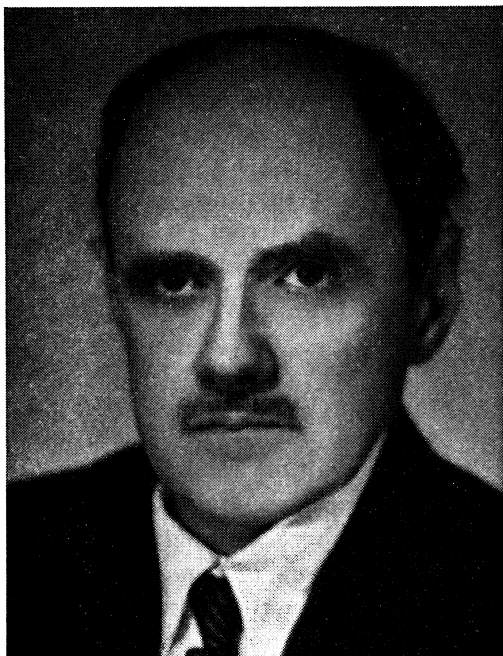




EVERT JOHANNES NYSTRÖM IN MEMORIAM

S. E. STENIJ

Den 13 februari 1960 avled i Helsingfors medlemmen av denna tidskrifts redaktion, professorn i tillämpad matematik vid Tekniska Högskolan i Helsingfors, Evert Johannes Nyström. Hans frånfälle var oväntat, han träffades av ett slaganfall då han stod i beråd att gå till sin föreläsning. Han hade visserligen låtit förstå, att han hade för avsikt att avgå från sin professur, men han föreföll att vara vid fulla krafter, och hans vänner trodde sig kunna vänta och hoppas, att han ännu skulle ha framför sig en lång period av fruktbringande arbete.

Nyström föddes den 25 sept. 1895 i Värtsilä, som numera ligger utom landets gränser. Hans far var forstmästare, och till följd av förändringar i dennes arbetsuppgifter vistades familjen på olika orter. Nyström blev student från Jyväskylä, en stad mitt inne i landet, men flyttade sedan snart till Åggelby invid Helsingfors, varifrån hans släkt härstammade och där han förblev boende resten av sitt liv.

Nyström var i sin ungdom sjuklig, och han hade redan uppnått tjugo-

ett års ålder, då han började sina akademiska studier vid Helsingfors universitet. Dessa fortskred emellertid snabbt och han fann snart sitt arbetsområde. För honom lika som för så många andra, var professor Ernst Lindelöfs undervisning av genomgripande betydelse. Lindelöf var en mångsidig matematiker, som ägde förmågan att entusiasmera sina elever och som helt uppoffrade sig i arbetet för dessa. Han kunde leda in sina elever på det område, som bäst motsvarade envars personliga läggning. Bland dessa intog Nyström en särställning till följd av de områden av matematiken som han intresserade sig för. Nyström var fästad vid denna sin lärare med band av varm tillgivenhet och högaktning.

Efter att hava avlagt filosofie kandidatexamen 1921 fortsatte Nyström sina studier, dels i Helsingfors, dels i Göttingen, där han vistades 1923–24. Här kom han i beröring med professor C. Runge, av vilken han emottog viktiga impulser. Han hade valt ett ämne för sin doktorsavhandling som nära anslöt sig till Runges arbeten. Han blev filosofie doktor 1926. Han hade då redan börjat sin lärarverksamhet; hans första arbetsplats var Tekniska Läroverket i Helsingfors, där han var lärare i matematik 1924–28. I januari 1929 utnämndes han till lektor i matematik vid Tekniska Högskolan i Helsingfors. Han anknöts då till den institution, inom vilken han skulle arbeta återstoden av sitt liv. Som lektor skötte han till en början den allmänna matematikundervisningen på högskolans första årskurs. Småningom övertog han även undervisningen i deskriptiv geometri, som sedan gammalt hade en viktig plats i högskolans undervisningsplan, med föreläsningar och ritövningar. År 1937 utnämndes Nyström till professor i deskriptiv och projektiv geometri; benämningen av hans professur ändrades år 1944 till tillämpad matematik som uttryck för den utveckling och de förändringar, som han genomfört inom sitt undervisningsområde.

Vid sidan om sin huvudtjänst fungerade Nyström som docent i matematik vid Helsingfors universitet, från och med 1928 till 1959.

Nyströms första självständiga vetenskapliga publikation behandlade grafisk konstruktion av algebraiska ekvationers imaginära rötter. Den andra var den ovannämnda doktorsavhandlingen »Über die numerische Integration von Differentialgleichungen« som utkom 1925. Han hade sålunda redan tidigt kommit in i de två områden, på vilka hans vetenskapliga arbete skulle komma att röra sig, numerisk beräkning samt geometri och grafiska metoder.

Nyström uppställer i sin avhandling som mål att ge en framställning av de viktigaste metoderna för numerisk integration av differentialekvationer. Han var den första som tillämpade Runge-Kuttas integra-

tionsförfarande på differentialekvationer av andra ordningen. De av honom härvid uppställda formlerna ha visat sig mycket användbara för detta vid olika tillämpningar särskilt viktiga fall. Han undersöker vidare integration av differentialekvationer genom numerisk kvadratur och fäster särskild uppmärksamhet vid feluppskattning. Detta arbete av Nyström har blivit mycket uppmärksammat; i litteraturen förekommer ofta benämningen Runge-Kutta-Nyströmska förfarandet.

I ett följande arbete utförde Nyström en undersökning av approximationsmetoder i variationskalkylen. Han betraktade härvid såväl numeriska som grafiska metoder och utvecklade ett nytt förfarande för grafisk behandling av de isoperimetriska problemen.

I samband med sina undersökningar om användandet av de s. k. medelvärdsmetoderna för utförande av kvadraturer uppställde Nyström frågan, huruvida dessa metoder kunde användas för approximation av integraler av funktioner av flere variabler eller parametrar, samt vad därigenom kunde vinnas för numerisk behandling av differential- och integralekvationer. Detta ledde till en serie arbeten berörande praktisk upplösning av integralekvationer.

I det första av dessa (1928) behandlas de s. k. andra artens lineära integralekvationer. Nyström redogör för olika metoder för erhållande av en approximativ numerisk lösning, varvid integralekvationen ersättes med ett system av n lineära ekvationer med lika många obekanta. Dessa utgöra den obekanta funktionens värden i n diskreta punkter. Nyström visar, att det i allmänhet är möjligt att reducera räknearbetet till ett minimum genom lämpligt val av punkterna i fråga. Nyström tillämpade sin metod i ett flertal specialfall och visade i detalj, hur beräkningarna skall utföras, samt utförde uppskattning av den approximativa lösningens fel. Han behandlade härvid speciellt potentialteorins randvärdeproblem samt vissa problem ur elasticitetsteorin. Senare (1929, 1930) utvidgade han sina resultat genom tillämpningar och visade, att den av honom utvecklade metoden kunde tillämpas på s. k. belastade integralekvationer samt integralekvationer av första arten och även på randvärdeproblem vid vanliga differentialekvationer (1943, 1944).

Måhända var dock geometrin den del av matematiken som mest intresserade Nyström. Den andra huvuddelen av Nyströms vetenskapliga produktion behandlade geometri och grafiska metoder. Bland de första av härtill hörande arbeten kan nämnas några undersökningar om användning av nomografiska metoder i sfärisk trigonometri (1930) samt om praktisk beräkning av elliptiska integraler av första slaget (1935), vilket skedde dels med tillhjälp av ett nomogram, dels medels planimetrering.

År 1932 publicerade han en grundlig undersökning av den Darboux-Koenigs'ska planigrafen, varvid dennas egenskaper utreddes i detalj samt angavs ett antal uppgifter, som kunde lösas eller utföras med tillhjälp av detta instrument.

Vidare behandlade han bl. a. den Staude'ska trådkonstruktionen av ellipsoiden, andra ordningens kägelytor, strålkongruenser bildade av de gemensamma tangenterna till två sfärer samt ett antal geometriska frågor av praktisk art.

Nyströms geometriska undersökningar stödde sig på hans framstående ritkunnighet. Särskilt intresserade han sig för den geometriska kinematiken. I detta sammanhang bör nämnas hans arbeten berörande matematiska instrument. I ett av dessa (1934) behandlade han planimetern som integrator. Vidare arbetade han med harmoniska analysatorer. Som hans märkligaste resultat i detta sammanhang kan nämnas den av honom konstruerade planimetern för grafisk uträkning av Stieltjes-integraler (1936). Den bestod av den bekanta harmoniska analysatorn framställd av Mader-Ott, försedd med en enkel tilläggsanordning. Olika varianter av den Nyströmska Stieltjes-planimetern har senare konstruerats och visat sig vara mycket användbara för beräkning av flere i teori och praxis, t. ex. vid tekniska tillämpningar förekommande integraler, och det har vidare visat sig, att den är användbar i fall som tidigare fordrat specialplanimetrar.

Vid utarbetandet av sina publikationer nedlade Nyström mycket möda och omsorg. Han nöjde sig inte med detaljer, utan strävade i allmänhet att ge en fullständigare framställning, där den behandlade frågan framgick som del av en helhet; de nya resultaten och de utvecklade metoderna belystes med väl valda tillämpningar.

Han var en framstående stilist och ägde en utmärkt pedagogisk förmåga. Sina geometriska arbeten illustrerade han med figurer utförda med utmärkt skicklighet och konstnärlig smak. Gediget innehåll och en fulländad formell framställning var karakteristiskt för hans arbeten.

Det ovarsagda gäller i full utsträckning om hans läroböcker, av vilka han utgav ett flertal, som behandlade deskriptiv geometri, perspektivlära, grafisk framställning och nomografi samt tillämpad matematik. Särskilt bör nämnas hans verk »Den högre geometrins grunder med tillämpningar» (1948). Detta är en grundlig och självständig framställning av området, uppkommen i samband med hans universitetsföreläsningar. Denna värdefulla lärobok är tyvärr otillgänglig för vidare kretsar, då den utkommit endast på finska.

Nyström var känd och uppskattad som föredragshållare. Han upprätthöll livliga förbindelser med kolleger i de nordiska länderna samt

Tyskland och Österrike, till vilka länder han gjorde föredragsresor. Han var medarbetare och redaktör i flere tidskrifter såsom Arkhimedes och Tekniska Högskolans publikationsserie i hemlandet samt den internationella »Numerische Mathematik«. Han var sakkännare på det grafiska området, särskilt då det gällde reproduktion av figurer i tryck, och under årtionden var det brukligt att författare av matematiska publikationer vände sig till honom för att få hjälp och råd vid uppritandet av sådana figurer.

Nyström invaldes till Finska Vetenskaps-Societeten 1933, där han var trogen medarbetare, och det var i detta sällskaps skriftserier han publicerade de flesta av sina arbeten. Han efterlämnade sin förmögenhet åt Finska Vetenskaps-Societeten; han var ogift och hade inga syskon. Bland hans särintressen kan nämnas filateli. Han hade en unik samling s. k. helsaker, och han publicerade även arbeten berörande frågor i filateli.

Nyströms verksamhet som akademisk lärare var av mycket stor betydelse. Det var han som vid Tekniska Högskolan införde de blivande ingenjörerna i handhavandet av de hjälpmedel som utgjorde en del av grunden för deras yrkesarbete, och han förenade i sin undervisning på ett lyckligt sätt det de behövde av teoretiska insikter och praktiskt kunnande. Framställningen var ägnad att uppväcka självständigt arbete och omdöme och hans föreläsningar karakteriserades av samma egenskaper som hans skrifter: tankens klarhet, formens fulländning och ämnets omsorgsfulla utarbetning. Med sin fina humor präglade han ofta uttryck vilka citeras som bevingade ord. I universitetsundervisningen förde han särskilt geometrins talan; han ansåg, att betydelsen för blivande skollärare och naturforskare av denna del av matematiken inte alltid nog beaktades.

Nyström var personligen ytterst anspråkslös och tillbakadragen. Där han inte ansåg det vara sin plikt att ingripa höll han sig helst i skymundan. Men de som kommo i närmare kontakt med honom kunde inte undgå att bliva påverkade av hans fina försynta personlighet, och de funno i honom en trogen vän, som alltid var redo att giva all den hjälp det stod i hans makt att ge.

BAGARENS PROBLEM

ARNE BROMAN

1. En bagare kavlar ut en deg. Han skär den så i två bitar, lägger den ena biten på den andra och kavlar ut degen igen. Han upprepar denna procedur ett stort antal gånger. Åstadkommer han därigenom, att degen blir väl blandad?

2. Vi vill behandla detta problem matematiskt och måste då först formulera det matematiskt (eller åtminstone ge ett matematiskt problem, som nära ansluter sig till det praktiska problemet).

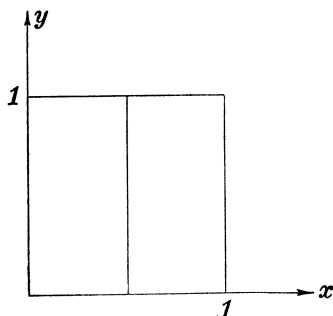


Fig. 1

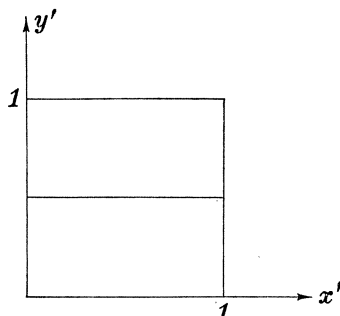


Fig. 2

Betrakta för den skull den transformation T , som definieras av föreskriften

$$(x', y') = T(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & , \text{ då } 0 \leq x < \frac{1}{2} , \\ (2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & , \text{ då } \frac{1}{2} \leq x < 1 . \end{cases}$$

Man ser, att den pressar ihop den vänstra rektangelytan i fig. 1 i höjddled och vidgar den i sidled samt avbildar den på den undre rektangelytan i fig. 2. Analogt avbildas den högra ytan i fig. 1 på den övre ytan i fig. 2.

Upprepa eller iterera denna transformation en gång. Vi får då en sammansatt transformation, som vi skriver $(x', y') = T^2(x, y)$ eller kortare T^2 . Denna avbildar vardera av fyra kongruenta rektangelytor, som står

bredvid varandra i xy -planet på var sin av fyra kongruenta rektangelytor, som ligger över och under varandra i $x'y'$ -planet. Betrakta allmänna den n :te itererade transformationen, tecknad $(x', y') = T^n(x, y)$ eller blott T^n . Den avbildar 2^n stycken rektangelytor bredvid varandra

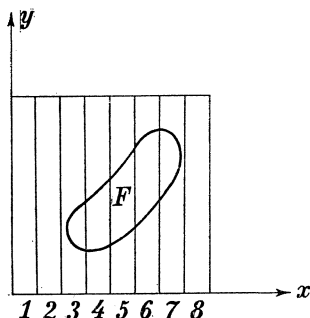


Fig. 3

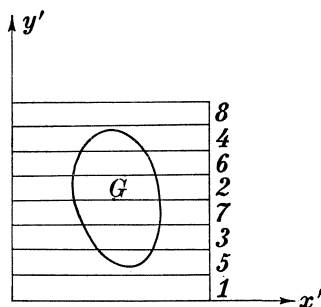


Fig. 4

i xy -planet på lika många rektangelytor på varandra i $x'y'$ -planet. Exempelvis avbildar T^3 de rektangelytor, som är märkta 1, 2, ..., 8 i fig. 3, på rektangelytorna med motsvarande nummer (läsaren bör verifiera detta) i fig. 4.

Antag nu att F är en punktmängd i kvadrattytan $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$, att G är en analog punktmängd i $x'y'$ -planet och att de har areorna $m(F)$ resp. $m(G)$ ytenh. Vi kallar talen $m(F)$ och $m(G)$ för måtten av F resp. G .

I detta antagande får ligga, att F och G tillhör någon klass av punktmängder, vilka kan mätas eller har mått. Vi fordrar, att dessa mått skall ha åtminstone de egenskaper vi behöver utnyttja i det följande. En väl känd sådan klass av mängder är Lebesgues¹ mätbara mängder i planet. Denna klass är för övrigt så omfattande, att ingen lyckats ge ett konkret exempel på en begränsad plan punktmängd, som ej är mätbar i Lebesgues mening.

Transformationen T^n avbildar F på en viss punktmängd i $x'y'$ -planet vilken vi tecknar $T^n F$. Det är klart, att $T^n F$ jämförd med F är sönderskuren och deformerad men att måtten av de olika delarna av F bevarats vid transformationen. Vi betecknar mängden av de punkter, som tillhör

¹ LEBESGUE (bokstaven s i namnet är stum) är upphovsmannen till den moderna mått- och integrationsteorien. Han har skrivit det klassiska arbetet *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris 1904). Senare har man funnit andra och lättare vägar in i denna teori; se t. ex. RIESZ—SZ.-NAGY: *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Budapest 1952) och MUNROE: *Introduction to measure and integration* (Cambridge (Mass.) 1953). — I denna artikel studeras vissa mätbara mängder i planet. Man har också infört mätbara mängder på räta linjen, i det tredimensionella rummet m. fl.

både $T^n F$ och G , med $T^n F \cap G$, vilket utläses skärningen av $T^n F$ och G eller $T^n F$ skuret med G . Åskådningen säger, att för stora värden på n är $T^n F$ tämligen jämnt utbredd över kvadrattytan i $x'y'$ -planet och att $m(T^n F \cap G)$ därför är nära lika med produkten $m(F) \cdot m(G)$. Vi frågar oss därför, om likheten

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m(T^n F \cap G) = m(F) \cdot m(G)$$

är korrekt. Denna fråga låter vi vara den matematiska motsvarigheten till vår inledande fråga.

3. Detta problem finns omnämnt i böcker i ergodteori¹ av den tyske matematikern E. Hopf och den amerikanske matematikern P. R. Halmos. Bägge ger skisser av lösningar till problemet. Vi ger nedan en fullständig lösning, vilken lösning är nära lik Hopfs, men (åtminstone ytligt betraktad) skiljer sig från Halmos'. — Halmos nämner, att transformationen T ibland kallas bagarens transformation.

Ergodteori är en gren av matematiken, i vilken måttbevarande transformationer studeras. En avsikt med denna artikel är att söka intressera läsaren för måtteori och ergodteori.

4. Vi löser nu bagarens problem. — Dela kvadrattytan $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$, i 2^{2k} kongruenta kvadrattytor² med hjälp av $2^k - 1$ vertikala och lika många horisontella sträckor. Varje sådan liten kvadrattyta kallar vi för en maska av ordningen k . I fig. 5 är en maska av ordningen $k=2$ skuggad. Det lämnas åt läsaren att verifiera följande påståenden, där 1° medför 2°, 2° medför 3° etc.

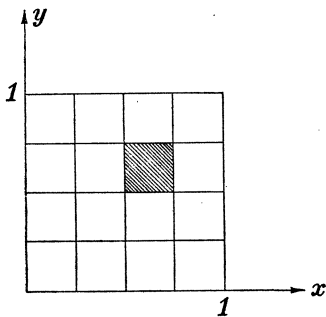


Fig. 5

1° Om A är en maska av ordningen k , så är $T^k A$ en rektangelyta med den horisontella basen 1 l-enh. och den vertikala höjden 2^{-2k} l-enh.

¹ Se HOPF: *Ergodentheorie* (Berlin 1937), sid. 42; och HALMOS: *Lectures on ergodic theory* (Tokyo 1956), sid. 37 (även sid. 9 och sid. 29).

² Om man vill precisera, vart randen hör, kan man föreskriva, att varje sådan kvadrattyta är av formen

$$(r-1) \cdot 2^{-k} \leq x < r \cdot 2^{-k}, (s-1) \cdot 2^{-k} \leq y < s \cdot 2^{-k},$$

där r och s är hela tal bland $1, 2, \dots, 2^k$. — En sådan precisering är strängt taget onödig, ty varje sträcka är noll ytenh.

2° Om A är en maska av ordningen k , så består $T^{2k}A$ av 2^k rektangelytor, vardera med basen 1 l-enh. och höjden 2^{-3k} l-enh. Dessa är jämnt utspridda, i den meningen att avståndet mellan de undre baserna till två närliggande rektangelytor är 2^{-k} l-enh.

3° Om A och B är maskor av ordningen k , så är

$$m(T^{2k}A \cap B) = m(A) \cdot m(B).$$

4° Om A och B är maskor av ordningen k och $n \geq 2k$, så är

$$m(T^n A \cap B) = m(A) \cdot m(B).$$

Giv ett tal $\varepsilon > 0$. Då finns det en föreningsmängd Φ av ändligt många disjunkta maskor sådana, att¹

$$m(F - \Phi) < \varepsilon \quad \text{och} \quad m(\Phi - F) < \varepsilon,$$

och en analog mängd Γ sådana, att

$$m(G - \Gamma) < \varepsilon \quad \text{och} \quad m(\Gamma - G) < \varepsilon.$$

Antag, att k är den högsta ordningen på någon maska i Φ och Γ . För $n \geq 2k$ ger punkt 4°, att

$$m(T^n \Phi \cap \Gamma) = m(\Phi) \cdot m(\Gamma).$$

Betrakta nu de sex talen

$$\begin{array}{lll} m(T^n F \cap G), & m(T^n(F \cup \Phi) \cap G), & m(T^n \Phi \cap G), \\ m(T^n \Phi \cap \Gamma), & m(\Phi) \cdot m(\Gamma), & m(F) \cdot m(G). \end{array}$$

Här är absolutbeloppet av skillnaden mellan första och andra talet, andra och tredje talet etc. ej större än resp.²

$$\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon, 0, 2\varepsilon.$$

Alltså är

$$|m(T^n F \cap G) - m(F) \cdot m(G)| \leq 6\varepsilon, \quad \text{då} \quad n \geq 2k.$$

¹ Med föreningsmängden till vissa givna punktmängder menas mängden av de punkter, som tillhör minst en av de givna mängderna. Föreningsmängden till A och B tecknas $A \cup B$, vilket kan utläsas A förenat med B . Två punktmängder är disjunkta, om de ej har någon punkt gemensam. — Om A och B är givna punktmängder, betecknar $A - B$ mängden av de punkter, som tillhör A men ej B .

² För de två sista talen gäller:

$$|m(\Phi) \cdot m(\Gamma) - m(F) \cdot m(G)| \leq m(\Phi) \cdot |m(\Gamma) - m(G)| + m(G) \cdot |m(\Phi) - m(F)| < \varepsilon + \varepsilon,$$

eftersom $m(\Phi) \leq 1$ och $m(G) \leq 1$.

Definitionen på gränsvärde ger nu, att likheten (1) är korrekt. Därmed är bagarens problem löst.

5. Det finns en tredimensionell motsvarighet till problemet i punkt 2 och dess lösning. Vid problemets formulering kan man utöva transformationen

$$(x', y', z') = T(x, y, z) = (2x, 2y, \tfrac{1}{4}z)$$

på den kubiska volymen $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$, $0 \leq z < 1$, och sedan skära den erhållna parallelepipediska volymen i fyra kongruenta delar, som staplas på varandra etc. — På detta sätt erhålles nog en mera realistisk matematisk motsvarighet till problemet i punkt 1.

ET BEVIS FOR 4-TOPPUNKTSSÆTNINGEN

FR. FABRICIUS-BJERRE

Lad k være en lukket plan kurve uden dobbeltpunkter eller spidser. Idet krumningen antages at variere kontinuert langs kurven, vil der altid på denne være to punkter, i hvilke krumningen har et ekstremum, nemlig de punkter, hvori krumningen er størst eller mindst. Et punkt, hvori krumningen har et ekstremum, betegnes som et *toppunkt* på kurven, og k har således altid mindst to toppunkter. Man har imidlertid bevist, at enhver kurve k af den betragtede art har ikke blot to, men *altid mindst 4 toppunkter*. Denne sætning betegnes som 4-toppunktssætningen.

For det tilfælde, at k er en konveks kurve, er sætningen første gang fremsat og bevist af Mukhopadhyaya (1909), mens A. Kneser i 1912 viste, at sætningen gælder uafhængigt af kurvens konvekситet. Siden er der for 4-toppunktssætningen fremkommet talrige beviser, ofte af helt forskellig art, og sætningen er generaliseret i forskellige retninger. For nylig har M. Barner og F. Flohr i en interessant artikel »*Der Vierschheitelsatz und seine Verallgemeinerungen*« (Der Mathematikunterricht, 1958, s. 43–73) givet en oversigtsmæssig fremstilling af de herhen hørende spørgsmål. Artiklen indeholder tillige en omfattende fortegnelse over litteratur, der knytter sig til 4-toppunktssætningen og dermed beslægtede sætninger.

I det følgende skal gives endnu et bevis for 4-toppunktssætningen. I beviset udnyttes, at krumningscirklen i et punkt af en kurve ved en cirkeltransformation overføres i krumningscirklen i det tilsvarende punkt.

Lad AB være en bue, hvor krumningen varierer kontinuert og *monotont*. Det er bekendt, at krumningscirklen i et vilkårligt punkt af buen kun har dette punkt fælles med buen og skærer igennem denne, og at krumningscirkler i forskellige punkter af buen ikke har punkter fælles. Samlingen af krumningscirkler for buen AB udfylder et område ω , der begrænses af krumningscirklerne c_A og c_B i punkterne A og B , og gennem hvert punkt af ω går der en og kun én krumningscirkel for kurven.

Formen af buen AB afhænger af, om krumningen har konstant fortegn langs buen, således at denne kun indeholder konvekse punkter, eller om krumningen skifter fortegn, hvorved der fremkommer et vendepunkt. I første tilfælde er buen en spiral, specielt en konveks bue. Den ene af

de to krumningscirkler c_A og c_B ligger inden i den anden, og området ω er det endelige område, der er beliggende mellem de to cirkler. I det andet tilfælde indeholder buen AB et (og kun ét) vendepunkt V , og buen består af to spiraler, specielt konvekse buer, VA og VB , hver beliggende i sin af vendetangenten begrænsede halvplan. De to krumningscirkler c_A og c_B ligger i hver sin halvplan, altså helt uden for hinanden, og området ω er i dette tilfælde hele planen på nær de af cirklerne indesluttede områder.

Ved en cirkeltransformation, specielt en inversion, vil en bue AB med monotont varierende krumning overføres i en bue $A'B'$ med monotont varierende krumning, idet samlingen af krumningscirkler for AB overføres i samlingen af krumningscirkler for $A'B'$. Området ω for buen AB og de begrænsende cirkler c_A og c_B overføres i området ω' og de begrænsende cirkler $c_{A'}$ og $c_{B'}$ for buen $A'B'$. Man kan f. eks. ved anvendelse af en inversion opnå, at de sidstnævnte cirkler bliver *koncentriske*. Inversionscentret vælges på følgende måde: Lad centerlinien for cirklerne c_A og c_B skære disse cirkler i punktparrene (P, P_1) og (Q, Q_1) , og lad (R, R_1) være det punktpar, der er harmonisk forbundet med begge de nævnte. Inversionscentret skal da vælges i R eller R_1 . Vælges centret i R , vil det inverse punkt til R_1 være det fælles centrum for cirklerne $c_{A'}$ og $c_{B'}$.

Lad nu k være en lukket kurve uden dobbeltpunkter og spidser og med kontinuert varierende krumning. Vi vil vise, at antagelsen af, at denne kun indeholder to toppunkter, fører til en modstrid. Idet de to toppunkter kaldes A og B , er k da sammensat af to buer AB med monotont varierende krumning. Krumningscirklerne c_A og c_B er fælles for de to buer, der da også har fælles område ω .

Vi anvender på k en inversion, der fører de nævnte cirkler over i cirkler med fælles centrum O . De to buer AB føres da over i buer $A'B'$, der begge er uden vendepunkt, og den til k svarende kurve k' må være en lukket konveks kurve. Dersom k' gennemløbes fra A' mod B' , må tangenten have drejet en vinkel, der for en af buerne $A'B'$ er *højst lig med π* . Denne bues evolut er imidlertid en overalt lokalt konveks kurve, der begynder og ender i O . Tangentdrejningen for denne bue er *større end π* , da der til buen kan lægges parallelle tangenter. Da den nævnte bue $A'B'$ og dens evolut skal have samme tangentdrejning, er der derved fremkommet en modstrid.

Kurven k' og dermed kurven k må da være sammensat af flere end to, dvs. mindst 4 buer med monotont varierende krumning, og kurven k indeholder da mindst 4 toppunkter. Hermed er 4-toppunktssætningen bevist.

ALGOL –

DET INTERNATIONALE SPROG TIL AT BESKRIVE LOGISKE OG NUMERISKE PROCESSER

PETER NAUR

Mange matematikere vil antagelig — når de hører, at der er formuleret et nyt formelsprog til beskrivelse af regneprocesser — udbryde: Hvad skal vi med det — vi har jo allerede matematikken! Formålet med nærværende artikel er blandt andet at vise, at dette ikke er en holdbar indstilling. Samtidig vil der blive givet en redegørelse for en del af sprogets træk — væsentlig gennem simple eksempler. For den fulde formelle definition af sproget må der henvises til den officielle rapport [1].

Formålet med ALGOL. Arbejdet med sproget ALGOL er direkte foranlediget af de behov, der er skabt gennem de fuldautomatiske regnemaskiner. Det er endda sådan, at man med ALGOL har forsøgt på én gang at løse to forskellige problemer, som er skabt af disse maskiner. Det ene af disse problemer er kommunikationen mellem en maskines brugere og maskinen selv. Problemet er her at skabe et sprog, som virker bekvemt og naturligt for de mennesker, som ønsker at formulere problemstillinger for maskinerne, samtidig med at det er tilstrækkelig konsistent til, at det tillader en problemstilling, der er formuleret heri, at blive opfattet af en maskine af de typer, som er almindelige i dag, uden yderligere mellemlid. Det andet problem er kun indirekte foranlediget af maskinerne. Det er problemet at kommunikere beskrivelser af regneprocesser mellem mennesker indbyrdes. Dette problem er blevet stadig vigtigere i de senere år, da man gennem arbejdet med maskinerne i langt højere grad end tidligere er blevet interesseret i at udvikle og forbedre de rent numeriske metoder til at løse problemerne inden for den anvendte matematik.

ALGOL's repræsentationer. Behovet for bekvemme symbolsprog til brug ved kommunikation af disse to arter ytrer sig ikke kun inden for

området numerisk analyse, men findes tværtimod inden for ethvert felt, som med fordel benytter sig af de elektroniske regnemaskiner. Når det er inden for den numeriske analyse, at dette behov tidligst har ført til en konkret løsning, hænger det utvivlsomt sammen med, at man inden for dette felt har et selvfølgelig udgangspunkt for opbygningen af sproget i matematikken. Inden for andre felter, hvor et sådant fælles ståsted ikke findes, bliver mulighederne så omfattende, at problemet at nå til enighed om et sprog vokser alvorligt. Man må nemlig gøre sig klart, at udarbejdelsen af et procesbeskrivende sprog i vid udstrækning er afhængig af smagsbetonede skøn. Der er tale om skøn, ikke alene om hvilke egenskaber sproget i store træk bør have, men om udformningen af symbolikken for hver eneste af sprogets bestanddele, om hvorvidt man bør bruge decimalt komma eller decimalt punktum, o. s. v. Det er en af fortjenesterne af den gruppe, som udarbejdede det første udkast til ALGOL, at den fandt en løsning på dette problem. Denne løsning beror på erkendelsen af, at det væsentlige ved sproget er strukturen, og ikke symbolikken. Sproget ALGOL kan derfor realiseres ved brug af et vilkårligt antal sæt af grundsymboler, som hver udgør en *repræsentation* af sproget. Alle repræsentationer er ligeberettigede, idet de alle gennem en simpel symbolombytning skal kunne overføres i hinanden. Af praktiske grunde er det naturligvis nødvendigt at bruge en bestemt repræsentation til at definere sproget, og dette *referencesprog* vil uvægerligt øve en betydelig indflydelse på udformningen af andre ækvivalente sprog. Imidlertid er det af stor praktisk værdi at kunne afskære enhver indvending, som kan rejses mod referencesprogets symbolik, med en bemærkning om, at det står enhver frit for at arbejde med en anden symbolik, en anden repræsentation.

Denne bemærkning har også relevans til nærværende introduktion til sproget, hvor der overalt benyttes referencesprogets symbolik.

Matematik og procesbeskrivelse. Forskellen mellem matematikkens muligheder og udtryksmåden i et algoritmisk sprog kan illustreres ved et simpelt eksempel. Lad os tænke på følgende problemstilling: Der er givet et tal, n . Vi er interesseret i det mindste primtal p , som er lig med eller større end n . Hertil er først at bemærke, at det er med fuldt overlæg, at problemstillingen er beskrevet med den vage vending »vi er interesseret i«. Det er nemlig netop i arten af interesse for p , at forskellen mellem matematikken og et algoritmisk sprog kommer ind. Matematisk er man først og fremmest interesseret i eksistensen og entydigheden af løsningen. Frugten af en matematisk behandling vil være en sætning, som udsiger noget om disse ting. I beviset for denne sætning vil der muligvis gøres brug af en specifik regel (en algoritme), hvorefter tallet p kan findes, når

n er givet, men dette behøver ingenlunde at være tilfældet. Tværtimod gælder det netop for talrige af matematikkens eksistensbeviser, at de er fuldstændig tavse med hensyn til, hvorledes man kan konstruere den genstand, hvis eksistens de påviser.

I modsætning hertil er det, som udtrykkes i et algoritmisk sprog, netop en proces, som angiver, hvorledes et givet mål kan nås, i det foreliggende eksempel, hvorledes man kan finde værdien af p , når værdien af n er givet.

Nu ville det naturligvis være en misforståelse at hævde, at beskrivelser af processer er fuldstændig fremmede for matematikken. Det er langt fra tilfældet. Ethvert bevis for en matematisk sætning er i sig selv en proces — den proces, som bringer læseren fra de givne forudsætninger til resultatet. Ligeledes går mange matematiske opgaver af den type, som stilles med pædagogiske hensigter, netop ud på at formulere en proces. Det gælder f. eks. geometriske konstruktionsopgaver og alle bevisopgaver.

Det bemærkelsesværdige er imidlertid, at til trods for, at procesbeskrivelsen indtager en betydningsfuld plads i matematikken, er der hidtil ikke blevet indført noget formelt sprog til at beskrive processer. I stedet hjælper man sig med beskrivelser udtrykt i sædvanligt sprog. (Muligheden for at erstatte sådanne verbale beskrivelser med mere koncise, symbolske beskrivelser fremgår forøvrigt umiddelbart deraf, at de verbale beskrivelser ofte i glosevalg og sætningsbygning er yderligt stereotype.)

ALGOL er et formelt sprog til at udtrykke algoritmer d. v. s. regneprocesser. Det er ikke — og pretenderer ikke at være — et sprog til at udtrykke mere generelle processer, men dette faktum behøver ikke at stille sig i vejen for, at adskillige af de træk, som nu efter moden overvejelse er fundet værdige til at optages i ALGOL's grundlæggende struktur, også kan vise sig at være anvendelige i sprog, som er beregnet til at beskrive andre typer af processer.

Procesbeskrivelsens elementer. Når man først har erkendt det ønskelige i at formulere et sprog specielt til at beskrive processer, er der ikke langt til at indse, hvad de væsentligste træk i en meddelelse udtrykt i et sådant sprog må være. Man behøver blot gøre sig de fælles træk klart, som findes i de utallige procesbeskrivelser, som vi mennesker allerede nu er omgivet af: vejledninger i telefonering, i udfyldelse af selvangivelse, i brugen af dåseåbnere, strikkeopskrifter, kogebøger o. s. v. De fundamentale træk står helt klart. Der er altid tale om serier af *imperative udsagn* opstillet i en bestemt *rækkefølge*, eller, med andre ord, om at man først skal gøre det, dernæst det, o. s. v. Det bliver også hurtigt klart, at et hyppigt tilbagevendende træk i procesbeskrivelser, der ikke er helt

simple, er *betingede imperativer* af typen: hvis det og det er tilfældet, gør da det og det, ellers gør det og det.

Set ud fra dette synspunkt er det klart, at matematikkens vigtigste ytring, ligningen, ikke umiddelbart kan opfattes som en bestanddel i en procesbeskrivelse. Ligningen

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

udtrykker som bekendt ikke nogen proces, men et statisk faktum.

Der er dog en speciel og vigtig undtagelse hertil. Det er det tilfælde, at ligningen har form af en formel som f. eks.

$$Q = y + v^2.$$

I sådanne tilfælde bruges ligningsformen til at beskrive den proces, der består i at beregne værdien, der svarer til et givet symbol, når værdierne svarende til visse andre er givet. Det kan derfor ikke overraske, at denne form er overtaget næsten uændret i ALGOL, som i det betragtede eksempel skriver:

$$Q := y + v \uparrow 2.$$

En afsluttet operation af denne art kaldes i ALGOL for en sætning — ikke at forveksle med en sætning (et teorem) i matematisk forstand.

Der er dog adskillige enkeltheder, som ikke må overses i denne sammenhæng. Den vigtigste er, at ALGOL-sætningen står for en enkelt afsluttet operation på givne tal til et givet tidspunkt. Der impliceres således slet ingen funktionel sammenhæng ved ovenstående ALGOL-sætning. (Dette betyder ikke, at funktioner ikke kan udtrykkes i ALGOL.) Dette bringer os nødvendigvis til en omtale af de variable, som man kan arbejde med i ALGOL.

ALGOL's frie betegnelser, identifikatorerne. Først et par ord om de betegnelser, man kan vælge: Hver af de størrelser, som man i et givet problem ønsker at referere til, må betegnes med en såkaldt identifikator. En identifikator er et bogstav (lille eller stort), eller et bogstav efterfulgt af et vilkårligt antal andre bogstaver eller cifre, f. eks.: *q?*, *W*, *Word*, *QQq*, *A98vsT*. Det ses, at ALGOL på dette punkt afviger fra sædvanlig matematisk sædvane, der bortset fra indices kun tillader betegnelser, som består af et enkelt tegn. Det er klart, at man herved overvinder den sædvanlige symbolnød, samtidig med at man har mulighed for at etablere en nøje korrespondence mellem de betegnelser, som bruges i en vilkårlig problemstilling, og betegnelserne i en tilsvarende ALGOL formulering. For eksempel kan græske bogstaver skrives fuldt ud i ALGOL, som for

eksempel: *alfa*, *kappa*. Ligeledes vil man kunne anvende betegnelser, som har en direkte mnemoteknisk værdi. For eksempel vil man kunne bruge betegnelser som: *krumning*, *grad*, *xsol*, og lignende. I de eksempler, som gives i det følgende, vil der undertiden gøres brug af sådanne muligheder.

Identifikatorer kan repræsentere enkelte tal, sæt af tal (f. eks. matricer) eller frit definerede funktionslignende mekanismer, som går under betegnelsen procedurer.

En identifikator, som repræsenterer et enkelt tal, må imidlertid ikke opfattes som en matematisk variabel, men blot som navnet på en slags beholder, som til enhver tid må indeholde et bestemt tal.

ALGOL-formlen udtrykker da blot den proces, som består i, at man tager værdierne, der svarer til de identifikatorer, som findes på højresiden af $:=$ tegnet, udfører den beregning, som angives ved udtrykket, og indsætter resultatet som værdi for den identifikator, som skrives til venstre for $:=$. Grunden til, at man har valgt symbolet $:=$ og ikke blot $=$, er netop, at man ønsker at pointere den retning fra højre mod venstre, som ligger i sætningen. Kolonet må opfattes som en slags stiliseret pilespids rettet mod venstre.

Denne aktive betydning af ALGOL-sætningen illustreres yderligere af, at man uden videre kan skrive

$$n := n + 1.$$

Denne sætning er ikke blot tilladt, men nyttig. Den udtrykker, at det oprindelige n skal erstattes med et nyt n , der er en enhed større.

Talværdier, udtrykt som sædvanlige decimale tal, kan uden videre bruges i ALGOL's udtryk. Desuden er der mulighed for at skrive tal med en tilføjet skalafaktor, udtrykt som en potens af 10. Eksempler: $6.22_{10} - 2$, 888.32_{10}^7 . Disse to konstruktioner betyder henholdsvis

$$6.22 \times 10^{-2} \quad \text{og} \quad 888.32 \times 10^7.$$

Højresiden af en ALGOL-formel kan iøvrigt opbygges ved brug af operatorerne $+$, $-$, $\times$, $/$, $\uparrow$. Her betegner den sidste potensfunktionen. Multiplikationstegnet kan ikke udelades, da man ønsker, at den syntaktiske opbygning skal give fuldstændig oplysning om meningen, selv ved identifikatorer, som består af flere bogstaver eller cifre. Parenteser kan bruges på sædvanlig måde. Ligeledes kan man uden videre benytte forskellige af de elementære funktioner $\sin$, $\cos$, o. s. v. på en umiddelbart forståelig måde. Man kan for eksempel skrive:

$$\begin{aligned}
 S &:= (v + s \times (2 - y)) / PU \\
 PU &:= \sin(fi + pi \times S) + 5 / (8 - grad) \\
 E &:= kappa \uparrow (Q - v/2) .
 \end{aligned}$$

Operationer med de tal, der står som elementer i flerdimensionale sæt af tal (de såkaldte arrays), må altid udføres ved hjælp af en række operationer på disse elementer taget et ad gangen. Et enkelt element i et talsæt kan for eksempel se sådan ud: $MA[3, 4]$. Her er MA en identifikator, som betegner hele talsættet, medens værdierne af de størrelser, som står i listen inden i den skarpe parentes, er indices. Det, der skrives som index, behøver imidlertid ingenlunde at være et tal, men kan være et udtryk. Ved en bestemt anvendelse af elementet i en formel vil dette udtryk udregnes løbende, hver gang den pågældende formel skal udføres, og den samme formel kan derfor under forskellige faser af en beregning komme til at arbejde med forskellige elementer af sættet. En sådan formel kan f. eks. se ud på følgende måde:

$$MA[n, m + 1] := MOM[q, n + 1] - ypsilon/2 .$$

Erklæringer. Da identifikatorer kan vælges frit til at betegne enheder af forskellig art, er det nødvendigt eksplicit at levere oplysninger om, hvad de identifikatorer, som benyttes i et bestemt program, står for. Disse oplysninger gives gennem såkaldte erklæringer (declarations). En simpel erklæring kan se ud som følger:

$$\underline{\text{real}} \ v, s, pi .$$

Meningen hermed er blot, at hver af de tre identifikatorer v , s , pi betegner et enkelt reelt tal. På lignende måde kan man erklære identifikatorer til at betegne heltal (integer) eller logiske værdier (Boolean). Området for logiske værdier er true og false.

Skrivemåden for erklæringer giver et simpelt eksempel på, hvorledes man i ALGOL, så snart der ikke findes en vedtaget matematisk symbolik, skaber nye symboler, som har form af sædvanlige ord. De understregede ord ovenfor må opfattes som nye grundsymboler i sproget side om side med f. eks. $+$ og $-$. De har altså ingensomhelst relation til lignende bogstavkombinationer uden understregning (*real*, *integer* o. s. v.), som uden videre vil kunne benyttes som identifikatorer.

Identifikatorer, som betegner sæt af tal, erklæres som følger:

$$\underline{\text{array}} \ MA, MOM[1:17, 2:5] .$$

Denne erklæring viser, at hvert af de to sæt, MA og MOM , har to indices, hvoraf den første antager værdierne fra 1 til 17 og den anden værdierne fra 2 til 5.

Den dynamiske rækkefølge. De aktive sætninger, som et program opbygges af, vil i almindelighed udføres en efter en i den rækkefølge, i hvilken de er opskrevet. Imidlertid er det vigtigt at kunne bryde denne rækkefølge og f. eks. repetere visse een gang opskrevne sætninger. En sådan eksplicit definition af den dynamiske rækkefølge kan udføres ved hjælp af *go to*-sætninger, som refererer til etiketter (labels) for andre givne sætninger. En etiket er en identifikator eller et helt tal. Etiketten skrives efterfulgt af kolon foran den sætning, den hører til, som *my* i følgende eksempel:

my: $S := MOM[int + 2, 8] / (PUF - 2) \uparrow 2$.

En *go to*-sætning, som henviser til denne etiket, ser således ud:

go to my.

Logiske udtryk og betingelser. ALGOL inkluderer den logiske algebra i fuld udstrækning. Man kan således danne logiske udtryk ved hjælp af de logiske operatorer, $\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\supset$ (implicerer) og $\equiv$ (ækvivalent) og således formulere beregninger af sandhedsfunktioner.

Logiske udtryk kan imidlertid også dannes som relationer mellem aritmetiske udtryk. Heri indgår en af relationsoperatorerne $\geq$, $>$, $=$, $<$, $\leq$, $\neq$, f. eks.

$$AQ + EX < VY + 7$$

$$que = 8.$$

Det er vigtigt at holde sig disse konstruktioners karakter af logiske udtryk helt klar. Således er $que = 8$ analog med $que + 8$, blot er det første et logisk udtryk og vil kun kunne antage en af værdierne true eller false, medens det andet er et aritmetisk udtryk.

De logiske udtryk indtager en central rolle i ALGOL's struktur gennem deres optræden i betingelser. Disse dannes alle ved hjælp af den såkaldte *if*-konstruktion, som kan illustreres ved følgende eksempel:

if $AQ + EX < VY + 7$ then.

Den vigtigste anvendelse af denne konstruktion træffes i såkaldte *if*-sætninger, for eksempel:

if $q = 8$ then go to my.

Den formentlig indlysende mening hermed er, at sætningen go to my vil blive udført, såfremt værdien af det logiske udtryk er true, medens den i modsat fald vil blive sprunget over.

If-konstruktionen kan suppleres med operatoren else til dannelse af betingede sætninger, som vist i følgende eksempel:

if $q > b$ then $a := OP - FU$ else $p := OP / FU$.

Hver gang denne betingede sætning udføres, vil en af de to variable a og p , men ikke begge, få tilskrevet en ny værdi.

For-sætningen. For at lette formuleringen af visse meget hyppigt forekommende repetitive operationer er der i ALGOL medtaget den såkaldte for-sætning. En for-sætning dannes analogt til if-sætningen ved, at man foran den ALGOL-sætning, som man ønsker repeteret, skriver en for-konstruktion. En af de vigtigste praktiske anvendelser vil vise, hvad sagen drejer sig om:

for $i := 1$ step 1 until n do $VA[i] := VB[i] + VC[i]$.

For-konstruktionen strækker sig fra for til do. Den efterfølgende sætning er den sætning, som vil blive repeteret. For-konstruktionen viser, at repetitionen vil udføres n gange, idet den variable i successivt antager værdierne 1, 2, ..., n . Første gang sætningen udføres, vil den se sådan ud:

$$VA[1] := VB[1] + VC[1] ,$$

anden gang sådan:

$$VA[2] := VB[2] + VC[2] ,$$

o. s. v.

Man ser altså, at for-sætningen blandt andet tillader, at man på simpel måde udtrykker en vektoraddition.

Sammensatte sætninger og opbygningen af et program. På samme måde, som man i et udtryk kan sammenfatte visse dele til en helhed ved at anbringe dem inden i en parentes (), kan man i ALGOL sammenfatte flere sætninger til en sammensat sætning ved at anbringe dem inden i sætningsparentesen begin end. Dette er af interesse i betingede sætninger og for-sætninger, hvis den operation, som styres af if- eller for-konstruktionen, ikke kan udtrykkes ved en enkelt elementær sætning.

Sætningsparentesen er ligeledes nødvendig ved opbygningen af et program, idet erklæringerne for de identifikatorer, som indgår i programmet, skal anbringes først i en sammensat sætning umiddelbart efter begin.

Sætninger og erklæringer adskilles indbyrdes og fra hinanden ved skilletegnet semikolon. Som eksempel på strukturen af et lidt mere indviklet program skal der her gives en algoritme til løsning af det problem, som blev omtalt ovenfor: Find det mindste primtal, som er $\geq n$.

begin integer n, a , *Resultat*; real y ;

$y := n/2$;

if $y = \text{entier}(y)$ then $n := n + 1$;

```

A1:  $a := 3$ ;
A2:  $y := n/a$ ;

  if  $y = \text{entier}(y)$  then begin  $n := n + 2$ ; go to A1 end;
   $a := a + 2$ ;
  if  $y > a$  then go to A2;
  Resultat :=  $n$ 
end

```

Her betegner $\text{entier}(y)$ det største heltal som er $\leq y$.

Indholdet af dette program, oversat til almindeligt sprog, er følgende:

n betegner i starten det givne tal. Hvis $n/2$ er hel, forkastes dette n , og man går frem til et n , som er 1 større. (Hvis $n/2$ derimod ikke er hel, går man videre med det oprindelige n , smlgn. indførelsen af if-then konstruktionen side 123.)

Man vælger $a=3$ og danner $n/3$. Hvis $n/3$ er hel, forkastes det nuværende n (samt det næste, der er lige), og man går frem til et n , som er 2 større, og starter igen ved A1. Man prøver altså, om det nye $n/3$ er et helt tal (det er det ikke, og nærværende algoritme bør i det hele taget ikke tages som mønster på en effektiv metode, men blot som en simpel proces til illustration af ALGOL).

Man har altså nu et ulige n , som ikke er deleligt med 3, og går da over til et a , som er 2 større, d. v. s. $a=5$. Hvis $n/5 \geq 5$ (altså $n \geq 5^2$), starter man igen ved A2, og får herved efterhånden fundet et n , hvori ingen af de første tal af rækken 2, 3, 5, 7, 9, 11, ... går op (de sammensatte ulige tal tages med på linie med primtallene). Når man på denne måde er nået frem til et n og et a , hvor $n < a^2$, har man fundet det søgte primtal.

Procedurer. De regneprocesser, som direkte kan udtrykkes med ALGOL's grundsymboler, indskrænker sig til de simple aritmetiske og logiske operationer på skalære størrelser. Da sproget således hverken har vektor-, matrix- eller kompleks aritmetik, kan det fra et matematisk synspunkt forekomme fattigt. Denne fattigdom opvejes dog af den letthed, hvormed man i et givet program kan definere og arbejde med vilkårlige processer gennem de såkaldte procedurer.

Den proces, som udføres af en given procedure, er knyttet til en identifikator og defineres gennem en procedure erklæring. Når processen således en gang er defineret i et program, kan den bruges så ofte, det ønskes fra andre steder i programmet — blot gennem en angivelse af procedure identifikatoren og de parametre, den skal arbejde på. Som eksempel skal angives erklæringen for en procedure, som udfører beregningen

$$D = A + B \times C ,$$

hvor A , B , C og D er kvadratiske matricer af n 'te orden.

```

procedure MATLIN( $n$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ); array  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ; integer  $n$ ;
begin integer  $i$ ,  $j$ ,  $k$ ; real  $s$ ;

    for  $i := 1$  step 1 until  $n$  do
    for  $j := 1$  step 1 until  $n$  do
    begin  $s := A[i, j]$ ;
        for  $k := 1$  step 1 until  $n$  do  $s := s + B[i, k] \times C[k, j]$ ;
         $D[i, j] := s$ 
    end
end

```

Den første linie af erklæringen er en slags overskrift. Her vises det, hvad det er for parametre, proceduren arbejder med. Herefter følger en sammensat sætning, som definerer selve processen. Denne indeholder dels de identifikatorer, som er nævnt i overskriften, dels andre interne identifikatorer, som benyttes under procedurens arbejde. Den aktive del af proceduren består væsentlig af tre for-konstruktioner, som er ordnet som tre kinesiske æsker. Allerinderst findes den sætning, som udfører den egentlige beregning. Denne sætning adderer til hvert element i matricen A en sum af produkter af elementer fra matricerne B og C . Hvilke elementer der multipliceres, bestemmes af de løbende værdier af de variable i , j og k . Disse styres af de tre for-konstruktioner. Det er ikke vanskeligt at indse, at den inderste sætning under et givet gennemløb af proceduren vil udføres n^3 gange.

Den definerede procedure kan nu anvendes i proceduresætninger. En proceduresætning svarende til ovenstående erklæring kan for eksempel se således ud:

$$MATLIN(7, t, UN, CO, PI) .$$

Her må identifikatorerne t , UN , CO , PI alle være matricer af 7-ende orden. Virkningen af denne proceduresætning vil være, at man udfører følgende matrixoperation:

$$PI = t + UN \times CO .$$

Det anførte eksempel giver kun et svagt indtryk af de muligheder, som procedurebegrebet indebærer. I virkeligheden kan enhver numerisk proces, inversion af matricer, integration af differentiaalligninger o. s. v. udtrykkes gennem en procedure. Det vil væsentligt være i form af proce-

durer, at ALGOL vil blive brugt til at meddele numeriske metoder tværs over alle landegrænser.

ALGOL's historie. Forløbere til ALGOL kan spores tilbage til omkring 1950, da man mange forskellige steder begyndte at gøre eksperimenter med at benytte algoritmiske sprog til at kode for elektroniske regnemaskiner. Disse bestræbelser var så frugtbringende, at problemet i løbet af få år blev ikke at opstille et sprog, men at holde rede på de forskellige sprog, som var i mere eller mindre udstrakt brug ved forskellige regnemaskinecentre. Initiativet til bestræbelserne for at skabe mere enhed i arbejdet forskellige steder blev taget af Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik, som i 1957 henvendte sig til den amerikanske Association for Computing Machinery. Denne var positivt indstillet til henvendelsen, og der blev iværksat et samarbejde, som nåede en foreløbig kulmination i et møde i Zürich fra den 27. maj til den 2. juni 1958 med deltagelse af fire repræsentanter fra hver af de to organisationer. Resultatet af dette møde blev en formulering af sproget ALGOL som beskrevet i en foreløbig rapport [2].

Udbredelsen af kendskabet til det nye sprog blev i den følgende tid formidlet gennem møder i Mainz i november 1958, i København i februar 1959 og ved UNESCO's konference om databehandling i Paris i juni 1959. Ved mødet i København blev der endvidere truffet aftale om, at et videre samarbejde om sproget skulle varetages gennem skriftlige meddelelser. Sådanne meddelelser er siden med få måneders mellemrum fra Regnecentralen i København blevet udsendt til interesserede.

Den løbende diskussion gjorde det i stigende grad klart, at det sprog, som er beskrevet i den foreløbige rapport, endnu behøvede revision og afklaring, og datoen for en ny konference blev berammet til januar 1960. Som forberedelse til denne konference blev der i november 1959 holdt møder mellem interesserede parter både i U. S. A. og i Europa (Paris, 12.-14. november). Ved disse møder blev der udvalgt deltagere til den endelige konference, som fandt sted fra den 11. til den 16. januar 1960. Ved denne konference nåede man påny til enighed om et sprog, som — skønt det i hele sin karakter ligger meget nær ved det tidligere — dog på væsentlige punkter betyder en nydannelse. Dette sprog, som betegnes ALGOL 60, er fuldt beskrevet i en rapport [1]. Det er dette sprog, som er omtalt i nærværende artikel.

Brugen af ALGOL som kodesprog. Da ingen eksisterende regnemaskine i sin indre struktur ligger særlig nær op ad ALGOL-sprogets struktur, er det klart, at intet ALGOL-program vil kunne udføres af en

regnemaskine uden en vis omskrivning. Denne omskrivning består af en omdannelse af de enkelte elementer i ALGOL-koden til en kode, som maskinens indre automatiske funktion bygger på. Da maskinens egen indre kode igen kan betragtes som et kodesprog, er det klart, at omskrivningen i virkeligheden er en oversættelsesproces.

Den store betydning af ALGOL som kodesprog ligger nu i, at det er så præcist i sin form, at et program, der er udtrykt deri, vil kunne oversættes til et maskinsprog gennem en rent mekanisk proces. Dette forhold udnyttes på den måde, at man lader den selvsamme elektroniske regnemaskine, som man ønsker skal udføre den proces, som udtrykkes ved ALGOL-koden, udføre oversættelsen fra ALGOL til maskinsproget. For at dette skal kunne gøres, må man blot en gang for alle konstruere et program for maskinen, som er i stand til at udføre den pågældende oversættelse.

Oversætterprogrammer af denne art er nu færdige eller under udarbejdelse for en lang række maskiner ved regnecentraler verden over. I Skandinavien har der været vist interesse for sagen fra en lang række institutioner, både offentlige og private, således bl. a. Norsk Regnesentral, Matematikmaskinnämndens Arbetsgrupp (BESK, Stockholm), Matematiikkakonekomitea og Regnecentralen (DASK, København). Ved den sidstnævnte institution regner man med at have en oversætter færdig til brug fra efteråret 1960.

ALGOL's fremtid. Den interesse, som ALGOL allerede på nuværende tidspunkt har vakt, lader formode, at sproget fremover vil få en indflydelse, som strækker sig langt uden for den kreds, som umiddelbart har berøring med arbejdet med de elektroniske regnemaskiner. For dem, der på nært hold følger udviklingen, vil det således ikke være nogen overraskelse, hvis ALGOL, inden der er gået mange år, er et selvfølgeligt værktøj for alle, der beskæftiger sig med videregående naturvidenskabeligt eller teknisk arbejde, og indtager en fast plads i den højere undervisning.

Et af de største problemer i denne sammenhæng må formodes at blive den fortsatte fastholden af en enkelt, eller i alle tilfælde blot nogle få, varianter af sproget. Trangen til selv at bidrage med forbedringer til et konventionelt system af denne art synes at være helt uimodståelig hos mange af dem, som arbejder med det — et forhold, som imidlertid let kan forklares, når man betænker, at disse folk ofte er overvejende optaget af at forbedre og udvikle deres værktøj.

Modvægten mod denne tendens udgøres af de brugere, som kun er interesseret i sproget som middel til at udtrykke deres ideer. De vil

naturligvis have brug for et sprog, som er så universelt og uforanderligt som muligt. Løsningen på denne konflikt vil forhåbentlig blive, at man vil nøjes med udvidelser til sproget, uden samtidig at ændre meningen af de bestående konventioner. Da vil alle processer, som er formuleret i en bestemt variant, bevare deres gyldighed også fremover.

LITTERATUR

- [1] J. W. BACKUS, F. L. BAUER, J. GREEN, C. KATZ, J. MCCARTHY, P. NAUR, A. J. PERLIS, H. RUTISHAUSER, K. SAMELSON, B. VAUQUOIS, J. H. WEGSTEIN, A. VAN WIJNGAARDEN, M. WOODGER: *Report on the algorithmic language ALGOL 60* (editor P. Naur). Regnecentralen, København, marts 1960; Numerische Mathematik 2 (1960), pp. 106–136; Acta Polytechnica Scandinavica: Math. and Comp. Mach. Ser. no. 5 (1960); Communications ACM 3 no. 5 (1960), pp. 299–314.
- [2] *Report on the algorithmic language ALGOL* by the ACM Committee on Programming Languages and the GAMM Committee on Programming (editors A. J. PERLIS and K. SAMELSON). Numerische Mathematik 1 (1959), pp. 41–60; samt Communications ACM 1 no. 12 (1958), pp. 8–22.

BOKMELDINGER

ROBERT M. EXNER — MYRON F. ROSSKOPF: *Logic in elementary mathematics*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1959. 9 + 274 pp. sh. 52/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 128.)

Detta är en bok om teorin för matematisk bevisföring, närmast inom ramen för elementär algebra och geometri. Som framställningsmedel används formell logik, vari inga förkunskaper förutsätts.

Författarna ger först en kort översikt av Aristotelisk logik och övergår så till satskalkyl, vars operationer, syntax och slutledningsregler presenteras. De logiska formelerna är baserade på sanningstabeller, icke på axiom, vilket är förståeligt, då det är fråga om att ge läsaren en orientering i logistik, för att denna sedan skall kunna användas, varemot boken icke vill vara en lärobok i logik.

Satskalkylen finner användning i kapitel III, som handlar om formerna för matematiska bevis. Den härvid utvecklade bevisteorin illustreras genom stringent behandling av några konventionella geometriska teorem.

Fjärde kapitlet är en trevlig tillämpning av föregående. Framställningen är huvudsakligen ägnad en viss ändlig geometri, baserad på tio axiom. Idén är lyckad i det man här inom ett relativt litet utrymme kan visa strukturen av ett matematiskt system, som är ytterst förenklat. På detta ställe utvecklas denna modell »på vanligt språk« på sjutton sidor. I ett appendix ges en strängt formalistisk behandling av samma modell på tjuugoåttio sidor. Läsaren får därigenom en uppfattning om vilket utrymme en oavkortad korrekt behandling av t. ex. Euklidisk geometri skulle kräva.

Predikatalkalkylen med syntax och slutledningsregler behandlas i femte kapitlet. Helt naturligt är den lika litet som satskalkylen strängt axiomatiserad, vilket däremot dess tillämpningar är.

Sjätte kapitlet ger en logisk framställning av bl. a. abstrakta grupper och fält jämte interpretationer, linjära och kvadratiske ekvationer, omvända räkneseätt, olikheter, absolutbelopp, gränsvärden. Mängdlära behandlas icke, fastän den skulle ligga nära till hands. En intressant sak

är att författarna visar, hurusom det är enklare att ge en formellt oantastlig framställning av algebran än av geometrin. Detta påpekande kan ses mot bakgrunden av den aktuella amerikanska reaktionen mot att den formella bevisföringen inom skolmatematiken hittills onaturligt mycket har koncentrerats till Euklidisk geometri.

Boken ställer sig vanskelig för äldre skolelever, ty fastän logistiken presenteras rätt så heuristiskt och dess tillämpningar gäller områden av matematiken, vilka är bekanta för varje gymnasist, samt övningsuppgifterna är lätta, torde de formella avsnitten vara tunglästa för nybörjare. För lärare och andra, som är intresserade av elementär matematik ur högre ståndpunkt, kan boken ha sin betydelse. Fastän man icke på skolstadiet kan behandla alla teorem med full stringens, kan verket ge en lärare impulser för uppläggning av bevis så, att man kommer idealet nära.

Carl G. Wolff

I. I. PRIWALOW: *Einführung in die Funktionentheorie, II.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 22. Aus dem Russischen übersetzt von Victor Ziegler.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 5 + 194 S., 28 Fig. DM 8.00.

(Innehållsförteckning i NMT, denne årgang, s. 45.)

Andet bind af den tyske oversættelse af Priwalows lærebog i elementær kompleks funktionsteori kan i det store og hele karakteriseres på samme måde som første (se NMT 7 (1959), s. 181–182): Fremstillingen er vel disponeret, såvel med hensyn til udvalg og rækkefølge af de behandlede emner som til behandlingens omfang; den støtter sig dog i rigelig grad til ikke præcist angivne forkundskaber i reel analyse og skæmmes noget af en del unøjagtige eller vage formuleringer, både af definitioner, sætninger og beviser, samt af mange mere eller mindre uskadelige trykfejl.

De tre første af de syv afsnit eller kapitler udgør tilsammen næsten to trediedele af bogen, og de fire sidste kommer derfor nærmest til at virke som kortfattet orientering i speciellere emner. Fordelt på de enkelte afsnit findes ialt ca. 75 opgaver, hvoraf omtrent halvdelen ledsages af løsninger.

Første afsnit behandler Cauchys integralsætning og -formel og bygger temmelig meget på teorien for reelt kurveintegral; endvidere benyttes, som om de var helt selvfølgelige, en del ubeviste regneregler for integralet af en kompleks funktion af en reel variabel. Afsnittet er iøvrigt meget indholdsrigt, således bevises det (under anvendelse af en smule Lebesguesk integralteori), at Cauchys integralsætning gælder for en vilkårlig

rektifikabel Jordankurve og en funktion, der blot forudsættes at være kontinuert i det lukkede område, der har kurven som rand. Sidst i afsnittet findes nogle paragraffer om integraler af Cauchysk type og grænseværdier af sådanne — et emne, som forfatteren selv har bidraget til, og som forøvrigt ikke findes behandlet i de gængse elementære lærebøger.

Andet afsnit giver en udmærket behandling af rækker, herunder specielt potensrækker. For et par af de vigtigere sætninger gives to helt forskellige beviser; først et noget tungt, men sikkert fremadskridende arbejdsbevis, og dernæst et, der på en elegant måde skyder en genvej. Flere af sætningerne afgrænses ved velvalgte modeksempler og ledsages af kommentarer, der giver et godt udblik over nogle af de emner, der ikke tages op til nærmere behandling.

Et par mangler ved disse afsnit skal nævnes. Adskillige steder, hvor der er tale om en kurve, der ligger i et vist område, anvendes på afgørende måde den mindste afstand fra kurven til områdets rand, uden at det overhovedet omtales, at der her foreligger et eksistensspørgsmål. Og Borels overdækningssætning, som i første bind er formuleret helt korrekt, bruges den ene gang efter den anden på områder, der ikke udtrykkeligt forudsættes begrænsede, så at i hvert fald beviserne, men tit også sætningerne bliver forkerte. Endelig savner man en definition på, hvad det vil sige, at en ikke nødvendigvis lukket eller selvgennemskærende kurve omkredser et punkt.

Det er fristende at omtale en enkelt terminologisk mærkværdighed: En analytisk funktion defineres som en funktion, der er differentiabel i et vist område, og en holomorf funktion som en, der kan udvikles i en potensrække. Iøvrigt defineres senere en meromorf funktion som en, der med den sædvanlige betegnelse er meromorf i hele planen.

Tredie afsnit behandler Laurentudvikling og singulariteter (Weierstrass' sætning om væsentlige singulariteter tillægges J. W. Sochozki) og afsluttes med en paragraf, som på en meget tilfredsstillende måde anvender det foregående på hydrodynamiske problemstillinger.

Fjerde afsnit er en kort, men vel gennemført indførelse i residueregning med nogle anvendelser; bl. a. bevises Rouchés sætning.

I femte afsnit bevises Picards sætning på velkendt måde ved hjælp af Landaus sætning.

Sjette afsnit er en indførelse i de uendelige produkters teori med nogle anvendelser, dels på meromorfe funktioner, dels på nogle generalisationer af entydighedssætningen for analytiske funktioner; undervejs bevises Jensens formel (som her opkaldes efter Jacobi og Jensen).

I syvende afsnit, der er meget kort, introduceres begrebet analytisk fortsættelse, dog ikke langs en kurve, men kun fra område til område.

Behandlingen føres altså ikke ret langt frem, og der bliver slet ikke tale om at nå til f. eks. monodromisætningen.

De i første bind så ofte forekommende hårdhændede infinitesimalbetragtninger findes kun ganske enkelte steder i andet bind.

Trykfejlene er som sagt mangfoldige: ombytninger af bogstaver eller tal; manglende angivelser af integrationsveje; numerisktegn, der er blevet til kantede parenteser; manglende fortegn og brøkstreger; manglende eller forkert anbragte mærker og indices; forkerte krydshenvisninger; linier, der hopper op og ned, så at eksponenter en gang imellem bliver til faktorer o. s. v. I beviset for, at en ligeligt konvergent række kan differentieres ledvis, får man brug for at integrere ledvis; på dette sted står der differentiere i stedet for integrere.

Til sidst et par kuriositeter: En Ableitung er en enkelt gang blevet til en Anleitung og et Häufungspunkt til et Häufigkeitspunkt.

Torkil Heiede

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 195–199 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i neste hefte, være sendt innen 20. november 1960.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

195. Vis at $2(2^{2n} - 1)$ enten er lik nevneren i Bernoullis tall $B_n = A_n/N_n$, eller er et multiplum av N_n ($B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ...). Lag en grei regel til å danne N_n .

Johs. Lohne

196. Om alla rötter till ekvationen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

är positiva, gäller

$$\frac{a_1 a_{n-1}}{a_0 a_n} \geq n^2.$$

Arne Fransen

197. Beregn integralet

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \cdot \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx.$$

W. Ljunggren

198. Funksjonsfølgen $\{f_n(x)\}$ er definert ved

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Finn en eksplisitt formel for $f_n(x)$.

R. Tambs Lyche

199. Er p/q og r/s to uforkortelige brøker, sier vi at den første er kortere enn den andre dersom $q < s$.

La a og b være to reelle tall mellom 0 og 1. Finn med hjelp av kjedebrøkene for a og b den korteste brøk y/x som ligger mellom a og b .

I det tilfelle at $a = p/q$, $b = r/s$ er rasjonale, skal en bestemme de tilfelle der x er mindre enn både q og s .

Viggo Brun

LØSNINGER

187. Visa, att ekvationen

$$f(x) = a \int_{x-1}^x f(y) dy ,$$

där $0 < a < 1$ och $f(x) = 1$ för $x < 0$, har för $x \geq 0$ en entydig lösning, som kan framställas antingen som en ändlig, alternerande serie eller som en oändlig, positiv serie. (Jfr. uppgift 175, NMT 7, s. 91.)

Gerhard Arfwedson

Lösning: Om $f(y)$ antages integrerbar för positiva y , så är integralen i h. l. av den definierande ekvationen kontinuerlig som funktion av x , således även $f(x)$. På samma sätt finner man att $f(x)$ är deriverbar för positiva x :

$$(1) \quad f'(x) = af(x) - af(x-1) \quad \text{för} \quad x > 0 .$$

I det slutna intervallet $(0, 1)$ gäller

$$(2) \quad f(x) = 1 + (a-1)e^{ax} .$$

Insättes $f(x) = 1 + g(x)e^{ax}$ får vi

$$(3) \quad g'(x) = -ae^{-a}g(x-1) ,$$

varur man får $g(x)$ i intervallet $(n, n+1)$ om funktionen är känd i $(n-1, n)$. Då g skall vara kontinuerlig få vi den sökta entydigheten.

Uppgiftens andra del förefaller vara litet olyckligt formulerad. Man ser omedelbart att $f(x)$ är positiv för alla positiva x vilket säkrar existensen av de begärda framställningarna, det går att ange hur många man kan önska. Den efter uppgiften givna hänvisningen antyder att de påtänkta framställningarna skall ha en viss form, som vi skall söka få fram.

Låt N ange heltalsdelen av x och betrakta

$$(4) \quad f(x) = 1 + (a-1) \sum_0^N (n-x)^n (n!)^{-1} a^n e^{ax-an} .$$

Denna funktion uppfyller (1) och (2) och är således den sökta. I den i

oppgift 175 givna formeln insättes $-x$ för a och a för z . Tillämpas där-
 efter formeln, så följer att

$$(5) \quad f(x) = (1-a) \sum_N^{\infty} (n-x)^n (n!)^{-1} a^n e^{ax-an}.$$

I (5) är termerna positiva, i (4) har de alternerande tecken om $a-1$
 multipliceras in och termerna skrivs efter stigande index.

Magnus Tideman

190. Idet T betegner arealet af en trekant ABC og m_a , m_b , m_c dens
 medianer, skal man bevise formelen

$$T = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma(\sigma-2m_a)(\sigma-2m_b)(\sigma-2m_c)},$$

idet $\sigma = m_a + m_b + m_c$.

Christian Berg

Løsning: La M_a være midtpunktet av BC og av AA_1 , C midtpunktet
 av BA_2 . Da vil trekanten AA_1A_2 ha sidene $2m_a$, $2m_b$ og $2m_c$ og arealet

$$3T = \sqrt{\sigma(\sigma-2m_a)(\sigma-2m_b)(\sigma-2m_c)}.$$

N. Solberg

Også løst av Per Roar Andenæs, Bernhard Andersen, Valgeir Bjørnsson, Ragnar
 Dybvik, Arne Fransén, Sven-Åke Gustafson, P. W. Karlsson, Johs. Lohne, A. N.
 Lyngbye, Stieg Mellin-Olsen, Tage Nørgaard, A. V. Peljo, Arne Sandum, J. Sol-
 vang, Steffen Strøbæk, Torsten Ström og Bolli Thoroddsen.

191. Når en smal parallell strålebunt går inn i en homogen brytende
 kule slik at

$$\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} r$$

(i = innfallsvinkel, r = brytningsvinkel), vil brennpunktet falle i kulens
 bakre overflate.

Dette, for regnbuens teori meget viktige resultat finnes i Herriott's
 forarbeider til en bok om regnbuen (Brit. Mus. mss. 6788). Hvis Herriott
 har benyttet infinitesimale betraktninger, er dette viktig som en tidlig
 anvendelse av slike metoder. Men kan relasjonen også finnes ved rent
 klassiske metoder?

Johs. Lohne

Løsning: Skæres strålebundtet med en plan gennem kuglens centrum,
 kan man betrakte de to yderste stråler. Lad disse have indfaldsvinklerne
 i_1 og $i_2 = i_1 + v$, og lad de to brydningsvinkler hedde r_1 og r_2 . Vinklen
 mellem radiene til indfaldsstederne vil da være v , og vinklen mellem de
 to brudte stråler vil være $r_2 - r_1$. Man har da:

og derfor

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{\sin(i_1 + v)}{\sin r_2},$$

$$\frac{\sin(i_1 + v) - \sin i_1}{\sin r_2 - \sin r_1} = \frac{\sin(i_1 + v) + \sin i_1}{\sin r_2 + \sin r_1}.$$

Når størrelserne gøres logaritmiske, fås heraf

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{r_1 + r_2}{2} = \operatorname{tg} \left(i + \frac{v}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{r_2 - r_1}{2}.$$

Ifølge det oppgivne fås heraf med tilnærmelse

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{r_2 - r_1}{2},$$

d. v. s. for et smalt bundt: $\frac{1}{2}v = r_2 - r_1$. Men det betyder, at vinklen mellom de brudte stråler er halvt så stor som centervinklen v , den er da periferivinkel, og de to betragtede stråler samles da på kuglens overflate.

Bernhard Andersen

Også løst av Bolli Thoroddsen og Magnus Tideman.

192. La

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_n},$$

hvor samtlige bokstaver er naturlige tall og hvor A/B ikke lar seg forkorte. Vis at

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n < 2^{2-n} n B.$$

Sammenlign eventuelt oppg. 180, NMT 7, s. 183.

Viggo Brun

Løsning: Jeg vil nummerere q -ene i motsatt orden, slik at

$$\frac{A}{B} = \frac{A_n}{B_n} = \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n-1} + \dots + \frac{1}{q_1}} = \frac{1}{q_n + A_{n-1}/B_{n-1}} = \frac{B_{n-1}}{B_{n-1}q_n + A_{n-1}}.$$

Det gir

$$(1) \quad A_n = B_{n-1}, \quad B_n = B_{n-1}q_n + A_{n-1} = B_{n-1}q_n + B_{n-2}.$$

Ligningene (1) viser at $B_k > B_{k-1}$ for alle k . Da er

$$\begin{aligned} B_n &> B_{n-1}(1 + q_n) > (1 + q_n)(1 + q_{n-1}) \dots (1 + q_2)B_1 \\ &= (1 + q_n)(1 + q_{n-1}) \dots (1 + q_2)q_1 \end{aligned}$$

$$\geq \frac{2^n}{n+1} (1 + q_n + \dots + q_1 - 1) = \frac{2^n}{n+1} (q_1 + q_2 + \dots + q_n)$$

etter oppg. 180. Nå viser (1) også at A_n og B_n ikke kan ha noen faktor > 1 felles; altså er $B_n = B$, og ulikheten ovenfor blir

$$B > \frac{2^n}{n+1} (q_1 + q_2 + \dots + q_n),$$

eller

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n < 2^{-n}(n+1)B < 2^{2-\frac{1}{2}n}B,$$

fordi

$$\frac{2^{-n}(n+1)}{2^{2-\frac{1}{2}n}} < \frac{1}{2} \quad \text{for alle } n.$$

Audun Holme

Også løst av Magnus Tideman, som gir den skarpere ulikhet

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n \leq nB/B_n^*,$$

der

$$B_n^* = \frac{1}{\sqrt{5}} (r^{n+1} - s^{n+1}), \quad r, s = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

193. Beregn integralet

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}(x^2-2\varrho xy+y^2)} dx dy, \quad |\varrho| < 1.$$

Arnlfot Høyland

Løsning: For at udregne det givne planintegral, benyttes polære koordinater; dette er tilladeligt, da integranden har konstant fortegn i integrationsområdet. — For at komme igennem, er det nødvendigt til-lige at indføre som ny variabel $t = \operatorname{tg} \theta$; man får så:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}(1-\varrho \sin 2\theta)r^2} r dr \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1-\varrho^2}{1-\varrho \sin 2\theta} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1-\varrho \sin 2\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2-2\varrho t+\varrho^2+1-\varrho^2} = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{t-\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{-\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arc} \sin \varrho \right) = \frac{\operatorname{Arc} \cos(-\varrho)}{2\pi}. \end{aligned}$$

P. W. Karlsson

Også løst av Erling B. Andersen, Arne Fransén og Torsten Ström.

194. Av plasshensyn utstår løsningen til neste hefte.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1960 på de matematiske gymnasielinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. Løs ligningssystemet

$$\frac{x-3y+4}{3} = \frac{y-2}{x-3}$$

$$xy - x - y - 1 = 0.$$

2. Idet p og q er givne liniestykker og v en given vinkel, skal man konstruere en trekant ABC , således at vinkel A er lig med v , højden fra B lig med p og vinkel A 's halveringslinje lig med q .

Diskussion kræves.

Beregn trekantens sider og ubekendte vinkler, når $v = 150^\circ$, $p = 3$ og $q = 2$.

3. Givet ellipsen

$$3x^2 + 8y^2 = 72.$$

En ligesidet trekant T_1 er indskrevet i ellipsen, og en ligesidet trekant T_2 er omskrevet om ellipsen. Enhver af de to trekanter har en side, som er parallel med x -aksen, og som skærer y -aksens negative del.

Bestem koordinaterne til trekanternes vinkelspidser.

Ved multiplikation med et tal m med hensyn til et punkt O går trekant T_1 over i trekant T_2 . Bestem tallet m og koordinaterne til punktet O .

Matematik II.

1. Bestem de positive hele tal n og p således, at

$$K_{n,p-1} : K_{n,p} : K_{n,p+1} = 1 : 2 : 3.$$

($K_{n,q}$ betyder antallet af kombinationer af q elementer udtaget blandt n givne.)

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = 2 \sin^3 x - 3 \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og x -aksen.

3. Et ligebenet trapez $ABCD$ med siderne $AB = CD = 4$, siden $BC = 4\sqrt{2}$ og siden $AD = 8\sqrt{2}$ er beliggende i en plan α . Ud ad normalen til α gennem A afsættes

$AE=4$, og ud ad normalen til α gennem D afsættes $DF=4$; E og F skal ligge på samme side af α . E og B , E og F samt F og C forbindes.

Find alle toplansvinkler i det konvekse polyeder, hvis hjørnespidser er A , B , C , D , E og F .

Find polyedrets rumfang.

FINLAND

Längre kursen.

1. Beräkna summan av alla positiva tresiffriga hela tal som icke äro delbara med vare sig 9 eller 11.

2. Punkterna O og A ligga på samma lodräta linje, A 1 km över O . Längs en horisontal rät linje genom A rör sig ett flygplan med hastigheten 0,4 km/s. Ljudets hastighet är $\frac{1}{3}$ km/s. Huru många meter förbi A har planet hunnit, då bullret från detsamma börjar höras i O ?

3. För vilka reella värden på x är polynomet $x^2 - 14x + 39$ till sitt absoluta belopp mindre än 6?

4. En parabel har brännpunkten i origo och vertex i punkten $(0,2)$. I vilken punkt skäres y -axeln av den i parabelns skärningspunkt med den positiva x -axeln dragna tangenten? Rita figur.

5. Bevisa formeln för produkten av två potenser med samma bas, då exponenterna äro positiva bråk.

6. En med O som medelpunkt uppritad halvcirkelbåge AB halveras av punkten C . P är en godtycklig punkt på bågen. Från C drages en parallell till PB och på denna avsättes inåt cirkeln sträckan CD = hälften av AP . Bevisa, att punkten D rör sig på den med CO som diameter uppritade cirkellinjen, då P rör sig på bågen ACB .

7. I ändpunkten B av en cirkels diameter AB dras tangenten, och på densamma avsättes sträckan BC = den i cirkeln inskrivna kvadratens sida. I vilket förhållande delas sträckan AC av cirkelperiferin?

8. Vilket är det största räta tresidiga prisma som kan inskrivas i en reguljär tresidig pyramid sålunda att prismats bas är en del av pyramidens bas? Bestäm förhållandet mellan det nämnda prismats och pyramidens volymer.

9. I triangeln ABC är vinkeln A 45° större än vinkeln B ; sidan AC är 3 cm och sidan BC är 8 cm. Beräkna vinkeln B .

10. Bestäm det största värde, som funktionen $x^3 - 3x^2 + 3x$ uppnår då $0 \leq x \leq 2$.

ÍSLAND

I.

1. I en indskrivelig firkant $ABCD$ er siden $AB=7,735$ cm, diagonalen $AC=9,864$, vinklen $BAC=23,05^\circ$ og vinklen $CBD=40,12^\circ$. Beregn firkantens ubekendte sider og vinkler samt diagonalen BD .

2. OA og OB er to konjugerede halvdiametre i ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. På OA ligger punktet A_1 , således at $OA_1 = 2m \cdot OA$, og på OB punktet B_1 , således at $OB_1 = 2n \cdot OB$ (m og n er to bestemte tal). Midtpunktet af A_1B_1 betegnes ved P .

Find det geometriske sted for P , når A og B gennemløber ellipsen, således at OA og OB stadig er konjugerede.

Hvilken betingelse må m og n opfylde, for at dette geometriske sted skal falde sammen med den givne ellipse? (Det tilrådes at anvende ellipsens parameterform.)

3. Løs de to følgende ligninger

$$x^4 + 4x + 3 = 0$$

$$x^4 + 4\sqrt[3]{2} \cdot x + 3\sqrt[3]{4} = 0,$$

når det er givet at de hver for sig har en dobbeltrod.

Vis derefter, at betingelsen for, at ligningen $x^4 + px + q = 0$ har en dobbeltrod, er, at

$$\left(\frac{p}{4}\right)^4 = \left(\frac{q}{3}\right)^3 \quad (p \text{ og } q \text{ reelle tal}).$$

II.

1. $y = x^3 - ax$, hvor a er en positiv konstant, er ligning for en kurve. Tegn en sådan kurve, f. eks. for $a = 3$. Beskriv i hovedtræk, hvorledes kurvens form forandres, når a varierer.

Find ligningen for kurvens normal i punktet $O(0, 0)$. Denne normal skærer kurven yderligere i to punkter, hvoraf det ene, N , ligger i første kvadrant. Bestem længden af ON og arealet af det område S , som begrænses af liniestykket ON og kurven. Vis, at længden af ON og arealet af området S hver for sig har en mindsteværdi for en vis værdi af a . Bestem disse værdier af a .

2. a) Beregn størrelsen

$$\left(\cos \frac{\pi}{18}\right)^\pi.$$

b) Udregn integralerne

$$\int \sin 3x \sin 7x dx \quad \text{og} \quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x) dx.$$

c)

$$x^{\log x} = x^3 \cdot \sqrt{10x}. \text{ Find } x.$$

3. ABC er grundflade i en regulær tresidet pyramide med toppunktet T . Grundfladens side er a , højden $2a$. Find pyramidens toplansvinkler samt radius i dens indskrevne kugle. Gennem A lægges en plan, som rører den indskrevne kugle og er parallel med kanten BC . Bestem det forhold, hvori denne plan deler pyramidens rumfang.

NORGE

Reallinjen.

1. Vis at $\sin 3v = 3 \sin v - 4 \sin^3 v$.

I trekanten ABC er $AB = a$, $\angle A = v$ og $\angle B = 3v$. Hva for grenser må v ligge mellom?

Dra gjennom B en rett linje som skjærer AC i D slik at $\angle ABD = 2v$. Dra gjennom D en parallell med AB . Parallellen skjærer BC i E . Dra gjennom E en parallell med BD . Denne parallellen skjærer AC i F . Dra gjennom F en ny parallell med AB , og gjennom skjæringspunktet for denne parallellen med BC en ny parallell med BD osv.

Vis at trekantene ABD , BDE , DEF osv. har flateinnhold som danner en geometrisk rekke. Finn kvotienten i denne rekke uttrykt ved $\sin v$, og avgjør hva for verdier vinkelen v ligger mellom når rekka er konvergent. Hva for verdier ligger da kvotienten mellom? Finn summen av den uendelige konvergente rekka når $v = 30^\circ$, og kontroller svaret ved å regne ut trekanten ABC .

2. En regulær trekantet pyramide er innskrevet i en kule med radius R , slik at alle hjørner ligger i kuleflata. Bøyningsvinkelen mellom sidekanten og grunnflata i pyramiden er v .

Vis at pyramidevolumet blir $V = 2R^3 \sqrt{3} \cdot \sin^4 v \cos^2 v$. Finn den største verdien pyramidevolumet kan ha når v varierer, og finn den tilsvarende verdien av v .

Konstruer et snitt gjennom pyramiden og kula for denne verdien av v . Snittet skal gå gjennom sentrum i kula og en sidekant i pyramiden. Bruk $R = 5$ cm når du konstruerer.

3. Hva er den geometriske betydning av likningene $x^2 - y - a = 0$ og $ax - y = 0$, der a er et konstant reelt tall? Hva for verdier av a er det som gir skjæring mellom de to kurvene, og hva for verdier gir tangering? Gjør greie for hvilke kvadranter skjæringspunktene ligger i.

Finn likningen for det geometriske stedet for skjæringspunktene når a varierer. Likningen framstiller en kurve. Hvordan kan vi straks se av likningen at denne kurven ikke kan være noe kjeglesnitt?

Finn de områder for x der kurven ligger over x -aksen, der den ligger under x -aksen, der den stiger og der den faller med voksende x . Finn maksimal-, minimal- og vendepunktene på kurven. Hva for likning har tangenten til kurven i vendepunktet?

Lag en skisse av kurven. Bruk 1 cm til enhet på begge koordinataksene.

SVERIGE

Matematiska grenen.

1. Upprita kurvan $y = x^4 - 6x^2 + 5$ i dess huvuddrag. Kurvan och x -axeln begränsar tillsammans tre ändliga områden. Hur förhåller sig ytorna av dessa områden till varandra?

2. En fyrsidig pyramids basyta är en rektangel. Vinklarna mellan sidoytorna och basytan är i ordning 30° , 45° , 50° och 45° . Beräkna vinklarna mellan sidokanterna och basytan.

3. Upprita kurvan $4y = \frac{9}{x+2} - \frac{10}{x} + \frac{9}{x-2}$, och ange eventuella asymptoter samt maximi- och minimipunkter.

4. Upprita i ett rätvinkligt koordinatsystem kurvan $y = \frac{1}{\cos x}$ i dess huvuddrag. Kurvan, linjen $x = \frac{\pi}{4}$ samt koordinataxlarna begränsar ett ändligt område, som får rotera kring x -axeln. Beräkna volymen av den alstrade rotationskroppen.

5. Den ena asymptoten till en liksidig hyperbel har i ett rätvinkligt koordinat-system ekvationen $x + y + 1 = 0$. Hyperbeln går genom origo och tangerar den räta linjen $x + 2y = 0$. Bestäm hyperbelns ekvation.

6. I ekvationen $y = x^3 + ax$ har konstanten a ett sådant värde, att motsvarande kurva har en maximi- och en minimipunkt. Bestäm det största värde, som den spetsiga vinkeln mellan tangenten i inflexionspunkten och sammanbindningslinjen mellan maximi- och minimipunkten kan anta.

7. Parabeln $y^2 = 4x$ och den räta linjen $x = a$, där a är en konstant, är givna. Parabels topp är O , dess brännpunkt F . Genom en punkt P på parabeln drages diametern. Denna eller dess förlängning skär den givna linjen i punkten A . Bestäm ekvationen för orten för skärningspunkten mellan linjerna OA och PF . Undersök, hur den geometriska betydelsen av denna ekvation ändras, när a antar alla reella värden.

8. I en triangel känner man en sida och förhållandet mellan de båda andra. Beräkna vinkeln mellan den givna sidan och bisektrisen till den motstående vinkeln, när triangelns yta är så stor som möjligt.

RESULTAT AV DEN TREDJE INTERNORDISKE PRISOPPGAVE

(Oppgavene sto i NMT 7 (1959), s. 136–138.)

Det kom inn ialt 21 besvarelser: 14 danske, 2 islandske, 1 norsk og 4 svenske. Et utdrag av de beste løsninger vil bli publisert senere i NMT.

Etter innstilling fra bedømmelseskomiteen økes det samlede premiebeløp til n.kr. 250, som deles likt mellom innsenderne av de to beste besvarelser: *Knud Lønsted*, III G mn, Østre Borgerdydskole, København, og *Arne Strøm*, 5 Rg, Holtet h. skole, Oslo (klassene referer seg til forrige skoleår).

NMT takker alle deltakerne for den utviste interesse.

RESULTAT AV PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

(Oppgavene i NMT 7 (1959), s. 187–188.)

Det kom inn 6 besvarelser. Best var for tredje gang *Arne Strøm*, 5 Rg, Holtet h. skole (artium 1960), og nr. 2 var *Dag Belsnes*, 5 Rg, Holtet h. skole (artium 1960). Da *Strøm* bare kan vinne hovedpremien en gang, er premien for 1960 tildelt *Dag Belsnes*.

SUMMARY IN ENGLISH

S. E. STENIJ: *Evert Johannes Nyström in memoriam.* (Swedish.)

A short general and scientific biography of Evert Johannes Nyström, September 25, 1895—February 13, 1960.

ARNE BROMAN: *The problem of the baker.* (Swedish.)

A baker rolls his dough, cuts it in two, puts one piece on top of the other and continues the process repeatedly. Does he thereby obtain a well mixed dough? —The problem is solved (in the affirmative) for an analogous mathematical problem concerning a simple plane measure-preserving transformation. The solution is similar to the one given in Hopf: *Ergodentheorie* (Berlin 1937), p. 42.

FR. FABRICIUS-BJERRE: *A proof of the four-vertex theorem.* (Danish.)

By means of circular transformations, the author gives a new proof of the well-known theorem, that on any oval there are at least four vertices.

PETER NAUR: *Algol—the international language for description of logical and numerical processes.* (Danish.)

A short description of the algorithmic language ALGOL, illustrated by simple examples. The historical background and the possible future developments are also briefly sketched.