

NYE VEIER I SKOLEMATEMATIKKEN

KAY PIENE

Som omtalt på kronikk-plass i forrige hefte av NMT, ble det i slutten av 1959 arrangert et OEEC-seminar, »New thinking in mathematics education«, i Royaumont utenfor Paris. På møtet drøftet en inngående de ønskelige reformer i skolem matematikken.

Det nedenstående referat av drøftelsene er basert på den offisielle rapport. Bare unntaksvis blir det nevnt personnavn. Faktisk deltok de aller fleste av de halvt hundre deltakere i debatten, og det kunne ofte være tilfeldig hvem som uttalte det eller det.

I kronikken i forrige hefte ble også gjengitt professor Marshall Stone's åpningstale, samt den resolusjon som seminaret vedtok. Talen og resolusjonen kan med fordel leses som henholdsvis innledning til og avslutning på referatet nedenfor.

Professor Stone's tale skisserer bakgrunnen for de reformkrav som stadig sterkere gjør seg gjeldende overfor matematikkundervisningen. Det var et vesentlig formål for seminaret å se på ønskelige reformer i hver enkelt disiplin som skolem matematikken kan deles opp i. Resultatet var:

Regning. Ikke liten tid ble vidd disiplinen regning. Det ble bl. a. demonstrert et undervisningsmateriale med fargete stenger og kuber som etter manges mening har bidradd i høy grad til å effektivisere den begynnende regneundervisning (Cuisenaire-systemet). Mange deltakere var likevel noe skeptiske overfor materialet. En må ikke erstatte regningen med en modell.

Å lære regning må ikke bety utenat lært oppramsing av fakta og operasjoner. Det må bli resultat av en forståelse som skriver seg fra oppdagelser og ledete eksperimenter med fysiske gjenstander. En skal fram til en mengde kalt tall. En må altså bruke ideer som mengde, undermengde, avbildning og korrespondanse. Selv om disse navn selvsagt ikke inngår i undervisningen, må språket som brukes være korrekt, likeså begrepene. Ut fra forståelsen av systemet med enere, tiere, hundrer osv. på faste

plasser, og med intuitiv bruk av de vanlige lover om kommutativitet, assosiativitet og distributivitet, kan en systematisk utvikle operasjonene for de hele tall, slik at de ikke fremstår som en samling tricks.

Barn må lære å regne med letthet og nøyaktighet, slik som det forlanges av voksne i det daglige liv. Derfor kan unødige kompliserte oppgaver elimineres. Istedenfor kan vi — spesielt for mer begavete barn — innføre tallspill og studium av tallrelasjoner som kan utnyttes siden i matematikkundervisningen. Eksempler på slik virksomhet er tallfølger, enkle setninger om primtall og faktorisering, løsningen til $ax - by = 0$ eller $ax - by = 1$, og studiet av addisjons- og multiplikasjonstabellen som transformasjoner. Slike videregående studier må foretas under veiledning av en lærer som forstår alle de matematiske prosesser som inngår. Generalisasjoner i regning kan tjene som introduksjon til algebra før det formelle studium av denne disiplin er begynt.

Generelt var det enighet om at det skal undervises i regning slik at det fører til et matematisk system, idet en understreker de vanlige lover, og den rolle 0 og 1 spiller. Vi må undervise slik at vi bygger for det som kommer siden, og i grunnskolen gjør vi dette implisitt, ikke eksplisitt.

Også andre problemer i regneundervisningen ble nevnt, men det hersket åpenbart på flere punkter en viss usikkerhet. Likevel syntes alle å være enige om at en må kunne komme noe lenger i grunnskolens regneundervisning enn en gjør idag, og dermed gjøre det mulig å skaffe plass her til visse elementære matematiske begreper og operasjoner.

Algebra. Målet må være å legge om undervisningen slik at en når til de såkalte algebraiske strukturer. Ellers må vi begynne med en rent uformell utvikling av algebraiske begreper, og derfra gå fram til emnets mer formelle abstrakte sider. Først må vi utvikle grunnbegrep som uttrykk, ligning (likhet), mengde, inklusjon og de symboler som blir brukt når en arbeider med disse ideene. På et høyere trinn kan vi behandle de ulike tallsystem, idet en merker seg de egenskaper som utmerker en gruppe, en ring, et legeme (kropp), uten å foreta et aksiomatisk studium av disse strukturer. Her kan vi også innføre relasjoner, funksjoner, løsningssett (som mengder), og utvide de formelle operasjoner fra den første uformelle algebraundervisning. Som sluttsten på dette trinnet kan en utvikle det komplekse tall som et ordnet tallpar, studere polynomer som fører til en polynomring, vektorrom i 2 og 3 dimensjoner, elementær lineær algebra og matriser.

En vil på denne måten prøve å få elevene til å forstå at og hvordan algebraen kan nyttes i analysen og hvilke praktiske anvendelser den har, men samtidig vil en gi et grunnlag for dem som siden skal studere abstrakt

algebra eller fysikk eller samfunnsfag ved universitetet. En vil fylle kløften mellom klassisk algebra slik den nå undervises i skolen, og de nye universitetspenssa i faget.

Ikke alle land vil gå like langt i å bruke nye symbolismer i algebraen, men visse symboler bør sikkert bli brukt alt fra begynnelsen av: $\in$ (tilhører), $\subset$ (inkludasjon), $\cap$ (snitt), $\cup$ (union) og $\Rightarrow$ (implikasjon). Symbolene $\wedge$ (konjunksjon), $\vee$ (disjunksjon) og $\Leftrightarrow$ (hvis og bare hvis) er også ønskelige. Symbolene $\sim$ (negasjon), $\complement$ (komplement), $A - B$ (differens), $\forall_x$ (for alle x) og $\exists_x$ (for noen, eller det eksisterer) må inn i de øverste klasser. Symbolene $\{a, b, \dots\}$ og $\emptyset$ (nullmengden) må innføres.

I grafisk fremstilling må det bli forandringer. En må bl. a. trekke inn punkt- og trappediagrammer, og overhodet legge mer vekt på bruk av diagrammer, bl. a. til tilnærmet bestemmelse av røtter i en ligning, og til studium av kurver som er gitt på parameterform.

De variable betraktes (gjennom utsagn eller uttrykk) som »plassholdere» som kan bli erstattet av vilkårlige elementer innen et visst område (domain). En funksjon er en spesiell relasjon som er entydig (ikke nødvendigvis reversibel) og som kan betraktes som en avbildning, som en undermengde av ordnete par fra et kartesisk produkt, eller som en regel (f. eks. som et trippel (a, b, f) , der f velger ut den b som skal høre til en a). På et høyere trinn kan vi innføre elliptisk språkbruk; med den kvadratiske funksjon x^2 mener vi da mengden $\{(x, y) \mid y = x^2, x \text{ reell}\}$.

Som geometrien må algebraen begynne med intuitive ideer, så bruke deduksjoner basert på tidligere aksepterte begreper, og til slutt innføre en aksiomatisk utvikling av en algebraisk struktur (f. eks. de positive og negative hele tall eller de rasjonale tall).

For å greie alt dette må vi eliminere mye som er med i dagens leseplaner, f. eks. forenkling av kompliserte og kunstferdige algebraiske uttrykk; faktorisering av innviklete polynomer; mye av ligningsteorien, bl. a. spesielle løsningsmåter for ligninger (unntatt lineære og kvadratiske); det meste av logaritmeregningen; og studiet av determinanter (unntatt i forbindelse med matriser). Den kvadratiske funksjon er viktig, men en bør ikke, som ofte nå skjer, ofre for mye tid på de forskjellige metoder til å løse en annengradslikning.

Det vil naturligvis være delte meninger om hvor langt en skal gå. Ikke alle vil godta bruken av $\{x \mid x + 5 = 0\}$ som løsningsmengden til $x + 5 = 0$. Når en utvikler tallsystemet vil ikke alle godta bruk av kartesiske produkter eller oppdeling av en mengde ved hjelp av en ekvivalensrelasjon, men vil ønske å gå fra de naturlige tall direkte til de reelle på intuitiv-geometrisk basis. Hvordan en skal innføre reglen for produktet $(-a)(-b)$: ved fysiske eller geometriske analogier, eller ved deduksjon

fra kjente lover, er åpent for debatt. Noen vil ønske å presentere en aksiomatisk struktur ved å utvikle en Boole'sk algebra. Andre vil unngå dette i den høyere skole. Det er et uløst problem hvordan en vil utvikle de reelle tall.

Det vesentlige er imidlertid at når det gjaldt algebraen var det i grunnen ingen eller små meningsulikheter på seminaret.

Geometri. Professor Dieudonné (Paris) presenterte et geometriprogram basert helt på vektorer og et vektorrom i to dimensjoner. Dette eliminerer Euklids geometri slik vi kjenner den. Detaljer i programmet må bli gjenstand for senere diskusjon. Forsamlingen syntes å mene at Dieudonné gikk for vidt, men fant at den vanlige Euklid-fremstilling kan beskjæres og modifiseres, likesom gymnasgeometrien kan reformeres i mer algebraisk retning og med anvendelse av vektorer.

I dag spiller trekanten og dens kongruensegenskaper en sentral rolle i geometrien. Disse egenskaper gjør det mulig å foreta en enkel innføring i det deduktive bevis slik at en forstår dets natur. Hvis vi vil utvikle slike bevis i algebraen så vel som i geometrien, kan vi gradvis minske trekantens betydning og isteden understreke begrepet isometriske (avstandsbevarende) transformasjoner.

I et eget foredrag (dr. Botsch) ble det lagt fram en leseplan bygd på Felix Klein's Erlanger-program om invarianter i transformasjonsgrupper. Opplegget er dynamisk. En starter med fysisk geometri, som klipping, strekning, rotasjon, papirfolding o. l. Hermed kommer de første ideer om transformasjon inn. Så fører et semi-formelt studium av geometriske konstruksjoner som refleksjoner, rotasjoner og translasjoner til bevarelsen av metriske egenskaper under slike transformasjoner. Idet en så bruker de egenskaper som nå er utledet, som postulater, er det mulig hurtig og lett å bevise mange setninger i den vanlige Euklidiske geometri. — Translasjoner i planet og i rommet leder til studiet av vektorer (+, -, multiplikasjon med en skalar og skalar multiplikasjon). En annen affinitet for figurer er »strekning«, som leder til homotetiske transformasjoner og studiet av likedannethet.

Man var enige om at hva enten man følger det ene eller det andre program, bør det fra 11- til 13-årsalderen være et intuitivt-fysikalsk studium av geometriens elementer. Fra 13- til 15-årsalderen må deduksjonen inn i geometrien. For alderstrinnet 15-18 år må det utvikles en eller annen spesiell aksiomatisk struktur. Den gradvise overgang fra fysisk realitet til formal abstraksjon, blottet for virkelighet, bør være fullført før elevene er kommet til universitetet.

Den Hilbert-ske vei til Euklid ble for gymnaslaster helt tatt bort fra

reformprogrammet. Det ble foreslått et modifisert sett av aksiomer (inklusive de reelle tall) som fører til koordinatgeometri, og dette ble godtatt som et mulig skritt til forbedring av geometriplanen. Et system med 5 aksiomer for koordinatgeometrien ble foreslått av Choquet (Paris) som basis for eventuell eksperimentering. Han innrømmet imidlertid at det var en vanske når det gjaldt begrepet rett vinkel og Euklids plan. — Artins bok »Geometric algebra« ble nevnt som en kilde til utvikling av eksperimentell-aksiomatiske systemer for geometriundervisningen i den høyere skole.

Som alt nevnt var nok meningene under geometridiskusjonen noe delte, men jeg tror en må si at de foreslåtte reformtanker avgjort vant tilslutning. Det vesentlige punkt i hele diskusjonen var at enten de reelle tall eller et vektoropplegg vil kunne forene algebra og geometri, og således gi større enhet og styrke til matematikkleseplanen. Eksperimenter i denne retning må oppmuntres.

Analyse. Den delen av gymnasundervisningen som kalles analyse er ikke klart definert. Den kan imidlertid grovt betegnes som den utvidelse av algebra og geometri som behandler absolutte verdier, grenser, differensiering, integrering og koordinatgeometri. (Koordinatgeometrien bruker, i motsetning til grafisk algebra hvor skalaene kan være forskjellige, samme skala på begge akser og bevarer derfor avstanden.)

På gymnasttrinnet er det ikke alltid lett å være eksakt, men det som gjøres skal være korrekt. Hvis det fins huller i et bevis, skal eleven bli gjort oppmerksom på disse hullene.

På dette trinn i skolegangen bør elevene ha noen matematisk modenhet og kunne erkjenne forskjellen mellom intuitive og geometriske illustrasjoner i motsetning til bevis for en setning. Den rent tekniske, manipulative differensiering og integrering må støttes opp med virkelig forståelse av de prosesser som ligger bak. Flere eksempler på grenseoverganger ble vist med metoder som var mindre rigorøse enn ε - δ -

metoden, f. eks. for $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ når x går mot 0.

Kurset i analyse kan godt begynne med et intenst studium av funksjoner — hele og rasjonale algebraiske, eksponensielle og logaritmiske, trigonometriske og inverse funksjoner, og kanskje hyperbolske funksjoner. Differensiering og integrering bør innføres samtidig, og middelverdisetningen kan spille en stor rolle i utviklingen av den høyere matematikk. Koordinatgeometrien bør vesentlig befatte seg med parabler, ellipser og hyperbler, med eller uten bruk av infinitesimalregning.

En kan nok bruke ordensrelasjonen i en ordnet kropp og topologisk

behandling av omegner til utvikling av kontinuitetsbegrepet, men det hersket noen tvil om en slik behandlingsmåte. Et intuitivt begrep, passende matematisert, syntes helt tilfredsstillende på gymnasnivå. Dette ble særlig understreket under behandlingen av eksponensial- og logaritmefunksjonen.

Mens den begrepsmessige side av analysen ble trukket fram og poengtert, var det også klart at en viss grad av manipulativ ferdighet var ønskelig, spesielt for de som skal inn i teknikk og anvendt matematikk.

Forskjellige synspunkter gjorde seg gjeldende i debatten om analysen, men det kan ikke tales om noen bestemt tendens i disse. Generelt fant en at en slik en definerer analysen, er det særlig nødvendig å ta med en mer skarpt definert begrepsmessig struktur.

Sannsynlighetsregning og statistisk induksjon. Dette er et nytt undervisningsområde som anbefales for den høyere skole; spesielt gjelder det statistisk induksjon. Mens sannsynlighetsbegrepet, bygd på a priori-betraktninger av antall mulige kombinasjoner (og permutasjoner), alltid har vært med i skolealgebraen i de fleste land, så er bruken av a posteriori-betraktninger fra eksperimenter og bruk av konfidens-intervaller noe nytt. Det er også mulighet for å behandle sannsynlighetsregningen ut fra begrepene mengde, mengdefunksjoner og sampel rom, slik at en igjen kan få utviklet den moderne symbolisme og tenkning som er grunnlaget for alle matematiske disipliner.

Emnet sannsynlighetsregning og statistikk må bli et nødvendig tillegg til den høyere skoles matematikkpensum. Det var ingen uenighet om hvordan emnet skal presenteres. En må ta med permutasjoner, kombinasjoner, lovene for sannsynlighet, binomialfordelingen, og statistisk induksjon. En kan gå videre og ta med korrelasjon, normalfordeling og stokastiske prosesser. Det anbefales sterkt at alle land får i stand og eksperimenterer med kurser i disse emner, slik at de kan bli en fast del av den høyere skoles matematikkpensum.

Ikke alle seminarets deltakere syntes å være like godt orientert om sannsynlighetsregning og statistikk, men det kom ikke fram noen innlegg som gikk imot innføring av disse disipliner.

Konklusjon. En reform av matematikkundervisningen må understreke en endring i dens formål, nemlig at oppbygning, struktur og forståelse er viktigere enn manipulative ferdigheter, selv om disse må være skikkelig utviklet. En annen endring gjelder bruken av ideer, symboler og språk, som til nå ikke har vært med i den høyere skoles matematikk-plan. Vi må også gjennomføre en annen organisasjon og behandling av de enkelte

grener, slik at hver er knyttet til de andre så det skapes en bedre forståelse og en mer felles bakgrunn for fortsatt studium og anvendelser av matematikken.

Hvert land vil på egen måte gjennomføre sine reformer, innføre nytt materiale, organisere leseplaner eller eksperimentere med ulike mulige pensa. Det må være kanaler for kommunisering av resultatene av disse eksperimenter mellom alle land, for å stimulere nye ideer. Formålet for alle disse programmer, som implisitt er gitt i de reformer en er blitt enig om ovenfor, er dobbelt:

1° Å sikre en viss matematisk kompetanse og et kunnskapsnivå som er nødvendig for fortsatte universitetsstudier; og

2° Å gi alle elever et verktøy til bruk i det daglige liv, så vel som til tolkning av det som foregår i dagens vitenskapelige verden.

Når en ser på de nåværende pensa, må reformforslagene fra seminaret sies å bety ganske drastiske endringer. Hvis det blir gjort forandringer i løpet av 60-årene vil det bli de første på over 100 år, og alt taler for at de allerede er forsinket for lenge siden. Hvordan en skal få denne reform i stand ved evolusjon (ikke revolusjon) er vår neste oppgave.

CAUCHY'S ULIGHED I TERMODYNAMISK BELYSNING

MOGENS PIHL

N legemer med uforanderlige rumfang har de absolutte temperaturer $T_1, T_2, \dots, T_N$, der jo er positive, og de konstante, ligeledes positive varmekapaciteter $c_1, c_2, \dots, c_N$.

Iværksættes varmeledende forbindelse mellem legemerne, vil der slutte-
lig indtræde en ligevægtstilstand, i hvilken alle legemerne har den samme
absolutte temperatur $\bar{T}$, der ifølge *energisætningen* er bestemt ved

$$\sum c_i(\bar{T} - T_i) = 0$$

eller

$$(1) \quad \bar{T} = \frac{\sum c_i T_i}{\sum c_i}.$$

(Her og i alle følgende summationer skal i løbe fra 1 til N .)

Ved denne proces er den samlede *entropiændring*

$$(2) \quad \sum \int_{T_i}^{\bar{T}} \frac{c_i dT}{T} \geq 0,$$

hvor lighedstegnet kun gælder for $T_1 = T_2 = \dots = T_N (= \bar{T})$.

Af (2) fås

$$\ln \bar{T} \cdot \sum c_i - \sum c_i \ln T_i \geq 0,$$

der ved omformning og benyttelse af (1) kan bringes på formen

$$(3) \quad \left(\frac{c_1 T_1 + c_2 T_2 + \dots + c_N T_N}{c_1 + c_2 + \dots + c_N} \right)^{c_1 + c_2 + \dots + c_N} \geq T_1^{c_1} T_2^{c_2} \dots T_N^{c_N}.$$

Dette er en velkendt generalisation af *Cauchy's ulighed* mellem det
aritmetiske og geometriske middel:

$$\frac{T_1 + T_2 + \dots + T_N}{N} \geq \sqrt[N]{T_1 T_2 \dots T_N}.$$

Uligheden (3) kan yderligere generaliseres: Hvis energifunktionerne af N legemer med uforanderlige rumfang er $E_1(T), E_2(T), \dots, E_N(T)$, hvor $T > 0$ og differentialkvotienterne $E'_1(T), E'_2(T), \dots, E'_N(T)$ er positive, er for et vilkårligt sæt temperaturer $T_1, T_2, \dots, T_N$ entropiændringen

$$(4) \quad \sum \int_{T_i}^{\bar{T}} \frac{E'_i(T) dT}{T} \geq 0,$$

hvor $\bar{T}$ som foran er bestemt ved energisætningen, der her antager formen

$$(5) \quad \sum (E_i(\bar{T}) - E_i(T_i)) = 0.$$

Lighedstegnet gælder som før kun for $T_1 = T_2 = \dots = T_N (= \bar{T})$.

Tilliden til entropisætningens almenlydighed er så stor, at man af fysiske grunde må forvente, at uligheden (4) er opfyldt for *vilkårlige* funktioner $E_i(T)$ med positive differentialkvotienter. Det er imidlertid også let at give et direkte matematisk bevis herfor.

Vi betragter følgende funktion af θ :

$$\int_{T_i}^{\theta} \frac{E_i(T_i) - E_i(T)}{T^2} dT.$$

Da $E_i(T)$ er voksende, er integranden negativ for $T > T_i$, men positiv for $T < T_i$. Vi har derfor

$$(6) \quad \int_{T_i}^{\theta} \frac{E_i(T_i) - E_i(T)}{T^2} dT \leq 0$$

for alle θ , og lighedstegnet gælder kun for $\theta = T_i$.

Af (6) fås ved delvis integration

$$\frac{E_i(T_i) - E_i(\theta)}{\theta} + \int_{T_i}^{\theta} \frac{E'_i(T) dT}{T} \geq 0,$$

hvoraf ved summation

$$\sum \frac{(E_i(T_i) - E_i(\theta))}{\theta} + \sum \int_{T_i}^{\theta} \frac{E'_i(T) dT}{T} \geq 0.^1$$

Dette fører straks til uligheden (4), når θ sættes lig det ved (5) bestemte $\bar{T}$.

¹ I termodynamisk belysning er dette sætningen om, at den samlede entropiændring af de N legemer og et varmereservoir af temperaturen θ , hvormed de bringes i varmeledende forbindelse, er større end eller lig med 0.

Ovenstående bevis indeholder specielt et meget elementært bevis for Cauchy's ulighed. For at tydeliggøre, hvor kort og enkelt dette bevis er, gengives det nedenfor, frigjort fra de mere omfattende betragtninger¹.

Man ser umiddelbart, at

$$\int_{T_i}^{\theta} \frac{T_i - T}{T^2} dT \leq 0$$

for alle θ (med lighed kun, når $\theta = T_i$). Integration giver

$$(7) \quad \frac{T_i}{\theta} - 1 - \ln \frac{T_i}{\theta} \geq 0,$$

der også direkte følger af, at kurven $y = \ln x$ ligger under sin tangent i $(1, 0)$. Af (7) fås

$$\frac{\sum (T_i - \theta)}{\theta} - \ln \frac{T_1 T_2 \dots T_N}{\theta^N} \geq 0,$$

som med $N\theta = \sum T_i$ straks fører til Cauchy's ulighed.

¹ Det er i realiteten, som meddelt mig af Børge Jessen, identisk med et bevis af F. Riesz i artiklen: *Sur les valeurs moyennes des fonctions*. Journ. of the London Math. Soc. 5 (1930), pp. 120-121.

ETT ELEMENTÄRT LÖSBART FALL AV TREKROPPARPROBLEMET

HANS RIESEL

Det har hittills inte lyckats att bestämma den allmänna lösningen till det s. k. trekropparproblemet. Problemet innebär att beskriva rörelsen hos ett mekaniskt system bestående av 3 punktmassor, som inte påverkas av andra krafter än de ömsesidiga attraktionskrafterna mellan massorna enligt Newtons gravitationslag. Några lösningar till problemet äro emellertid kända. En av dessa, som går tillbaka på Lagrange, skola vi härleda med elementära metoder.

Vi börja med att rekapitulera några satser ur den elementära mekaniken. Vi studera i det följande system av punktmassor, som röra sig i ett koordinatsystem utan inverkan av yttre krafter. Då gäller:

1. Det är ingen inskränkning att antaga, att masssystemets tyngdpunkt befinner sig i vila i origo. Om detta inte är fallet, kan man nämligen enligt lagen om tyngdpunktens rörelse åstadkomma detta i ett annat, lämpligare valt inertialsystem.

2. Den gemensamma tyngdpunkten till ett antal punktmassor m_i , placerade i punkterna $\mathbf{r}_i$, beräknas i parallellkoordinatsystem enligt formeln

$$\mathbf{T} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}.$$

Här och i det följande betecknar typen $\mathbf{r}$ en vektor. r skall beteckna storleken (absoluta beloppet) av vektorn $\mathbf{r}$.

3. Om två partiklar med massorna m_1 och m_2 , belägna på avståndet d , attrahera varandra med en kraft $\mathbf{k}$ av storleken

$$k = m_1 m_2 f(d),$$

och om $\mathbf{k}$ är riktad längs sammanbindningslinjen mellan m_1 och m_2 , säger man, att varje massa omgives av ett kraftfält. I vektorframställning är kraftfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ i punkten $\mathbf{r}$ givet av uttrycket

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -mf(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

om massan m är placerad i origo. Funktionen $f(d)$ kan här väljas godtyckligt; i fallet med Newtons gravitationslag är

$$f(d) = \frac{\gamma}{d^2},$$

där γ är gravitationskonstanten.

4. Rotation av ett plant masssystem kring en axel genom origo och vinkelrät mot systemets plan ger upphov till ett kraftfält, som i en punkt $\mathbf{r}$ i planet är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mathbf{r},$$

om ω är (den konstanta) vinkelhastigheten vid rotationen.

Vi övergå nu till att studera tvåkropparproblemet. Låt två partiklar med massorna m_1 och m_2 ligga på x -axeln med masssystemets tyngdpunkt i nollpunkten. Avståndet mellan m_1 och m_2 är d . Enligt fig. 1 gäller följande:

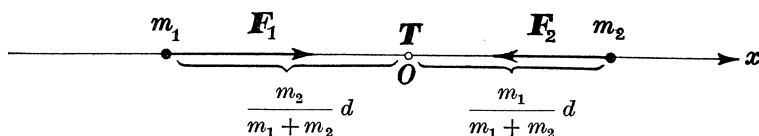


Fig. 1

jande: Massan m_1 attraheras mot origo av ett fält $\mathbf{F}_1$ av storleken $m_2 f(d)$, och m_2 attraheras mot origo av ett fält $\mathbf{F}_2$ av storleken $m_1 f(d)$. Man ser här, att fältstyrkorna F_1 och F_2 , som påverka de bägge partiklarna, äro direkt proportionella mot partiklarnas avstånd till systemets tyngdpunkt. Eftersom en rotation kring tyngdpunkten ger upphov till ett kraftfält av samma slag, men med rakt motsatt riktning, är det alltid möjligt att balansera ut attraktionskraften mellan massorna med en rotation med lämpligt vald rotationshastighet. På detta sätt inser man, att tvåkropparproblemet har lösningar, där de båda massorna rotera kring den gemensamma tyngdpunkten.

Vi kunna försöka finna lösningar till trekropparproblemet på liknande sätt. Det första problemet är därvid följande: Hur skola 3 massor, m , m_1 och m_2 , som bilda en egentlig triangel, placeras, för att m_1 och m_2 skola attrahera m mot systemets tyngdpunkt? I ett snedvinkligt koordinatsystem (se fig. 2) finner man, att kraftfältet i origo, skrivet i komponentform, blir

$$\mathbf{F} = \{m_1 f(d_1), m_2 f(d_2)\}.$$

Systemets tyngdpunkt är

$$\mathbf{T} = \left\{ \frac{m_1 d_1}{m + m_1 + m_2}, \frac{m_2 d_2}{m + m_1 + m_2} \right\}.$$

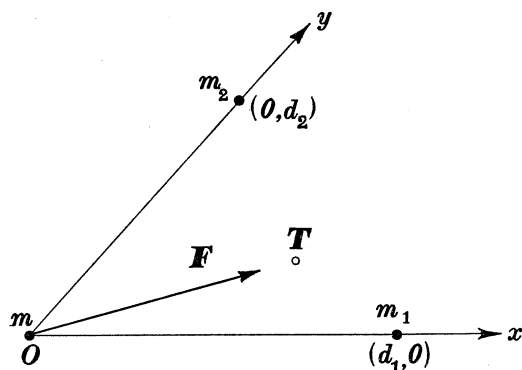


Fig. 2

Dessa vektorer ha samma riktning om, och endast om motsvarande vektorkomponenter äro proportionella, vilket ger

$$\frac{f(d_1)}{d_1} = \frac{f(d_2)}{d_2}.$$

I händelse $f(d)/d$ är en monoton funktion av d , vilket gäller för t. ex. Newtons gravitationslag, medför denna ekvation, att $d_1 = d_2$. Triangeln måste därför vara likbent för att massan m skall attraheras mot systemets tyngdpunkt av de båda andra massorna. För att var och en av de 3 massorna skall attraheras mot systemets tyngdpunkt av de båda återstående, fordras därför, att triangeln är liksidig. Om de 3 massorna å andra sidan äro placerade i hörnen av en liksidig triangel, är detta villkor tydligen uppfyllt, oberoende av massornas inbördes storlekar.

Låt oss återvända till vektorerna $\mathbf{F}$ och $\mathbf{T}$ i fig. 2. Om $d_1 = d_2 = d$, kan man skriva

$$\mathbf{F} = (m + m_1 + m_2) \frac{f(d)}{d} \mathbf{T}.$$

Eftersom detta uttryck är symmetriskt i m , m_1 och m_2 , ser man, att den fältstyrka F , som attraherar en viss massa, är direkt proportionell mot avståndet från systemets tyngdpunkt till denna massa, om de 3 massorna äro hörn i en liksidig triangel. Även i detta fall kan därför massornas attraktion mot den gemensamma tyngdpunkten kompenseras av en lämpligt vald rotation kring denna. En lösning till trekropparproblemet är därför, att de 3 kropparna bilda en liksidig triangel av konstant storlek, som roterar kring en axel genom masssystemets tyngdpunkt, vinkelrät mot triangelns plan.

Utgående från den allmänna lösningen till tvåkropparproblemet kunna ytterligare lösningar till trekropparproblemet erhållas. Den allmänna

lösningen till tvåkropparproblemet är, som bekant, att de båda massorna röra sig på likställda kägelsnitt kring systemets tyngdpunkt, som är brännpunkt till kägelsnitten. Då såväl tvåkropparproblemet som trekropparproblemet för fallet att de 3 massorna bilda en liksidig triangel, kunna beskrivas därigenom, att massorna attraheras mot den gemensamma tyngdpunkten av ett kraftfält, vars styrka är direkt proportionell mot avståndet till denna, får man följande lösning till trekropparproblemet: De 3 massorna kunna röra sig på likställda kägelsnitt kring systemets tyngdpunkt, som är brännpunkt till kägelsnitten. Detta är möjligt, om massorna vid något tillfälle bilda en liksidig triangel, och då ha lämpligt avpassade hastigheter. Massorna komma då alltid att bilda en liksidig triangel av i allmänhet variabel storlek. Denna triangel, som ligger i ett fixt plan, roterar kring en axel genom masssystemets tyngdpunkt, vinkelrät mot triangelns plan. Detta är den av Lagrange givna lösningen till trekropparproblemet.

Även ett annat, mera speciellt fall av trekropparproblemet kan behandlas elementärt med liknande metoder, om man utgår från motsvarande fall vid tvåkropparproblemet. Om man i fig. 1 inte låter masssystemet rotera, komma de båda massorna att röra sig mot origo, för att slutligen kollidera där. Även i detta fall äro de både partiklarnas rörelser likställda med avseende på systemets tyngdpunkt. Detta resultat kan omedelbart överföras på trekropparproblemet. Om man inte har rotation, och från vila frisläpper 3 punktmassor, som bilda en liksidig triangel, komma massorna att accelereras mot systemets tyngdpunkt. De utföra härvid likställda rörelser med tyngdpunkten som likställighetscentrum. Massorna komma därför att röra sig så, att de ständigt bilda en liksidig triangel, för att slutligen kollidera i tyngdpunkten.

Slutligen vilja vi påpeka följande: Vår härledning med hjälp av fig. 2 kan lika väl utföras i ett 3-dimensionellt parallellkoordinatsystem med 4 masspunkter. Man finner då, att nödvändiga och tillräckliga villkoret för att 4 massor skola attrahera varandra mot den gemensamma tyngdpunkten är, att de utgöra hörnen i en regelbunden tetraeder (förutsatt, att massorna bilda en egentlig tetraeder). Även i detta fall kommer varje massa att attraheras mot den gemensamma tyngdpunkten av ett fält, som är direkt proportionellt mot massans avstånd från tyngdpunkten. Om ingen rotation förekommer och massorna frisläppas från vila, komma de ständigt att bilda en regelbunden tetraeder, tills de kollidera i masssystemets tyngdpunkt.

LITTERATUR

- C. L. SIEGEL: *Vorlesungen über Himmelsmechanik*. Berlin 1956, s. 69.
J. L. LAGRANGE: *Oeuvres*. Paris 1873, Band 6, s. 272.

OM POTENSSUMMER

CHRISTIAN GRAM

I Matematisk Tidsskrift for 1924 har Fr. Fabricius-Bjerre [1] givet et bevis for følgende sætning om summen af den p 'te potens af de hele tal fra 1 til n :

Potenssummen $S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ kan skrives som et polynomium af $(p+1)$ 'te grad i n .

Fornylig har Ove J. Munch i en mere omfattende undersøgelse af potensproduktsummer ([2], p. 11) bevist den samme sætning på omtrent samme måde (i begge tilfælde benyttes induktion efter n), og nedestående bevis skal blot illustrere, at man også kan anvende *induktion efter p* .

Vi antager, at alle potenssummerne $S_0(n), S_1(n), \dots, S_{p-1}(n)$ kan skrives som polynomier i n af henholdsvis 1. grad, 2. grad, $\dots$, p 'te grad, og vil bevise, at $S_p(n)$ kan udtrykkes som et polynomium af $(p+1)$ 'te grad i n . Vi har

$$\begin{aligned} (1) \quad S_p(n) &= \sum_{i=1}^n i^p = \sum_{i=1}^n (n-n+i)i^{p-1} \\ &= n \sum_{i=1}^n i^{p-1} - \sum_{i=1}^n (n-i)i^{p-1} = n \cdot S_{p-1}(n) - \sum_{i=1}^n (n-i)i^{p-1}. \end{aligned}$$

Den sidste sum i (1) kan nu skrives:

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{i=1}^n (n-i)i^{p-1} &= (n-1) \cdot 1^{p-1} + (n-2) \cdot 2^{p-1} + \dots + 1 \cdot (n-1)^{p-1} \\ &= (1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (n-1)^{p-1}) + (1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (n-2)^{p-1}) \\ &\quad + \dots + (1^{p-1} + 2^{p-1}) + 1^{p-1} \\ &= S_{p-1}(n-1) + S_{p-1}(n-2) + \dots + S_{p-1}(2) + S_{p-1}(1). \end{aligned}$$

Ifølge antagelsen kan vi skrive

$$S_{p-1}(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0;$$

OM HOVEDSÆTNINGERNE FOR KONTINUERTE OG DIFFERENTIABLE FUNKTIONER

VILHELM JØRGENSEN

I første afsnit af denne artikel betragter jeg kun de hovedsætninger, som det vil være naturligt at give bevis for i et indledende kursus, f. eks. i gymnasiet. Således medtages ligelig kontinuitet ikke og heller ikke sætningen om, at en funktion, der er kontinuert i et lukket interval, er begrænset og har en størsteværdi; middelværdisætningen (jeg nøjes med Rolles sætning) bevises derfor kun for funktioner med kontinuert differentialkvotient. I dette afsnit bygges der på talfølgedefinitionen for funktionsgrænseværdi.

I andet afsnit, der er logisk uafhængigt af første, bevises alle de sædvanlige hovedsætninger ved en ensartet fremgangsmåde, idet der bygges på Heine-Borels overdækningssætning. I overensstemmelse hermed bruges ε - δ -definitionen for funktionsgrænseværdi. Overdækningssætningen er i sig selv ret abstrakt, og den indføres derfor i forbindelse med en konkret anvendelse, iøvrigt svarende til den oprindelige Heine'ske ansats til beviset for sætningen om ligelig kontinuitet. Det bemærkes, at den her brugte form for sætningen (delingssætning) afviger noget fra den sædvanlige.

1. SÆTNING 1.1. *Er $f(x)$ kontinuert i intervallet $a \leq x \leq b$, og er $f(a) > f(b)$, samt opfylder tallet k betingelsen $f(a) > k > f(b)$, da findes der et (indre) punkt c med $f(c) = k$.*

Beviset afviger kun lidt fra det sædvanlige: Er $f(\frac{1}{2}(a+b)) > k$, sætter vi $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ og $b_1 = b$; er derimod $f(\frac{1}{2}(a+b)) \leq k$, sætter vi $a_1 = a$ og $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$. I begge tilfælde får vi et lukket interval $(a_1|b_1)$ med $f(a_1) > k \geq f(b_1)$. Vi fortsætter denne halveringsproces og får en følge af lukkede intervaller $(a_n|b_n)$, af hvilke ethvert er den ene halvdel af det foregående, og for hvilke vi har

$$f(a_n) > k \geq f(b_n).$$

Der findes netop ét tal c , der opfylder betingelsen $a_n \leq c \leq b_n$ for alle n , og vi har $c = \lim a_n = \lim b_n$, altså $f(c) = \lim f(a_n) \geq k$ og $f(c) = \lim f(b_n) \leq k$. Dette giver $f(c) = k$, og beviset er ført. Til brug nedenfor bemærkes, at vi ikke blot har $a_n \leq c$ men $a_n < c$, da $f(a_n) > k = f(c)$.

LEMMA. *Er $g(x)$ kontinuert i $a \leq x \leq b$ og differentiabel i $a < x < b$, samt er $g(a) \neq g(b)$, da findes der mellem a og b et punkt, hvor $g'(x)$ har det ved $g(b) - g(a)$ bestemte fortegn.*

Bevis: Vi kan åbenbart nøjes med at betragte tilfældet $g(b) - g(a) < 0$. For et tilstrækkelig lille $\alpha > 0$ vil funktionen

$$f(x) = g(x) + \alpha x$$

da opfylde betingelsen $f(a) > f(b)$, og vi kan bruge sætning 1.1 og den ved sætningens bevis bestemte talfølge a_n . Vi har da

$$f'(c) = \lim \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c} \leq 0,$$

da tælleren er positiv og nævneren negativ. Heraf får vi

$$g'(c) = f'(c) - \alpha \leq -\alpha < 0.$$

SÆTNING 1.2. *Er $f(x)$ differentiabel i et interval med $f'(x)$ konstant lig nul, da er $f(x)$ konstant.*

SÆTNING 1.3. *Er $f(x)$ kontinuert i et interval og differentiabel i det indre med $f'(x) \geq 0$, da vil $x_1 < x_2$ medføre $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Disse to sætninger følger umiddelbart af vort lemma.

SÆTNING 1.4. *Er $f(x)$ kontinuert i et interval og differentiabel i det indre med $f'(x) \geq 0$, uden at $f'(x)$ er konstant lig nul i noget delinterval, da er $f(x)$ voksende.*

Bevis: Idet x_1 og x_2 ($> x_1$) er to vilkårlige punkter i intervallet, skal det vises, at vi har $f(x_1) < f(x_2)$. Da $f'(x)$ ikke er konstant lig nul mellem x_1 og x_2 , kan $f(x)$ ikke være konstant der; vi har altså to punkter x_3 og x_4 ($x_1 \leq x_3 < x_4 \leq x_2$) med $f(x_3) \neq f(x_4)$. Af sætning 1.3 får vi da

$$f(x_1) \leq f(x_3) < f(x_4) \leq f(x_2),$$

altså $f(x_1) < f(x_2)$ som påstået.

SÆTNING 1.5. *Er $f(x)$ kontinuert i $a \leq x \leq b$ og differentiabel med kontinuert differentiaalkvotient i $a < x < b$, samt er $f(a) = f(b)$, da findes der et (indre) punkt c med $f'(c) = 0$.*

Bevis: Er $f(x)$ konstant, kan c vælges frit i intervallet. Ellers findes der et punkt x_1 med $f(x_1) \neq f(a)$; vi kan antage $f(x_1) > f(a)$. Anvendes vort lemma, ser man, at der mellem a og x_1 findes et punkt x_2 med $f'(x_2) > 0$, og mellem x_1 og b et punkt x_3 med $f'(x_3) < 0$. Da $f'(x)$ er kontinuert og skifter tegn, når man går fra x_2 til x_3 , findes der ifølge sætning 1.1 mellem x_2 og x_3 et punkt c med $f'(c) = 0$.

2. En funktion $f(x)$ siges at svinge mindre end ε i et interval, hvis vi for to vilkårlige punkter x_1 og x_2 i intervallet har $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

SÆTNING 2.1. *Er $f(x)$ kontinuert i det lukkede interval J , og er $\varepsilon > 0$ opgivet, da kan J deles i et endeligt antal intervaller, i hvilke $f(x)$ svinger mindre end ε .*

Bevis: Med (D) betegner vi samlingen af delintervaller, i hvilke $f(x)$ svinger mindre end ε . Er x_0 et vilkårligt punkt i J , vil ethvert tilstrækkelig lille delinterval, der indeholder x_0 , tilhøre (D) , thi ligger x_1 og x_2 tilstrækkelig tæt ved x_0 , vil $f(x_1)$ og $f(x_2)$ afvige mindre end $\frac{1}{2}\varepsilon$ fra $f(x_0)$ og derfor afvige mindre end ε fra hinanden. Det skal nu vises, at J kan deles i et endeligt antal delintervaller, der alle tilhører (D) , eller, som vi kort vil sige, at J kan D -deles. Det bemærkes, at hvis J 's to lukkede halvdele begge kan D -deles, gælder dette også J selv.

Beviset føres indirekte. Kunne J ikke D -deles, ville en af J 's lukkede halvdele J_1 heller ikke kunne det; ligeså den ene af J_1 's lukkede halvdele J_2 o. s. v. Vi får en følge af lukkede intervaller J_n , af hvilke ethvert er indeholdt i det foregående, og som ikke kan D -deles. De har et fælles punkt c , og deres længder går mod nul; men da alle tilstrækkelig små intervaller, der indeholder c , ligefrem selv tilhører (D) , får vi en modstrid, og sætningen er hermed bevist.

Det ses, at beviset er formet således, at vi samtidig har godtgjort følgende almindelige

DELINGSSÆTNING. *Lad J være et lukket interval og (D) en samling af delintervaller med følgende egenskab: Til ethvert punkt c i J svarer et positivt $\delta = \delta(c)$, således at alle lukkede intervaller, der indeholder c og er mindre end δ , er i (D) . Da kan J deles i et endeligt antal intervaller, der alle tilhører (D) .*

Vi vil nu ved hjælp af delingssætningen vise de resterende hovedsætninger.

SÆTNING 2.2. *Er $f(x)$ kontinuert i et interval og forskellig fra nul, da har alle funktionsværdierne samme fortegn.*

Bemærkning: Heraf følger sætning 1.1 let.

Bevis: Idet a og b ($>a$) er to punkter i intervallet, skal det vises, at $f(a)$ og $f(b)$ har samme fortegn. (D) skal her være alle de delintervaller af $(a|b)$, i hvert af hvilke $f(x)$ har fast fortegn. Er c et vilkårligt punkt i $(a|b)$, vil $f(x)$ i ethvert tilstrækkelig lille interval, der indeholder c , have det ved $f(c)$ bestemte fortegn og intervallet således tilhøre (D). Delingssætningen kan altså anvendes; $(a|b)$ kan deles i et endeligt antal intervaller, i hvert af hvilke $f(x)$ har konstant fortegn, men da disse intervaller to og to har et endepunkt fælles, har $f(x)$ samme fortegn i dem alle.

SÆTNING 2.3. *Er $f(x)$ kontinuert i et lukket interval J , da har $f(x)$ en størsteværdi.*

Bevis: Vi siger, at $f(x_0)$ er en overværdi for $f(x)$ i delintervallet D_1 , hvis x_0 er et punkt i J , og uligheden $f(x_0) \geq f(x)$ gælder for alle x i D_1 . Mængden (D) skal her være alle intervaller, i hvilke $f(x)$ har en overværdi. For det vilkårlige punkt c i J er der følgende to muligheder: 1) Der findes et punkt d med $f(d) > f(c)$; i alle tilstrækkelig små intervaller, der indeholder c , vil $f(x)$ da have $f(d)$ som overværdi. 2) Værdien $f(c)$ er størsteværdi for $f(x)$; den er da overværdi for $f(x)$ i alle delintervaller overhovedet, og derfor specielt i alle, der indeholder c . Delingssætningen kan altså anvendes; J kan deles i et endeligt antal intervaller med tilhørende overværdier $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$. Den største af disse overværdier er åbenbart størsteværdi for $f(x)$, idet den er overværdi for $f(x)$ i alle intervallerne.

SÆTNING 2.4. *Er $f(x)$ differentiabel i et interval med $f'(x) > 0$, da er $f(x)$ voksende i intervallet.*

Bevis: Idet a og b ($>a$) er to vilkårlige punkter i intervallet, skal vi vise uligheden $f(a) < f(b)$. (D) skal her være alle lukkede delintervaller af $(a|b)$, i hvilke $f(x)$ har større funktionsværdi i det højre endepunkt end i det venstre. Er c et indre punkt, og har vi $x_1 < c < x_2$, da får vi, blot x_1 og x_2 ligger tilstrækkelig tæt ved c ,

$$\frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} > 0 \quad \text{og} \quad \frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} > 0,$$

altså $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$, således at $(x_1|x_2)$ tilhører (D). For endepunkterne a og b er betragtningen lidt simplere. Vi kan altså anvende delingssætningen og får i voksende rækkefølge et endeligt antal delepunkter $x_1, x_2, \dots, x_n$ med

$$f(a) < f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n) < f(b),$$

hvorved det påståede er bevist.

BOKMELDINGER

ULF GRENANDER: *Probability and statistics*. (The Harald Cramér Volume.) Wiley publications in statistics. Almqvist & Wiksell, Stockholm; John Wiley & Sons, New York, 1959. 434 pp. \$ 12.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 42.)

Dette er en samling avhandlinger av forskjellige forfattere, utgitt til ære for professor Harald Cramér på hans 65 års dag. Avhandlingene behandler emner fra vidt forskjellige felter innen statistikk, sannsynlighetsregning og tilgrensende områder. I sannsynlighetsteori er det 8 avhandlinger (Doob, Feller, Grenander, Kac, D. G. Kendall, Levy, Masani, Masani & Wiener), i statistisk metodelære 9 (T. W. Andersen, Bartlett, Elfving, Fix & Hodges & Lehmann, Neyman, Robbins, Rosenblatt, Tukey, Wilks), i økonometri én (Wold) og i forsikringsmatematikk én (Segerdahl). Avhandlingene er svært forskjellige både når det gjelder problemstillinger og matematisk verktøy, og det ville være umulig for en enkelt anmelder å vurdere (eller endog forstå) dem alle. Noen av avhandlingene gir originale bidrag, andre gir oversikter over hva som tidligere er gjort.

T. W. Andersen tar opp til systematisk behandling slike problemer som oppstår ved sosiologenes enquête-undersøkelser, psykologenes testinger, legenes diagnoser osv., hvor en »latent struktur« skal estimeres på grunnlag av visse observerbare egenskaper. Det er en generalisering og sannsynlighetsteoretisk presisering av Thurstone's klassiske faktoranalyse.

M. S. Bartlett gir et historisk tilbakeblikk og drøfter de nye perspektiver som utviklingen av teorien for stokastiske prosesser åpner for statistisk metodikk.

J. L. Doob tar utgangspunkt i en egenskap ved »martingales« og anvender den på Markoff-kjeder.

Så sterkt som teorien for planlegging av lineærnormale statistiske forsøk har utviklet seg i de senere år, er det påfallende hvor lite som har vært gjort i retning av å avlede optimale planer. G. Elfving er en av de få som har arbeidet med saken, og han har publisert en rekke interessante

arbeider. Han gir i sitt bidrag et tilbakeblikk over hva som har vært gjort av ham selv og noen andre statistikere.

William Feller drøfter visse fenomener i forbindelse med sekvenser av delsummer av uavhengige stokastiske variable, spesielt den såkalte arcsinuslov.

Karl Pearson's kjikvadrattføyningstest for multinomiske situasjoner har utvilsomt gjennom mange år vært den mest populære statistiske testmetode i vide kretser — langt utenfor statistikernes egen krets. E. Fix, J. L. Hodges og E. L. Lehmann drøfter denne test nærmere i sin artikkel. De modifiserer den for situasjoner hvor det er viktig å konsentrere teststyrken ved visse alternativer til nullhypotesen. De avleder styrkefunksjonen og tabellerer denne for 11 signifikansnivåer og 1, 2, 3, 4, 5 og 6 frihetsgrader.

U. Grenander presiserer innledningsvis at den lineære teori for stokastiske prosesser gir lite utover det som er en direkte »oversettelse« av teorien for Hilbert-rom. Han illustrerer den praktiske betydning av Cramér's resultat at en stasjonær prosess kan uttrykkes — via en Fourier transform — ved en ortogonal prosess. Han går så over til å betrakte de ikke-lineære situasjoner.

M. Kac's arbeider dreier seg også om stokastiske prosesser og krever åpenbart spesialkunnskaper på området for å bli forstått. Det samme gjelder David G. Kendall's og Paul Levy's arbeider om Markoff-kjeder samt artiklene til P. Masani og P. Masani & N. Wiener. Den siste er om ikke-lineær prediksjon.

Jerzy Neyman tar for seg testing av delspesifiserte hypoteser når klassen av sannsynlighetsmål ikke er komplett. Han definerer asymptotiske nivåkonstante tester samt en optimumsegenskap for slike. Metoder for konstruksjon av tester med den slags egenskaper avledes.

Herbert Robbins behandler sekvensiell estimering av forventningen ved den normale fordeling når variansen er ukjent. Han foreslår en opphørsregel som involverer variansene for observasjonene, og bestemmer ved tilnærmede metoder sannsynlighetsfordelingen for antall observasjoner.

M. Rosenblatt gir et tilbakeblikk over arbeider som er gjort i de senere år med statistiske metodeproblemer ved stokastiske prosesser med stasjonære residualer.

C. O. Segerdahl gir en oversikt over de resultater som er nådd innen forsikringsmatematikens kollektive risikoteori, dvs. teorien for sammensatte Poisson-prosesser.

J. W. Tukey drøfter metoder til estimering av spektra, og S. S. Wilks gir en oversikt over de viktigste resultater som er nådd om ikke-parametriske statistiske modeller.

Herman O. A. Wold tar opp til bred drøftelse mål og midler ved konstruksjon av økonometriske modeller. Særlig inngående drøfter han det spørsmål som har interessert ham sterkt gjennom mange år, nemlig kausalkjeder kontra simultane systemer av strukturrelasjoner.

Det er en imponerende samling av de betydeligste yngre og eldre forskere innen den matematiske statistikk som har villet hylde professor Cramér på hans 65 års dag med en artikkel i jubileumsboken. Samtidig er boken en manifestasjon av den rikdom på forskjelligartede problemer og det høye nivå som kjennetegner den matematiske statistikk idag. Det er resultatet av en utvikling som ikke minst professor Cramér har bidradd til.

Erling Sverdrup

LOO-KENG HUA: *Additive Primzahltheorie*. (Aus dem Chinesischen übersetzt von Victor Ziegler.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 6 + 174 S. Kunstleder DM 20.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 128.)

I forlagsforordet til denne tyske utgave blir det sagt at primtallenes additive egenskaper hører til de mest interessante problemer innen den analytiske tallteori. Det kunne godt vært føyet til at dette felt også utgjør et av de vanskeligst tilgjengelige områder av tallteorien. Bokens formål er å vise hvor langt vår viden går idag. Hovedverktøyet er Vinogradovs metoder og den videreføring av disse som er gjort bl. a. av bokens forfatter.

Det vil gå for langt her å gå inn på den vrimmel av setninger som boken inneholder, men la meg nevne et par setninger som representerer noen av de ytterste forposter i forbindelse med Waring-Goldbachs problem:

La p^θ være den høyeste potens av p som går opp i det naturlige tall k , og la

$$\gamma = \begin{cases} \theta + 2 & \text{for } p = 2, 2|k \\ \theta + 1 & \text{ellers.} \end{cases}$$

La videre

$$K = \prod_{(p-1)|k} p^\gamma,$$

og

$$s \geq \begin{cases} 2^k + 1 & \text{for } 1 \leq k \leq 10 \\ 2k^2(2 \log k + \log \log k + 2,5) & \text{for } k > 10. \end{cases}$$

Ethvert tilstrekkelig stort naturlig tall N som oppfyller

$$N \equiv s \pmod{K}$$

kan da skrives som en sum av s k^{te} potenser av primtall.

Velger man her $k=1$, $s=3$ så blir $K=2$ og vi får som spesialtilfelle Vinogradovs setning at alle tilstrekkelig store ulike tall kan skrives som en sum av 3 primtall. Velger man $k=2$, $s=5$ så får man $K=24$, og setningen sier at ethvert tilstrekkelig stort naturlig tall $\equiv 5 \pmod{24}$ kan skrives som en sum av 5 primtallkvadrater.

I bokens siste kapitler blir undersøkt løsbareheten av følgende simultane system av diofantiske ligninger:

$$\begin{aligned} p_1 + \dots + p_s &= N_1 \\ p_1^2 + \dots + p_s^2 &= N_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_1^k + \dots + p_s^k &= N_k, \end{aligned}$$

hvor $p_1, p_2, \dots, p_s$ skal være primtall. Det blir bl. a. vist at dersom

$$s > 2k^2 + 3 + k \log(50k^3 \log k) / \log \frac{k}{1-k} \sim 3k^2 \log k,$$

så er systemet løsbart for tilstrekkelig store $N_1, N_2, \dots, N_k$.

Når man tar i betraktning det tunge stoff som boken representerer, må man si at forfatteren har hatt en meget lykkelig hånd med sin fremstilling.

Sigmund Selberg

C. HYLÉN-CAVALLIUS — L. SANDGREN: *Matematisk Analys II* (för tvåbetygsstadiet vid universitet och högskolor). Lund studentkårs intressebyrå, Lund, 1959. 461 s. Sv. kr. 49.00.

(Innehållsförteckning i NMT, denne årgang, s. 43.)

Föreliggande lärobok utgör en fortsättning av samma författares tidigare utgivna *Matematisk Analys* (för nybörjarstadiet vid universitet och högskolor), refererad i NMT 6:1 (1958). Den har tills vidare utgivits i en stencilerad upplaga, så att säga på försök, för att senare utkomma i sedvanligt tryck efter en överarbetning på basis av gjorda erfarenheter vid dess användning i undervisningen. Utan tvivel är detta en riktig metod att skriva en lärobok för mellanstadiet, där svårigheterna är många och åsikterna om de lämpligaste metoderna ännu fler. Det stora antal liknande framställningar på främmande språk, från de klassiska franska Cours d'Analyse till moderna amerikanska Analysis, är självklart en rik källa att ösa ur men utgör samtidigt ett svårt handicap, då författarna vid nästan varje steg ställes inför ett val mellan olika möjligheter. I stort sett synes mig valen ha träffats med stor skicklighet,

insikt och konsekvens och som helhetsomdöme skulle jag vilja säga: det är en utmärkt lärobok i vardande.

Såsom undertiteln anger har avsikten varit att med utgångspunkt från *Matematisk Analys* täcka den del av analyskursen som i regel kräves för två betyg i fil. kand.- och ämbetsexamen vid de svenska universiteten (dock ej differentialekvationer). Detta har lyckats väl; uteslutningar av större betydelse finns ej och utvikningarna från standardkurs är relativt fåtaliga. Samtidigt har författarna bemödat sig om en sträng framställning, baserad uteslutande på klara matematiska begrepp med undvikande av dunkla föreställningar om »infinitesimala storheter», »yta», etc. I detta hänseende fyller läroboken högt ställda krav, men det har tyvärr icke kunnat undvikas att just på grund av dessa krav framställningen på sina ställen blivit omständlig och tung. Redaktionella förbättringar torde här kunna åstadkomma vissa lätnader, så t. ex. i det långa och svårsmälta avsnittet om dubbelintegralers transformation, där man eventuellt kunde ha nöjt sig med att bevisa satsen för kontinuerliga funktioner i öppna områden. Mången läsare skulle säkerligen också föredra en mindre detaljerad framställning, men det är självklart alltid en svår avvägningsfråga hur mycket som kan överlåtas åt läsarens egen insikt utan att riskera att denne antingen icke förstår alls eller, än värre, tror sig förstå det han icke förstår. I ett fall, det mäktiga första kapitlet om reella tal, torde författarna själva ha för avsikt att i en tryckt upplaga placera huvuddelen i ett Appendix; en åtgärd som icke minst ur psykologisk synpunkt vore synnerligen välbetänkt. En annan redaktionell förändring som skulle kunna diskuteras vore att placera alla eller flertalet exempel och övningar i särskilda avsnitt efter varje kapitel (med eller utan förändring av stilart). Hur värdefulla och nödvändiga de än är, i synnerhet vid en första läsning, utgör de likväl ett tyngande moment vid repetitionen och får stoffet att verka mycket mer omfattande än det i själva verket är.

En detaljerad genomgång kapitel för kapitel torde vara överflödig, då alla intresserade parter på förhand ungefärligen vet, vad en lärobok av detta slag måste innehålla. Jag skall därför inskränka mig till ett par punkter som synes mig särskilt betydelsefulla. Elementen av mängdläran genomgås och dess beteckningar användes konsekvent, elementära topologiska begrepp introduceras. I och för sig är det ganska självklart, att en modern lärobok i analys utrustas med detta fundament, men det förtjänar påpekas att det är en nyhet i tvåbetygskursen såtillvida att dessa begreppsbildningar tidigare endast använts i en mycket vag form och ibland icke alls. Preciseringen är en vinning som kommer klarheten till godo. Författarna behandlar på ett föredömligt sätt teorien för funk-

tioner av flera variabler, där särskilt avbildningssynpunkten med klarläggande av de viktiga begreppen definitionsområde, värdeförråd, entydighet, invers avbildning etc. ställes i förgrunden. Detta moderna betraktelsesätt, föga använt i äldre framställningar, möjliggör i förening med ett vektoriellt beteckningssätt en betydande ekonomisering av formelskrivningen samtidigt som överskådligheten och enhetligheten bidrager till en riktigare förståelse av de behandlade problemen. Ett gott exempel härpå är existenssatsen för implicit givna funktioner, som blir praktiskt taget självklar sedan man väl klarat av den inversa avbildningen.

I fråga om beteckningssystemet noterar anmälaren med tillfredsställelse att någon doktrinär, fullständigt konsekvent linje icke följts. I det flerdimensionella fallet betecknar x och y vanligen vektorer, vilket icke hindrat författarna från att vid exemplifiering låta x och y ha sin traditionella betydelse av reella tal. Inkonsekvensen synes mig fullt försvarlig av flera skäl och skulle naturligtvis med lätthet kunna reduceras i en tryckt upplaga genom användning av fetstil för vektorer. För en kursföreläsare eller studerande som vill göra anteckningar och av bekvämlighetsskäl gärna vill beteckna vektorer med vanliga bokstäver utan tillsats av streck, pilar, hattar, etc., kvarstår emellertid problemet. Jag skulle därför icke vilja gå lika långt i förenkling som författarna, då de betecknar skalär produkt av vektorerna x och y med xy . En ordentligt markerad punkt mellan x och y är redan bättre, och naturligtvis icke x^2 utan $x \cdot x = |x|^2$ eller eventuellt $= \|x\|^2$.

Författarna är att lyckönska till sitt arbete och de svenska studenterna till en lärobok på svenska språket, som i tryckt skick kommer att stå fullt i jämbredd med de bästa som utkommit på främmande språk.

Otto Frostman

WERNER VON KOPPENFELS — FRIEDRICH STALLMANN: *Praxis der konformen Abbildung*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 100.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 13 + 375 S., 251 Fig. Ganzl. DM 69.00.

(Innehållsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 130.)

En meget smuk bog, udstyret med over 200 usædvanligt nydeligt tegnede figurer, heri medregnet et særligt register, hvor hvert stikord er en lille figur.

Bogen indledes med en grundig gennemgang på 84 sider af de elementære analytiske funktioner og deres afbildningsegenskaber, samt 25 sider med en mere skitsemaæssig gennemgang af funktionsteoretiske hjælpe-

midler og almindelige afbildningssætninger. De næste 72 sider er benyttet til en meget grundig behandling af afbildninger af polygoner og cirkelbuepolygoner, medens de numeriske tilnærmelsesmetoder gøres færdige på 21 sider, som for resten er forbavsende let læselige, men man savner en vurdering af disse metoders praktiske anvendelighed. De sidste 164 sider af bogens egentlige tekst er et katalog over konforme afbildninger ordnet efter områderne og med en ret grundig behandling af hvert enkelt tilfælde.

Bogen har den mest omfattende behandling af konforme afbildninger ved eksPLICIT givne funktioner, som hidtil er udarbejdet, og alene af den grund vil den være af uvurderlig betydning for den, der beskæftiger sig med denne side af den anvendte matematik. Ved anvendelserne må man dog have i tankerne, at adskillige af de anførte metoder tillader nærliggende forbedringer, som bogen ikke omtaler.

Hans Tornehave

FUMITOMO MAEDA: *Kontinuierliche Geometrien*. Übersetzung aus dem Japanischen. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 95.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 10 + 244 S., 12 Fig. DM 36.00, Ganzl. DM 39.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 42.)

I 1935 viste Birkhoff og Menger at den projektive geometri kunne gis en lattice-teoretisk formulering. Fra Birkhoff og Mengers synspunkt danner den projektive geometri en irreduibel, endelig dimensjonal, komplementær, modulær lattice. Med dette var grunnlaget for en aksiomatisering av geometribegrepet gitt, hvorefter studiet av de abstrakte geometrier kunne begynne. I 1936–1937 konstruerte von Neumann med en svak modifisering av dimensjonsbegrepet en geometri uten punkter og linjer. von Neumann viste, at dimensjonen av elementene i en slik kontinuerlig geometri — eller, om vi vil, i en kontinuerlig irreduibel, komplementær, modulær lattice — kan anta enhver verdi fra 0 til 1.

Den foreliggende bok er en oversettelse av en japansk utgave (Tokyo 1952), og inneholder de fleste betydelige resultater om von Neumanns kontinuerlige geometrier og ikke-irreduible generaliseringer av slike, i det minste frem til 1950. Den er skrevet i lærebokform og skulle for så vidt kunne leses av interesserte studenter på bifagsnivået. Stoffet turde imidlertid bli tungt fordøyelig uten forkunnskaper i topologi og algebra.

Fremstillingen er delt i tolv hovedavsnitt. De tre første kapitlene behandler særlig deler av den algebraiske teori for latticer. Første kapittel rommer grunnbegrepene av lattice-teorien, frem til Stones og Wallmans

representasjonsteoremer. Begrepet topologisk rom blir så definert og anvendt til å gi Stones representasjon av en Boolesk lattice inn på mengdelattice av alle samtidig åpne og lukkede mengder i et Boolesk rom. Dette kapitlet rommer også et avsnitt om metriske latticer, spesielt komplette latticer der operasjonene er kontinuierlige. Kontinuiteten er formulert ved hjelp av rettete mengder. Filtere og ultrafiltere opptrer som duale og maksimale duale idealer. I annet og tredje kapitel studeres modulære latticer og projektive rom. Det siste kapitlet inkluderer bl. a. Frinks representasjonsteorem.

De neste to kapitler behandler dimensjonsteorien og dekomposisjonsteorien for kontinuierlige geometrier. I det irreducible tilfellet var dimensjonsteorien utarbeidet allerede av von Neumann. I 1944 viste Iwamura at en redusibel, kontinuierlig geometri kunne spaltes i et subdirekte produkt av irreducible kontinuierlige geometrier. Disse resultatene samt supplementerende bidrag fra Kawadu, Higuchi og Matsushima avslutter dimensjonsteorien og er inneholdt i kapitlene IV og V.

Kapitel VI gir definisjonen og de viktigste egenskapene ved regulære ringer, og kapitel VII (kontinuierlige regulære ringer) gir Maedas dimensjons- og dekomposisjonsteori på dette området. De fire neste kapitlene behandler representasjonsteorien for komplementære, modulære latticer, i det vesentlige fremstilt etter von Neumann, Kodaira og Huruya (1938). Kapitel XII handler om ortokomplementære latticer og representasjon av slike.

Boken slutter med et anhang som beviser ekvivalensen mellom utvalgsaksiomet, velordningssatsen og Zorns lemma og ekvivalensen mellom von Neumanns og Maedas formulering av kontinuitetskravet til en kontinuierlig geometri.

Per Holm

K. O. MAY: *Elements of modern mathematics*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), 1959. 16 + 607 pp. \$ 7.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 131.)

Enligt författaren är boken avsedd för studenter, som just påbörjar ett allvarligt studium av matematik. Det kan vara lämpligt att citera några rader ur det långa företalet: »The beginner in mathematics may be compared with someone about to take up a foreign language. He may wish merely to learn to speak, read, and understand the simplest phrases, in short, just enough "to order breakfast". There are several books directed toward the student who wants only this so-called "practical" acquaintance with elementary mathematics. On the other hand, the student of a language may wish to be able to carry on an intelligent

conversation, to read significant materials, to write, and even perhaps to think in the language. He must be interested in grammar, syntax, and above all, in acquiring an understanding and a "feel" for the language. Such a student of mathematics acquires manipulative skill as a by-product of striving for insight and thorough knowledge. It is for this kind of student that the present book has been written.«

Det första kapitlet är en utredning av grundlagarna för elementär algebra. De krävda förkunskaperna är insikter i mellanskolans matematik och förmåga att förstå logiskt resonemang, d. v. s. språk, ty symbolisk logik är ej ännu introducerad. Vektorer behandlas redan här i korthet, varemot de komplexa talen blir uppskjutna till ett senare kapitel. Detta kapitel torde vara lätt för varje matematiskt begåvad gymnasist.

Sedan följer en presentation av elementär logik, både sats- och predikat-kalkyl. Då det är ett nytt fält för den tilltänkte läsaren, är det naturligt, att författaren går varligt fram och använder sanningstabeller såsom illustration. Tillämpningar på algebra samt problem av vardaglig anstrykning ger framställningen en konkret grund. Avsnittet »Laws of implication« kan bli en provosten för nybörjaren, genom att han kan avskräckas av den långa raden formler.

Det tredje kapitlet behandlar grunderna till mängdläran. Nu införs ju mängdteoretiska betraktelsesätt i amerikanska skolkurser, varför ämnet antagligen icke är helt obekant för de färska studenter, boken är avsedd för. Här är ett tacksamt tillfälle att med den nyss introducerade formella logikens hjälp ge en mera exakt behandling av mängdläran än den, som kan inrymmas i den mera informella skolkursen. Venn-diagram och språkliga interpretationer gör texten lättsmält.

Följande kapitel behandlar plan analytisk geometri, varvid man börjar helt från grunden. Texten följer samma riktlinjer, som kommer till synes i det nya amerikanska skolprogrammet. Grund för framställningen, som väsentligen bygger på mängdlära, är sålunda begreppet ordnade par. Till behandling upptas här rätvinkliga koordinater, vektorer, räta linjer, cirkeln, polära koordinater, trigonometriska funktioner samt skalärlära produkter. Ett lätt kapitel för en nordisk student.

Svårare är det femte kapitlet om relationer och funktioner. En funktion är ju enligt amerikanskt språkbruk en entydig relation eller en gren av en mångtydig. Mera exakt: »a function is a set of ordered pairs in which no two different pairs have the same first component«. Framställningen i detta kapitel stöder sig naturligt på de tre föregående. Utom allmänna aspekter på relationer inklusive sammansättning, inversa relationer och operationer behandlas här de koniska sektionerna. Förfat-

taren utreder även begreppsskillnaden mellan en funktion, t. ex. $\sin$, och den ekvation, som definierar den, $y = \sin x$. Den linjära funktionens definition blir sålunda

$$mI + b = \{(x, y) \mid y = mx + b \wedge x \in \mathbb{R}\},$$

där I betecknar den identiska funktionen. (Framställningen är begränsad till reella tal.)

Lämpligt för strängt logisk behandling är teorin för tal, som det sjätte kapitlet är tillägnat. Ovanligt många av avsnitten här är betecknade som frivilliga; utom de teoretiskt intressanta om kardinaltal och de »matnyttiga» om approximation och numerisk kalkyl hör slutavsnittet, som upptar komplexa tal, anmärkningsvärt nog till dem. De komplexa talen definieras med vektorer, d. v. s. med ordnade par av reella tal. Härigenom undgås det skimmer av »mystik», som lätt uppkommer kring de imaginära. (Se Bundgaard, NMT 1 (1953), s. 16.)

I kapitlet »Calculus» bygger författaren grunden med lättfattlig framställning. Detta är tydligen ett område, där inga grundkunskaper väntas hos läsarna. Svårighetsgraden växer dock mot slutet, där den logiska symboliken tas mera i bruk. Det är fråga om en introduktion på hundra sidor och den är något begränsad. Bl. a. är beviset för medelvärdessatsen icke angivet. Det är naturligt, att författaren föredrar benämningen antiderivata framom obestämd integral. Följande beteckningssätt är dock alla omnämnda: $D^{-1}f$, $\int f$, $\int f(x)dx$.

De tre sista kapitlen är betecknade som frivilliga. De är rätt korta men ger ändå trevliga smakprov på sannolikhet, statistik och några abstrakta teorier, mest grupp teori.

Tabellerna i slutet av boken är anspråkslösa till formatet och bör uppfattas som illustrationer av motsvarande funktioner, icke som räknetabeller.

Boken innehåller övningsuppgifter av två slag: »Exercises», vilka är inströdda i texten i intimt samband med denna, och »Problems», vilka kan vara rent logisk-matematiska eller vara tillämpningar på fysik eller sociala vetenskaper. Uppgifterna har i allmänhet svar.

Anmälarer kan rekommendera verket för mogna gymnasister eller yngre studerande, som önskar utvidga, fördjupa eller kodifiera sina kunskaper. Boken kan även ge en läroverkslärare nyttiga impulser.

Carl G. Wolff

POUL MOGENSEN: *Indledning til funktionslæren*. Gyldendal, København, 1959. 105 s. D. kr. 15.85.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 44.)

Denne lærebog i funktionslære hører nøje sammen med den af forfatteren i 1957 udgivne lærebog i Differential- og integralregning, og bør læses forud for den; begge bøger er opbygget helt elementært til brug for matematikundervisning ved kurser for sproglige studenter, der ønsker at påbegynde læge- eller tandlægestudiet, ved seminarier, når matematik vælges som liniefag, ved forsøg i gymnasiet f. eks. med biologisk linie og evt. i fremtiden i et sprogligt gymnasium. Til selvstudium for den, der f. eks. på grundlag af mellemskole- eller realeksamen ønsker at lære lidt mere matematik, må bogen også være velegnet; thi som forfatteren selv skriver i sit forord: »Er det et urimeligt håb, at det skulle komme på mode, at mennesker helt uden hensyn til en eksamen gav sig af med matematik?« Der har i tidligere tider været epoker, hvor der uden for fagfolkenes kreds var interesse for matematik, men »måske skorter det på tid og kraft dertil«.

Bogen er delt i 9 kapitler, og den slutter med en righoldig opgavesamling (272 opgaver).

Først gives en kort omtale af forskellige talområder og regningers mulighed herindenfor; som eksempel på et irrationalt tal gennemgås $\sqrt{2}$, hvorefter de øvrige irrationale tal indføres som måltal for de linie-stykker, som ikke har et rationalt måltal. Efter gennemgang af retvinklet koordinatsystem og begreberne variabel og funktion, belyst gennem mange og meget forskelligartede eksempler, følger et særskilt kapitel om proportionalitet.

Undertegnede mener, at det er en god idé at give dette emne et kapitel for sig, inden den lineære funktion behandles. Alt for ofte oplever man (f. eks. i fysiske rapporter), at elever selv i 3. G påstår at have påvist en proportionalitet, hvor de kun har påvist en lineær afhængighed. Her som så mange andre steder i såvel denne bog som i Differential- og integralregningen viser forfatteren matematikkens anvendelse på andre fagområder, specielt på fysik.

Det kan måske undre lidt, at omvendt proportionalitet ikke behandles på dette sted, men først i bogens sidste kapitel. Sandsynligvis skyldes det, at forfatteren her har medtaget begrebet grænseovergang, hvorved denne bog kommer til at slutte med det emne, Differential- og integralregning begynder med. For funktionen $y = \frac{1}{x}$ vises det, at $y \rightarrow 0$ (fra oven) for $x \rightarrow +\infty$ og $y \rightarrow +\infty$ for $x \rightarrow 0$ fra højre. Begrebet asymptote bliver hermed indført.

Ved gennemgangen af den lineære funktion gives en første forberedelse til differentialregningen, idet det for $y = \alpha x + q$ påvises, at det for

et vilkårligt valg af x gælder, at $\frac{\Delta}{h} = \alpha$, hvor Δ betegner y 's tilvækst, når x får tilvæksten h .

Også ved gennemgangen af andengradspolynomiet forberedes differentialregningen. $y = x^2$ vises at være en kontinuert funktion, idet Δy kan blive vilkårlig lille (numerisk), blot h er tilstrækkelig lille. Og for sekanten gennem $(0, 0)$ og (x, x^2) vises det, at den har x -aksen som grænsestilling for x nærmende sig 0.

Potensbegrebet tages her i bogen kun igennem for eksponenten hel og positiv. Enhver udvidelse af dette potensbegreb gemmes til den fuldstændige udvidelse efter behandlingen af den naturlige logaritme i Differential- og integralregning. Trigonometrien indledes med en kort omtale af anvendelser og historie, hvorefter sinus, cosinus og tangens indføres for vinkler mellem 0° og 180° (inkl.); det nævnes, at de trigonometriske funktioners fulde betydning først kommer frem, når vinklens måltal gennemløber alle reelle tal. Blandt eksemplerne er en del praktiske opgaver.

Bogen gør som helhed et tiltalende indtryk. Sproget er klart og behageligt, figurerne gode og hele opstillingen overskuelig, med passende brug af kursiv og understregninger. Sammen med forfatterens Differential- og integralregning må denne bog utvivlsomt være velanvendelig for de mange, der uden egentlig at studere matematik skal have et kendskab til funktionslæren og dens anvendelser.

Stig Bülow

MOTTATTE BØKER

Charles F. Brumfiel — Robert E. Eicholz — Merrill E. Shanks: *Geometry*. Addison Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1960. 8 + 288 pp. \$ 4.75.

Introduction 1–20 * Logic 21–42 * Concerning lines 43–62 * Congruence of segments 63–72 * Measurement of segments 73–83 * Congruence of angles and triangles 84–115 * Use of the congruence theorems 116–132 * Parallel lines 133–153 * Similarity of triangles and polygons 154–179 * Area 180–192 * Circles and regular polygons 193–208 * Measurement of angles and arcs 209–226 * Loci and sets 227–235 * Space geometry 236–250 * Analytic geometry 251–265 * Philosophy of mathematics 266–274 * Appendix 275–281 * Index 283–288.

Ruel V. Churchill: *Complex variables and applications*. 2nd edition. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1960. 9 + 297 pp. sh. 52/6.

Complex numbers 1-18 * Analytic functions 19-45 * Elementary functions 46-64 * Mapping by elementary functions 65-94 * Integrals 95-128 * Power series 129-152 * Residues and poles 153-173 * Conformal mapping 174-188 * Applications of conformal mapping 189-217 * The Schwarz-Christoffel transformation 218-241 * Integral formulas of Poisson type 242-258 * Further theory of functions 259-280 * Appendices 281-291 * Index 293-297.

A. O. Gelfond: *The solution of equations in integers*. Translated from Russian by Leo F. Boron. (Popular lectures in mathematics.) P. Noordhoff, Groningen, 1960. 72 pp. \$ 1.00; fl. 3.75.

Introduction 8-9 * Equations in one unknown 10-11 * First degree equations in two unknowns 11-22 * Examples of second degree equations in three unknowns 23-27 * Equations of the form $x^2 - Ay^2 = 1$. Finding all solutions of this equation 28-40 * The general case of a second degree equation in two unknowns 40-53 * Equations in two unknowns of degree higher than the second 53-59 * Algebraic equations of degree higher than the second in three unknowns, and certain exponential equations 59-68 * Translator's appendix 69-70 * List of books and papers for further reading 71-72 * Index 72.

M. A. Naimark: *Normed rings*. Translated from Russian by Leo F. Boron. P. Noordhoff, Groningen, Djakarta, 1960. 16 + 560 pp. \$ 12.00, cloth bound \$ 13.00; fl. 48.75.

Linear spaces 1-20 * Topological spaces 20-42 * Topological linear spaces 42-67 * Normed spaces 67-83 * Hilbert space 84-114 * Integration on locally bicomact spaces 115-154 * Fundamental algebraic concepts 155-168 * Topological rings 168-175 * Normed rings 175-183 * Symmetric rings 184-191 * Realization of a commutative normed ring in the form of a ring of functions 192-210 * Homomorphism and isomorphism of commutative rings 210-212 * Ring boundary 212-215 * Completely symmetric commutative rings 215-219 * Regular rings 219-227 * Completely regular commutative rings 228-238 * Fundamental concepts and propositions in the theory of representations 239-257 * Embedding a symmetric ring in a ring of operators 257-262 * Indecomposable functionals and irreducible representations 262-269 * Application to commutative symmetric rings 269-283 * Generalized Schur lemma 283-291 * Certain representations of the ring $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ 291-298 * Completely symmetric rings 299-309 * Completely regular rings 309-316 * Dual rings 316-335 * Rings of vector-valued functions 335-356 * Topological groups 357-369 * Definition and basic properties of a group ring 369-375 * Unitary representations of a locally bicomact group and their relation to representations of the group ring 375-391 * Positive definite functions 391-404 * Harmonic analysis on commutative locally bicomact groups 404-430 * Representations of bicomact groups 430-440 * Various topologies in the ring $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ 441-444 * Weakly closed subrings of the ring $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ 444-450 * Relative equivalence 450-459 * Relative dimension 459-470 * Relative trace 470-477 * Structure and examples of some types of factors 477-487 * Unitary rings and rings with trace 487-490 * Formulation of the problem; decomposition of a positive functional into elementary functionals 491-506 * Decomposition of a ring of operators 506-521 * Appendices 522 * Literature 523-541 * Notation 542-545 * Index 546-560.

I. I. Priwalow: *Einführung in die Funktionentheorie, III.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 23.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 5 + 188 S. DM 12.90.

Elemente der Theorie der elliptischen Funktionen 1–53 * Allgemeine Prinzipien der Theorie der konformen Abbildung 54–153 * Allgemeine Eigenschaften der einblättrigen Funktionen 155–186 * Sachverzeichnis 187–188.

Giovanni Sansone — Johan Gerretsen: *Lectures on the theory of functions of a complex variable, I.* P. Noordhoff, Groningen, 1960. 12 + 488 pp. \$ 12.00, cloth bound \$ 13.00.

Holomorphic functions. Power series as holomorphic functions. Elementary functions 1–40 * Cauchy's integral theorem and its corollaries. Expansion in Taylor series 41–111 * Regular and singular points. Residues. Zeros 112–174 * Weierstrass' factorization of integral functions. Cauchy's expansion in partial fractions. Mittag-Leffler's problem 175–234 * Elliptic functions 235–307 * Integral functions of finite order 308–349 * Dirichlet series. The zeta functions of Riemann, the Laplace integral 350–418 * Summability of power series outside the circle of convergence. Sum formulas. Asymptotic series 419–481 * Index 483–488.

S. M. Ulam: *A collection of mathematical problems.* (Interscience tracts in pure and applied mathematics 8.) Interscience Publ., New York, London, 1960. 13 + 150 pp. \$ 5.00.

Set theory 1–27 * Algebraic problems 29–36 * Metric spaces 37–41 * Topological spaces 43–55 * Topological groups 57–61 * Some questions in analysis 63–81 * Physical systems 83–113 * Computing machines as a heuristic aid 115–144 * Bibliography 145–150.

Elbridge P. Vance: *Fundamentals of mathematics.* Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1960. 10 + 469 pp. \$ 7.50.

Numbers and elementary operations 1–20 * Fractions, exponents, and radicals 21–35 * Coordinate systems, functions and graphical representation 36–59 * The circular functions 60–98 * Linear functions 99–125 * Quadratic functions 126–151 * Determinants 152–168 * Mathematical induction and the binomial theorem 169–179 * Functions, limits, and continuity 180–202 * Derivatives 203–223 * Polynomial functions 224–236 * Some applications of differentiation 237–258 * Inverse functions 259–268 * Exponential and logarithmic functions 269–296 * Applications of the circular functions in solving triangles 297–312 * Further applications of the circular functions 313–329 * Complex numbers 330–342 * Conic sections 343–374 * Integration 375–398 * Permutations, combinations, and probability 399–413 * Answers to odd-numbered problems 417–443 * Tables 444–460 * Index 463–469.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 190–194 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i neste hefte, være sendt innen 25. august 1960. Til samme dato forlenges fristen for oppgave 187 i forrige hefte.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

190. Idet T betegner arealet af en trekant ABC og m_a , m_b , m_c dens medianer, skal man bevise formelen

$$T = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma(\sigma - 2m_a)(\sigma - 2m_b)(\sigma - 2m_c)},$$

idet $\sigma = m_a + m_b + m_c$.

Christian Berg

191. Når en smal parallell strålebunt går inn i en homogen brytende kule slik at

$$\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} r$$

(i = innfallsvinkel, r = brytningsvinkel), vil brennpunktet falle i kulens bakre overflate.

Dette, for regnbuens teori meget viktige resultat finnes i Herriott's forarbeider til en bok om regnbuen (Brit. Mus. mss. 6788). Hvis Herriott har benyttet infinitesimale betraktninger, er dette viktig som en tidlig anvendelse av slike metoder. Men kan relasjonen også finnes ved rent klassiske metoder?

Johs. Lohne

192. La

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_n},$$

hvor samtlige bokstaver er naturlige tall og hvor A/B ikke lar seg forkorte. Vis at

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n < 2^{2-\frac{1}{n}} nB.$$

Sammenlign eventuelt oppg. 180, NMT 7, s. 183.

Viggo Brun

193. Beregn integralet

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}(x^2-2\varrho xy+y^2)} dx dy, \quad |\varrho| < 1.$$

Arnljot Høyland

194. La α være et tall mellom 0 og 1. En plan kurve er gitt ved likningene

$$x = 2t \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \right), \quad y = t^2 + 2 \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \right).$$

En viss del av kurven begrenser et trekantet flatestykke. Finn dets areal.

R. Tambs Lyche

LØSNINGER

183. La $r_1 r_2 \dots r_n$ være en permutasjon av tallene $1, 2, \dots, n$ og la $\text{sgn}(r_1 r_2 \dots r_n)$ være $+1$ dersom permutasjonen er jamn (like) og -1 dersom den er odde (ulike). Vis at for $0 < i < n$ er

$$\text{sgn}(r_1 r_2 \dots r_n) = (-1)^{r_1+r_2+\dots+r_i+\frac{1}{2}i(i+1)} \text{sgn}(r_1 r_2 \dots r_i) \text{sgn}(r_{i+1} r_{i+2} \dots r_n).$$

R. Tambs Lyche

Da ingen løsninger er innkommet, gjengir vi oppgavestillerens eget forslag:

Løsning: En ser straks at formelen er riktig for $i=1$. En overføring av r_{i+1} fra siste faktor til siste plass i faktoren foran, fører til tapet av q inversjoner i siste faktor, dersom r_{i+1} er større enn nøyaktig q av tallene $r_{i+2}, \dots, r_n$; til gjengjeld får en p nye inversjoner i den foregående faktor, dersom r_{i+1} er mindre enn p av tallene $r_1, \dots, r_i$. I alt blir derfor produktet til høyre å multiplisere med $(-1)^{p+q} = (-1)^{-p+q}$. Da nå r_{i+1} blir større enn nøyaktig $i-p+q$ av tallene $r_1, r_2, \dots, r_n$, må vi ha $r_{i+1} = i-p+q+1$, altså $-p+q = r_{i+1} - (i+1)$, og derav ses straks formelens almengyldighet.

185. Låt $a_0, a_1, \dots$ vara komplexa tal med $|a_v| \leq 1$. Med z_n betecknas det till beloppet största nollstället till $P_n(z) = z^n - a_{n-1}z^{n-1} - \dots - a_0$. Visa, att $|z_n| < 2$.

Om $a_n \rightarrow 1$, då $n \rightarrow \infty$, visa att $z_n \rightarrow 2$ och att mängden nollställerna till $P_1, P_2, \dots$ för övrigt saknar hopningspunkter utanför enhetscirkeln.

Magnus Tideman

Lösning: På $|z|=2$ gäller eftersom $|a_v| \leq 1$:

$$\left| \sum_{v=0}^{n-1} a_v z^v \right| \leq \sum_{v=0}^{n-1} |a_v| \cdot |z|^v \leq \sum_{v=0}^{n-1} |z|^v = 2^n - 1 < |z|^n,$$

dvs. på $|z|=2$ är

$$|z^n| > \left| \sum_{v=0}^{n-1} a_v z^v \right|.$$

Enligt Rouchés sats har då z^n och $P_n(z)$ lika många, dvs. n stycken nollställen inom $|z|=2$.

Om några hopningspunkter skall finnas då $n \rightarrow \infty$ så måste $P_{n+1}(z) - P_n(z) \rightarrow 0$, dvs. $|P_{n+1}(z) - P_n(z)| < \varepsilon$ om $n > n_0$, eller

$$|z|^n \cdot |z - (1 + a_n)| < \varepsilon \quad \text{om} \quad n > n_0.$$

Detta uppnås dels av $|z| < 1$, eller om $a_n \rightarrow 1$ av $z \rightarrow 2$, vilken punkt alltså är den enda möjliga hopningspunkten utanför enhetscirkeln.

Torsten Ström

186. Cirklarna C_A och C_B , med radier a resp. b , tangera varandra i O . Sök största värdet för ytan av triangeln OAB , när A ligger på C_A och B på C_B .

Harry Björk

Lösning: Låt BO :s förlängning skära C_A i A_1 . Då $OB:OA_1 = \text{konstant}$ har triangeln AOB och triangeln AOA_1 maximum samtidigt, dvs. när AOA_1 är liksidig, varav den sökta ytan $\frac{3}{4}ab\sqrt{3}$.

Sverker Eriksson

Også löst av Per Roar Andenæs, F. P. Dahlkild, Ragnar Dybvik, Toivo Haaramo, Poul Einar Hansen, Per W. Karlsson, Johs. Lohne, Arne Sandum, Ragnar Johs. Solvang, Torsten Ström, Bolli Thoroddsen og O. H. Valdimarsson.

188. Finn summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{s_n}{n+1},$$

$$\text{der } s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

R. Tambs Lyche

Lösning: Rækken ses at alternere; det vises let, at der fra et vist trin gælder $s_n/(n+1) \rightarrow 0$ aftagende. Rækken er altså konvergent; summen kaldes a .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{s_n}{n+1} x^n$$

fremstiller for $|x| < 1$ en vilkårlig ofte differentiabel funktion.

$$\frac{d}{dx}(xf(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_n x^n = g(x);$$

$$g(x) + xg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = \ln(1+x),$$

hvoraf

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx = \frac{[\ln(1+x)]^2}{2x}$$

(hævelig diskontinuitet for $x=0$). Abels sætning giver da

$$a = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{[\ln(1+x)]^2}{2x} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

Poul Einar Hansen

Også løst av Ragnar Dybvik, Sverker Eriksson, Audun Holme, Per W. Karlsson og Ragnar Johs. Solvang.

189. Beregn integralet

$$I = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

R. Tambs Lyche

Løsning: Sätt

$$f(a) = \int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad a > -1,$$

varav

$$f^{(p)}(a) = \int_0^1 \frac{(\ln x)^p x^a}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Den sökta integralen är $f''(0)$. Substitutionen $x^2 = t$ ger

$$f(a) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}(a-1)} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}.$$

Då

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \Gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

erhålles

$$\frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(a+k)^2}.$$

Men $f(0) = \frac{\pi}{2}$ och $f'(0) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\pi \ln 2$. Vidare är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

varav

$$f''(0) = \frac{\pi}{2} (\ln 2)^2 + \frac{\pi^3}{24}.$$

Sverker Eriksson

Også löst av Per W. Karlsson. Otto Borgersen gjør oppmerksom på at substitusjonen $x = \sin t$ gir et integral som (mere generelt) er løst av Åge Kjellerød i Norsk Matematisk Tidsskrift for 1937.

SUMMARY IN ENGLISH

KAY PIENE: *New thinking in school mathematics.* (Norwegian.)

The author joined the OEEC-seminar on "New thinking in school mathematics" which took place at Royaumont (near Paris) between Nov. 23rd and Dec. 5th, 1959. The paper, which is based on the official report from the seminar, outlines the suggested reforms in arithmetic, algebra, geometry, analysis, probability and statistical inference.

MOGENS PIHL: *Cauchy's inequality from a thermodynamic point of view.* (Danish.)

N bodies of constant volumes have the absolute temperatures T_i and the heat capacities c_i . When a heat exchange is established, the laws of energy and entropy immediately lead to Cauchy's inequality for weighted arithmetic and geometric means (formula (3) p. 72). The generalized inequality resulting from arbitrary energy functions $E_i(T)$, with $E'_i(T) > 0$, is given (formulas (4) and (5) p. 73) and also proved mathematically.

HANS RIESEL: *A case of the three-bodies problem with an elementary solution.* (Swedish.)

A solution of Lagrange is deduced in a simple way. It concerns the case when the three bodies form an equilateral triangle, of constant or varying size, rotating in the plane of the triangle about the centre of gravity.

CHRISTIAN GRAM: *On sums of powers.* (Danish.)

It is well known that $S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ can be written as a polynomial in n of degree $p+1$; the common proofs use induction on n . The article gives a simple proof by induction on the exponent p .

VILHELM JØRGENSEN: *On the main theorems for continuous and differentiable functions.* (Danish.)

The theorems of the title are deduced in a short and often unconventional manner. The article consists of two independent sections, the first of which contains only the elementary results which could be taught (with proofs) at high school level. The second, more advanced section is based on the covering theorem of Heine-Borel.