavere trinn. Det er imidlertid påfallende at universitetene i stor utstrekning unnlater å »følge opp« med en overbygning over den egentlige skolegeometrien.

Ved Universitetet i Bergen ville vi innføre en slik overbygning, i form av et kurs som skulle omfatte noe geometrisk aksiomatikk, en videreføring av skolens euklidske geometri, projektiv geometri og litt ikke-euklidsk geometri. Særlig la vi vekt på den projektive geometri; med den dominerende stilling som analytisk kjeglesnittsteori idag har i gymnasiet (i hvert fall i Norge), er det viktig for vordende lærere å vite at kjeglesnittene også kan innføres på en helt annen måte.

Når man på denne måten stiller opp kravene til et matematisk emne, er det ofte bare én løsning på læreboksproblemet: Skriv om stoffet selv, og utgi det stensillert. I dette tilfelle var vi imidlertid heldige, idet vi fant den lærebok av Adler som her skal anmeldes, og som jeg selv foreleste etter for første gang ifjor høst. Den er så å si »midt i blinken« for våre ønsker, og vi behøver bare å supplere den på enkelte punkter med et lite stensillert hefte.

Etter en (litt for »amerikansk«) innførelse av logikkens grunnsetninger gir forfatteren en kort oversikt over Euklids og Hilberts aksiomssystemer, som presenteres i et appendiks. Noen dypere inntrengen er det naturligvis ikke tale om; den aksiomatiske trening kommer i forbindelse med projektivgeometrien. I appendiks gis også en stor del av Euklids setninger, som forfatteren utnytter på en meget elegant måte: Hver gang han skal referere til en elementærgeometrisk setning som forutsettes kjent fra skolen, henviser han til Euklids originale versjon.

Skolegeometrien utbygges så videre med Menelaos' og Cevas setninger,

teorien for harmoniske elementer og dobbeltforhold i euklidsk geometri, og inversjon m. h. p. en sirkel (som senere anvendes i Poincaré's modell av den hyperbolske geometri).

En stor del av boken opptas av projektiv geometri. Aksiomssystemet gis i sin helhet, men kommentarene er ofte svært knappe. Selvsagt er det i en første innføring ikke mulig å gå langt med aksiomatikken, men en setning som »to rette linjer i et plan skjærer hverandre i et punkt« burde jo unektelig bevises ut fra aksiomene. Dualiteten innføres meget instruktivt, men dens relasjon til aksiomatikken nevnes ikke.

Harmoniske elementer og perspektiviteter (i syntetisk fremstilling) har fått et vel avveiet omfang, men anvendelsene på generering av kjeglesnitt er etter min mening for knappe, smlgn. de innledende bemerkninger om analytisk kjeglesnittsteori. Dette er ett av de punkter hvor vi utvider pensum i forhold til boken. Det samme gjelder den analytisk-projektive fremstilling og et avsnitt om transformasjoner. Med bruk av matriser (som ikke forutsettes i boken) kan man på få ekstra sider komme meget lenger. Men innføringen av plane homogene koordinater, med stråle- og planknippe i et euklidsk rom som modell, er i seg selv meget tilfredsstillende gjort.

De siste 45 sider behandler ikke-euklidsk geometri. Da de også skal gi plass til en — for øvrig meget verdifull — historikk, er det klart at fremstillingen må bli svært overfladisk. Likevel sitter leseren igjen med et meget klart inntrykk av hva det dreier seg om. Ved eksamen ifjor høst var det i hvert fall påfallende hvor godt våre studenter hadde oppfattet særtrekkene ved elliptisk, parabolisk og hyperbolsk geometri.

Adlers bok er meget godt skrevet, faktisk inspirerende, selv om stilen av og til kan være litt »flåset«. En leser får lyst til å trenge dypere inn i stoffet, og til hjelp har han et utall av litteraturhenvisninger. Listen omfatter 77 lærebøker, og det er for meget for en bok på dette nivå. Et mindre utvalg av videregående verker ville være meget nyttigere for en nybegynner.

Som i de fleste amerikanske bøker er sats og figurer av høy kvalitet. Boken skjemmes imidlertid av en god del trykkfeil og unøyaktigheter, i et slikt antall at vi deler ut en lang liste over feil til våre studenter. Videre mangler alt som heter tegnsetning i formler.

Til tross for visse innvendinger er helhetsinntrykket av boken absolutt positivt, og stoffvalget fornuftig — eller i hvert fall etter våre ønsker i Bergen. I et innledende kurs er det alltid noe man vil savne, men en foreleser får da anledning til å ri sine kjepphester og supplere stoffet etter sitt eget hode.

Ernst S. Selmer

RALPH P. BOAS, JR.: *A primer of real functions*. (Carus Mathematical Monographs 13.) Published by the Mathematical Association of America. John Wiley & Sons, New York, 1960. 11 + 189 pp. \$ 4.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 81.)

Boka gir ingen systematisk innføring i teorien for reelle funksjoner. Forfatteren sier at hans hensikt er å gi lesere uten spesielle forkunnskaper del i noen resultater han finner særlig interessante. (Av forkunnskaper anbefales et kurs i elementær analyse.)

Boka er delt i to kapitler. Det første har overskriften »Sets«. Her utvikles de grunnleggende deler av mengdelæren (intuitivt). Videre følger en innføring i metriske rom, med begrepene kompaktet og kompletthet. Kapitlet kulminerer med Baire's kategori-teorem. Som anvendelse av dette påvises bl. a. eksistensen av overalt ossilerende kontinuerlige funksjoner. Videre vises at de funksjoner over $[0, 1]$ som har en ensidig derivert i minst ett punkt, danner en mengde av 1. kategori i rommet av kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$, forsynt med uniform topologi. — Til slutt følger et avsnitt om mengder med Lebesgue-mål 0.

Kapitel 2 har overskriften »Functions«. Først behandles kontinuerlige funksjoner, og følger av slike. Her konstrueres en Peano-kurve, og Weierstrass' approksimasjonssats bevises. Videre får vi det velkjente resultat at mengden av kontinuitetspunkter for en funksjon av 1. Baire-klasse (over $[0, 1]$) er overalt tett. — I siste del av kapitlet behandles de Dini-derivate, med forskjellige anvendelser. Bl. a. bevises Lebesgue's teorem: En monoton funksjon har endelig derivert nesten overalt. Her er også et avsnitt om analytiske og uendelig mange ganger deriverbare funksjoner, et om konvekse funksjoner, og et om funksjonallikninga $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Framstillinga er svært klar, stilen nærmest kåserende. Boka kan anbefales til alle som uten spesielle forkunnskaper ønsker en første orientering om reell funksjonsteori.

Olav Njåstad

WOLFGANG FRANZ: *Topologie, I. Allgemeine Topologie*. (Sammlung Göschel 1181.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 144 S. DM 3.60.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 82.)

Boken er en lærebok i generell topologi og den første i en serie på to bind. Annet bind er annonsert og skal handle om algebraisk topologi. I hovedtrekkene er oppbygningen som i tidligere lærebøker i generell topologi. Det er selvsagt å vente når den behandler et emne hvor de fundamentale resultater og begreper stort sett er fullstendig klarlagt og

har fått en fast form. I løpet av knapt hundre sider er de fleste av de viktigste satsene i generell topologi annonsert og bevist. Fremstillingen ser ut til å være grei og oversiktlig.

Første del behandler generell teori. Innledningsvis defineres et metrisk rom og en omegn i et metrisk rom. Dette taes som en kort motivering for definisjonen av et topologisk rom som nå innføres ved omegnsaksiomene. Her forekommer en upresis formulering som er lett tilgivelig, men likevel unødvendig. »Eine topologische Struktur, kurz eine Topologie T , über einer Menge R ist dadurch definiert, dass ...«, og så følger omegnsaksiomene. Deretter omtales topologien T på de følgende sider. En slik formulering definerer ikke noe matematisk begrep som kan symboliseres ved T , spesielt ikke for en leser som studerer topologi for første gang. Det ville derfor være å foretrekke at en enten valgte en presis formulering og like godt forklarte eksplisitt hva T var, eller unnlot å innføre »topologisk struktur« som eget begrep.

Den samme innvendingen gjelder desto mer når forfatteren innfører begrepene u -topologi, T_u , o -topologi, T_o , og k -topologi, T_k . Disse står for topologi definert ved henholdsvis omegner, åpne mengder og tillukningsoperasjon. Det er for øvrig et spørsmål om det er verdt bryderiet å innføre denne kompliseringen av begrepene, selv om den er rent midlertidig.

I del II innføres de viktigste topologiske invarianter, bortsett fra sammenheng og tellbarhetsbetingelser som er innført i del I. Først behandles separasjonskravene. Hausdorff-rom, regulært rom og normalt rom defineres i Bourbaki-terminologi, og Urysohns sats bevises. Konvergens av en punktfølge i et Hausdorff-rom defineres, men behandles svært kort. Filter eller rettet familie innføres ikke. Så følger definisjonen av et kompakt rom og en del av de viktigste egenskapene. Tychonoffs sats bevises bare for endelige produkter. Den generelle satsen burde, etter anmelderens mening, vært bevist i en systematisk fremstilling som denne. Satsen er blant de aller viktigste i generell topologi, og beviset kan tross alt skrives på mindre enn en side. Av kompaktifiseringer nevnes etpunkts kompaktifiseringen til et lokalt kompakt rom.

Del III behandler metriske og metriserbare rom. Her fins blant annet bevist den generelle metriseringssatsen som ble funnet uavhengig av Smirnov, Nagata og Bing i 1950.

Del IV er 33 sider dimensjonsteori. 15 sider går med til å innføre simpleks, simplicial kompleks og noen innledende begreper, så det blir en ganske kort innføring. Overdekningsdimensjonen defineres og utvikles for et kompakt, metrisk rom. Brouwers sats om at det n -dimensjonale Euklidske rom R^n har topologisk dimensjon n bevises. Deretter bevises

at et kompakt, metrisk rom av dimensjon n kan imbeddes topologisk i R^{2n+1} .

For de som er interessert i en god innføring i generell topologi, i lommeformat og til en rimelig pris, anbefales hermed boken.

Jon Reed

HERBERT LUGOWSKI — HANNS JOACHIM WEINERT: *Grundzüge der Algebra, II, III*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 10, 11.) B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1958, 1960. 250 und 275 S. Gebunden DM 11.00 und 13.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 41, og 8 (1960), s. 180.)

Disse bøkene er annet og tredje bind i en serie på tre lærebøker i abstrakt algebra, og bærer titlene »Allgemeine Ring- und Körpertheorie« og »Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen«.

De to første kapitlene i annet bind gir en klar og grei innføring i de grunnleggende algebraiske begrepene, slik som gruppe, ring, ideal, integritetsområde og kropp med mange belysende eksempler. Avsnittet om polynomringer starter meget presist med definisjonen av formelt polynom over en gitt ring R , og gir så eksistensen av en polynomring $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ i n ukjente. Ved denne presentasjonen kommer forskjellen mellom formelt polynom (litt uheldig kalt for hel rasjonal funksjon) og polynomfunksjon tydelig frem. Denne forskjellen er for øvrig også klargjort gjennom et »Einsetzungsprinzip«. Siste kapitel omhandler delbarhetslære og utgjør tyngdepunktet i annet bind. Dette kapitlet er bygget opp slik at vekselvirkningen mellom divisorbegrepet og idealbegrepet kommer særlig klart frem. I de første tre avsnittene er delbarhetslæren således utviklet etter divisorbegrepet, mens de to siste gir en idealteoretisk oppbygning av de samme satsene. Dette opplegget er i full overensstemmelse med den historiske innføringen av idealbegrepet, og gir en forståelse av dette som en ikke uten videre ville ha tilegnet seg ved den moderne motiveringen boken ellers gir.

Over alt finner en en gjennomført stringens og en prisverdig klarhet i behandlingen av stoffet. Således er det for eksempel gjort tydelig rede for at delbarhetssatsene egentlig er utsagn om klasser av assosierte elementer, og at den vanlige ordningsrelasjonen for en Euklidsk ring er forenlig med delbarhetsrelasjonen. Dette er små ting, men ting som det ofte slurves med i elementære lærebøker. For øvrig er hvert avsnitt rikelig forsynt med eksempler og kommentarer, og det fins et vell av oppgaver (med løsninger) til å øve seg på.

Tredje bind er skrevet i samme stil som de to øvrige. Boken har tre kapitler hvorav de to siste, algebraiske kropputvidelser og Galois-teori,

utgjør tyngden i bindet. Presentasjonen her er for så vidt standard og behøver ikke kommenteres. Galois-teorien er naturligvis anvendt på problemet om løsbarehet av algebraiske likninger, og rotoppløsningen av den generelle 3. og 4. gradslikningen er gjennomført i full detalj. Spørsmålet om når en geometrisk konstruksjonsoppgave er løsbare med passer og linjal er presisert og ført frem til løsning. Deretter har forfatterne vist uløsligheten av de tre klassiske problemene: kubens fordobling, vinkelens tredeling og sirkelens kvadratur. Kapitelet avsluttes med å vise hvilke og hvordan regulære n -kanter kan konstrueres.

Det skulle fremgå av denne anmeldelsen at presentasjonen og utvalget av stoffet er den beste. La oss si noen ord om nivået bøkene ligger på. De er selvforsynte og skulle med fordel kunne anvendes til hovedfagsforelesningene i algebra ved Universitetet i Oslo. En bifagsstudent eller hovedfagsstudent i matematikk, som er interessert i algebra og uten særlige forkunnskaper, burde derfor ha adskillig glede av å konsultere disse bøkene. På den annen side vil også litt mer erfarne studenter og lærerne selv ha nytte av den klare gjengivelsen og det rikholdige materialet av illustrasjoner og oppgaver.

Per Holm

H. K. NICKERSON — D. C. SPENCER — N. E. STEENROD: *Advanced calculus*. D. van Nostrand Co., Princeton, Toronto, London, New York, 1959. 8 + 540 pp. \$ 6.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 83–84.)

Tittelen »Advanced calculus» har blant matematikere etter hvert mistet sin opprinnelige betydning. Slår en opp i en lærebok med denne tittelen, vil en i ni av ti tilfeller finne en høyst elementær innføring i analytisk geometri og differensial- og integralregning. Det er derfor med noen forundring en finner kjente matematikernavn på en bok med denne flertydige og misbrukte tittel. Denne forundring forsvinner etter hvert som en går igjennom boken: Forfatterne har med dette arbeidet villet gi uttrykk for hva de mener en »Advanced calculus» anno 1959 bør inneholde. Resultatet av denne revisjonen er blitt en bok utenom det vanlige.

Den omfatter kort vektoralgebra og vektoranalyse, tensoralgebra og tensoranalyse, topologi, differensiable mangfoldigheter (vesentlig R^n) og differensialformer, samt geometrisk integrasjonsteori.

De fem første kapitlene (se innholdsfortegnelsen) gir det algebraiske fundamentet for vektoranalysen i en særdeles elegant form (på nær ett punkt). I de umiddelbart etterfølgende kapitler studeres så vektorvaluerte funksjoner over et skalarområde (inkludert parametriserte romkurver), skalarvaluerte funksjoner over et vektorrom (inkludert funk-

sjoner av n variable) og vektorvaluerte funksjoner over et vektorrom. I hvert tilfelle introduseres den generelle deriverte funksjon (den Frechet-deriverte), og gamle kjenninger som gradient, retningsderivert, divergens og curl opptrer som spesialiseringer av denne. Den direkte praktiske anvendelsen er gitt i et avsnitt om stasjonære strømmende væsker.

Kapitel IX presenterer tensorproduktet av vektorrom på den koordinatfrie måten. Deretter utvikles et formidabelt apparat av graderte vektorrom og graderte algebraer, og kapitlet avsluttes med studiet av den ytre algebra over et endeligdimensjonalt vektorrom.

Kapitel X gir en standardinnføring i de delene av den mengdeteoretiske topologi som er mest nødvendige for analysen. Teoremene om implisitte og inverse funksjoner er utviklet, bl. a. av hensyn til de etterfølgende kapitler.

De to neste kapitlene omhandler differensialformer i endeligdimensionale vektorrom og integrasjon av slike. Den ytre deriverte blir innført, og den del av den singulære homologiteori som er nødvendig for utviklingen av integrasjonsteorien blir enkelt og greit presentert. Kapitel XI gir også utviklingen av den generelle Stokes'ke formel for integrasjon av ytre differensialformer, fra hvilken en får de forskjellige multiippelintegral-teoremene i analysen. Siden boken til dette punkt bare behandler reelle vektorrom, finnes så et siste kapittel som utvikler de viktigste tidligere resultatene for komplekse rom.

Den foreliggende bok står i særklasse hva enhetlig fremstilling og matematisk stringens angår. Det er tydelig at det har ligget forfatterne mer på hjertet å klarlegge den underliggende matematiske struktur på dette området, enn å gi et hendig formelapparat. Anmelderen kjenner ellers ingen annen bok som gir en samlet fremstilling av samme stoff. Presentasjonen er imidlertid ikke alltid like god.

For eksempel er determinanten for en lineær operator til å begynne med bare definert dersom det underliggende vektorrom har dimensjon 1, 2 eller 3. Denne skavanken blir ikke rettet opp før i niende kapittel og gjør at fremstillingen halter på enkelte punkter. I slutten av kapittel II finnes også et avsnitt om eksakte følger som nybegynneren er fullstendig umotivert for, og det forblir han da også mer eller mindre.

Den alvorligste kritikken er imidlertid rettet mot fremstillingen i niende kapittel. For det første er den koordinatmessige innføringen av tensorbegrepet fullstendig utelatt. Studenter som ønsker å komplettere sine kunnskaper i tensoralgebra fra mer klassiske innføringer, vil derfor antagelig ha betydelige vansker med å gjenkjenne begreper de trodde seg fortrolig med. Dernest vil også de for hvem denne boken er beregnet, være umotivert for den veldige formalisme som utvikles under avsnit-

tene om graderte vektorrom og graderte algebraer, hvis eneste berettigelse er å definere tensoralgebraen og den ytre algebra over et vektorrom. En fremstilling som i Bourbaki's »Algèbre multilinéaire« måtte være langt å foretrekke. I kapitel XII kunne også de generelle Stokes'ke og Green'ske formler vært spesialisert til de vanlige i R^3 .

Anmelderen gjør oppmerksom på at ovenstående kritikk er rettet mot svakheter av ren pedagogisk art, som ikke forhindrer at boken er enestående i sitt slag. Intet bibliotek bør være den foruten.

Et beskjedent antall trykkfeil er observert. Definisjon 11.12 av direkte sum av n lineære underrom er således en litt for direkte »generalisering« av definisjonen for direkte sum av to delrom.

Per Holm

ISRAEL H. ROSE: *A modern introduction to college mathematics*. John Wiley & Sons, New York, London, 1959. 21 + 530 pp. \$ 6.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 132.)

Bogens moderne tilsnit antydes på omslaget med mængdelærens symboler, og indledningen er da også en gennemgang af de grundlæggende begreber inden for mængdelæren. Forfatteren tager sit udgangspunkt i simple og overskuelige mængder og indfører ganske instruktivt begreberne (delmængde, foreningsmængde, gennemsnit), men det er imidlertid ejendommeligt, i hvor ringe grad forfatteren senere i bogen gør brug af denne læres symboler og terminologi.

Bogen er iøvrigt delt i tre dele, beregnet for hvert sit semester.

I første del findes behandlingen af det reelle talsystem, hvor forfatteren efter en præcisering af hovedreglerne for regning inden for dette talområde giver beviser for en række sætninger, f. eks. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ o. s. v. Det mest interessante afsnit her er måske afsnittet om ulighed, der behandles på grundlag af et godt formuleret aksiomsystem. Men at komplekse tal så klares på under to sider, siger lidt om stringensen i behandlingen af dette emne.

Trigonometrien er hovedsagelig henlagt til anden del, og der gives en god gennemgang med udledning af de sædvanlige formler og en række øvelseseksempler på deres brug, ligesom formler for trekanter udledes.

I den analytiske geometri behandles ret linie i første semester, og i anden del af bogen findes en præcis udledning af ligning for cirkel, parabel, ellipse og hyperbel, bl. a. gøres der nøje rede for den tilbagegående regning. Endvidere behandles den almindelige ligning af 2. grad i x og y , og som øvelseseksempler vises, hvorledes ellipse og hyperbel kan defineres ud fra ledelinie, brændpunkt og ekscentricitet.

I alle tre dele har forfatteren et afsnit af funktionsteoretisk karakter. I første del indføres funktionsbegrebet som afbildning af en mængde ind i en anden, men efter et par indledende eksempler går forfatteren over til funktioner, der kan beskrives ved simple matematiske udtryk, og den grafiske afbildning demonstreres ved afbildninger af andengrads-polynomier.

Anden del indeholder en omtale af eksponential- og logaritmefunktioner. Behandlingen indledes med potens med hel eksponent, en paragraf om potens med rational eksponent og en meget kort omtale af potens med irrational eksponent, svarende til den gennemgang, der gives i visse danske bøger for realklassen. Logaritmefunktionen defineres derpå som den omvendte funktion til eksponentialfunktionen, og den største plads ofres på den praktiske brug af logaritmeregning.

I tredje del fortsættes gennemgangen af funktionsteorien med differential- og integralregning. For at gøre den studerende fortrolig med grænseovergang indleder forfatteren med overvejelser over hastighed. Derfra når han til begrebet grænseværdi, men begrænser hurtigt sagen til tilfælde, hvor man ganske primitivt kan angive denne, idet der anføres følgende: Det tal (hvis der findes et), som $f(h)$ nærmer sig til, når h nærmer sig til 0, betegnes med $L[f(h)]$, f. eks. $L(2+h+h^2)=2$. Der gøres dog opmærksom på, at et udtryk som $f(h)=\frac{h}{2^h-1}$ ville kræve en mere præcis grænseværdidefinition, som imidlertid ligger uden for bogens rammer. Derefter indføres tangentbegrebet og i forbindelse hermed

$$L\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = f'(x),$$

men hele sagen illustreres stort set ved eksempler, der alle handler om polynomier (spec. andengradspol.). Beviser for regneregler m. m. gives ikke, ligesom anvendelser på monoton og ekstremumsproblemer baseres på påstande om resultater og på eksempler af beskedent omfang. Selv om der er tale om en »introduction«, måtte det nok have været muligt — når der tænkes på 3. semesters elever — at give en noget mere dybtgående analyse af problemerne, bl. a. ville de trigonometriske funktioner være inden for rækkevidde.

Integration defineres som den omvendte proces til differentiation, men der kan ifølge oplægget ikke gives nogen videre undersøgelse, og der noteres væsentligt, at opgaven har uendelig mange løsninger. Anvendelse af integralregningen knyttes til areal, men beviset for sammenhængen mellem areal og integral gennemføres kun for funktionen $y=x^2$,

idet det nævnes, at lignende kan gøres for enhver anden funktion $y = g(x)$, hvor $g(x) > 0$. Endelig omtales i en afsluttende paragraf de »klassiske« symboler Δ , d og $\int$.

Bogens sidste afsnit, der omhandler statistik og sandsynlighedsregning, indledes med en omtale af middeltal og varians, og sandsynlighedsbegrebet indføres derefter på rent intuitiv basis, belyst ved eksempler med plat og krone, terningkast m. m. Der fortsættes med en ganske instruktiv behandling af permutationer og kombinationer, og selv om de almene resultater noteres som konsekvenser af overvejelserne knyttet til de til grund liggende eksempler, virker behandlingen kort og klar. Herefter sluttet med en omtale af regneregler for sandsynligheder.

Alt i alt må siges: A modern introduction to college mathematics er en stor bog af omfang, den behandler talrige emner, en del af dem nøjagtigt og klart, men i mange har forfatteren benyttet en så ordrig og upræcis stil, at det kan være svært at finde sagens kerne, og det kan knibe for læseren at få et virkeligt indtryk af emnet.

Regnar Norgil

MOTTATTE BØKER

Ralph P. Boas, Jr.: *A primer of real functions*. (Carus Mathematical Monographs 13.) Published by the Mathematical Association of America. John Wiley & Sons, New York, 1960. 11 + 189 pp. \$ 4.00.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 73.)

Sets 1–64 * Functions 65–156 * Notes 157–161 * Answers to exercises 163–179 * Index 181–189.

Lothar Collatz: *Differentialgleichungen für Ingenieure*. Zweite, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960. 197 S. DM 21.60.

Einteilung der Differentialgleichungen 11–13 * Richtungsfeld und einfachste integrierbare Typen 14–20 * Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung 20–23 * Bernoullische Differentialgleichung 23–25 * Der integrierende Faktor 25–27 * Vorbereitungen zur Existenz- und Eindeutigkeitsfrage 27–31 * Der allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssatz 31–38 * Singuläre Linienelemente 39–55 * Vermischte Aufgaben und Lösungen 55–60 * Einige Typen nichtlinearer Differentialgleichungen 60–64 * Grundlegende Sätze über lineare Differentialgleichungen 64–67 * Fundamentalsysteme einer linearen Differentialgleichung 67–73 * Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 73–82 * Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 83–88 * Die Eulersche Differentialgleichung 88–90 * Systeme linearer Differentialgleichungen 91–101 * Anhang zu Kapitel II: Transformation normaler und normalisierbarer Matrizen auf Diagonalgestalt 101–106 * Rand-, insbesondere Eigenwertaufgaben 106–107 * Beispiele linearer Randwertaufgaben 107–110 * Beispiele nichtlinearer Randwertaufgaben 111–117 * Die Alternative bei linearen Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen 117–119 * Lösung von Randwertaufgaben mit Hilfe der Greenschen Funktion 119–126 * Beispiele von Eigenwertaufgaben 127–134 * Eigenwertaufgaben und Orthonormalsysteme 134–145 * Vermischte Aufgaben und Lösungen zu Kapitel II und III 145–150 * Kugelfunktionen 150–158 * Zylinderfunktionen 158–170 * Reihenentwicklung, hypergeometrische Funktion 170–175 * Allgemeine Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 175–179 * Randwertaufgabe der Potentialtheorie 180–183 * Einige Näherungsverfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 183–192 * Verzeichnis einiger deutschsprachiger Bücher 193 * Sachverzeichnis 194–197.

Wolfgang Franz: *Topologie, I. Allgemeine Topologie*. (Sammlung Götschen 1181.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 144 S. DM 3.60.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 73-75.)

Literaturverzeichnis 5 * Einleitung 6-9 * Axiomatische Grundlegung 9-31 * Ausbau der Theorie 31-48 * Beziehungen verschiedener Topologien zueinander 48-57 * Durch Trennungsaxiome definierte Räume 58-66 * Durch Überdeckungseigenschaften definierte Räume: Kompakte Räume 66-75 * Theorie des metrischen Raumes 75-85 * Kompakten 85-95 * Metrisierung topologischer Räume 95-106 * Polyeder 106-122 * Dimension von Kompakten 122-139 * Grundformeln aus der Mengenlehre 140-141 * Index 142-144.

Gottfried Köthe: *Topologische lineare Räume, I*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 107.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 12 + 456 S. Ganzl. DM 78.00.

Der topologische Raum 1-9 * Gerichtete Systeme und Filter 9-17 * Kompakte Räume und Mengen 17-24 * Metrische Räume 24-31 * Uniforme Räume 31-41 * Reelle Funktionen auf topologischen Räumen 41-50 * Lineare Räume 51-62 * Lineare Abbildungen und Matrizen 62-72 * Der algebraisch duale Raum. Tensorprodukte 72-85 * Lineartopologische Räume 85-105 * Gleichungstheorie in E und E^* 105-112 * Lokal linear kompakte Räume 112-117 * Die lineare starke Topologie 117-126 * Normierte Räume 127-148 * Topologische lineare Räume 148-176 * Konvexe Mengen 176-189 * Die Trennung konvexer Mengen. Der Satz von Hahn-Banach 189-204 * Definition und einfachste Eigenschaften lokalkonvexer Räume 205-217 * Lokalkonvexe Hülle und Kern, induktiver und projektiver Limes lokalkonvexer Räume 218-235 * Dualität 235-256 * Die verschiedenen Topologien eines lokalkonvexen Raumes 256-277 * Bestimmung verschiedener dualer Räume und ihrer Topologien 277-296 * Der biduale Raum. Halbbreflexivität und Reflexivität 297-313 * Einige Sätze über kompakte und über konvexe Mengen 313-333 * Extrempunkte und Extremalstrahlen konvexer Mengen 333-345 * Metrische Eigenschaften normierter Räume 345-369 * Tonnelierte Räume und Montelräume 370-381 * Bornologische Räume 382-395 * (F) - und (DF) -Räume 396-408 * Vollkommene Räume 408-427 * Gegenbeispiele 427-439 * Literaturverzeichnis 440-449 * Namen- und Sachverzeichnis 450-456.

Lectures on modern teaching of geometry and related topics. Aarhus Universitet, Aarhus, 1960. Stencil. 2 + 169 s. D.Kr. 15.00.

H. Behnke, Münster: Felix Klein und die heutige Mathematik 1-21 * G. Pickert, Tübingen: Axiomatik im Geometrieunterricht 22-30 * Discussion 31-33 * J. Dieudonné, Paris: The introduction of angles in geometry 34-43 * Discussion 44-47 * G. Choquet, Paris: Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire 48-103 * Discussion 104-105 * W. Fenchel, Copenhagen: On the relation between synthetic and analytic geometry in secondary schools 106-111 * Appendix 112-118 * Discussion 119-120 * G. Hajos, Budapest: Über die Genauigkeit im Geometrieunterricht 121-125 * Discussion 126-127 * H. Freudenthal, Utrecht: Logik als Gegenstand und als Methode 128-146 * Comments on the discussions 147-169.

Sophus Lie: *Gesammelte Abhandlungen*. Band 7. (35 Abhandlungen aus dem Nachlass.) Herausgegeben von Friedrich Engel. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig; H. Aschehoug & Co., Oslo, 1960. 10 + 476 S. DM 40.50.

Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen, II 1–10 * Über partielle Differentialgleichungen zwischen vier Variablen 11–25 * Über partielle Gleichungen erster Ordnung mit bekannten infinitesimalen Transformationen 26–42 * Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit bekannten infinitesimalen Berührungstransformationen 43–53 * Über partielle Gleichungen erster Ordnung 54–70 * Über partielle Gleichungen erster Ordnung zwischen n Variablen 71–88 * Über Differentialgleichungen, welche bekannte infinitesimale Transformationen gestatten 89–95 * Partielle Differentialgleichungen und Pfaffsches Problem 96–100 * Zur Invariantentheorie der Berührungstransformationen 101–106 * Über das Pfaffsche Problem 107–111 * Partielle Differentialgleichungen und Berührungstransformationen 112–114 * Neue Integrationsmethode eines beliebigen Pfaffschen Problems 115–131 * Semilineare und quasilineare Differentialgleichungen 1. Ordnung und Pfaffsche Systeme 132–156 * Verallgemeinerung der Cauchyschen Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 157–174 * Geschichtliche Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 175–216 * Zur Geschichte der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 217–219 * Über simultane Systeme, die in den unbekannten Funktionen linear und homogen sind 220–224 * Schar von ∞^3 oder ∞^4 Kurven des Raumes, die eine Gruppe von Punkttransformationen gestattet 225–230 * Die Transformationsgruppen einer Gleichung: $s - F(x, y, z) = 0$ 231–241 * Die Transformationsgruppen einer Gleichung $s - F(x, y, z, p, q) = 0$ 242–250 * Über partielle Differentialgleichungen von der Form: $s = F(x, y, z, q)$ 251–256 * Über partielle Differentialgleichungen 257–261 * Sur les groupes continus infinis et les équations différentielles 262–269 * Zur Invariantentheorie der unendlichen Gruppen 270–271 * Gruppentheorie, angewandt auf Geometrie 272–300 * Über einen Linienkomplex im R_4 301–310 * Bestimmung der Haupttangentenkurven einer Flächenfamilie 311–314 * Zur Flächentheorie 315–322 * Ausdehnung des Meusnierschen Theorems 323–325 * Neue geometrische Deutung und Verwertung des Abelschen Theorems 326–360 * Funktionengleichungen, welche die Abelschen Integrale erster Gattung definieren 361–385 * Einzelne Aufzeichnungen über Funktionalgleichungen, welche die Abelschen Integrale erster Gattung definieren 386–402 * Translations- M_3 zweiter Art im R_4 403–446 * Einzelne Aufzeichnungen zu den Translations- M_3 zweiter Art im R_4 447–457 * Über die Plückersche Liniengeometrie 458–466 * Über den Einfluss der Geometrie auf die Entwicklung der Mathematik 467–476.

H. K. Nickerson — D. C. Spencer — N. E. Steenrod: *Advanced calculus*. D. van Nostrand Co., Princeton, Toronto, London, New York, 1959. 8 + 540 pp. \$ 6.50.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 76–78.)

The algebra of vector spaces 1–21 * Linear transformations of vector spaces 22–62 * The scalar product 63–80 * Vector products in R^3 81–94 * Endomorphisms 95–111 * Vector-valued functions of a scalar 112–142 * Scalar-valued functions of a vector 143–168 * Vector-valued functions of a vector 169–189 * Tensor products

and the standard algebras 190–265 * Topology and analysis 266–326 * Differential calculus of forms 327–406 * Integral calculus of forms 407–458 * Complex structure 459–540.

Robert Schatten: *Norm ideals of completely continuous operators.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 27.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 8 + 81 S. DM 23.60.

Preliminaries and notation 1–7 * The class of operators of the form $\sum_j \lambda_j \varphi_j \otimes \bar{\psi}_j$ 7–28 * The Schmidt-class 29–36 * The trace-class 36–45 * The successive conjugate spaces of the space $\mathfrak{C}$ of all completely continuous operators 45–54 * Norm ideals 54–79 * Bibliography 80–81.

George B. Thomas, Jr.: *Calculus and analytic geometry.* Third edition. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1960. 12 + 1010 pp. \$ 9.75.

The rate of change of a function 1–53 * Derivatives of algebraic functions 54–103 * Applications 104–154 * Integration 155–221 * Applications of the definite integral 222–287 * Transcendental functions 288–335 * Methods of integration 336–395 * Determinants and linear equations 396–436 * Plane analytic geometry 437–509 * Hyperbolic functions 510–534 * Polar coordinates 535–560 * Vectors and parametric equations 561–602 * Solid geometry and vectors 603–656 * Partial differentiation 657–729 * Multiple integrals 730–764 * Infinite series 765–838 * Complex numbers and functions 839–874 * Differential equations 875–912 * Answers to problems 913–993 * Appendix: Formulas from elementary mathematics 995–998 * Tables 999–1001 * Index 1003–1010.

Kosaku Yosida: *Lectures on differential and integral equations.* (Inter-science tracts in pure and applied mathematics 10.) Interscience Publ., New York, London, 1960. 9 + 220 pp. \$ 7.00.

Successive approximations 1–21 * Linear differential equations of the n^{th} order 21–37 * Second order differential equations of the Fuchs type 37–59 * Boundary value problem 61–76 * Hilbert-Schmidt theory of integral equations with symmetric kernels 76–110 * Asymptotic expressions of eigenvalue and eigenfunctions, Liouville's method 110–114 * Fredholm alternative theorem 115–127 * The Schmidt expansion theorem and the Mercer expansion theorem 127–139 * Singular integral equations 139–143 * Volterra integral equations of the second kind 145–153 * Volterra integral equations of the first kind 153–160 * Classification of singular boundary points 160–173 * The general expansion theorem 173–192 * Examples 192–208 * Non-linear integral equations 209–212 * From the theory of functions of a complex variable 213–215 * Bibliography 217–218 * Index 219–220.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 206–210 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i neste hefte, være sendt innen 15. august 1961.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

206. Antag att ekvationen

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots \pm a_{n-1} z + (-1)^n \alpha = 0 ,$$

där $n > 1$ och $0 < \alpha < 1$, har alla sina rötter inom eller på enhetscirkeln. Bestäm för varje koefficient a_k det största möjliga absolutvärdet. (Problemet ställs i en uppsats om system av differentialekvationer med periodiska koefficienter, V. M. Starzhinskii: On the stability of a trivial solution of a linear system with periodic coefficients, Appl. Math. and Mech. 1958, p. 913, där i. ö. specialfallet $k=1$ behandlas inkorrekt.)

Magnus Tideman

207. Den normala fördelningsfunktionen $\Phi(x)$ är definierad genom

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt .$$

Om $a \geq 0$ och $b \geq 0$, visa att

$$\Phi(-a-b) \leq 2\Phi(-a)\Phi(-b) .$$

Carl-Gustav Esseen

208. Hvilke vilkår må de komplekse tall p og q oppfylle dersom funksjonen

$$f(z) = \sin pz - \cos qz ,$$

foruten nullpunkter av første orden, også skal ha nullpunkter av annen orden? Bestem i tilfelle disse nullpunktene av annen orden.

D. S. Mitrinović (Beograd)

209. La a, b, c være tre innbyrdes ulike reelle tall. Sett $a+b+c=p$, $a^2+b^2+c^2=q$, $ab+bc+ca=r$, og bevis riktigheten av ulikhetene

$$3 \min(a, b, c) < p - \sqrt{q-r} < p + \sqrt{q-r} < 3 \max(a, b, c).$$

D. S. Mitrinović

(Teksten til oppg. 208 og 209 er oversatt til norsk av red.)

210. I et rettvinklet koordinatsystem fyller et glasslegeme den kvadrant hvor både x og y er positive. En lysstråle med retningskosiner $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ går inn i glasset gjennom planet $y=0$. Hvis strålen forlater glasset gjennom planet $x=0$, blir z -aksen brytende kant. Hvilke retningskosiner α, β, γ har strålen etter utgangen, uttrykt ved $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ og brytningstallet n ?

Johs. Lohne

LØSNINGER

Oppgave 201 har fått en uheldig utformning, idet rekken etter den foreskrevne omordning bare konvergerer med summen 1 dersom leddene grupperes sammen på en passende måte.

200. En række $a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} < \dots < a_{2n+1}$ av på varandra följande hela kvadrater är given. Bevisa att vid ett visst värde på k och a_1 som funktioner av n är

$$\sum_{\mu=1}^k a_{\mu} = \sum_{v=k+1}^{2n+1} a_v.$$

A. V. Peljo

Lösning: Eftersom följden är växande, måste k vara $\geq n+1$. Välj $a_{n+1+p} = (b+p)^2$, där b enligt förutsättningen är $\geq n$. Skriv om likheten

$$\sum_{\mu=1}^n a_{\mu} + \sum_{\mu=n+1}^k a_{\mu} = \sum_{v=n+1}^{2n+1} a_v - \sum_{v=n+1}^k a_v$$

till

$$b^2 + \sum_{p=1}^{k-n-1} (b+p)^2 = 4 \sum_{p=1}^n bp.$$

Med kända summationsformler ger detta

$$b^2 + b \left[k - n - 1 - \frac{2n(n+1)}{k-n} \right] + \frac{1}{6}(k-n-1)(2k-2n-1) = 0.$$

Ett nödvändigt villkor för heltalslösningar i b är heltalskoefficienter; $k-n$ delar $2n(n+1)$ för $k=n+1$, $n+2$ och $2n$ ($k < 2n+1$). Konstantledets värde för respektive k -värden är 0 , $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{6}(n-1)(2n-1)$. Det nödvändiga villkoret är allmänt uppfyllt endast för $k=n+1$ som ger $b=2n^2+2n$, alltså

$$k = n+1, a_1 = (2n^2+n)^2.$$

Bertil Marksjö

Samme løsning er funnet av Harry Björk, Erik Engegren og Johs. Lohne. Om der for visse n også finnes andre løsninger, er et åpent spørsmål.

203. Finn antallet av de n -sifrede naturlige tall hvis tverrsum er $t < 10$.

Brynjolf Dokken

Lösning: Ett n -siffrigt tal med siffersumman t ($t < 10$, $n > 1$) kan ha uppkommit antingen ur ett $(n-1)$ -siffrigt med siffersumman t genom att man har tillfogat en nolla, eller ur ett n -siffrigt med siffersumman $t-1$ genom att man har adderat en etta. (Sista siffran var ju där säkert mindre än 9.) Om $a_{n,t}$ är antalet n -siffriga tal med siffersumman t gäller alltså

$$a_{n,t} = a_{n-1,t} + a_{n,t-1},$$

med $a_{1,t} = 1$ för $t = 1, 2, \dots, 9$, $a_{n,1} = 1$ för alla n . Talen $a_{n,t}$ bildas alltså på liknande sätt som binomialkoefficienterna, och

$$a_{n,t} = \binom{n+t-2}{t-1}.$$

Harry Björk

Opgaven har til dels vært tolket slik, at en skulle finne antallet av *alle* n -sifrede tall med tverrsum < 10 , altså

$$\sum_{t=1}^9 a_{n,t} = \binom{n+8}{8}.$$

Opgaven er også løst av Oskar Backlund, Gunnbjørg Gismarvik, Johs. Lohne og Stieg Mellin-Olsen.

204. Gennem midtpunktet af hver side i en indskrivelig firkant trækkes en linie vinkelret på den modstående side. Bevis, at disse linier alle går igennem det samme punkt. (Der bliver ialt 6 lodlinier, idet vinkelspidsernes orden er ligegyldig.) Om firkanten kan der omskrives een ligesidet hyperbel. Hvilken rolle spiller lodliniernes skæringspunkt for denne?

Sigurkarl Stefánsson

Løsning: De vinkelrette gennem midtpunkterne P_1 og P_3 af to modstående sider danner sammen med disse siders midtnormaler et parallelogram P_1SP_3O , hvor O er centrum for den omskrevne cirkel. Diagonalen P_1P_3 's midtpunkt M er tillige midtpunkt i parallelogrammet $P_1P_2P_3P_4$. S er da i alle tre tilfælde symmetrisk med O med hensyn til M .

S er hyperblens centrum. Lægges et koordinatsystem således, at hyperblen får ligningen $xy=1$, får M abscissen $\frac{1}{4} \sum x_i$. Betingelsen for, at firkanten er indskrivelig, er at $x_1x_2x_3x_4=1$. Anvendes dette, får O abscissen $\frac{1}{2} \sum x_i$. Tilsvarende får M og O ordinaterne $\frac{1}{4} \sum 1/x_i$ og $\frac{1}{2} \sum 1/x_i$, og S bliver da $(0, 0)$.

Bernhard Andersen

205. Bevis formelen

$$\int \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} \sin x dx = -2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos kx}{k} - \frac{\cos nx}{n} + C.$$

I. Johansson

Løsning: Man har

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin kx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \sin \frac{1}{2}(n-1)x}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x} \cos \frac{1}{2}x - \sin \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}nx.$$

Nå er $\cotg \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ og $2 \sin^2 \frac{1}{2}nx = 1 - \cos nx$. Dette gir

$$\frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} \sin x = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sin kx + \sin nx.$$

Oppgavens formel følger da ved integrasjon.

Per Roar Andenæs

Også løst av Otto Borgersen, Ragnar Dybvik, Erik Engegren, Gunnbjörg Gis-marvik, P. W. Karlsson, Per M. Kjeldaas, Johs. Lohne, Bertil Marksjö og Norvald Midttun.

RESULTAT AV PRISTÄVLINGEN FÖR SVENSKA GYMNASISTER (Uppgifterna i NMT 7 (1959), S. 188–189.)

Lösningar insändes från sammanlagt 36 deltagare. Första pris, 100 kr., tilldelades Gustav Ehrnst, Högre allm. läroverket, Bromma, medan andra pris, 50 kr., tillföll Kjell A. Jonsson, Karolinska Högre allm. läroverket, Örebro.

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1960 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 8.2 P. C. Hammer, Wisconsin: *Planar convex bodies*.
- 3.3 Diskussion om forslag til ny læseplan i matematik for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasium, indledt af O. Rindung.
- 17.3 E. Thue Poulsen, Aarhus: *Lidt om nogle vigtige problemstillinger inden for partielle differentialligninger*.
- 21.3 A. W. Goldie, Newcastle: *The structure of rings with maximum condition*.
- 5, 7.4 W. V. D. Hodge, Cambridge: *Complex manifolds: A survey. Algebraic varieties*.
- 25.4 K. Krickeberg, Heidelberg og Aarhus: *Martingaler over ikke-monotone stokastiske baser*.
- 9.5 N. E. Nørlund: *Om konfluente hypergeometriske funktioner*.
- 23.5 J. A. Clarkson, Massachusetts: *The fundamental theorem for two-person games*.
- 26.9 H. Tornehave: *Konform afbildning ved hjælp af elektronregnemaskine*.
- 20.10 Vilh. Jørgensen: *Om nogle forsøg på at simplificere den klassiske differential- og integralregning*.
- 24.10 M. D. Donsker, Minneapolis, (Aarhus): *Some connections between stochastic processes and analysis*.
- 7.11 J. L. Lions, Nancy, (Aarhus): *On interpolation theory*.
- 17.11 D. Fog: *Om et punkts beliggenhed i forhold til visse regulære punktsæt*.
- 28.11 H. Hasse, Hamburg: *Über die Bernoullischen Zahlen*.
- 12.12 L. Greenberg, Brown University: *Discrete subgroups of the Lorentz group*.

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

- 19.10 T. Gutmann Madsen: *Om matematisk logik*.
- 19.10 H. Tornehave: *Matematikkursus under den nye studieplan for cand. scient.-studiet*.
- 20.10 J. Helms: *Eksempler på praktisering af de nye læseplaner*.

Endvidere var foreningen medarrangør af OEEC's fælles-skandinaviske matematiklærerkursus i Aarhus 4.-16. juli.

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 27.1 A. B. Clarke, University of Michigan: *Random processes arising in the theory of waiting lines*.

- 28.1 K. Krickeberg, Heidelberg: *Sukzessive Mittelbildungen in Orliczischen Räumen*.
- 10.2 P. J. Myrberg: *Funktioista, jotka tyydyttävät toisen asteen kertosäännön* [Om funktioner, som satisfiera en multiplikationsregel av andra graden].
- 16.3 K. Inkeri: *Thue–Siegel–Roth'in lauseen eräistä sovellutuksista* [Om några tillämpningar av Thue–Siegel–Roth's sats].
- 24.3 N. I. Bech, København: *Om de elektroniske regnemaskiners fremtid og om Regnecentralens virksomhed*.
- 13.4 L. Gårding, Lund: *Fundamentallösningar*.
- 11.5 M. Donsker, Minneapolis: *Inversion formulae for characteristic functionals of stochastic processes*.
- 18.5 T. Klemola: *Differentielleistä algebroista* [Om differentiella algebror].
- 24.5 F. W. Gehring, University of Michigan: *Conformal capacity and quasiconformal mappings in space*.
- 7.9 H. H. Keller, Zürich: *Eine Integrabilitätsbedingung für Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*.
- 19.10 P. J. Myrberg: *Rationaalisesti polymorfisista funktioista* [Om rationellt polymorfa funktioner].
- 23.11 O. Lokki: *Lineaaristen yhtälöryhmien iteratiivisista ratkaisumenetelmistä* [Om iterativa lösningsmetoder för lineära ekvationssystem].

FINLANDS MATEMATIK-, FYSIK- OCH KEMILÄRARFÖRBUND.

- 21.2 Årsmöte.
- 20–22.6 Föreläsnings- och diskussionsdagar i Helsinki. Program: ekonomisk uppfostran, samhällsmatematik och statistik.
- 5–6.11 Föreläsnings- och diskussionsdagar i Hämeenlinna. Föredrag av matematiskt innehåll:
- A. Kantanen: *Lösning av ekvationer med hjälp av räknestickan*.
- C. G. Wolff: *Undervisning i mängdlära*.
- V. Kuuskoski: *Undervisning i räkning efter Montessori-metoden*.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

- 3.2 Leifur Asgeirsson: *Om begyndelsesværdiproblemet for lineære partielle differentiaalligninger af anden orden*.
- 2.5 N. I. Bech, København: *Om elektronregnemaskiner*.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 10.5 O. Reiersøl: *Noen ikke assosiative algebraer som kan studeres ved hjelp av summerings- og differensoperatorer*.
- 19.5 S. Bundgaard, Aarhus: *Eudoxos' proporsjonslære i lys av nyere betraktningsmåter*.
- 9.6 A. Speiser, Basel: *Leonhard Eulers geometrische Arbeiten*.
- 23.8 J. O. Stubban, Trondheim: *Theorema elegantissimum — en flateteoretisk setning av Gauss med mange elementære anvendelser*.
- 27.9 O. A. Laudal: *Produktformelen i dimensjonsteorien*.
- 15.11 O. Hustad: *Om utvidelse av positive lineære funksjonaler*.

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

- 29.1 K. Kjelberg: *De foreløpige planer for matematikkundervisningen i den ni-årige skolen.* (Oslo.)
- 3.3 I. Johansson, K. Mønnesland og J. Sandven: *Eksamen — Standpunktprøver.* (Oslo.)
- 15.3 M. Flordal: *Eksaminasjon og karaktergiing.* (Drammen.)
- 30.3 K. Kjelberg, B. Rudberg og J. Sandven: *Den nye undervisningsplanen for regning og matematikk i den niårige enhetsskolen.* (Oslo.)
- 2.4 J. Svendsen: *Forsøksplanen i matematikk.*
- A. Gjelsvik: *Matematikken på OEEC-seminaret i Frankrike.* (Kongsvinger.)
- 24.9 Max Slagstad: *Gjeldende siffer.* (Ålesund.)
- 2.11 A. Kullerud og O. Høyvoll: *Matematikken i U. S. A. og Danmark etter de nye planer.* (Oslo.)

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

- 26.3 Möte i Stockholm:
- Å. Pleijel: *Asymptotisk egenvärdefördelning vid icke-definita problem.*
- I. Wik: *Om lineärt beroende inom slutna mängder.*
- A. Tengstrand: *Rotationsinvarianta distributioner.*
- Orientering angående internationella matematikerkongressen i Stockholm 1962.
- B. Kjellberg: *En sats om minimimodulen för hela funktioner.*
- H. Wallin: *Konvergens av jämviktsfördelningar vid starkt singulära kärnor.*
- A. Persson: *Om spektrum till operatorn $-\Delta + q(x)$.*
- 28.5 Möte i Stockholm:
- Y. Domar: *Något om spektralteorien för komplexa funktioner.*
- T. Ganelius: *Om en sats av Ganelius.*
- 26.11 Möte i Stockholm:
- N. O. Wallin: *Ett problem för elliptiska operatorer.*
- B. Rosén: *Om den asymptotiska fördelningen av summor av lika fördelade oberoende statistiska variabler.*
- K. Björup: *Om olikheter av Poincarés typ.*
- Å. Pleijel: *Tauberteorem.*
- E. Asplund: *Approximation av symmetriska konvexa figurer med parallelogram.*
- I. Lind: *En iterationsmetod vid konform avbildning.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I LUND.

- 20.4 Vårmöte med studiebesök hos Skånska Ättiksfabriken i Perstorp. Föredrag hölls om olika kemisk-teknologiska problem.
- 20.11 Höstmöte, som ägnades åt fysik och kemi.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM.

- 7-8.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 8, s. 52-53.

VÄSTSVENSKA FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG
UNDERSVNING.

12.2 Möte i Alingsås:

G. Holmström: *Fysikundervisningen i enhetsskolan*. Diskussion.

J. Amundsson: *Synpunkter på elementär geometriundervisning*. Diskussion.

30.10 Årsmöte i Göteborg:

C. E. Sjöstedt: *Aktuella problem i matematikundervisningen*.

Vid årsmötet omvaldes till ordförande resp. vice ordförande rektor Arne Pleijel och rektor Sten Friberg samt till sekreterare resp. kassaförvaltare lektor Per Häggmark och adjunkt Ilmar Melin.

FORENINGSNYTT

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERSVNING
I STOCKHOLM

höll årsmöte den 3-4 januari 1961. Till ordförande, sekreterare resp. skattmästare omvaldes lektor Ernst Knave, adjunkterna Jan O. Unenge och Jacob Isander. Till vice ordförande valdes rektor Walter Ekman efter lektor Fredrik Ehrnst, som undanbett sig återval.

Under årsmötet hölls följande föredrag och demonstrationer:

K. Lindbergh, Köln demonstrerade fysikaliska experiment med ny apparatur.

J. Klein: *Redogörelse för resultaten från gemensamma provräkningar i matematik i enhetsskolan, årskurs 7*.

A. Fredga: *Adamantoida föreningar*.

C. E. Sjöstedt: *Några intryck från en studieresa i Sovjetunionen*.

C. E. Sjöstedt: *Nya typer av realexamensskrivningar i matematik*.

E. Knave: *Den moderna fysiken i undervisningen*. Diskussion.

Studiebesök vid AB Atomenergis forskningsstation i Studsvik.

FORENINGENES FORMENN

Nedenfor angis navn og adresse til formennene i de utgivende foreninger:

Dansk matematisk forening: Professor Werner Fenchel, Sønderengen 110, Søborg.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark: Lektor Henrik Meyer, Bakkedraget 15, Birkerød.

Finlands matematiska förening: Kansler P. J. Myrberg, Helsingfors Universitet.

Matematik-, fysik- och kemilärarförbundet: Dr. Urpo Kuuskoski, Linnan-koskenkatu 12 A, Helsinki.

Íslenzka stærðfræðafélagið: Lektor Sigurkarl Stefánsson, Barónsstígur 24, Reykjavík.

Norsk matematisk forening: Dosent Karl Egil Aubert, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

Norsk lektorlags matematikkseksjon, Oslo krets: Lektor Johan Borse, Mellombølgen 19, Lambertseter.

Svenska matematikersamfundet: Professor Åke Pleijel, Matematiska institutionen, Sölvegatan 14, Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund: Rektor Johan Hemmingsson, Johannes Samrealskola och Gymnasium, Rådmansgatan 24, Malmö S.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm: Lektor Ernst Knave, Näckrovsvägen 14, Solna.

Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning: Rektor Arne Pleijel, Drottninggatan 58 C, Trollhättan.

UTNEVNELSER

Til professor i matematik ved Danmarks tekniske Højskole: Dr. phil. B. Fuglede som efterfølger for professor, dr. phil. A. F. Andersen.

Til professor i matematik ved Danmarks Lærerhøjskole: Afdelingsleder sammesteds B. Christiansen som efterfølger for professor P. O. Neerup.

Til professor i matematik vid Oulun Yliopisto: Docent O. Tammi.

Til dosent i anvendt matematikk ved Universitetet i Bergen: Dr. philos. S. Tjøtta.

NY TIDSKRIFT

Nordisk Tidskrift för Informationsbehandling (BIT) är en ny nordisk publikation som i främsta rummet kommer att innehålla nordiska författares arbeten inom områdena numerisk analys, matematikmaskinteknik, operationsanalys, programmering samt databehandling inklusive kontorsautomation. Avsikten är i första hand att ge plats för nya resultat inom dessa områden, men därjämte kommer utrymme att beredas även för orienterande översiktsartiklar. Formella utgivare är de olika nordiska samfunden för informationsbehandling och huvudredaktör är Carl-Erik Fröberg, Avd. för numerisk analys, Sölvegatan 14, Lund. BIT utkommer med 4 häften per år och kan beställas från Regnecentralen, Gl. Carlsbergvej 2, København Valby. (Pren.priset är 16 DKr, 16 NKr, 750 FMk, 90 IslKr och 12 SKr resp.)

NORDISK EKSPERTUTVALG

Gjennom Nordisk Kulturkommisjon er det nedsatt et *Nordisk ekspertutvalg vedrørende modernisering av matematikkundervisningen*. Utvalget har følgende medlemmer:

Danmark: Viceskoleinspektør Agnete Bundgaard, professor Bent Christiansen, universitetslektor Erik Kristensen og lektor Ole Rindung.

Finland: Överl., dipl. ing. Harkko Helvelahti, lektor Yrjö Juve, professor Matti Koskenniemi og rektor Inkeri Simola.

Norge: Øvingsskolestyrer Torgeir Bue, lektor Henrik Halvorsen, professor Ingebrigt Johansson og rektor Kay Piene.

Sverige: Adjunkt Göran Holmström, undervisningsrådet Lennart Sandgren, lektor Sixten Thörnqvist og direktör Thure Öberg.

Utvalget har hatt møter i Stockholm 3-4.10 1960 og i Oslo 26-28.2 1961. Undervisningsrådet Sandgren er valgt til formann. Det er nedsatt tre arbeidsutvalg som behandler planer for klassetrinnene 1-6, 7-9 og 10-12. Deres utkast til planer ble

drøftet på møtet i Oslo, og det er meningen å få i stand forsøksundervisning i enkelte emner i skoleåret 1961-62.

Utvalgets sekretær er lektor M. Håstad, Stockholm.

AVTALE MED AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Dansk matematisk forening, Finlands matematiska förening, Íslenzka stærðfræðafélagið, Norsk matematisk forening og Svenska matematikersamfundet har inngått en avtale med American Mathematical Society. For å gjøre medlemmer av de nordiske matematiske foreninger oppmerksomme på de rettigheter avtalen gir dem, gjengir vi de aktuelle utsnitt av avtalen:

"An individual member of any of the reciprocating organizations may join the American Mathematical Society by submitting an application for membership on the usual form, which may be obtained from the office of the Society. However, the usual requirements that the application be endorsed by two members of the Society and that the candidate be elected by the Council are waived.

The annual dues of individuals who are members of both the American Mathematical Society and one of the reciprocating organizations and who reside outside the North American area are fixed at one-half the full rate. At present, the full rate is \$ 14.00 and members eligible under this provision pay annual dues of \$ 7.00.

By action of the Board of Trustees of the American Mathematical Society, members eligible for dues at one-half the full rate as explained above may also subscribe the TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY at the special rate of \$ 3.50 per volume (compared with \$ 4.00 per volume for other members and \$ 8.00 per volume for non-members). Thus when four volumes of the TRANSACTIONS are published in a year, the annual subscription rate for those eligible under this provision is \$ 14.00 per year.

In addition to the special privileges mentioned above, members of the Society under one of the reciprocity agreements enjoy all the usual privileges of membership such as receiving the NOTICES; the PROCEEDINGS, and the BULLETIN, and presenting papers at meetings of the Society, purchasing the publications of the Society and certain other publications at reduced rates, and subscribing to MATHEMATICAL REVIEWS at the members' rate of \$ 16.00 per year. They are also permitted to substitute the TRANSACTIONS for the PROCEEDINGS upon payment of a premium to dues of \$ 10.00 in 4-volume years. They are also allowed to substitute MATHEMATICAL REVIEWS for the PROCEEDINGS by paying a premium of \$ 10.00 to the dues. These and other privileges are set forth in detail in a BULLETIN OF INFORMATION, which may be obtained from the Headquarters Office of the Society, 190 Hope Street, Providence 6, Rhode Island, U. S. A.

Persons who are members of both the American Mathematical Society and one of the reciprocating organizations and who reside (even on a temporary appointment) in the North American area are not entitled to special privileges in the American Mathematical Society. However, appropriate special privileges are presumably extended to such persons by the reciprocating organizations of which they are members."

SUMMARY IN ENGLISH

NILS ÅSLUND: *The fundamental theorems of information theory, I.* (Swedish.)

The fundamental concepts of information theory are introduced in connection with a study of the lengths of messages at optimal coding. In part I, the first fundamental theorem is proved. Some loss of generality is accepted in order to achieve simple derivations. Emphasis is given to the fact that information theory is an abstract mathematical model, and references to the physical world which might obscure this point have been avoided.

POUL EINAR HANSEN: *The Jordan content of point sets.* (Danish.)

A simple proof is given for the well known result that every bounded convex point set in Euclidean n -dimensional space has a Jordan content.

VIGGO BRUN: *Music and Euclidean algorithms.* (Norwegian.)

In four problems from music theory (equations (1)–(4) pp. 29–30), the simultaneous approximation of certain real numbers by rational numbers with the same denominator is wanted. The problems are all handled by the same subtraction algorithm, introduced earlier by the author, whereby the largest number at each step is replaced by the difference between the largest and the second largest number. As a result, the approximations (5)–(7) pp. 34–35 are obtained for the problems (2)–(4) respectively.

ERNST S. SELMER: *Continued fractions in several dimensions.* (Norwegian.)

In connection with the preceding article by V. Brun, another subtraction algorithm is introduced, whereby the largest number at each step is replaced by the difference between the largest and the *smallest* number. This means slower convergence and consequently more convergents, as illustrated for Brun's problem (2). The not underlined triplets of (5) p. 39 represent approximations not obtained by Brun.

In three dimensions, the two methods are compared with respect to the problem of periodicity of the expansion for $\sqrt[3]{D^2}:\sqrt[3]{D}:1$. Such a periodicity is obtained for $D=2$ with Brun's method, for $D=2, 3, 4$ and 5 with the author's. The cases $D=3$ (Brun) and $D=6, 7$ (Selmer) do at least not show any periodicity within the first 100 steps.

HANS RIESEL: *Recursion formulas for Bernoulli's numbers.* (Swedish.)

Bernoulli's numbers B_n can be defined by the symbolic relation

$$(B+1)^m - B^m = 0, \quad m = 2, 3, \dots; \quad B_0 = 1,$$

where B^k is replaced by B_k after expansion. The author points out that a linear

combination of such relations also yields a valid symbolic formula. A useful example is

$$(B+1+x)^k - (B+x)^k = kx^{k-1},$$

with arbitrary complex x . Suitable choices of x give a simple deduction of recursion formulas which contain only every second, every fourth or every sixth Bernoulli number. These formulas were already given in Ramanujan's first paper (Collected papers, pp. 1-14). - An error in theorem 14 of this paper is pointed out.

Similar recursion formulas are also deduced in the same way for Euler's numbers, defined by the symbolic relation

$$(E+1)^m + (E-1)^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad E_0 = 1.$$

TAGE GUTMANN MADSEN: *About mathematical logic.* (Danish.)

A short survey of the logical systems of Aristoteles, Boole, Peano and Frege, with particular emphasis on Boolean logic.

OLE RINDUNG: *A problem concerning a certain game.* (Danish.)

In a box are placed N slips, each with a real number written on it; the numbers are all different. The player, who does not know the numbers in advance, draws one slip after the other, and wins the game if he breaks off just after drawing the largest of the N numbers.

It is shown that the optimal strategy consists in first drawing $q-1$ slips, where q is the smallest integer such that

$$\sum_{n=q}^{N-1} \frac{1}{n} < 1,$$

that is $q \approx N/e$ for large N . From the drawing of the q 'th slip onwards, the game should be broken off if a number larger than all the preceding ones is drawn. The probability of winning the game is then

$$P = \frac{1}{N} \left(1 + (q-1) \sum_{n=q}^{N-1} \frac{1}{n} \right) \approx \frac{1}{e}.$$

The proof is carried through for $N=100$, giving $q=38$ and $P=0.37$.

ÅKE BJÖRCK: *On solving certain differential equations with the τ -method.* (Swedish.)

The method, due to C. Lanczos, essentially consists of the approximation of the given differential equation by addition of a small term to its right-hand side, so that the equation so modified has a polynomial solution

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k(n) x^k.$$

In the article, explicit expressions for $b_k(n)$ are developed in the simple case when the solution of the given differential equation has a MacLaurin-series whose coefficients satisfy a two-term recurrence relation. The Bessel function $J_0(z)$ and the exponential integral $\int_{-\infty}^z t^{-1} e^t dt$ are treated as numerical examples.