

NÅGRA TILLÄMPNINGAR AV STATISTISKA IDÉER PÅ NUMERISK INTEGRATION

BJÖRN AJNE och TORE DALENIUS

Syftet med denna uppsats är att framlägga vissa resultat, som framkommit, då vi på problemet med numerisk integration tillämpat vissa statistiska idéer. Vi behandlar endast det fall, då den funktion, som skall integreras, betraktas som entydigt bestämd från början. För en diskussion av det fall, då funktionen ifråga väljes slumpmässigt ur en klass av funktioner, hänvisas till Ajne [1].

1. Approximationsmetoden. Vi presenterar här den metod för numerisk integration, som är föremålet för vår uppsats. Utgångspunkten är, att vi vill beräkna en integral

$$(1) \quad (b-a)^{-1} \int_a^b g(t) dt,$$

där det exakta analytiska uttrycket för $g(t)$ antingen är okänt för oss eller så komplicerat, att en direkt evaluering av integralen är praktiskt omöjlig.

Ovanstående integral kan betraktas som ett specialfall av följande integral:

$$(2) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dF(t).$$

Här är $F(t)$ en känd fördelningsfunktion, d. v. s. $F(t)$ anger den relativa massan till vänster om punkten t för en känd massfördelning på den reella axeln. Tolkar vi denna massfördelning som en sannolikhetsfördelning, representerar integralen I matematiska förväntan av $g(t)$, d. v. s. $I = Eg(t)$.

Den vanligaste metoden att approximativt beräkna I är följande: Vi bestämmer värdet av $g(t)$ i n stycken konsekutiva punkter $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Låt dessa värden vara $g_1, g_2, \dots, g_n$. Vi approximerar nu I medelst linjärkombinationen

$$I' = w_1 g_1 + w_2 g_2 + \dots + w_n g_n = \sum_{k=1}^n w_k g_k,$$

där $w_1, w_2, \dots, w_n$ är n stycken vikter. Vi ställer oss nu frågan, hur punkterna $t_1, t_2, \dots, t_n$ och vikterna $w_1, w_2, \dots, w_n$ skall väljas för att I' skall vara en så god approximation av I som möjligt.

Det är naturligt att kräva, att $I' = I$ för den enkla funktionen $g(t) = 1$. Vidare bör vi kräva, att $I' \geq 0$, om $g(t)$ är en icke-negativ funktion. Dessa båda krav leder till villkoren

$$\sum_{k=1}^n w_k = 1; \quad w_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Dessa villkor kan ur statistisk synpunkt tolkas på följande sätt: Vikterna w_k konstituerar en diskret sannolikhetsfördelning $w(t)$, som vi i det följande kallar w -fördelningen. I' är m. a. o. lika med matematisk förväntan av $g(t)$ med avseende på w -fördelningen.

Av vad som just sagts följer, att vi bör kunna vänta oss, att I' är en god approximation av I , om fördelningsfunktionen

$$W(t) = \sum_{t_k \leq t} w_k$$

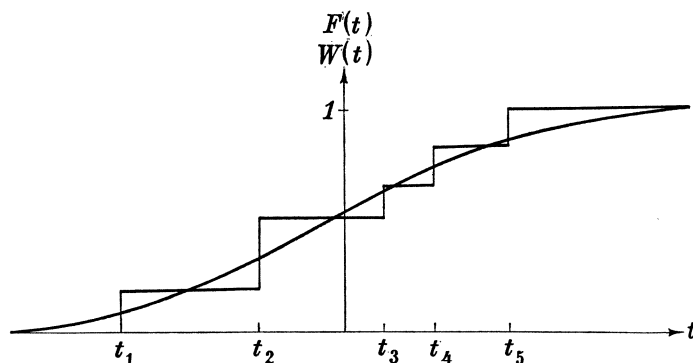


Fig. 1. $F(t)$ och $W(t)$ för $n = 5$.

i någon mening ansluter sig väl till fördelningsfunktionen $F(t)$ i (2). Vi ledes på detta sätt fram till att basera lösningen av vårt problem så som det ovan formulerats på kriterier för hur väl två fördelningar ansluter sig till varandra. Sådana kriterier utnyttjas bl. a. vid vissa statistiska testförfaranden.

Vi diskuterar i 2-4 tre olika kriterier. Flertalet av de approximationsformler och resttermer, som vi erhållit, finns utförligt behandlade i sådana välkända arbeten som Natanson [4] och Whittaker-Robinson [5].

2. Kolmogorov-Smirnovs kriterium. Detta kriterium användes för prövning av hypotesen, att ett stickprov om n stycken observationer har dragits från en population med specificerad fördelningsfunktion $F(t)$. Som testvariabel användes därvid

$$d = \sup |F_n(t) - F(t)|,$$

där $F_n(t)$ är den till observationerna hörande empiriska fördelningsfunktionen. Det på detta kriterium baserade testförfarandet behandlas i t. ex. Gnedenko [3].

Vi förutsätter i denna paragraf, att $F(t)$ är kontinuerlig. I vårt fall motsvaras $F_n(t)$ av $W(t)$, varför vår testvariabel blir

$$d = \sup |W(t) - F(t)|.$$

Vi skall alltså välja w -fördelningen så, att d blir så liten som möjligt.

Nu är $W(t)$ en stegfunktion. För att bestämma $\sup |W(t) - F(t)|$ är det därför tillräckligt att undersöka differensen $W(t) - F(t)$ och dess vänstergränsvärde i punkterna $t_1, t_2, \dots, t_n$. Man inser då, att d är det största av talen

$$|S_k| = \left| \sum_{i=1}^{k-1} w_i - F(t_k) \right| \quad \text{och} \quad |T_k| = \left| \sum_{i=1}^k w_i - F(t_k) \right|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Tydligen gäller, att $T_k - S_k = w_k$. Eftersom

$$\sum_1^n (T_k - S_k) = \sum_1^n w_k = 1, \quad \sum_1^n (T_k - S_k) \leq \sum_1^n |T_k| + \sum_1^n |S_k|,$$

måste något av talen S_k och T_k till sitt absolutbelopp vara lika med eller större än $\frac{1}{2n}$, och detta gäller då också om det största av dem, d. v. s. om $\sup |W(t) - F(t)|$.

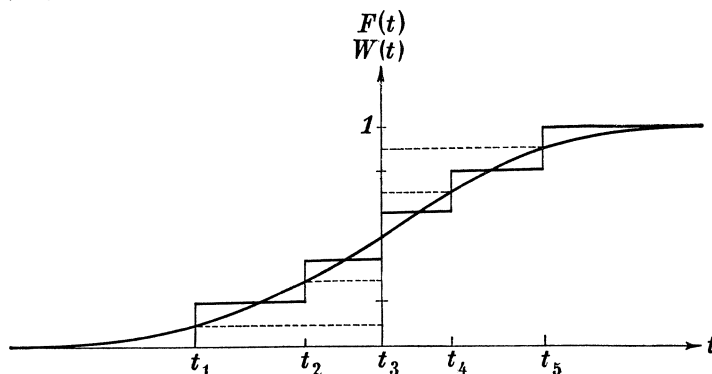


Fig. 2. $n = 5$.

Väljer vi emellertid punkterna t_k så att $F'(t_k) = \frac{2k-1}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{k-1}{n}$, och alla vikterna $w_k = \frac{1}{n}$, blir motsvarande supremum exakt $\frac{1}{2n}$. Detta är alltså den optimala w -fördelningen; jfr. fig. 2.

Vår uppskattning av integralen I blir i detta fall

$$(3) \quad I' = \frac{1}{n} \sum_1^n g_k.$$

Om $F(t)$ speciellt är fördelningsfunktionen till en *likformig* fördelning på intervallet $a \leq t \leq b$, erhålles approximationsformeln

$$(b-a)^{-1} \int_a^b g(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_1^n g_k,$$

där man får punkterna t_k genom att dela in integrationsintervallet i n lika stora delintervall och ta mittpunkterna på varje delintervall; jfr.

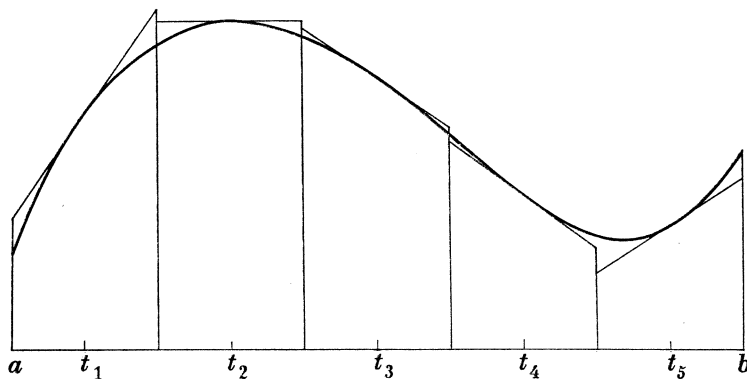


Fig. 3. Tangentformeln för $n=5$.

fig. 3. Detta är den s. k. *tangentformeln*. För två gånger kontinuerligt deriverbara och reella funktioner $g(t)$ kan dess fel skrivas

$$\frac{(b-a)^2}{24n^2} g^{(2)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b.$$

Av det sätt på vilket formeln (3) konstruerats framgår, att om $g(t)$ är av begränsad variation, så blir »felet«

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dF(t) - \frac{1}{n} \sum_1^n g_k &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dF(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dW(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) d[F(t) - W(t)] \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [F(t) - W(t)] dg(t) \end{aligned}$$

till sitt absolutbelopp $\leq \frac{1}{2n}$ (totala variationen av $g(t)$). Konstanten $\frac{1}{2n}$ är här den minsta möjliga för alla uppskattningar av typen

$$\sum_1^n w_k g_k, \quad \sum_1^n w_k = 1, \quad w_k \geq 0.$$

Speciellt för funktioner $g(t)$ av ovan nämnt slag torde därför formeln (3) vara beaktansvärd; jfr. det enkla exemplet i 5.

Om $g(t)$ uppfyller vissa deriverbarhetsvillkor, kan man emellertid i allmänhet hitta betydligt effektivare formler än (3). Om vi återvänder till problemet att approximerar integralen (1), har exempelvis Simpson's formel

$$(b-a)^{-1} \int_a^b g(t) dt \approx \frac{1}{3(n-1)} [g_1 + g_n + 2(g_3 + g_5 + \dots + g_{n-2}) + 4(g_2 + g_4 + \dots + g_{n-1})]$$

för fyra gånger kontinuerligt deriverbara, reella funktioner felet

$$-\frac{(b-a)^4}{180(n-1)^4} g^{(4)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b.$$

Härvid förutsättes n vara ett udda tal ≥ 3 .

3. Smirnovs ω^2 -kriterium. Detta kriterium användes för prövning av samma slags hypotes som diskuterats i 2. Som testvariabel användes

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(t) - F(t)]^2 dF(t).$$

För en diskussion av Smirnovs test hänvisas till Cramér [2], kap. 30. I vårt fall får vi

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [W(t) - F(t)]^2 dF(t).$$

Om man skriver denna integral som summan av integralerna över intervallen (t_{k-1}, t_k) och i var och en gör substitutionen $u = F(t)$, finner man att

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \sum_{k=2}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [W(t) - F(t)]^2 dF(t) + \int_{-\infty}^{t_1} + \int_{t_n}^{\infty} \\ &= \sum_{k=2}^n \int_{F(t_{k-1})}^{F(t_k)} [u - W(t_{k-1})]^2 du + \int_0^{F(t_1)} u^2 du + \int_{F(t_n)}^1 (u-1)^2 du \\ (4) \quad &\geq \frac{1}{12} \left\{ \sum_{k=2}^n [F(t_k) - F(t_{k-1})]^3 + 4[F(t_1)]^3 + 4[1 - F(t_n)]^3 \right\}, \end{aligned}$$

där vi använt olikheten

$$\int_a^b (u-c)^2 du \geq \int_a^b \left(u - \frac{a+b}{2}\right)^2 du = \frac{1}{12} (b-a)^3,$$

som gäller för godtyckliga a, b, c ; $a < b$.

Eftersom funktionen t^3 är konvex för $t \geq 0$, gäller för godtyckliga icke-negativa tal $x_2, x_3, \dots, x_n$ olikheten

$$\left[\frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n x_k \right]^3 \leq \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n x_k^3.$$

Om vi använder detta på summan i (4), samt på

$$\left[\frac{F(t_1) + 1 - F(t_n)}{2} \right]^3 \leq \frac{[F(t_1)]^3 + [1 - F(t_n)]^3}{2},$$

erhåller vi

$$\omega^2 \geq \frac{1}{12} \left\{ \frac{[F(t_n) - F(t_1)]^3}{(n-1)^2} + [1 - (F(t_n) - F(t_1))]^3 \right\}.$$

Eftersom funktionen $\frac{x^3}{(n-1)^2} + (1-x)^3$ har absolut minimum $= \frac{1}{n^2}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$, finner vi slutligen, genom att sätta $F(t_n) - F(t_1) = x$, att $\omega^2 \geq \frac{1}{12n^2}$.

Om man undersöker, när $\omega^2 = \frac{1}{12n^2}$, finner man, att detta inträffar exakt då $t_1, t_2, \dots, t_n$ och $w_1, w_2, \dots, w_n$ väljes på det sätt, som var optimalt vid användningen av Kolmogorov-Smirnovs kriterium. Smirnovs ω^2 -kriterium ger m. a. o. icke något nytt utöver just nämnda kriterium.

4. Momentmetoden eller Gauss' metod. Denna innebär, att man väljer w -fördelningen så att dess nollpunktsmoment överensstämmer med motsvarande moment för $F(t)$ till så hög ordning som möjligt. Eftersom w -fördelningen beror på $2n$ parametrar $t_1, t_2, \dots, t_n$ och $w_1, w_2, \dots, w_n$, bör man i allmänhet kunna bestämma dessa så, att momenten överensstämmer upp till och med ordningen $2n-1$. Denna fråga är utförligt behandlad i Natanson [4], sid. 436 f., och vi nöjer oss därför med att lämna resultaten.

Låt $l_k(t)$ och $v(t)$ vara polynomerna

$$l_k(t) = \frac{\prod_{i \neq k} (t - t_i)}{\prod_{i \neq k} (t_k - t_i)}, \quad v(t) = \prod_{i=1}^n (t - t_i).$$

Då gäller följande sats: Nollpunktsmomenten för w -fördelningen överensstämmer med motsvarande moment för $F(t)$ upp till och med ordningen $2n-1$, då och endast då

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} v(t)p(t)dF(t) = 0$$

för varje polynom $p(t)$ av gradtal $\leq n-1$, och

$$w_k = \int_{-\infty}^{\infty} l_k(t)dF(t) .$$

Om $t_1, t_2, \dots, t_n$ valts så att (5) är uppfyllt, så är talen w_k automatiskt en sannolikhetsfördelning.

Om $F(t)$ har hela massan på intervallet $a \leq t \leq b$, och vi lyckats välja w -fördelningen enligt ovanstående sats, sålunda med $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$, så blir $I = I' + R_n$, där felet R_n kan skrivas

$$R_n = \frac{g^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} v(t)^2 dF(t), \quad a \leq \xi \leq b .$$

Om $F(t)$ speciellt är fördelningsfunktionen till en likformig fördelning på intervallet $-1 \leq t \leq 1$, så att vi söker $\int_{-1}^1 g(t)dt$, skall $t_1, t_2, \dots, t_n$ väljas

lika med rötterna till Legendrepolynomet $\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$. Allmänt skall $t_1, t_2, \dots, t_n$ väljas som rötterna till det n :te polynomet i den till $F(t)$ hörande följd av ortogonala polynom, om detta har n enkla nollställen, jfr. Cramér [2], kap. 12.

För någorlunda reguljära $g(t)$ är Gauss' metod mycket effektiv. Dess största nackdel är, att beräkningen av punkterna $t_1, t_2, \dots, t_n$ och vikterna $w_1, w_2, \dots, w_n$ är relativt komplicerad. För några vanliga fördelningsfunktioner $F(t)$ är den genomförd i Natanson [4].

5. Exempel. Följande är en mycket enkel illustration till de formler, som omnämnts i 2-4: Vi betraktar integralen

$$I = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = 0,69315 .$$

Vi erhåller följande resultat med användning av funktionsvärdena i tre punkter:

Värde enligt Gauss metod	0,69312
- - Simpsons formel	0,69444
- - tangentformeln	0,68975 .

Om vi upprepar denna procedur med

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 \leq t \leq 0,5 \\ 1 - 10(t - 0,5) & \text{ - } 0,5 \leq t \leq 0,6 \\ 0 & \text{ - } 0,6 \leq t \leq 1 \end{cases} ,$$

för vilken integralen $I = 0,55000$, får vi följande resultat:

Värde enligt Gauss metod	0,72222
- - Simpsons formel	0,83333
- - tangentformeln	0,66667 .

Jämfört med de övriga formlerna är alltså tangentformeln bättre i det andra fallet än i det första. I det andra fallet är ju dock approximationen överlag mycket dålig.

REFERENSER

På grund av uppsatsens översiktliga karaktär gör vi icke något försök att nämna upphovsmännen till de fakta, som framförts. Nedanstående lista upptar därför endast några standardverk inom de områden, som berörts.

- [1] B. AJNE: Manuskript, Stockholm 1960.
- [2] H. CRAMÉR: *Mathematical methods of statistics*. Princeton 1946.
- [3] B. W. GNEDENKO: *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.
- [4] I. P. NATANSON: *Konstruktive Funktionentheorie*. Akademie-Verlag, Berlin 1955.
- [5] E. T. WHITTAKER-G. ROBINSON: *Calculus of observations*. Blackie and Son, 2nd ed., London 1937.

EN SYNPUNKT PÅ DERIVERING

HANS RIESEL

Låt $f=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vara deriverbar. Om $x_1, x_2, \dots, x_n$ äro funktioner av x , är som bekant enligt »kedjeregeln»

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dx}.$$

Härur fås derivatan av funktionen $F(x)=f(x, x, \dots, x)$, som blir

$$(1) \quad \frac{dF}{dx} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}_{x_1=x_2=\dots=x_n=x}.$$

De bekanta reglerna för derivering av summor och produkter äro specialfall av (1). Låt

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

och

$$G(x) = f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x).$$

Med hjälpfunktionerna

$$f = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

resp.

$$g = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

ger (1) uttrycken

$$\frac{dF}{dx} = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$$

och

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dx} = f_1'(x)f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x) \dots f_n(x) + \dots \\ + f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)f_n'(x). \end{aligned}$$

Även många speciella funktioner kunna deriveras enligt (1). För $y=x^x$ får man: $y=x^a$ har derivatan ax^{a-1} , och $y=a^x$ har derivatan $a^x \log a$. Alltså har x^x derivatan

$$x \cdot x^{x-1} + x^x \log x = x^x(1 + \log x).$$

Motsvarande för $y = x^{(x^x)}$ blir:

$$\begin{aligned} y &= x^{a^a}; & y' &= a^a x^{a^a-1}; & a &= x \text{ ger } x^{x^x} \cdot x^x \cdot \frac{1}{x} \\ y &= a^{x^a}; & y' &= a^{x^a} \log a \cdot a x^{a-1}; & a &= x \text{ ger } x^{x^x} \cdot x^x \cdot \log x \\ y &= a^{a^x}; & y' &= a^{a^x} \log a \cdot a^x \log a; & a &= x \text{ ger } x^{x^x} \cdot x^x \cdot (\log x)^2. \end{aligned}$$

Häraf fås derivatan till $y = x^{x^x}$:

$$x^{x^x} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \log x + (\log x)^2 \right).$$

Den bekanta regeln för derivering av en bestämd integral med avseende på en parameter, nämligen

$$F(x) = \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, t) dt,$$

brukar härledas enligt (1). Betrakta hjälpfunktionen

$$f = \int_{u_1(x_1)}^{u_2(x_2)} f(x_3, t) dt.$$

Ur (1) finner man omedelbart

$$F'(x) = -u_1'(x)f(x, u_1(x)) + u_2'(x)f(x, u_2(x)) + \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt.$$

OM ET PUNKTS BELIGGENHED I FORHOLD TIL VISSE REGULÆRE PUNKTSÆT

DAVID FOG

I det følgende skal omtales forbindelsen mellem afstandene fra et punkt til hjørnespidserne i en ligesidet trekant, i et regulært tetraeder eller i et regulært simplex af flere dimensioner, dels når punktet ligger i trekantens plan, i tetraedrets rum eller i det ved simplexet bestemte rum af højere dimension, dels når punktet ligger uden for dette.

Dernæst foretages nogle anvendelser af de udledede formler, bl. a. på en figur, bestående af et sæt cirkler, kugler eller tilsvarende punktmangfoldigheder af højere dimension, hvor to vilkårlige mangfoldigheder i sættet berører hinanden.

1. Lad (fig. 1) $A_1A_2A_3$ være en ligesidet trekant, P et vilkårligt punkt i dens plan. Vektorerne $\vec{A_iA_j}$, $i \neq j$, betegnes $\mathbf{a}_{ij}$ og deres fælles længde a ;

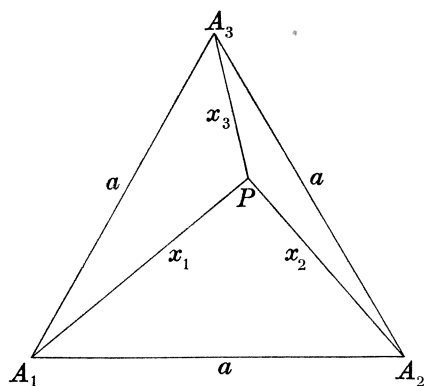


Fig. 1

vektorerne $\vec{A_iP}$ betegnes $\mathbf{x}_i$ med længder x_i . Vi søger en relation mellem x_1, x_2, x_3 og a . Denne kan naturligvis straks findes som specielt tilfælde af den velkendte relation, der sammenknytter de 6 afstande mellem to og to af 4 punkter i en plan (den, som udtrykker, at volumenet af det »plane tetraeder« $A_1A_2A_3P$ er nul); men af hensyn til den følgende udvidelse til flere dimensioner vil vi gå frem som vist nedenfor.

Vektorerne $\mathbf{x}_i$ kan skrives på formen

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_1 = & \lambda_2 \mathbf{a}_{12} + \lambda_3 \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{x}_2 = \lambda_1 \mathbf{a}_{21} & + \lambda_3 \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{x}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_{31} + \lambda_2 \mathbf{a}_{32} \end{cases}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

hvor λ_1 , λ_2 og λ_3 er skalarer. Thi for et givet punkt P bestemmer den øverste ligning (1) entydigt λ_2 og λ_3 , og fastlægges derefter λ_1 ved ligningen længst til højre, giver

$$x_2 = a_{21} + x_1, \quad x_3 = a_{31} + x_1$$

straks de to næste ligninger (1).

Ligningerne (1) gælder for enhver trekant $A_1A_2A_3$. Da vi ovenfor har antaget trekanten ligesidet med siden a , bliver $a_{12}^2 = a_{13}^2 = a^2$ og $a_{12} \cdot a_{13} = \frac{1}{2}a^2$, og vi får af den første (1):

$$x_1^2 = a^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_2\lambda_3).$$

Sættes

$$(2) \quad A = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,$$

kan den foranstående ligning omskrives til

$$x_1^2 = a^2(A - \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3) = a^2(A - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) = a^2(A - \lambda_1).$$

Vi har derfor

$$(3) \quad x_i^2 = a^2(A - \lambda_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

altså

$$(4) \quad \sum x_i^2 = a^2(3A - 1)$$

og

$$(5) \quad a^2 + \sum x_i^2 = 3a^2A.$$

Her og indtil videre skal, når intet andet siges, summationer løbe fra $i=1$ til $i=3$.

Af (3) findes

$$x_i^4 = a^4(A^2 - 2A\lambda_i + \lambda_i^2),$$

altså

$$\sum x_i^4 = a^4(3A^2 - 2A + \sum \lambda_i^2).$$

Nu er

$$2A - \sum \lambda_i^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = 1,$$

så vi får

$$(6) \quad \sum x_i^4 = a^4(3A^2 - 1)$$

og heraf

$$(7) \quad a^4 + \sum x_i^4 = 3a^4A^2.$$

Af (5) og (7) findes

$$(8) \quad (a^2 + \sum x_i^2)^2 - 3(a^4 + \sum x_i^4) = 0.$$

Vi indfører nu betegnelsen

$$\Phi(z_0, z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_0^n z_i \right)^2 - n \sum_0^n z_i^2,$$

hvorefter (8) kan skrives

$$(9) \quad \Phi(a^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0.$$

Dette er den ønskede relation, og vi har vist:

I. *Afstandene x_i fra vinkelspidserne i den ligesidede trekant til et vilkårligt punkt i dens plan tilfredsstiller betingelsen (9).*

Vi antager nu trekanten omgivet af et tredimensionalt rum (et R_3) og afsætter i dette en vektor $\vec{PQ}$ af længden h vinkelret på trekantens plan. Længderne A_iQ betegnes y_i . Da er

$$y_i^2 = x_i^2 + h^2,$$

således at

$$a^2 + \sum y_i^2 = (a^2 + \sum x_i^2) + 3h^2$$

og

$$a^4 + \sum y_i^4 = (a^4 + \sum x_i^4) + 2h^2 \sum x_i^2 + 3h^4.$$

Heraf fås med benyttelse af (9), at

$$(10) \quad \Phi(a^2, y_1^2, y_2^2, y_3^2) = 6h^2a^2.$$

Dette er en udvidelse af (9) og giver atter (9) for $h=0$. Vi kan formulere resultatet (10) således:

II. *Afstandene y_i fra vinkelspidserne i den ligesidede trekant til et vilkårligt punkt i afstanden h fra trekantens plan tilfredsstiller betingelsen (10).*

Af **I** og **II** ses specielt, at afstandene y_i fra vinkelspidserne i den ligesidede trekant til et vilkårligt punkt tilfredsstiller betingelsen

$$\Phi(a^2, y_1^2, y_2^2, y_3^2) \geq 0,$$

og lighedstegnet gælder kun, når punktet ligger i trekantens plan.

2. Vi vil herefter bevise omvendte sætninger til **I** og **II** og begynder med den første:

III. *Dersom tallene $x_i \geq 0$ tilfredsstiller (9), findes der netop ét punkt P , hvis afstande fra trekantens vinkelspidser A_1 , A_2 og A_3 er henholdsvis x_1 , x_2 og x_3 . Dette punkt ligger i trekantens plan.*

Lad altså x_1 , x_2 og x_3 betegne givne, ikke-negative tal, som tilfredsstiller (9). Ordnes denne efter faldende potenser af x_3 , fås

$$(11) \quad 2x_3^4 - 2x_3^2(a^2 + x_1^2 + x_2^2) + 3(a^4 + x_1^4 + x_2^4) - (a^2 + x_1^2 + x_2^2)^2 = 0.$$

Da denne ligning, opfattet som en andengradsligning i x_3^2 , jo har en løsning, må dens diskriminant Δ være ≥ 0 . For Δ findes

$$\Delta = 4(a^2 + x_1^2 + x_2^2)^2 - 8[3(a^4 + x_1^4 + x_2^4) - (a^2 + x_1^2 + x_2^2)^2].$$

Dette kan omskrives til

$$(12) \quad \Delta = 12[(a^2 + x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(a^4 + x_1^4 + x_2^4)] = 12\Phi(a^2, x_1^2, x_2^2),$$

hvor $\Phi(a^2, x_1^2, x_2^2)$ kan opløses i faktorer som

$$(13) \quad \Phi(a^2, x_1^2, x_2^2) = (a + x_1 + x_2)(-a + x_1 + x_2)(a - x_1 + x_2)(a + x_1 - x_2).$$

Lad os først betragte tilfældet $\Delta > 0$. Af (13) ses, at der i så fald må eksistere en trekant med siderne a , x_1 og x_2 , d. v. s. der findes i trekant $A_1A_2A_3$'s plan to punkter P' og P'' , hvis afstande fra A_1 og A_2 er henholdsvis x_1 og x_2 . Disse punkters afstande x_3' og x_3'' fra A_3 , der er forskellige, må begge sammen med de givne x_1 og x_2 ifølge I tilfredsstille (11), og da denne ligning kun har to ikke-negative løsninger, må enten x_3' eller x_3'' være lig det givne x_3 .

Lad dernæst $\Delta = 0$. Af (13) ses, at der i så fald findes ét punkt P' , hvis afstande fra A_1 og A_2 er henholdsvis x_1 og x_2 , og dette punkt ligger på linien A_1A_2 . Dets afstand x_3' fra A_3 vil ifølge I sammen med de givne x_1 og x_2 tilfredsstille (11), og da denne nu kun har én ikke-negativ løsning, må x_3' være lig det givne x_3 .

Både for $\Delta > 0$ og for $\Delta = 0$ vil der altså i planen $A_1A_2A_3$ findes netop ét punkt, hvis afstande fra A_1 , A_2 og A_3 har de givne værdier henholdsvis x_1 , x_2 og x_3 . Uden for denne plan findes ifølge II ingen sådanne punkter. Hermed er III bevist.

Inden vi beviser den omvendte sætning til II, vil vi godtgøre rigtigheden af følgende hjælpesætning:

Dersom tallene $z_0, z_1, \dots, z_n$ tilfredsstiller ligningen

$$(14) \quad \Phi(z_0, z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_0^n z_i \right)^2 - n \sum_0^n z_i^2 = 0,$$

vil enten

- 1) *alle z 'erne have samme fortegn, eller*
- 2) *et af z 'erne vil være nul og alle de andre lige store.*

Ligningen (14) kan omskrives til

$$(15) \quad (z_0 - z_1)^2 + (z_0 - z_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + \dots + (z_{n-1} - z_n)^2 = z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

Lad os først antage, at alle $z_i \neq 0$, men at de ikke alle har samme fortegn. Vi udvælger da på venstre side af (15) specielt de kvadrater $(z_i - z_j)^2$,

hvor z_i og z_j har modsat fortegn. Ved udvikling af disse kvadrater fremkommer hvert z^2 mindst én gang, og alle de dobbelte produkter $-2z_i z_j$ bliver positive. Vi ser herved, at summen af de udvalgte kvadrater overgår højre side i (15). Den herved opståede modstrid godtgør første del af hjælpesætningen.

Lad dernæst f. eks. $z_n = 0$. Kvadraterne på højre side af (15) genfindes da på venstre side, og alle yderligere kvadrater på venstre side må derfor være nul, d. v. s. $z_0 = z_1 = \dots = z_{n-1}$. Hermed er hjælpesætningen fuldstændig bevist.

Den omvendte sætning til II lyder:

IV. Dersom tallene $y_i \geq 0$ tilfredsstiller (10), findes der i ethvert R_3 , som indeholder trekanten, netop to punkter, Q' og Q'' , hvis afstande fra trekantens vinkelspidser A_1 , A_2 og A_3 er henholdsvis y_1 , y_2 og y_3 . De to punkter ligger symmetrisk med hensyn til trekantens plan, i afstanden h fra denne.

Lad altså y_1 , y_2 og y_3 betegne givne, ikke-negative tal, som tilfredsstiller (10). Et eventuelt punkt Q af den i sætningen nævnte art må ifølge II have afstanden h fra trekantens plan. Afstandene x_1 , x_2 og x_3 fra A_1 , A_2 og A_3 til Q 's projektion P på denne plan er derfor bestemt ved

$$(16) \quad y_i^2 = x_i^2 + h^2.$$

Indføres dette i (10), går denne over i (9), idet de regninger, som foran førte fra (9) til (10), let føres baglæns. Anvendes nu hjælpesætningen med $z_0 = a^2$ samt $z_i = x_i^2$, $i = 1, 2, 3$, ses det, at de ved (16) indførte x_i^2 er ≥ 0 , og størrelserne x_i eksisterer derfor som reelle tal (≥ 0). Ifølge III er da den entydige eksistens af projektionen P sikret, og i ethvert R_3 gennem trekanten findes da to punkter Q , beliggende på trekantplanens normal i P , i afstanden h fra P . Hermed er IV bevist.

3. Vi kan nu udvide dimensionstallet og erstatte den ligesidede trekant med et regulært tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ med kanten a . Sættes for et vilkårligt punkt P i det ved tetraedret bestemte R_3 vektorerne $\vec{A_i P} = \vec{x_i}$ med længder x_i , kan man bevise en til (9) analog relation

$$\Phi(a^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2) = 0,$$

hvor

$$\Phi(a^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2) = (a^2 + \sum x_i^2)^2 - 4(a^4 + \sum x_i^4)$$

med summationer fra $i = 1$ til $i = 4$. Ligeledes kan man bevise sætninger analoge med de øvrige foran omtalte.

I stedet for at udføre dette nærmere vil vi — stadig med benyttelse af

I*. Afstandene x_i fra hjørnespidserne i det regulære S_n til et vilkårligt punkt i dettes R_{n-1} tilfredsstiller betingelsen (9*).

For punkter i afstanden h fra dette R_{n-1} finder man på ganske samme måde som før

$$(10^*) \quad \Phi(a^2, y_1^2, y_2^2, \dots, y_n^2) = 2nh^2a^2,$$

d. v. s.

II*. Afstandene y_i fra hjørnespidserne i det regulære S_n til et vilkårligt punkt i afstanden h fra dettes R_{n-1} tilfredsstiller betingelsen (10*).

Heraf ser vi i analogi med tidligere, at afstandene y_i fra hjørnespidserne i det regulære S_n til et vilkårligt punkt tilfredsstiller betingelsen

$$\Phi(a^2, y_1^2, y_2^2, \dots, y_n^2) \geq 0,$$

og lighedstegnet gælder kun, når punktet ligger i det ved S_n bestemte R_{n-1} .

4. Vi går herefter over til de omvendte sætninger til **I*** og **II***. De får følgende ordlyd:

III*. Dersom tallene $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, tilfredsstiller (9*), findes der netop ét punkt P , hvis afstande fra simplexets hjørnespidser $A_1, A_2, \dots, A_n$ er henholdsvis $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dette punkt ligger i simplexets R_{n-1} .

IV*. Dersom tallene $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, tilfredsstiller (10*), findes der i ethvert R_n , som indeholder S_n , netop to punkter, Q' og Q'' , hvis afstande fra simplexets hjørnespidser $A_1, A_2, \dots, A_n$ er henholdsvis $y_1, y_2, \dots, y_n$. De to punkter ligger symmetrisk med hensyn til simplexets R_{n-1} , i afstanden h fra dette.

Bevisgangen er den samme som foran, men får dog her karakter af en induktion. For S_3 (den ligesidede trekant) er de to sætninger bevist foran, og idet vi antager dem gyldige for S_{n-1} , vil vi vise, at de også gælder for S_n .

Vi begynder med **III***. Lad altså $x_1, x_2, \dots, x_n$ betegne givne, ikke-negative tal, som tilfredsstiller (9*). Svarende til (11) får vi ved ordning efter faldende potenser af x_n :

$$(11^*) \quad (n-1)x_n^4 - 2x_n^2 \left(a^2 + \sum_1^{n-1} x_i^2 \right) + n \left(a^4 + \sum_1^{n-1} x_i^4 \right) - \left(a^2 + \sum_1^{n-1} x_i^2 \right)^2 = 0.$$

Opfattes dette som en andengradslikning i x_n^2 , må som før diskriminanten Δ være ≥ 0 . For Δ fås her

$$\Delta = 4 \left(a^2 + \sum_1^{n-1} x_i^2 \right)^2 - 4(n-1) \left[n \left(a^4 + \sum_1^{n-1} x_i^4 \right) - \left(a^2 + \sum_1^{n-1} x_i^2 \right)^2 \right],$$

der kan omskrives til

$$\Delta = 4n \left[\left(a^2 + \sum_1^{n-1} x_i^2 \right)^2 - (n-1) \left(a^4 + \sum_1^{n-1} x_i^4 \right) \right]$$

eller

$$(12^*) \quad \Delta = 4n\Phi(a^2, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n-1}^2).$$

Da III* og IV* jo ifølge antagelse gælder for det ved punkterne $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ bestemte simplex S_{n-1} , får vi:

For $\Delta > 0$ findes der i det til S_n hørende R_{n-1} to punkter P' og P'' , hvis afstande fra hjørnespidserne $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ er henholdsvis $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, og man viser ganske som før, at for det ene af disse er afstanden fra A_n lig x_n . For $\Delta = 0$ findes der i det nævnte R_{n-1} netop ét punkt P' , hvis afstande fra $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ er henholdsvis $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, og man ser som før, at afstanden fra A_n bliver x_n .

Ifølge sætning II* findes der uden for det til S_n hørende R_{n-1} ikke noget punkt, hvis afstande fra S_n 's hjørnespidser tilfredsstillende (9*), og hermed er sætning III* bevist.

Sætning IV* vises herefter ganske som før, idet den foran omtalte hjælpesætning nu benyttes i fuldt omfang (for vilkårligt n).

I det følgende vil vi foretage forskellige anvendelser af den ovenfor fremstillede teori.

5. Vi bemærker, at (9*) ikke blot — som på forhånd klart — er symmetrisk i x 'erne, men at a indgår på lige fod med x 'erne i en mere omfattende symmetri. Idet vi derfor betegner a med x_0 , føres vi til følgende sætning:

V. Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være afstande fra hjørnespidserne i et regulært simplex S_n^0 med kanten x_0 til et punkt P_0 i dettes R_{n-1} . For ethvert $i \neq 0$ vil da også $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ være afstande fra hjørnespidserne i et regulært simplex S_n^i med kanten x_i til et punkt P_i i dette sidstes R_{n-1} .

Ifølge I* tilfredsstillende tallene $x_0 (=a), x_1, x_2, \dots, x_n$ nemlig (9*). Anvendelse af den omtalte symmetri sammen med III* fører da til den nævnte konklusion.

For $n=3$ kan denne sætning indses helt elementært; men allerede for $n=4$ synes et sådant simpelt bevis ikke umiddelbart at frembyde sig.

Den ovennævnte symmetri giver også anledning til følgende:

VI. Lad $y_1, y_2, \dots, y_n$ være afstande fra hjørnespidserne i et regulært simplex S_n^0 med kanten y_0 til et punkt Q_0 uden for dettes R_{n-1} . For ethvert $i \neq 0$ vil da også $y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n$ være afstande fra hjørnespidserne i et regulært simplex S_n^i med kanten y_i til et punkt Q_i uden for dette sidstes R_{n-1} . Betegnes afstanden til Q_i fra det ved S_n^i bestemte R_{n-1} med h_i , haves

$$y_0 h_0 = y_1 h_1 = \dots = y_n h_n.$$

Dette følger umiddelbart af den omtalte symmetri under anvendelse af II* og IV*.

6. Vi betragter atter et regulært simplex S_n med kanten a og et punkt P i dettes R_{n-1} . Som før sættes $\vec{A_i P} = \vec{x_i}$ med længde x_i . Lad M betegne simplexets centrum og $\vec{A_i M} = \vec{m_i}$. Vi har da:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \lambda_2 \mathbf{a}_{12} + \lambda_3 \mathbf{a}_{13} + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{m}_1 &= \frac{1}{n} \mathbf{a}_{12} + \frac{1}{n} \mathbf{a}_{13} + \dots + \frac{1}{n} \mathbf{a}_{1n}. \end{aligned}$$

Vektoren $\vec{MP} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{m}_1$ bliver

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{m}_1 = \left(\lambda_2 - \frac{1}{n} \right) \mathbf{a}_{12} + \left(\lambda_3 - \frac{1}{n} \right) \mathbf{a}_{13} + \dots + \left(\lambda_n - \frac{1}{n} \right) \mathbf{a}_{1n},$$

og dens længde MP kan bestemmes ved

$$\begin{aligned} MP^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{m}_1)^2 &= a^2 \left[\left(\lambda_2 - \frac{1}{n} \right)^2 + \dots + \left(\lambda_n - \frac{1}{n} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda_2 - \frac{1}{n} \right) \left(\lambda_3 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \left(\lambda_{n-1} - \frac{1}{n} \right) \left(\lambda_n - \frac{1}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

eller, idet A' betegner det udtryk, som fremgår af A , når λ_i erstattes med $\lambda_i - \frac{1}{n}$:

$$(17) \quad MP^2 = a^2 \left[A' - \left(\lambda_1 - \frac{1}{n} \right) \sum_1^n \left(\lambda_i - \frac{1}{n} \right) \right] = a^2 A'.$$

Ved udregning findes

$$A' = A - \frac{n+1}{2n},$$

hvorefter (17) bliver

$$(18) \quad MP^2 = a^2 \left(A - \frac{n+1}{2n} \right).$$

Lader vi her specielt P falde i A_1 , bliver $\lambda = 1$, og radius $\varrho = MA_1$ i simplexets omskrevne hyperkugle¹ bestemmes ved

$$(19) \quad \varrho^2 = a^2 \left(1 - \frac{n+1}{2n} \right).$$

Af (18) og (19) fås

$$(20) \quad MP^2 - \varrho^2 = a^2(\lambda - 1).$$

Vi vil nu for enhver konstant $k \geq 0$ bestemme mængden af punkter P i simplexets R_{n-1} , for hvilke

$$\Phi(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) = nk^4,$$

d. v. s.

$$(21) \quad \left(\sum_1^n x_i^2 \right)^2 - (n-1) \sum_1^n x_i^4 = nk^4.$$

Betingelsen (21) kan ved (4*) og (6*) skrives

$$a^4(n\lambda - 1)^2 - (n-1)a^4(n\lambda^2 - 1) = nk^4,$$

der ved reduktion giver

$$a^4(\lambda - 1)^2 = k^4$$

eller

$$a^2(\lambda - 1) = \pm k^2.$$

Ved hjælp af (20) fås heraf

$$(22) \quad MP^2 = \varrho^2 \pm k^2.$$

Vi har hermed vist:

VII. *Det geometriske sted for et punkt i simplexets R_{n-1} , for hvilket $\Phi(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) = 0$, er simplexets omskrevne hyperkugle.*

VIII. *Det geometriske sted for et punkt i simplexets R_{n-1} , for hvilket $\Phi(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) = nk^4 > 0$, er to hyperkugler, koncentriske med den lige nævnte, dog med den begrænsning, at den ene svinder ind til et punkt, resp. bortfalder for $k = \varrho$, resp. $k > \varrho$.*

Lad os specielt betragte tilfældet $n = 3$. Betingelsen $\Phi(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0$ udtrykker (sml. (12) og (13)), at det ene af stykkerne x_1, x_2 og x_3 er lig med summen af de to andre. Det hertil svarende tilfælde af **VII** er velkendt og kan direkte udledes ved anvendelse af den ptolemæiske læresætning og dennes omvendte sætning. **VIII** giver her (ved Herons formel)

¹ Ved en hyperkugle i et R_n vil vi forstå samlingen af punkter i dette, hvis afstand fra et fast punkt (i det betragtede R_n) har en given værdi.

stedet for et punkt P , for hvilket en trekant med siderne x_1 , x_2 og x_3 har konstant areal.

7. Vi vil behandle endnu et problem, som står i forbindelse med det foran fremstillede. M. E. Wise har [1] udledet en nødvendig betingelse for, at 5 kugler med givne radier kan placeres, så de parvis berører hinanden (d. v. s. således at hver af dem berører hver af de andre, og med forskellige røringpunkter). Visse dele af bevisførelsen lader sig ikke umiddelbart udvide til flere dimensioner. Vi skal her med anvendelse af det foranstående gennemføre en sådan udvidelse og samtidig godtgøre, at den fundne betingelse ikke blot er nødvendig, men også tilstrækkelig.

Vi betragter n parvis berørende hyperkugler $K_1, K_2, \dots, K_n$ i et R_{n-2} . Disse må enten ligge således, at alle berøringer er udvendige, eller også må $n-1$ af dem parvis have udvendig berøring, men ligge inden i den største, med hvilken de altså har indvendig berøring. De to tilfælde kan behandles under ét, når vi regner diametrene $d_1, d_2, \dots, d_n$ med fortegn på en sådan måde, at udvendig berøring for to hyperkugler svarer til, at deres diametre har samme fortegn, og indvendig berøring til modsat fortegn. Vi kan da uden indskrænkning antage, at diametrene $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ alle er positive, medens d_n er positiv eller negativ, efter som K_n ligger uden for de andre hyperkugler eller omslutter dem.

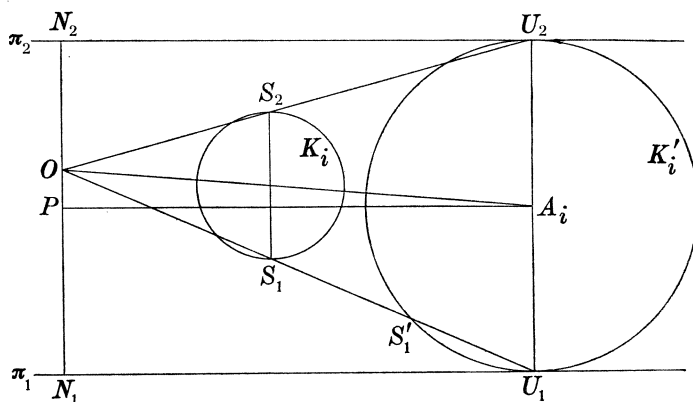


Fig. 2

Vi begynder på ganske samme måde som i den nævnte afhandling med at anvende en inversion, hvis potens er 1, og hvis centrum er røringspunktet O mellem K_1 og K_2 (fig. 2). Herved føres disse to hyperkugler over i to parallelle hyperplaner¹ π_1 og π_2 . Afstandene fra O til

¹ En hyperplan i et R_n er et R_{n-1} , indeholdt i R_n .

disse bliver $ON_1 = \frac{1}{d_1}$ og $ON_2 = \frac{1}{d_2}$. Sættes hyperplanernes afstand $N_1N_2 = \delta$, fås

$$(23) \quad \delta = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2},$$

og er P midtpunktet af N_1N_2 , bliver

$$(24) \quad OP = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right|.$$

En vilkårlig af de andre hyperkugler K_i med diameter d_i føres over i en hyperkugle K'_i , som rører π_1 og π_2 og altså får diameter δ . Dens centrum kaldes A_i . Med benyttelse af de øvrige betegnelser på figuren have $OS_1 \cdot OS'_1 = 1$, således at O 's potens α med hensyn til K'_i bliver

$$\alpha = OU_1 \cdot OS'_1 = \frac{OU_1}{OS_1} = \frac{U_1U_2}{S_1S_2} = \frac{\delta}{d_i}.$$

Potensen kan også skrives

$$\alpha = OA_i^2 - \frac{\delta^2}{4},$$

således at

$$(25) \quad OA_i^2 = \frac{\delta}{d_i} + \frac{\delta^2}{4}.$$

Derefter findes

$$PA_i^2 = OA_i^2 - OP^2 = \frac{\delta}{d_i} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)^2$$

eller, når vi sætter $PA_i = x_i$:

$$(26) \quad x_i^2 = \frac{\delta}{d_i} + \frac{1}{d_1 d_2}.$$

Udledelsen af (25) og (26) gælder for alle $i = 3, 4, \dots, n$. Det bemærkes specielt, at den gælder for $i = n$, både når d_n er positiv og negativ.

Hertil har vi, bortset fra dimensionstallet og nogle regnemæssige simplifikationer, fulgt Wise's metode. For nu at komme videre benytter vi den foran fremstillede simpleksteori. Punkterne $A_3, A_4, \dots, A_n$ er hjørnespidser i et regulært simplex S_{n-2} med kanten δ . Da P ligger i simplexets R_{n-3} , må afstandene x_i ifølge I* tilfredsstille ligningen

$$(27) \quad \Phi(\delta^2, x_3^2, x_4^2, \dots, x_n^2) = 0$$

eller

$$(28) \quad \left(\delta^2 + \sum_3^n x_i^2 \right)^2 - (n-2) \left(\delta^4 + \sum_3^n x_i^4 \right) = 0.$$

Indføres her værdierne for x_i^2 fra (26), fås

$$\left(\delta^2 + \delta \sum_3^n \frac{1}{d_i} + \frac{n-2}{d_1 d_2}\right)^2 - (n-2) \left(\delta^4 + \delta^2 \sum_3^n \frac{1}{d_i^2} + \frac{2\delta}{d_1 d_2} \sum_3^n \frac{1}{d_i} + \frac{n-2}{d_1^2 d_2^2}\right) = 0,$$

der ved omskrivning af venstre side kan reduceres til

$$\delta^2 \left[\delta^2 + 2\delta \sum_3^n \frac{1}{d_i} + \left(\sum_3^n \frac{1}{d_i}\right)^2 - (n-2) \left(\delta^2 - \frac{2}{d_1 d_2} + \sum_3^n \frac{1}{d_i^2}\right) \right] = 0.$$

Efter division med δ^2 og yderligere lidt omskrivning fås

$$(29) \quad \left(\sum_1^n \frac{1}{d_i}\right)^2 - (n-2) \sum_1^n \frac{1}{d_i^2} = 0,$$

der, som det kunne forudses, er symmetrisk i alle diametrene. Vi har hermed vist:

IX. Dersom n hyperkugler i et R_{n-2} med diametre $d_1, d_2, \dots, d_n$ kan placeres med parvis berøring, gælder betingelsen (29).

Det er dette resultat, som for $n=5$ (og $n=4$) findes i Wise's afhandling.

I formuleringen af IX skal tænkes indeholdt, at diametrenes fortegn og berøringens art er knyttet sammen som tidligere omtalt. Dette gælder også for den følgende sætning, som er omvendt til IX, og som lyder:

X. Dersom tallene $d_1, d_2, \dots, d_n$ tilfredsstiller betingelsen (29), kan man i et R_{n-2} placere n hyperkugler med diametre d_i , således at de har parvis berøring.

For at vise dette bemærker vi først, at hvis der blandt tallene d_i ikke findes to positive, kan vi opnå dette ved at multiplicere dem alle med -1 , hvilket hverken ændrer gyldigheden af (29) eller problemstillingen iøvrigt. Vi kan derfor antage d_1 og d_2 positive.

Vi indfører størrelsen δ ved (23) og opbygger et regulært simplex $A_3 A_4 \dots A_n$ med kanten δ . I et R_{n-2} gennem disse anbringes med hver hjørnespids som centrum en hyperkugle med diameter δ ; disse hyperkugler har parvis udvendig berøring. Hyperplanerne π_1 og π_2 bestemmes let. Vi indfører derpå størrelserne $x_3, x_4, \dots, x_n$ ved (26). Ligning (29) kan da omskrives til (28) og (27). Af den tidligere viste hjælpesætning følger nu, at alle $x_i^2 \geq 0$, således at x_i 'erne er reelle. Ifølge III* eksisterer derfor (entydigt) i simplexets R_{n-3} et punkt P , hvis afstande fra hjørnespidserne A_i er x_i . Dette punkt ligger midt imellem π_1 og π_2 . Ved (24) bestemmes derpå i det benyttede R_{n-2} inversionscentret O med beliggen-

hed mellem π_1 og π_2 , på normalen gennem P , og en inversion om dette punkt med potensen 1 fører π_1 og π_2 samt de $n-2$ lige store hyperkugler over i n parvis berørende hyperkugler med diametrene $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Vi mangler nu blot at vise, at berøringens art er i overensstemmelse med diametrenes fortegn. Der bliver her to tilfælde at betragte:

1) O ligger uden for alle de $n-2$ lige store hyperkugler. I så fald vil efter inversionen alle n hyperkugler parvis have udvendig berøring. Da man af (26) jo kan udlede (25), indtræffer dette tilfælde, når $d_3, d_4, \dots, d_n$ alle er positive ligesom d_1 og d_2 .

2) O ligger inden i (og kun én) af de $n-2$ lige store hyperkugler; lad det være K'_n med centrum A_n . Efter inversionen vil den tilsvarende hyperkugle K_n omslutte de $n-1$ andre, medens disse som før vil have udvendig berøring. Af (25) ses, at dette indtræffer, når $d_3, d_4, \dots, d_{n-1}$ alle er positive ligesom d_1 og d_2 , medens d_n er negativ. Hermed er X fuldstændig bevist.

Betingelsen (29) er altså både nødvendig og tilstrækkelig for hyperkuglernes parvise berøring, når dennes art knyttes til diametrenes fortegn på den betragtede måde.

Lader vi $d_n \rightarrow \infty$, går (29) over i

$$(30) \quad \Phi\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_{n-1}}\right) = 0.$$

Ligning (30) må derfor være nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at $n-1$ hyperkugler i et R_{n-2} berører hinanden parvis og desuden alle berører samme hyperplan. Dette kan også fås mere direkte således: Vi tænker os i opgavens formulering hyperkuglen K_1 erstattet med en hyperplan. Dette medfører, at man i (23) og (26) skal sætte $\frac{1}{d_1} = 0$. Herved simplificeres disse to formler til

$$\delta = \frac{1}{d_2}, \quad x_i^2 = \frac{1}{d_2 d_i},$$

som indsat i (27) giver

$$\Phi\left(\frac{1}{d_2^2}, \frac{1}{d_2 d_3}, \dots, \frac{1}{d_2 d_n}\right) = 0,$$

d. v. s.

$$\Phi\left(\frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}, \dots, \frac{1}{d_n}\right) = 0,$$

der på nær de benyttede indices stemmer med (30).

For $n=3$ giver (30) specielt, at betingelsen for, at 3 cirkler med diametre d_1, d_2 og d_3 rører hinanden parvis og har en fælles tangent, er

$$\Phi\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}\right) = 0,$$

d.v.s. (sml. s. 158), at den ene af størrelserne $\frac{1}{\sqrt{d_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{d_2}}$ og $\frac{1}{\sqrt{d_3}}$ er lig summen af de to andre. Dette stemmer med, at længden af fællestangenten for to (udvendigt) berørende cirkler med diametre d_i og d_j er $\sqrt{d_i d_j}$.

Til slut skal anføres, at i et rum med sfærisk metrik bliver (29) erstattet af

$$\left(\sum_1^n \cot r_i\right)^2 - (n-2) \sum_1^n \cot^2 r_i = 2(n-2),$$

hvor r_i betegner hyperkuglernes »sfæriske radier«, målt mellem $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$, og regnet med fortegn på passende måde.

Om beviset skal her blot nævnes, at det kan føres ud fra (29) ved anvendelse af en inversion.

LITTERATUR

- [1] M. E. WISE: *On the radii of five packed spheres in mutual contact*. Philips Research Reports, 15, 1960, pp. 101–106.

BOKMELDINGER

G. ASSER: *Einführung in die mathematische Logik*. Teil I. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 18.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 4+184 S., 7 Fig. DM 11.25.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 41.)

Bogen er det første og nok mindste af tre planlagte bind. Tilsammen skulle de ifølge forordet give en indføring i den matematiske logiks »Gesamtgebiet«, — dette dog ment i snævrere forstand: talen er udelukkende om den klassiske matematiske logik med to sandhedsværdier: sand og falsk. 1. bind rummer udsagnskalkylen.

Logikkens egentlige problem er forholdet: forudsætninger-konsekvenser. Man kan i stedet behandle »almengyldige udtryk«, tautologier, og det har forfatteren gjort. Men desværre nævner han ikke forbindelsen til det egentlige problem. Den uindviede læser vil derfor næppe forstå, hvad hele teorien skal tjene til. Han får ikke hjælp af bogens eksempler.

I øvrigt burde nok forfatteren ved overgangen til bogens anden del, dvs. i § 6, fremhæve, at det emne, der nu tages op, »Ableitbarkeit«: »Ein Ausdruck H heißt genau dann aus einer Menge X von Ausdrücken ableitbar ($X \text{ Abl } H$), wenn ...«, er noget ganske andet end konsekvensforudsætninger.

Udsagnskalkylen har et meget simpelt indhold. Desværre skjuler forfatteren til dels dette. Som eksempel kan anføres § 5, omhandlende normalformer: Et blik på sandhedstavlen først for et »elementaralternativ«, så for en vilkårlig »kanonisk konjunktiv normalform«, er i virkeligheden tilstrækkeligt til at godtgøre rigtigheden af samtlige påstande i § 5. Der gives også en antydning i denne retning, ganske vist sløret af en overflødig antalsbetragtning, — men først efter, at læseren gennem henvend en snes sider må tro at beskæftige sig med noget dybsindigt.

Fremstillingen er bred, men ikke tilsvarende klar. Som eksempel kan jeg nævne diskussionen af omtalte »Ableitbarkeitsrelation«, *Abl*. En fodnote s. 104 gør opmærksom på, at de fleste af de følgende resultater også gælder for en vilkårlig »Ableitbarkeitsrelation«; i virkeligheden har teksten undertiden kun mening i det almene tilfælde. Forfatteren springer nu fra

det specielle synspunkt til det almene (første gang s. 75!) og tilbage, ofte uden et ord; for læseren er det ganske besværligt at prøve at holde rede på, hvor forfatteren er i øjeblikket.

Udsagnskalkylen har sit symbolsprog. Det må man naturligvis lære. Derimod vil jeg mene, at bogen var lettere læst, om ikke forfatteren rundhåndet havde strøet ud et væld af mere hjemmelavede betegnelser. Det er mest forkortelser af tyske ord, som f. eks. *ausd*: mængden af alle »Ausdrücke«. Hvad angår betydningen af *Ab*, *Aba*, *Abe*, *Abl*, *Abla*, osv.: benyt henvisningerne i registret; det har jeg gjort adskillige gange.

Når disse indvendinger er gjort, skal det også siges, at bogen indeholder meget stof af interesse.

Jeg finder det endvidere fordelagtigt, at forfatteren opnår en fast linie ved at bygge fremstillingen på begreber som mængde og afbildning i deres håndfaste form.

Meget benyttes der vel ikke herom; væsentligt for læserens udbytte vil det alligevel være, at det er begreber, han på forhånd er fortrolig med. Men selv om denne betingelse er opfyldt, kan jeg, som man vil forstå af indvendingerne ovenfor, ikke tilråde denne »Einführung« som et første bekendtskab med matematisk logik.

Tage Gutmann Madsen

F. BACHMANN: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. (Grund-lehren der mathematischen Wissenschaften 96.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 13+311 S., 160 Fig. Ganzl. DM 49.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 127.)

Det første kapitel i Bachmanns bog er af propædeutisk karakter. Her samles på et intuitivt grundlag (der kan præciseres ved Hilberts aksiom-system) erfaringer om spejlinger i den sædvanlige plane geometri, indføres betegnelsesmåder, der letter vejen til den senere anvendte gruppeteoretiske kalkule med spejlinger, og bevises visse fra den sædvanlige geometri kendte sætninger ved regning med spejlinger. Endvidere refereres modeller af elliptisk og hyperbolsk geometri. Dette kapitel er umiddelbart tilgængeligt og giver et overblik over den plane geometri fra et ikke traditionelt synspunkt.

Senere i bogen finder man refererende afsnit om projektiv geometri, i kapitel II på aksiomatisk og i kapitel III på analytisk grundlag. Der er her tale om projektiv-metriske planer, d. v. s. projektive planer, hvori der er givet en polaritet (ved hjælp af hvilken man kan definere flytninger). Analytisk kan en sådan plan fremstilles ved et metrisk vektorrum, d. v. s. et vektorrum, hvori der er defineret et skalært produkt (ved en symmetrisk bilinearform), og flytningerne i planen kan fremstilles ved ortogo-

nale transformationer af vektorrummet, d. v. s. lineære transformationer af vektorrummet, ved hvilke skalarproduktet er invariant.

Vedrørende bogens hovedemne, der — som titlen angiver — er en opbygning af den plane geometri på grundlag af spejlinger, skal her blot henvises til den udførlige introduktion, der er givet i NMT 7 (1959), s. 97–110 og s. 145–156.

Poul Neerup

FR. FABRICIUS-BJERRE: *Lærebog i geometri, I*. 3. ændrede udgave. Jul. Gjellerups forlag, København, 1958. 255 s., 64 fig. D. kr. 40.00.

(Innehållsförteckning i NMT 7 (1959), s. 40.)

Vid Danmarks Tekniske Højskole finns en särskild lärostol i geometri, något som ger geometriundervisningen där en starkare enhetlighet än vad fallet är t. ex. vid de svenska tekniska högskolorna där geometrikursens olika delar är utspridda på ett flertal andra läroämnena.

Den föreliggande boken är tredje upplagan av Fabricius-Bjerrers välkända och utmärkta lärobok som innehåller den danska kursen. En jämförelse med andra upplagan visar att en stark omarbetning och om-disposition ägt rum, så att den lineära algebran kommit att intaga en mycket centralare plats än tidigare. I de tre första kapitlen behandlas determinanter, lineära ekvationssystem och vektorkalkyl i tre dimensioner. Fjärde kapitlet behandlar räta linjen och planet i det tredimensionella rummet. Femte, sjätte och sjunde kapitlen behandlar n -dimensionella vektorrum, matriskalkyl och lineära transformationer med geometriska tillämpningar (t. ex. koordinattransformation) varefter boken avslutas med två kapitel om andragsgradskurvor och andragsgradsytor. I ett tillägg införes den geometriska terminologien i n -dimensionella vektorrum, vilka dock här liksom tidigare (i kap. V) behandlas som rum av n -tupler av tal $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Det är överflödigt att gå in på detaljer då det gäller att berömma framställningen i denna redan välkända lärobok, utan det må räcka att konstatera att omarbetningen är lika lättläst som den tidigare upplagan trots att en modernisering och utvidgning av lärostoffet företagits.

Till sist en kritisk reflexion. Frånvaron av ett axiomsystem för den euklidiska geometrien gör att flera som satser betecknade påståenden bara kan göras troliga men inte bevisas. Detta kunde lätt ha avhjälpits om vektorrum med inre produkt hade definierats abstrakt med hjälp av ett axiomsystem. En sådan definition ger på en gång ett axiomsystem för euklidisk geometri och möjlighet att ordentligt bevisa isomorfien mellan ett godtyckligt n -dimensionellt vektorrum och det speciella n -dimensionella vektorrum som består av n -tupler av reella tal. Att syste-

matisk utnyttja denna isomorfi utgör ju den analytiska geometriens grundidé.

Hans Rådström

O. HANNER – M. HÅSTAD – S. SCHWARZ: *Tentamensproblem med lösningar* för AB (2 betyg) i matematik. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1960. 152 s. Sv. kr. 17.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 179.)

Denne oppgavesamling er beregnet på svenske studenter, men den vil etter anmelderens mening også kunne være til nytte for andre skandinaver. Enhver som underviser i de emner som dekkes av boken, vil kunne finne mange gode oppgaver her. Svært få av oppgavene byr bare på ren »slaveregning«, og en god del av dem må sies å være interessante, i den grad matematiske problemer på dette trinn kan være det.

Det er et spørsmål om eksamensoppgaver behøver å være interessante eller »morsomme«. Erfaringen lærer oss nemlig at mer trivielle oppgaver kan gjøre god nytte til eksamen, og er ulike mye lettere å lage enn de interessante, spesielt fordi en kan ha vanskelighetsgraden bedre under kontroll. Mange har vel, som anmelderen, gjort den erfaring at det helst er eksamensoppgavene, og oppgaver som ligner disse, som har studentenes interesse. Grunnen er antagelig at formålet med studiet, i strid med universitetets intensjoner, oppfattes som det å kunne mestre eksamenssituasjonen best mulig. Har man dette i tankene, ser man at det er all mulig grunn til å være meget omhyggelig i valg av eksamensoppgaver. Slik gir denne oppgavesamlingen oss et godt forbilde.

Boken inneholder fullstendige løsninger til alle oppgavene, og i mange tilfelle flere løsninger til samme oppgave. Dette gjør at en student vil kunne bruke boken på egen hånd. Det eneste aber ved en slik anvendelse av boken er at en del av oppgavene vil være for vanskelige for en middels student, og problemet for lesere utenfor Sverige blir da å finne ut hvilke oppgaver dette er, uten først å forsøke å regne dem.

Helge Tverberg

KURT SCHÜTTE: *Beweistheorie*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 103.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 11 + 355 S. Ganzl. DM 48.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 182.)

Denne bok, som vel neppe kan sies å være helt elementær, gir en systematisk fremstilling av problemkomplekset omkring den elementære tallteoris konsistens.

Med »elementær tallteori« menes den del av tallteorien som kan (f. eks. på grunnlag av Peanos aksiomatikk) formaliseres innen første ordens predikat kalkyl. Denne kalkyl kjennetegnes ved at kvantorene ($\exists x$ – det fins en x , og $\forall x$ – for alle x) begrenses til bruk på variable over individene i grunnområdet (dvs. de naturlige tall), men ikke til variable over egenskaper ved individer.

Fra en fundamental sats av K. Gödel (1931) følger at man ikke kan bevise konsistensen av den elementære tallteori ved metoder som er formaliserbare (uttrykkbare) innen denne teorien selv, altså heller ikke ved »effektive« eller »finite« bevismetoder, men må gripe til sterkere slutningsregler. G. Gentzen viste i 1936 at en kan gjennomføre et konsistensbevis om en i tillegg til finite bevismetoder benytter induksjon opp til det første ε -tall. Hvor stor vekt en tillegger dette konsistensbevis, avhenger av ens innstilling til transfinit induksjon; mange finner det vanskelig å godta et konsistensbevis for den elementære tallteori som bygger på bevismetoder som går ut over denne teori selv.

Med transfinit induksjon mener en induksjon hvor grunnområdet for den vanlige tallteoretiske induksjon, de naturlige tall, er erstattet med klassen av ordinaltall. Med induksjon til et ordinaltall α mener en altså følgende slutningsregel: Hvis en egenskap A som gjelder for alle ordinaltall mindre enn et gitt ordinaltall ξ , også gjelder for ξ , så vil A gjelde for alle ordinaltall mindre enn α . (Settes her α lik ω , det første ordinaltall følgende de naturlige tall, fås vanlig induksjon.)

Et ε -tall er et ordinaltall α som oppfyller likningen $2^\alpha = \alpha$; det første ε -tall, ε_0 , vil være det minste ordinaltall større enn alle ordinaltall i følgen

$$\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$$

Ved bruk av ε_0 -induksjon viste så Gentzen at den elementære tallteori var konsistent. Det er også ganske interessant å vite at ε_0 -induksjon, i en viss betydning, er en »minimal« utvidelse av de »finite« bevismetoder, idet induksjon opp til ethvert ordinaltall mindre enn ε_0 lar seg representere innen den elementære tallteori, mens derimot ε_0 -induksjon ikke lar seg redusere på denne måte. (Indirekte følger dette av Gödels teorem, direkte viste Gentzen det i 1944.)

Gentzens opprinnelige beviser var meget kompliserte; i den foreliggende bok har vi fått en fremstilling av Gentzens resultater bygget på en fra forfatteren stammende systematisering av den elementære logikk, som viser seg særdeles hensiktsmessig på dette området av bevisteorien.

Boken inneholder for øvrig en lang rekke andre resultater, for en stor del bygget på forfatterens egne arbeider, bl. a. blir forfatterens fullstendighetsbevis for den elementære predikat kalkyl gjengitt, den elementære

tallteori utvides ved overgang til såkalte »halvformale« systemer (hvor man tillater slutningsregler med et uendelig antall premisser), og i bokens siste avsnitt betraktes typeteoretiske systemer med henblikk på en videre formalisering og bevisteoretisk undersøkelse av analysen.

Som vanlig med Springer-bøkene, er boken typografisk og håndverksmessig av høy klasse. Trykkfeil fins omtrent ikke; deres trivialitet illustreres best ved et par eksempler: på side 86 står det $(A \wedge B_+)$ i stedet for $(A \wedge B)_+$, på s. 129 skal siste ligning $\varepsilon_r = \alpha$ være $\varepsilon_\alpha = \alpha$. Fornøyeelig er det at forfatteren stadig insisterer på å henvise til sats 8.4 (f. eks. på sidene 87, 88, 153), når sats 8.4 overhodet ikke forekommer i boken!

J. E. Fenstad

Structures algébriques et structures topologiques. (Monographies de l'Enseignement Mathématique, No. 7.) Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, et Institut de Mathématiques, Université, Genève, 1958. 198 pp. Fr. suisses 20.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 42.)

Denne »matematiske essaysamling« kaller på vår spesielle interesse, ikke bare fordi de enkelte »essays« er sjeldent instruktive og vel gjennomtenkte innførings- og oversiktsartikler, men også fordi boken er et vitnesbyrd om et vellykket forsøk på å knytte kontakten mellom universitetets og skolens lærere, og på å gi skolens lærere en praktisk mulighet til å følge med i den senere tids raske utvikling innen deres eget fag.

Det er naturlig for en anmelder i første rekke å feste seg ved den idé som ligger bak denne boken og bak den foredragsserie som den er bygget over. Bokens eget forord, som er forfattet av G. Choquet (professor ved Sorbonne) og G. Walusinski (formann i Foreningen av franske matematikklektorer), kan på mange måter oppfattes som en programerklæring for denne idé, og det kan derfor være av interesse å gjengi dette forordet i en (noe forkortet) norsk oversettelse:

»I 1956 besluttet Fransk matematisk forening (Société Mathématique de France) i samarbeid med Foreningen av matematikklektorer (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), å arrangere forelesningsserier spesielt beregnet på matematikklærere på ethvert undervisningstrinn.

Den første serie på 8 forelesninger (februar til juni 1956) behandlet *algebraiske strukturer*. Den annen serie på 10 forelesninger (november 1956 til juni 1957) behandlet *topologiske strukturer*. Alle disse forelesninger ble holdt ved Institut Henri Poincaré ved Sorbonne i Paris, foran et tallrikt og oppmerksomt auditorium av praktiserende lektorer. Unge

lærere og grånende kolleger fant seg her forenet på universitetsbenkene, og de enkelte foredrag ble fulgt av spørsmål og debatter som ikke er tatt med i boken.

Foredragene ble alle skrevet ned av forfatterne selv og publisert regelmessig i Tidskriftet for Foreningen av matematikklektorer (Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques). Samlingen av disse foredragene til et bind i serien »Monographies de l'Enseignement Mathématiques« gjør dem nå tilgjengelige for alle som ikke har hatt anledning til å skaffe seg de forskjellige nummer av dette tidsskriftet. Samtidig vitner det om et pedagogisk samarbeid som fortjener å bli understreket.

Denne bok er ikke en samling vitenskapelige avhandlinger, — heller ikke er den et forsøk på en forenkling, som her ville være dømt til å bli en banalisering. Den bør heller oppfattes som en innføring til studiet av samtidens avhandlinger. Den vil motivere og begrunne de nyere retningslinjer i matematikken, og den vil gi leserne lyst til å sette seg nærmere inn i de mer moderne aspekter. På den måten vil den i neste omgang bidra til å fornye vår undervisning. Organiseringen av foredragene ble også lagt opp med dette mål for øye. Deres suksess har bevist at man her imøtekom et behov for kontakt mellom de som underviser den ferdige vitenskap og de som underviser den vitenskap som ennå står i forvandlingens tegn.

Den raskt økende utbygning av forskningen, de stadig raskere fremskritt med hensyn til vitenskapelige resultater, tvinger selv de lærere som underviser på elementært nivå, til å fornye sine teoretiske kunnskaper. De erindringer de har bevart fra sine egne universitetsstudier trenger en periodisk oppfriskning. Deres egen undervisning bør nyte godt av vitenskapens nyvinninger. I dag må man undervise matematikken av i dag. Slik forbereder man studentene på den beste måte til de studier, eller til den forskning, som venter dem.

Disse foredrag utgjør således en del av et permanent pedagogisk foretagende, som har det dobbelte mål å tilpasse undervisningen til vitenskapens utvikling og å utvikle pedagogikken selv. Man har nylig kritisert den form for pedagogisk forskning som utelukkende har vært viet de »profesjonelle knep«, de »metoder som lykkes«, uten tanke på å klargjøre de underliggende prinsipper og dermed bane veien for videre fremgang i faget. Disse foredrag åpner derimot perspektiver mot samtidens vitenskap, og bør kunne følges av en innsats i den pedagogiske forskning som tilsvarende dagens enorme behov for vitenskapelig undervisning.

Fremtiden for denne pedagogiske forskning kan imøtesees med optimisme. I løpet av foredragene vokste det frem en stigende samarbeidsvilje og gjensidig aktelse mellom lærere på de forskjellige undervisnings-

trinn. I første omgang var det, naturlig nok, universitetslærerne som hadde den største delen av arbeidet, men i neste omgang vil lektorene på lavere trinn yte dem en gjentjeneste ved bedre å forberede elevene til de høyere studier. På denne måten illustrerer dette samarbeidet den dyptgående enhet i en undervisning som ved vel tilpassede metoder bør kunne føre elevene helt frem til de høyeste studier uten å tape den enestående skaperevne og virketrang som de som barn åpenbarer nesten hver eneste dag.»

Det ville føre for langt om vi her skulle komme nærmere inn på de enkelte artikler. Innholdsfortegnelsen viser hvilke emner som er representert. Den kan gi et visst inntrykk av det faglige grunnsyn som preger den gruppen av matematikere som har gått sammen om dette foretagendet.

Det står bare igjen å ønske at boken får mange lesere, såvel innenfor den gruppe foredragene opprinnelig var beregnet for, som innenfor gruppen av studenter som er interessert i å orientere seg i faget matematikk.

E. Alfsen

MOTTATTE BØKER

Claire Fisher Adler: *Modern geometry*. An integrated first course. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1958. 14+215 pp. sh. 50/6.

Logical systems and basic laws of reasoning 3–16 * Special topics of axiomatic geometry 17–29 * Menelaus' and Ceva's theorems 30–39 * Harmonic elements and cross ratio 40–52 * Inversion theory 53–60 * Projections, invariants, and other unifying concepts 63–69 * Basic axioms, duality, Desargues' theorem, and perspective figures 70–81 * Projective theory of harmonic elements. Additional axioms 82–91 * Perspectivities, projectivities, and the projective theory of conics 92–107 * Coordinate projective geometry 108–130 * Transformation theory 131–150 * Early axiomatic theories and the later metric approach to non-Euclidean geometry 153–165 * Parabolic geometry 166–174 * Hyperbolic geometry 175–188 * Elliptic geometry 189–198 * Appendix A. Early foundation of Euclidean geometry 199–203 * Appendix B. Hilbert's axioms 204–205 * Bibliography 207–210 * Index 211–215.

F. Gerrish: *Pure mathematics, I, II*. Cambridge University Press, Cambridge, 1960. Vol. I: 25+361+24 pp. sh. 25/-. Vol. II: 29+397+24 pp. sh. 35/-.

Vol. I: Review of some facts, definitions and methods 1–37 * Limits. Continuous functions 38–59 * The derivative. Some applications 60–92 * Integration 93–176 * Differential equations 177–222 * Some theorems of the differential calculus 223–254 * Integration as a summation process 255–295 * Further geometrical applications of the calculus 296–328 * Functions of several variables 329–361 * Answers to volume I 1–23 * Index to volume I xxi–xxv.

Vol. II: Algebra of polynomials 363–390 * Determinants and systems of linear equations 391–418 * Series 419–485 * Complex algebra and general theory of equations 486–527 * De Moivre's theorem and some applications 528–564 * Survey of elementary coordinate geometry 565–602 * The parabola 603–618 * The ellipse 619–644 * The hyperbola 645–663 * The general conic; $s=ks'$ 664–683 * Polar equation of a conic 684–699 * Coordinate geometry in space 700–735 * The sphere; spherical trigonometry 736–758 * Answers to volume II 25–48 * Index to volume II xxiii–xxix.

Fritz Rudolf Güntsch: *Einführung in die Programmierung digitaler Rechenautomaten*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 144 S. Leinen DM 24.00.

Einleitung 6-25 * Über die Notierung von Programmen 25-31 * Lineare und zyklische Programme 31-55 * Symbolische Adressen 55-61 * Mehrfach zyklische Programme 62-71 * Die Versorgung von Unterprogrammen mit Parametern 71-84 * Klassifizierung von Adressenänderungen nach Burks, Goldstine, v. Neumann 84-90 * Automatisierung von Adressenänderungen 90-105 * Programmumdeutung und -umrechnung 105-113 * Ein Externcode für die Z 22 und seine Beziehung zum Interncode 113-127 * Eine Programm- und Adressen-Organisation 127-139 * Literatur 141-144.

O. Hanner — M. Håstad — S. Schwarz: *Tentamensproblem med lösningar* för AB (2 betyg) i matematik. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1960. 152 s. Sv. kr. 17.50.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 173.)

Uppgifter: Algebra 11-14 * Analys 15-27 * Geometri 28-32 * Lösningar 33-152.

Lothar Heffter: *Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen*. Zweite, verbesserte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 8+64 S. DM 19.80.

Vorkenntnisse 1-30 * Definition der »analytischen Funktion« 31 * Die Wege von Cauchy 1814 und Goursat 1900 31-38 * Der Weg von Looman-Menchoff 1933 38-41 * Ältere Wege bei Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit von $f(z)$ 41-44 * Der einfachste Weg bei Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit von $f(z)$ 1936 44-49 * Ein neuer Weg unter Benutzung von Polarkoordinaten 1951 50-54 * Vergleich der Voraussetzungen in Kap. II-VI 55-56 * Originalliteratur zur Geschichte der Begründung der Funktionentheorie 56-62 * Lehrwerke der Funktionentheorie 62 * Verzeichnis der gebrauchten Begriffe 63-64.

Guido Hoheisel: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. (Sammlung Götschen 920.) Sechste, neubearbeitete Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 128 S. DM 3.60.

Die Differentialgleichung 1. Ordnung $F(x, y, y') = 0$ 5-50 * Lineare Differentialgleichungen 51-72 * Randwertaufgaben 72-108 * Oszillationsprobleme 108-128.

Guido Hoheisel: *Partielle Differentialgleichungen*. (Sammlung Götschen 1003.) Vierte Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 128 S. DM 3.60.

Literatur 4 * Sachverzeichnis 4 * Die Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen 5-35 * Die Differentialgleichung erster Ordnung mit n Veränderlichen 35-65 * Systeme mit einer und mehr unbekannten Funktionen 66-87 * Die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen 87-122 * Nachträge 122-128.

Sig Kanger: *Handbok i logik*. Del I: Logisk konsekvens. Stockholms högskola, Stockholm, 1959. 5 + 92 s.

Logikens språk 2–30 * Sanning och konsekvens 31–54 * Härledning och bevis 55–69 * Bevisbarhet 70–92.

Herbert Lugowski — Hanns Joachim Weinert: *Grundzüge der Algebra, III*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 11.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1960. 275 S. Gebunden DM 13.80.

Polynome 5–74 * Algebraische Körpererweiterungen 75–145 * Galois-Theorie 146–229 * Lösungen der Aufgaben 230–272 * Sachverzeichnis 273–275.

Ivan Niven — Herbert S. Zuckerman: *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons, New York, London, 1960. 8 + 250 pp. \$ 6.25.

Divisibility 1–19 * Congruences 20–63 * Quadratic reciprocity 64–77 * Some functions of number theory 78–93 * Some diophantine equations 94–127 * Farey fractions 128–133 * Simple continued fractions 134–163 * Elementary remarks on the distribution of primes 164–172 * Algebraic numbers 173–199 * The partition function 200–220 * Density of sequence of integers 221–236 * References 237–238 * Answers to problems 239–246 * Index 247–250.

Herbert Noack: *Anschauliche mathematik*. II. Teil: Algebra (endliche Gruppen). Ferdinand Hirt in Kiel, 1960. 164 S.

Geleitwort 5 * Vorwort des Herausgebers zum ersten und zweiten Teil 7–8 * Der Gruppenbegriff im Unterricht 11–15 * Definitionen und Sätze der Gruppentheorie 16–51 * Polyongruppen 52–79 * Polyedergruppen 80–125 * Ornamentgruppen 126–163 * Literaturverzeichnis 164.

Max Päsler: *Mechanik deformierbarer Körper*. (Sammlung Götschen 1189/1189a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 199 S. DM 5.80.

Literaturangaben 5–7 * Liste der benützten Symbole 8–9 * Vorbereitendes 10–28 * Der elastische Körper 28–30 * Kinematik 30–44 * Statik 44–73 * Dynamik 73–89 * Die ideale Flüssigkeit 89–91 * Hydrostatik 91–104 * Hydrodynamik. Allgemeines 104–119 * Stationäre wirbelfreie Flüssigkeitsbewegungen 119–144 * Nichtstationäre wirbelfreie Strömungen 144–167 * Wirbelbehaftete Flüssigkeitsbewegungen 167–180 * Zähne Flüssigkeiten 180–196 * Register 197–199.

Oskar Perron: *Irrationalzahlen*. Vierte Auflage. (Göschens Lehrbücherei 1.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 8 + 204 S. DM 28.00.

Die Grundlagen 1–31 * Der Begriff der Grenze 32–60 * Potenzen und Logarithmen 61–93 * Verschiedene Darstellungsformen irrationaler Zahlen 94–133 * Approximation irrationaler Zahlen durch rationale 134–173 * Algebraische und transzendente Zahlen 174–198 * Literatur 199–202 * Namen- und Sachregister 203–204.

Friedrich O. Ringleb: *Mathematische Formelsammlung*. 7. Auflage. (Sammlung Götschen 51/51a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 318 S. DM 5.80.

Arithmetik und Kombinatorik 6–23 * Algebra 23–45 * Zahlentheorie 46–53 * Elementare Reihen 53–59 * Ebene Geometrie 59–80 * Stereometrie 80–88 * Ebene Trigonometrie 88–100 * Sphärische Trigonometrie 100–107 * Mathematische Geographie und Astronomie 107–117 * Analytische Geometrie der Ebene 117–149 * Analytische Geometrie des Raumes und Vektorrechnung 149–181 * Differentialrechnung 181–213 * Integralrechnung 213–247 * Funktionentheorie und konforme Abbildung 247–266 * Differentialgeometrie 266–297 * Differentialgleichungen 297–318 * Verzeichnis der wichtigsten Begriffe 318–320.

H. Arnold Schmidt: *Mathematische Gesetze der Logik, I.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 69.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 24 + 555 S. Ganzl. DM 79.00.

Alternäre Aussagenlogik 1–4 * Grundlegende Gesetze des Booleschen Verbandes 4–29 * Strukturelle Einblicke in die logische Algebra 29–45 * Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Entscheidungsdefinitheit der logischen Algebra 45–53 * Zusätze zum Ausbau und zur Interpretation der logischen Algebra 53–67 * Algebra der $\rightarrow$ -Logik 67–76 * Wahrheitswertung, Verknüpfungsbasen 76–98 * Wahrformen 98–112 * Verallgemeinerte Wahrheitswertung (Quasiwahrheitswertung) 113–128 * Kodifikation 128–138 * Grundlegende syntaktische Begriffsbildungen 138–155 * Grundsätzliches zur deduktiven Aussagenlogik 155–179 * Das Deduktionstheorem und Anschliessendes 179–188 * Normaldeduktive alternäre $\vee$ -Aussagenlogik 188–203 * Normaldeduktive alternäre $\rightarrow$ -Aussagenlogik 203–217 * Natürliche alternäre aufschichtende Aussagenlogik 217–233 * Kürzungserweiterte aufschichtende Aussagenlogik 233–248 * Schnittelimination beim natürlichen kürzungserweiterten Kodifikat K 248–258 * Aufschichtende alternäre $\vee$ -Logik 259–267 * Nichtalternäre Aussagenlogik 268–271 * Die derivative Aussagenlogik und ihre normaldeduktive Kodifikation 271–285 * Derivative $\rightarrow$ - und $\rightarrow\wedge$ -Logik 285–296 * Entwickelnde derivative Implikationslogik 296–320 * Natürliche derivative Logik 320–342 * Die normaldeduktive Behandlung der intuitionistischen Aussagenlogik 342–358 * Charakteristische Eigenschaften der intuitionistischen Aussagenlogik 358–374 * Die aufschichtende Behandlung der derivativen und der intuitionistischen Aussagenlogik 375–390 * Die Angemessenheit der aufschichtenden Kodifikate 390–396 * Vorbereitung des Entscheidungsverfahrens 397–409 * Das Entscheidungsverfahren 409–428 * Strikte Aussagenlogik 429–430 * Engere strikte Aussagenlogik 430–451 * Eine erste Erweiterung der strikten Logik 452–464 * Die Modalitäten »notwendig« und »möglich« in der strikten Logik 464–477 * Die Modalitätenaxiome. Verschärfte strikte Logik 477–499 * Entscheidungsverfahren für die verschärfte strikte Logik 500–517 * Die Modalitäten »offen« und »zufällig« in der strikten Logik 517–529 * Übersicht über die logischen Zeichen 530–531 * Verzeichnis der wichtigsten nummerierten Formen 531–542 * Literatur 542–544 * Sachverzeichnis 545–555.

H. Schubert — R. Haussner — J. Erlebach: *Vierstellige Tafeln und*

Gegentafeln. (Sammlung Götschen 81.) Dritte Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 157 S. DM 3.60.

Vierstellige dekadische Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 3 * Siebenstellige Logarithmen der Primzahlen unter 100 4–34 * Vierstellige Logarithmen der trigonometrischen Werte 35–88 * Additionslogarithmen 89–93 * Subtraktionslogarithmen 95–109 * Natürliche Logarithmen 111–112 * Quadrate und Quadratwurzeln 113–118 * Kuben und Kubikwurzeln 119–124 * Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen 125–131 * Wurzeln, Potenzen, Kreiszahlen, Reziproke 134–137 * Häufig auftretende Zahlenwerte 138 * Umrechnung von Winkelgraden in Bogenlängen 139–140 * Sterbetafel 142 * Zinstabellen. Aufzinsungsfaktoren. Abzinsungsfaktoren. Rentenendwerte 143–146 * Geographische Angaben 148–149 * Astronomische Angaben 150–152 * Physikalische Angaben 153–157.

Kurt Schütte: *Beweistheorie.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 103.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 11+355 S. Ganzl. DM 48.00.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 173.)

Einleitung 1–4 * Aussagenlogik 5–38 * Formale Systeme 39–76 * Prädikatenlogik 76–105 * Ordnungszahlen 106–141 * Engere Zahlentheorie 142–168 * Vollständige Zahlentheorie 168–201 * Die transfinite Induktion 201–223 * Typenfreie Logik 225–245 * Verzweigte Typenlogik 245–274 * Kennzeichnungs- und Auswahloperatoren 274–299 * Analysis 299–344 * Literaturverzeichnis 345–347 * Verzeichnis der Schlussregeln 347–349 * Namen- und Sachverzeichnis 350–355.

Siegfried Valentiner: *Vektoren und Matrizen.* (Sammlung Götschen 354/354a.) Zweite Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960. 202 S. DM 5.80.

Einleitung 6–11 * Rechnungsregeln der Vektoranalysis 11–75 * Anwendung in einigen physikalischen Gebieten 75–77 * Einige Sätze der Potentialtheorie 77–86 * Einige Sätze der Hydrodynamik 86–99 * Einiges aus der Theorie der Elektrizität 99–103 * Lineare Vektorfunktionen, Matrizen, Dyaden 103–161 * Aufgaben zur Vektorrechnung 162–198 * Zusammenstellung einiger wichtiger Formeln 199–202.

B. L. van der Waerden: *Algebra, I.* Fünfte Auflage. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 33.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960. 8+292 S. Ganzl. DM 22.00.

Zahlen und Mengen 3–18 * Gruppen 19–40 * Ringe und Körper 41–73 * Ganze rationale Funktionen 73–101 * Körpertheorie 101–146 * Fortsetzung der Gruppentheorie 146–162 * Die Theorie von Galois 163–200 * Unendliche Körpererweiterungen 200–220 * Reelle Körper 220–248 * Bewertete Körper 248–292.

Ulrich Weyh: *Elemente der Schaltungs algebra.* Verlag R. Oldenbourg, München, 1960. 116 S. DM 13.80.

Einleitung 7-9 * Logische Funktionen 10-17 * Die Postulate der Schaltalgebra 17-30 * Die Rechenregeln der Schaltalgebra 30-55 * Analyse und Synthese von logischen Schaltungen 55-73 * Symbolische Darstellung von Schaltfunktionen 73-80 * Beispiele für die Realisierung von logischen Grundschaltungen in verschiedenen Techniken 80-92 * Beispiele für die Behandlung praktischer Probleme 92-110 * Anhang 111-114 * Literaturhinweise 115 * Sachregister 116.

C. R. Wylie, Jr.: *Advanced engineering mathematics*. 2nd edition. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1960. 11 + 696 pp.

Determinants and matrices 1-56 * Ordinary differential equations of the first order 57-78 * Linear differential equations with constant coefficients 79-113 * Simultaneous linear differential equations 114-129 * Finite differences 130-193 * Mechanical and electrical circuits 194-244 * Fourier series and integrals 245-288 * The Laplace transformation 289-344 * Partial differential equations 345-404 * Bessel functions and Legendre polynomials 405-460 * Vector analysis 461-526 * Analytic functions of a complex variable 527-569 * Infinite series in the complex plane 570-592 * The theory of residues 593-621 * Conformal mapping 622-648 * Appendix 649-658 * Answers to odd-numbered exercises 659-686 * Index 687-696.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 200–205 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i neste hefte, være sendt innen 10. mars 1961.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

200. En räcka $a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} < \dots < a_{2n+1}$ av på varandra följande hela kvadrater är given. Bevisa att vid ett visst värde på k och a_1 som funktioner av n är

$$\sum_{\mu=1}^k a_{\mu} = \sum_{\nu=k+1}^{2n+1} a_{\nu}.$$

A. V. Peljo

201. I rekken

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

skal en ordne leddene slik at der først kommer p_1 positive ledd, deretter q_1 negative, så p_2 positive og q_2 negative osv. Velg tallfølgene $\{p_n\}$ og $\{q_n\}$ slik at

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n}.$$

Vis at rekken da får summen $s=1$.

R. Tambs Lyche

202. Bevis formelen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \binom{2n}{n}} = \frac{17}{36} s_4,$$

der $s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4}.$

W. Ljunggren

Tidligere formler av samme type:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{1}{3} s_2 \quad (\text{Knopp, Unendl. Reihen, 1922, s. 259}).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} = \frac{2}{5} s_3 \quad (\text{Hjortnæs, Skand. Kongr. Lund 1953, s. 212}).$$

203. Finn antallet av de n -sifrede naturlige tall hvis tverrsum er $t < 10$.

Brynjolf Dokken

204. Gennem midtpunktet af hver side i en indskrivelig firkant trækkes en linie vinkelret på den modstående side. Bevis, at disse linier alle går igennem det samme punkt. (Der bliver ialt 6 lodlinier, idet vinkelspidsernes orden er ligegyldig.) Om firkanten kan der omskrives een ligesidet hyperbel. Hvilken rolle spiller lodliniernes skæringspunkt for denne?

Sigurkarl Stefánsson

205. Bevis formelen

$$\int \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} \sin x dx = -2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos kx}{k} - \frac{\cos nx}{n} + C.$$

I. Johansson

LÖSNINGER

168. Talen c_{rs} i oppgift 161 ha för konstant r ett maximum c_{rm} . För $q=0$ gäller att

$$\log c_{rm} \sim r \log 2,$$

varmed menas att kvoten går mot 1. Bevisa i fallet $q > 0$ att

$$\log c_{rm} \sim qr \log r.$$

Gerhard Arfwedson

Da ingen løsninger er innkommet, gjengir vi oppgavestillerens eget forslag:

Løsning: Enligt lösningen till uppgift 161 är

$$f_s(x) = \sum_{r=s-1}^{\infty} c_{rs} x^r = x^{s-1} \prod_{j=1}^s (1 - j^q x)^{-1},$$

således att

$$c_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f_s(z) z^{-r-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{s-r-2} dz \prod_{j=1}^s (1 - j^q z)^{-1},$$

där cirkeln C omsluter origo men ej punkten s^{-q} . Vi sätter

$$z = k^q s^{-q} e^{i\varphi}, \quad k < 1,$$

och får

$$(1) \quad c_{rs} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\Phi(\varphi)} d\varphi$$

där

$$\Phi(\varphi) = q(r+1-s) \log \frac{s}{k} - (r+1-s)i\varphi - \sum_{j=1}^s \log \left[1 - \left(\frac{k^j}{s} \right)^q e^{i\varphi} \right],$$

varav

$$\Phi(0) = q(r+1-s) \log \frac{s}{k} - \sum_{j=1}^s \log \left[1 - \left(\frac{k^j}{s} \right)^q \right].$$

Den första termen har för konstant r ett maximum $\sim qr \log r$ för $s \sim r/\log r$.

Den andra termen är $\sim s \int_0^1 \log(1 - k^q x^q) dx$ och således av mindre ordning. Av (1) följer

$$\log c_{rs} = \Phi(0) + \log \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\Phi(\varphi) - \Phi(0)} d\varphi.$$

Den andra termen är mindre än $\text{Max Re}[\Phi(\varphi) - \Phi(0)]$. Nu är

$$\text{Re}[\Phi(\varphi) - \Phi(0)] \sim s \int_0^1 \log(1 - k^q x^q) dx - s \text{Re} \int_0^1 \log(1 - k^q x^q e^{i\varphi}) dx,$$

vilket är av mindre ordning än $qr \log r$. Härmed är beviset slutfört.

194. La α være et tall mellom 0 og 1. En plan kurve er gitt ved likningene

$$x = 2t \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \right), \quad y = t^2 + 2 \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \right).$$

En viss del av kurven begrenser et trekantet flatestykke. Finn dets areal.

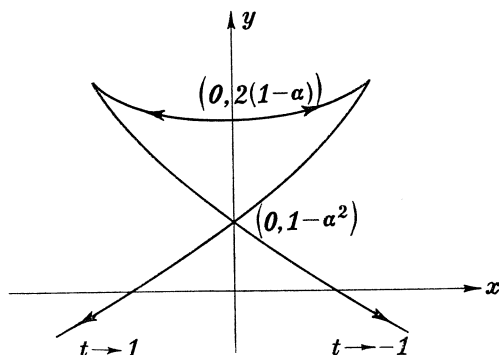
R. Tambs Lyche

Løsning: En elementär undersökning av funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ ger

$$\begin{aligned} x_{\min} &= -2(1 - \alpha^{2/3})^{3/2} & \text{för } t &= -(1 - \alpha^{2/3})^{1/2}, \\ x_{\max} &= 2(1 - \alpha^{2/3})^{3/2} & \text{för } t &= (1 - \alpha^{2/3})^{1/2}, \\ y_{\min} &= 2(1 - \alpha) & \text{för } t &= 0, \\ y_{\max} &= 3(1 - \alpha^{2/3}) & \text{för } t &= \pm(1 - \alpha^{2/3})^{1/2}. \end{aligned}$$

Man kan observera att $\frac{dy}{dx} = t$ för $t \neq t_0 = \pm(1 - \alpha^{2/3})^{1/2}$; dock är

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{dy}{dx} = t_0.$$



Ytan T är

$$\begin{aligned} T &= -2 \int_0^{\sqrt{1-\alpha^2}} x \frac{dy}{dt} dt = -8 \int_0^{\sqrt{1-\alpha^2}} t^2 \left(1 - \frac{\alpha}{(1-t^2)^{1/2}} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{(1-t^2)^{3/2}} \right) dt \\ &= -8 \int_0^{\sqrt{1-\alpha^2}} t^2 \left(1 - \frac{\alpha}{(1-t^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{(1-t^2)^{1/2}} \right) dt - 8 \int_0^{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\alpha^2 t^2}{(1-t^2)^2} dt, \end{aligned}$$

som med vanliga metoder ger

$$T = 4 \left[\frac{1}{3} (1 - \alpha^2)^{3/2} - \alpha \operatorname{Arc} \sin (1 - \alpha^2)^{1/2} - \alpha^2 \ln \frac{1 - (1 - \alpha^2)^{1/2}}{\alpha} \right].$$

Torsten Ström

195. Vis at $2(2^{2n} - 1)$ enten er lik nevneren i Bernoullis tall $B_n = A_n/N_n$, eller er et multiplum av N_n ($B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ...). Lag en grei regel til å danne N_n .

Johs. Lohne

Løsning: Beviset bygges på von Staudt's sætning:

$$(-1)^n B_n \equiv \sum \frac{1}{p_i} \pmod{1},$$

hvor summationen går over de primtal p_i , $i = 1, 2, \dots, r$, for hvilke gælder $(p_i - 1) | 2n$. Heraf fås umiddelbart

$$\frac{(-1)^n A_n}{N_n} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_r} + H = \frac{\sum_{i=1}^r \frac{p_1 p_2 \dots p_r}{p_i} + H \cdot p_1 p_2 \dots p_r}{p_1 p_2 \dots p_r},$$

hvor H hel. Da A_n/N_n er forudsat uforkortelig, og brøken på højre side åbenbart er uforkortelig, gælder altså

$$N_n = p_1 p_2 \dots p_r,$$

hvilket giver en metode til beregning af N_n .

Vi vil nu vise, at $p_i | 2(2^{2n} - 1)$ for $i = 1, 2, \dots, r$. Åbenbart gælder $2 | 2(2^{2n} - 1)$. For $p_i > 2$ gælder iflg. Fermats sætning $2^{2n} \equiv 1 \pmod{p_i}$, altså

$$p_i | (2^{2n} - 1),$$

thi $(2, p_i) = 1$ og $\varphi(p_i) = (p_i - 1) | 2n$.

Af ovenstående fås, idet $p_1, p_2, \dots, p_r$ er forskellige primtal, altså specielt indbyrdes primiske, at der gælder

$$N_n = p_1 p_2 \dots p_r | 2(2^{2n} - 1), \quad \text{q. e. d.}$$

Arne Brøndsted

196. Om alla rötter till ekvationen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

är positiva, gäller

$$\frac{a_1 a_{n-1}}{a_0 a_n} \geq n^2.$$

Arne Fransen

Lösning:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{a_1}{a_0} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{x_i}{2x_j} + \frac{x_j}{2x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{(x_i - x_j)^2}{2x_i x_j} + \frac{2x_i x_j}{2x_i x_j} \right) \geq n^2.$$

Johs. Lohne

Også løst av Per Roar Andenæs, Bernhard Andersen, Ragnar Dybvik, Poul Einar Hansen, Audun Holme, Rolf Hovstad, P. W. Karlsson, Lennart Lindskog, Stieg Mellin-Olsen, A. V. Peljo, N. Solberg, Ragnar J. Solvang, Sigmund Soma, Steffen Strøbæk, Torsten Ström og Kurt Wolff.

197. Beregn integralet

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \cdot \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx.$$

W. Ljunggren

Lösning: Idet en bemærker at

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{Arctg} \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2+y^2},$$

ser en at det gitte integral kan skrives som et dobbeltintegral:

$$I = \iint_{\Omega} \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2} dx dy,$$

hvor Ω er den kvadrant av sirkelen $x^2+y^2 \leq 1$ der $x \geq 0, y \geq 0$. Innføring av polarkoordinater gir da

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1+r^2 \cos^2 \theta}{1+r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\ln 2 \cdot \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} (1 + \ln 2).$$

Per Roar Andenæs

Også løst av Rolf Hovstad.

198. Funksjonsfølgen $\{f_n(x)\}$ er definert ved

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Finn en eksplisitt formel for $f_n(x)$.

R. Tambs Lyche

Løsning: Ved induksjon ser en at

$$f_n(x) = \frac{\alpha_{2n-3}x + \alpha_{2n-2}}{\alpha_{2n-2}x + \alpha_{2n-1}},$$

der α_p er det p -te ledd i Fibonacci's tallfølge, gitt ved

$$\alpha_{-1} = \alpha_0 = 1; \quad \alpha_{p+1} = \alpha_p + \alpha_{p-1}, \quad p \geq 0.$$

Nå er

$$\alpha_p = \sum_{r=\left[\frac{p+1}{2}\right]}^{p+1} \binom{r}{p+1-r}$$

(jfr. NMT, bd. 6, oppg. 156). Derfor blir

$$f_n(x) = \frac{a_n x + b_n}{b_n x + c_n},$$

der

$$a_n = \sum_{r=n-1}^{2n-2} \binom{r}{2n-2-r}, \quad b_n = \sum_{r=n}^{2n-1} \binom{r}{2n-1-r}, \quad c_n = \sum_{r=n}^{2n} \binom{r}{2n-r}.$$

Per Roar Andenæs

Også løst av Ole Bostrup, Arne Brøndsted, Poul Einar Hansen, Johs. Lohne, A. N. Lyngbye og Ragnar J. Solvang.

199. Er p/q og r/s to uforkortelige brøker, sier vi at den første er kortere enn den andre dersom $q < s$.

La a og b være to reelle tall mellom 0 og 1. Finn med hjelp av kjedebrøkene for a og b den korteste brøk y/x som ligger mellom a og b .

I det tilfelle at $a = p/q$, $b = r/s$ er rasjonale, skal en bestemme de tilfelle der x er mindre enn både q og s .

Viggo Brun

Løsning: Lad

$$0 < a = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} < b = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}} < 1$$

(kædebrøkerne angivet).

Er $a_1 = b_1, \dots, a_{p-1} = b_{p-1}, a_p \neq b_p$ (f. eks. p lige, $\circ: a_{p+1} > b_{p+1}$), da vil

$$a < R = \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_{p-1} + \frac{1}{b_p + 1}}} < b$$

i almindelighed gælde. Et lidt kompliseret spesialtilfælde er imidlertid, hvis $a =$ det opskrevne R . Her har tre typer af b interesse, nemlig hvis

(i) $b_{p+1} = 2$, og brøken bryder af her; da vælges

$$R = \frac{1}{b_1 + \dots + \frac{1}{b_p + \frac{2}{3}}}$$

(ii) $b_{p+1} = 2$, brøken bryder ikke af; eller $b_{p+1} > 2$; da vælges

$$R = \frac{1}{b_1 + \dots + \frac{1}{b_p + \frac{1}{2}}}$$

(iii) $b_{p+1} = 1$; her vælges

$$R = \frac{1}{b_1 + \dots + \frac{1}{b_p + \frac{1}{1} + \frac{1}{b_{p+2} + 1}}}$$

Er nu omvendt r rational, $a < r < b$, må r 's kædebrøk til og med $(p-1)$ -te koefficient være som a og b 's, og man kan ved at gå tilfældene efter indse, at r er kortest, når man vælger de nævnte $R=r$. Tilfældet p ulige, $\alpha: a_{p+1} < b_{p+1}$ giver en analog diskussion.

Lad nu a og b begge være rationale og f. eks. atter p lige. I specialtilfældene er a åbenbart kortere end R , mens i det almindelige tilfælde R er kortere end a altid og kortere end b , når og kun når b 's kædebrøk ikke bryder af fra og med b_{p+1} . Dermed er undersøgt, hvornår R er kortere end både a og b . Atter er der en analog diskussion for p ulige.

Poul Einar Hansen

DEN TREDJE INTERNORDISKE PRISOPPGAVE

Opgaveteksten sto i NMT 7 (1959), s. 136–138. Resultatet av konkurransen ble kunngjort i forrige hefte, s. 143.

Løsningene nedenfor bygger på innkomne besvarelser; oppgaveløserens navn er gitt ved hver oppgave. Besvarelsene er til dels noe forkortet. For enkelte oppgavers vedkommende var det selvsagt mange nesten likeverdige løsninger å velge mellom.

Johs. Østvold

1. (*Arne Strøm.*) Vi har ligningen

$$(1) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

der $abc \neq 0$ og $a+b+c \neq 0$. Ordner vi denne ligningen med hensyn til c får vi

$$(a+b)c^2 + (a+b)^2c + (a+b)ab = 0.$$

Uttrykket på venstre side kan lett spaltes, og vi får da

$$(2) \quad (a+b)(a+c)(b+c) = 0.$$

Dette gir oss de tre mulighetene

$$(3) \quad a = -b, \quad a = -c \quad \text{eller} \quad b = -c.$$

Vi ser altså at tre tall a , b og c som tilfredsstiller (1) også vil tilfredsstille (2). Men omvendt ser vi at tre tall a , b og c som tilfredsstiller (2) og som er slik at $abc \neq 0$ vil tilfredsstille (1). Ligning (2) sammen med betingelsen $abc \neq 0$ er altså ekvivalent med ligning (1).

På grunn av symmetrien er det likegyldig hvilken av de tre muligheter (3) vi velger. Vi bestemmer oss for den siste. For hvert ulike tall n , positivt eller negativt, får vi da $b^n = (-c)^n = -c^n$, og dette gir

til et punkt S , som fås ved å forleng OP til skjæring med l . Hele det geometriske sted er altså kulen med $OD = \frac{R^2}{OO_1}$ som diameter (hvor D ligger mellom O_1 og O), idet punktet O dog ikke tilhører stedet.

4. (Hans Erik L. Madsen.) Som følge av den gitte figurs beskaffenhet kan det lukkede område innskriveres i en terning hvis midtpunkt er O og hvis sideflater er vinkelrette på hver sin kjegleflateakse. Sidekanten kan ha lengden $2a$. Kjegleflatene skjærer terningens sideflater i kurver som går gjennom terningens hjørner.

La u betegne vinkelen mellom en kjegleflateakse og en diagonal i terningen. Da er

$$\operatorname{tg} u = \frac{QP}{OP} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}, \quad u = 54^\circ, 73'.$$

Av $u < v < 90^\circ$ ser vi at kjegleflatene avgrenser et lukket område når

$$54^\circ, 73' < v < 90^\circ.$$

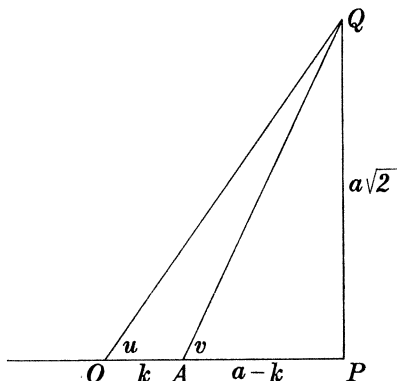
De punkter på det lukkede områdes overflate som har størst avstand

fra O , er hjørnene i den omskrevne terning. Den søkte avstand $OQ = a\sqrt{3}$ bestemmes slik (se figur):

$$\cotg v = \frac{AP}{QP} = \frac{a-k}{a\sqrt{2}}, \quad a = \frac{k}{1 - \sqrt{2} \cotg v},$$

altså

$$OQ = a\sqrt{3} = \frac{k\sqrt{3}}{1 - \sqrt{2} \cotg v}.$$



5. (Hans Erik L. Madsen.) Vi velger et punkt A , for hvilket det gjelder, at antallet av punkter som en kan nå direkte fra A er størst mulig. Vi vil bevise at A har den forlangte egenskap.

Fra A kan en nå direkte til p punkter. Fra et punkt B blant de øvrige går det høyst p linjestykker med positiv retning bort fra B , og et av dem er BA . Blant de øvrige punkter er der altså høyst $p-1$ punkter hvis forbindelseslinjer med B har positiv retning bort fra B . Fra minst ett av de p punkter en kan nå direkte fra A , kan en følgelig nå direkte videre til B .

Hermed er bevist at en kan nå til ethvert punkt, enten direkte fra A eller gjennom ett ekstra punkt.

6. (*Arne Strøm.*) Vi innfører tre nye ikke-negative hjelpevariable a , b og c slik at

$$\begin{aligned} 2x + 5y - z + a &= 1 \\ -3x - 8y + 2z + b &= 4 \\ -2x - 12y + 3z + c &= 9. \end{aligned}$$

Løser vi dette ligningssettet med hensyn til x , y og z , får vi

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}b - \frac{2}{5}c \\ y = \frac{12}{5} - a - \frac{4}{5}b + \frac{1}{5}c \\ z = \frac{67}{5} - 4a - \frac{14}{5}b + \frac{1}{5}c, \end{cases}$$

som gir

$$u = -5x + 8y + 3z = \frac{267}{5} - 20a - \frac{89}{5}b + \frac{21}{5}c.$$

Setter vi $a=b=c=0$, får vi $u = \frac{267}{5}$. Hvis vi øker verdien av a eller b , vil verdien av u avta. Øker vi verdien av c vil verdien av u øke. Av (1) ser vi at hverken y eller z vil bli negative uansett hvor mye vi øker verdien av c . Men x vil bli negativ hvis vi gjør verdien av c større enn 3.

Av den første ligningen i (1) finner vi nå

$$c = 3 + \frac{3}{2}b - \frac{5}{2}x,$$

og dette gir

$$u = \frac{267}{5} - 20a - \frac{89}{5}b + \frac{21}{5}c = 66 - 20a - \frac{27}{2}b - \frac{21}{2}x.$$

Da hverken a , b eller x kan være negative, ser vi at vi får

$$u_{\max} = 66$$

for $x=0$, $y=3$, $z=14$.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASELEVER

Oppgavekonkurranse for 1961, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Den beste samling besvarelser vil bli tildelt H. K. H. Kronprins Haralds premie på 200 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med. Oppgavene faller inn under reallinjens pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som råd er. Det er ikke nødvendig å ha svart på alle 6 oppgavene. Ingen kan vinne hovedpremien mer enn én gang.

En sender løsninger til lektor Ragnar J. Solvang, Ris skole, Vindern, Oslo, innen 1.6.1961, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

1. Parabelen $y^2 = 2px$ er gitt. I et punkt på kurven trekker vi tangenten, som danner vinkelen α med x -aksen. Gjennom tangeringspunktet trekker vi en korde som danner en vinkel β (i positiv retning) med tangenten. Finn lengden av korden uttrykt ved p , α og β . Vis at korden får sin minste lengde når $3 \sin(2\alpha + \beta) = \sin \beta$, der α varierer og β holdes konstant.

2. Vis at

$$(1 + \sin^4 x + \cos^4 x)^2 = 2(1 + \sin^8 x + \cos^8 x)$$

for alle x .

3. Vi har gitt en geometrisk rekke

$$t_1, t_2, t_3, \dots,$$

der vi vet at

$$t_n^2 = t_p.$$

Finn x av likningen $t_n^a = t_x$. Hva er betingelsen for løsning?

4. En brukket linje skal tegnes på følgende måte: I et koordinatsystem avsettes langs den positive x -akse et linjestykke a fra origo. I endepunktet oppreises en normal med lengde bk . I dennes endepunkt oppreises atter en normal lik ak^2 i retning mot y -aksen. I dennes endepunkt oppreises atter en normal lik bk^3 i retning mot x -aksen, osv., slik at vi får en »spiral«. Under forutsetning av at $0 < k < 1$, skal man finne det punkt som »spira-len« konvergerer mot.

Finn det geometriske sted for konvergenspunktene når k varierer.

Finn forbindelsen mellom k , a og b dersom konvergenspunktene skal ligge på linjen $y = x$.

Formuler og løs den oppgave som gir en hyperbel til geometrisk sted, når a og b blir brukt på samme måten som ovenfor.

Et punkt (x, y) er bestemt ved rekkene

$$\left. \begin{aligned} x &= a(k^2 + 2k^4 + 3k^6 + 4k^8 + \dots) \\ y &= b(k + k^3 + k^5 + \dots) \end{aligned} \right\} 0 \leq k < 1.$$

Hvilken kurve får vi dersom vi lar k variere i intervallet $0 \leq k < 1$?

5. To hjørner i en trekant er faste, mens det tredje beskriver en rett linje. Hvilken kurve beskriver høydenes skjæringspunkt? Hvordan er den funne kurves beliggenhet i forhold til de gitte hjørner og den gitte linje? Diskusjon!

6. Studer kurvene

$$A|x| + By = C, \quad Ax + B|y| = C, \quad A|x| + B|y| = C,$$

der $|x|$ betyr tallverdien (absoluttverdien) av x .

Løs og diskuter likningssystemene

$$(1) \quad |y| = kx + 1, \quad y = |x| + b,$$

og

$$(2) \quad |x| + 2|y| = c, \quad |x| + b|y| = 1.$$

PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier udskriver herved nedenstående prisopgaver for danske gymnasieelever og kursuselever til studentereksamen. Opgaverne ønskes behandlet så fuldstændigt som muligt, og der lægges vægt på en omhyggelig og overskuelig fremstilling. For at komme i betragtning ved præmieuddelingen skal man have løst mindst fire af opgaverne.

For den bedste besvarelse udsættes en præmie på 150 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstrapremier.

Besvarelsene indsendes senest 31. marts 1961 til lektor Henrik Meyer, Bakkedraget 15, Birkerød. Besvarelsene skal ledsages af en erklæring om, at opgaveløsningerne er selvstændigt arbejde. (Benyttelse af litteratur dog tilladt).

1. Bestem alle par (x, y) af hele tal (positive eller negative), der opfylder betingelsen

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}.$$

2. A , B og C er tre punkter på en parabel. Bevis, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at parablens normaler i A , B og C går gennem samme punkt, er, at medianerne i trekant ABC skærer hinanden i et punkt på parablens akse.

3. En klub optager som medlemmer (reelle eller) komplekse tal. For optagelse gælder følgende regler: Som første medlem kan optages ethvert tal undtagen 0 eller 1. Optagelse af hver følgende ansøger t kan kun finde sted, hvis enten $1-t$ eller t^{-1} allerede er medlem.

1) Bevis, at klubben højst kan få 6 medlemmer.

2) Bevis, at klubben kan nødsages til at standse optagelse af medlemmer, allerede inden maksimaltallet 6 er nået. Angiv i hvert af disse tilfælde alle klubbens medlemmer.

4. Seks punkter ligger i en plan, således at ikke tre ligger på ret linie. Bevis, at man af denne punktmængde altid kan udtage tre punkter, som danner en trekant, hvori en vinkel er større end eller lig med 120° .

5. I en plan er givet punkterne A , B og C . Bestem det punkt P i planen, for hvilket den største af afstandene PA , PB og PC er så lille som mulig.

6. I en plan er der givet en trekant ABC . Idet P betegner et vilkårligt punkt i planen, benyttes betegnelserne

$$\begin{aligned} PA &= x, & PB &= y, & PC &= z, \\ BC &= a, & AC &= b, & AB &= c. \end{aligned}$$

Bestem mængden af punkter P (»det geometriske sted for de punkter P «), der opfylder betingelsen

$$ax + by = cz.$$

SUMMARY IN ENGLISH

BJÖRN AJNE and TORE DALENIUS: *Some applications of statistical ideas to numerical integration.* (Swedish.)

The usual approximation of a definite integral by a finite sum is applied in the more general case

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dF(t) \approx \sum_{k=1}^n w_k g(t_k),$$

where $F(t)$ is a known distribution function. Interpreting $W(t) = \sum_{t_k \leq t} w_k$ as a discrete probability distribution, this can be adjusted to the given distribution $F(t)$ by well known statistical methods. It turns out that the criterion of Kolmogorov-Smirnov and Smirnov's ω^2 -test both lead to the so-called tangent-method approximation of ordinary integrals, whereas the moment-method leads to gaussian numerical integration.

HANS RIESEL: *A point of view on differentiation.* (Swedish.)

Let $f=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ and $F(x)=f(x, x, \dots, x)$. The well-known formula

$$\frac{dF}{dx} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}_{x_1=x_2=\dots=x_n=x}$$

is applied to differentiate a sum, a product, the functions x^x and x^{x^x} , and a definite integral depending on a parameter.

DAVID FOG: *The position of a point with reference to certain regular point-sets.* (Danish.)

In an $(n-1)$ -dimensional Euclidean space (an R_{n-1}) is given a regular simplex $A_1 A_2 \dots A_n$ with edge a . With the abbreviated notation

$$\Phi(z_0, z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_0^n z_i \right)^2 - n \sum_0^n z_i^2,$$

the following theorems are proved:

If P is a point of the space of the simplex, with $A_i P = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, then $\Phi(a^2, x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) = 0$.

If Q is a point at distance h from the space of the simplex, with $A_i Q = y_i$, then $\Phi(a^2, y_1^2, y_2^2, \dots, y_n^2) = 2nh^2 a^2$.

The converses of these two theorems are also proved.

These results are applied to different problems, in particular to the packing of five spheres in mutual contact. A necessary condition for the radii, given by M. E. Wise, is shown also to be sufficient, and the problem is solved in generalized form for n hyperspheres with mutual contact in an R_{n-2} .

INNHOLDSFORTEGNELSE

BJÖRN AJNE — TORE DALENIUS: Några tillämpningar av statistiska idéer på numerisk integration.....	145-152
CHRISTIAN ANDERSEN: Nogle integralformler.....	35- 36
ARNE BROMAN: Bagarens problem	110-114
FOLKE ERIKSSON: Extremvärdesproblem med bivillkor	17- 20
FR. FABRICIUS-BJERRE: Et bevis for 4-toppunktssætningen.....	115-116
WERNER FENCHEL: Jakob Nielsen in memoriam.....	5- 10
DAVID FOG: Om et punkts beliggenhed i forhold til visse regulære punktsæt	155-169
CHRISTIAN GRAM: Om potenssummer	79- 80
K. G. GUDMUNDSSON: Et determinantproblem fra den islandske skatte- lovgivning	30- 32
K. INKERI: The irrationality of π^2	11- 16
VILHELM JØRGENSEN: Om hovedsætningerne for kontinuerte og diffe- rentiable funktioner	81- 84
O. KOLBERG: A property of the coefficients in a certain product ex- pansion of the exponential function	33- 34
OVE J. MUNCH: Om nogle uligheder af W. A. Markoff	21- 29
PETER NAUR: ALGOL - det internationale sprog til at beskrive logiske og numeriske processer.....	117-129
KAY PIENE: Nye veier i skolematematikken	65- 71
MOGENS PIHL: Cauchy's ulighed i termodynamisk belysning	72- 74
HANS RIESEL: Ett elementært lösbart fall av trekropparproblemet ...	75- 78
HANS RIESEL: En synpunkt på derivering	153-154
S. E. STENIJ: Evert Johannes Nyström in memoriam	105-109

Bokmeldinger

E. ARTIN: Galoissche Theorie (P. HOLM).....	37
G. ASSER: Einführung in die mathematische Logik (TAGE GUTMANN MADSEN)	170
F. BACHMANN: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff (POUL NEERUP)	171
ROBERT M. EXNER — MYRON F. ROSSKOPF: Logic in elementary mathe- matics (CARL G. WOLFF).....	130
FR. FABRICIUS-BJERRE: Lærebog i geometri, I (HANS RÅDSTRÖM)....	172
ULF GRENANDER: Probability and statistics (ERLING SVERDRUP)	85
O. HANNER — M. HÅSTAD — S. SCHWARZ: Tentamensproblem med lös- ningar (HELGE TVERBERG)	173
LOO-KENG HUA: Additive Primzahltheorie (SIGMUND SELBERG).....	87

C. HYLÉN-CAVALLIUS — L. SANDGREN: Matematisk Analys, II (OTTO FROSTMAN)	88
R. KOCHENDÖRFFER: Determinanten und Matrizen (TORE HERLESTAM)	37
WERNER VON KOPPENFELS — FRIEDRICH STALLMANN: Praxis der konformen Abbildung (HANS TORNEHAVE)	90
FUMITOMO MAEDA: Kontinuierliche Geometrien (PER HOLM)	91
MAY HICKEY MARIA: The structure of arithmetic and algebra (THØGER BANG)	38
K. O. MAY: Elements of modern mathematics (CARL G. WOLFF)	92
PHILLIPS J. MCCARTHY: Introduction to statistical reasoning (ARNJOT HØYLAND)	39
POUL MOGENSEN: Indledning til funktionslæren (STIG BÜLOW)	94
I. I. PRIWALOW: Einführung in die Funktionentheorie, II (TORKIL HEIEDE)	131
D. E. RICHMOND: Introductory calculus (CARL G. WOLFF)	40
KURT SCHÜTTE: Beweistheorie (J. E. FENSTAD)	173
Structures algébriques et structures topologiques (E. ALFSEN)	175
Mottatte bøker	41, 96, 178
Oppgaver	
Oppgaver til løsning	47, 99, 134, 184
Løsninger	48, 100, 135, 185
Eksamensoppgaver	139
Nasjonale prisoppgaver for gymnasiaster	143, 195
Internordisk prisoppgave	143, 191
Kronikk	50
Summary in English	63, 103, 144, 198