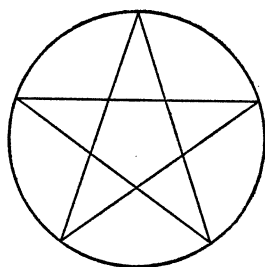


NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 8



OSLO 1960

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Matemaattisten aineiden opettajien liitto – Matematik-, fysik-

och kemiläraryörbundet.

Íslenska stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

REDAKSJON:

Karl Dagerholm, David Fog, Carl-Erik Fröberg,

G. af Hällström, Bo Kjellberg, Regnar Norgil, Kay Piene,

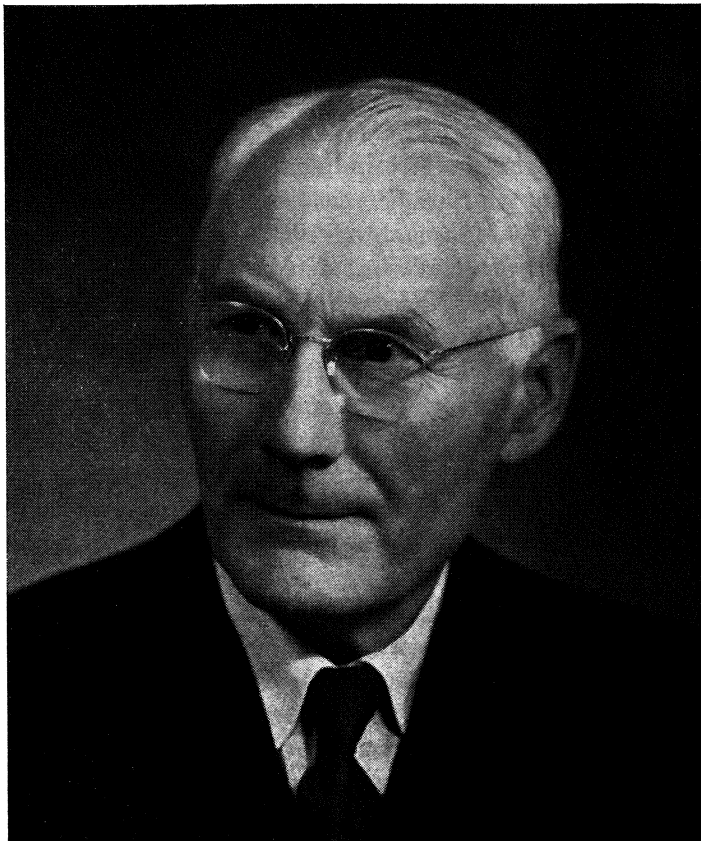
Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.

Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSER:

Redaksjon: Matematisk Institutt, Allégt. 34, Bergen.

Ekspedisjon: Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.



JAKOB NIELSEN IN MEMORIAM

WERNÉR FENCHEL

Ved professor Jakob Nielsens bortgang den 3. august 1959 har den danske matematikerkreds mistet en personlighed og forsker af usædvanligt format og mange i og udenfor Danmark en trofast ven i gode og onde tider.

Jakob Nielsen blev født den 15. oktober 1890 som bondesøn i landsbyen Mjels på øen Als (der dengang som del af Sønderjylland hørte til Tyskland). Efter skolegang i landsbyskolen til 1900 og i realgymnasiet i Rendsborg fra 1900 til 1907 blev han i 1908 immatrikuleret ved universitetet i Kiel. Studentereksamen tog han som privatist i Flensborg i

1909. Fra 14-års alderen til afslutningen af studierne tjente han til livets ophold som huslærer eller ved at give lektiehjælp i mangfoldige emner. Bortset fra et semester i Berlin tilbragte han hele studietiden i Kiel. Hans interesser og evner var mangesidede, og til at begynde med fulgte han forelæsninger over emner, der udgjorde, hvad han selv en gang i spøg betegnede som en broget blanding af naturvidenskaber og humaniora. Først efter nogle semestre indtager matematikken en mere fremtrædende plads, men også filosofien er stærkt repræsenteret.

Blandt denne tids matematikere ved Kiels universitet var den i 1912 afdøde Georg Landsberg utvivlsomt den betydeligste. I den lille autobiografi, der ledsager Jakob Nielsens doktorafhandling »Kurvenetze auf Flächen«, takker han også især Landsberg dels for dennes undervisning, dels for tilskyndelsen til at beskæftige sig med det problem, der er hovedgenstand for afhandlingen. Den eneste matematiker, der fik en væsentlig indflydelse på Jakob Nielsens start som videnskabsmand, var imidlertid den 12 år ældre Max Dehn, der i slutningen af året 1911 blev knyttet til Kiels universitet og allerede da var en højt anset forsker. Gennem Dehn kom han i kontakt med de nyeste metoder og fremskridt i topologien og gruppeteorien, områder, til hvilke denne havde givet grundlæggende bidrag og indenfor hvilke også Jakob Nielsens videnskabelige livsværk kom til at falde.

I begyndelsen af året 1913 erhvervede Jakob Nielsen doktorgraden for den nævnte afhandling. Efter at han i sommeren samme år havde taget den tyske skoleembedseksamen, blev han indkaldt til tjeneste i den tyske marine. På grund af den første verdenskrigs udbrud i august 1914 blev det foreskrevne ene års militærtjeneste til fem. Knyttet til kystartilleriet blev han først sendt til Belgien, derefter i april 1915 til Konstantinopel som en af de tyske officerer, der virkede som rådgivere for den tyrkiske regering angående forsvaret af Bosporus og Dardanellerne. Han blev der til krigens afslutning og fandt nogen tid til videnskabeligt arbejde. Under store besværligheder vendte han under Tysklands sammenbrud i november 1918 hjem gennem det krigshærgede Rusland og Polen.

Sommersemestret 1919 tilbragte Jakob Nielsen i Göttingen. Blandt de mange matematikere, han mødte i dette matematikens centrum, var det især den 3 år ældre Erich Hecke, han følte sig tiltrukket af. Da Hecke samme år modtog en kaldelse til det nyoprettede universitet i Hamborg, fulgte Jakob Nielsen ham som assistent og privatdocent. Men allerede i 1920 modtog han selv en kaldelse til et professorat, nemlig ved den tekniske højskole i Breslau. Her havde han lejlighed til at genoptage kontakten med Max Dehn, der i nogle år havde været knyttet til byens

universitet. Opholdet i Breslau blev imidlertid lige så kortvarigt som det i Hamborg. Ved folkeafstemningen, der gik forud for genforeningen af Sønderjylland med Danmark, havde Jakob Nielsen opteret for Danmark, og i 1921 flyttede han til København for at overtage det ledigblevne docentur i matematik ved Veterinær- og Landbohøjskolen. Der fulgte nu en lang række lykkelige og frugtbare arbejdsår, i hvilke flere af de omfattende arbejder om fladernes topologi og gruppeteori, der skaffede ham høj international anseelse, blev til.

I 1925 var Jakob Nielsen blevet professor i rationel mekanik ved den Polytekniske Læreanstalt, efter at C. Juel havde taget sin afsked. Det var her, hovedparten af hans gerning som akademisk lærer kom til at ligge. Mange generationer af danske civilingeniører og matematik- og fysiklærere vil mindes hans forelæsninger, fordringsløse i den ydre form, men lysende klare, indholdsmættede og krævende tilhørers fulde opmærksomhed. Den lærebog i rationel mekanik, som han udgav i to bind i årene 1933–34, har siden i flere udgaver dannet grundlaget for undervisningen i dette fag. En tysk udgave udkom i 1935. En ny opgave blev Jakob Nielsen stillet overfor, da der skulle etableres en undervisning i aerodynamik ved Læreanstalten. Hans forelæsninger blev udgivet i duplikeret form i årene 1940–42. Fremstillingen af det teoretisk delvis yderst vanskeligt tilgængelige emne udmærker sig ved den klare adskillelse mellem det empiriske grundlag og den matematiske teori. Den mere teoretiske del af disse forelæsninger udkom i 1952 som tredje bind af lærebogen.

Umiddelbart efter afslutningen af lærebogens første udgave genoptog Jakob Nielsen sine topologiske og gruppeteoretiske undersøgelser. I årene efter den anden verdenskrig blev der imidlertid lagt beslag på en meget stor del af hans næsten udtømmelige arbejdskraft til helt andre opgaver. Hans retsind, hans enestående fordomsfrihed overfor mennesker med en baggrund og livsholdning helt forskellig fra hans egen, hans evne til hurtigt at tage stilling i en sag, hans beslutsomhed, når det gjaldt at handle, gjorde det til en selvfølge, at man tænkte på ham, når det drejede sig om at besætte ansvarsfulde tillidshverv. Her skal blot nævnes hans deltagelse i løsningen af de betydningsfulde opgaver i det internationale samarbejde, som opstod efter krigen. Som deltager i den konstituerende konference i London i 1945 og medlem af den forberedende kommission i 1946, var han en af »UNESCO's fædre«. Siden da og indtil sin død har han ydet en overordentlig arbejdsindsats i den mellemfolkelige forståelses og det mellemfolkelige samarbejdes tjeneste, både som medlem af den danske nationalkommission for UNESCO og ganske særlig som medlem af UNESCO's bestyrelse i årene 1952–58. Der er mange vidnesbyrd om

det høje omdømme af ham og den enestående respekt, der stod om ham, indenfor UNESCO.

Efter Harald Bohrs død i 1951 blev Jakob Nielsen som dennes efterfølger kaldet til Københavns Universitet. Med glæde og iver holdt han her forelæsninger over emner, der stod hans hjerte nær. Men de voksende krav, som arbejdet i UNESCO stillede, og de til tider langvarige rejser til udlandet, som fulgte dermed, bevirkede, at han allerede efter få år ikke mere mente at kunne gøre fyldest som universitetslærer. Dertil kom, at der i disse år ikke blev megen tid til det videnskabelige arbejde, skønt han optog det utrættelig og med ildhu, når blot de andre pligter tillod det. I 1955 søgte han derfor sin afsked som professor, og efter at hans medarbejde i UNESCO's bestyrelse afsluttedes i 1958, kunne han helt hellige sig forskningen. Der fulgte en tid med intensivt og resultatrigt arbejde. Men allerede i januar 1959 blev han ramt af den sygdom, der rev ham bort.

Et indblik i Jakob Nielsens matematiske livsværk kan fås gennem den ovennævnte doktorafhandling. Han selv satte den ganske vist ikke højt, idet han tidligt var blevet klar over dens mangler, hvad angår stringens. Men nogle af de problemer, som behandles der i et specielt tilfælde, dannede ledetråden i den overvejende del af hans senere forskning. Arbejdet falder tydeligt i to dele. Den første og mest omfattende handler om sammenhængen, der består mellem en flades totalkrumning og de topologiske egenskaber ved kurveskarer, som overdækker fladen. Den anden, tilføjet senere, hænger kun løst sammen med den første; den handler om ringfladens, *torus*'s, topologiske egenskaber. Her er både problemstillingerne, hjælpemidlerne og metoderne præget af de dengang nye synspunkter i topologien.

En flades fundamentalgruppe fremkommer som bekendt på følgende måde: Man betragter orienterede kurver på fladen, der udgår fra og ender i et fast punkt P . Er a og b to sådanne kurver, får man en ny, deres produkt ab , ved først at gennemløbe a og dernæst b . Deformerer kurverne a og b kontinuert på fladen under fastholdelse af begyndelses- og endepunktet P , vil også ab underkastes en sådan deformation. Kurver, der kan overføres i hinanden på den angivne måde, betegnes som homotope. Sammenfatter man nu sådanne indbyrdes homotope kurver til en homotopiklasse, kan man altså tale om en multiplikation af disse klasser, og med denne som komposition danner homotopiklasserne en gruppe. Den afhænger kun tilsyneladende af valget af punktet P , idet grupperne hørende til to forskellige punkter kan vises at være isomorfe. Til hver flade hører altså en bestemt abstrakt gruppe, fladens fundamentalgruppe F . I ringfladens tilfælde gælder det, at for hvilke som helst to lukkede kurver a og b gennem P hører kurverne ab og ba til samme homotopi-

klasse, og dette medfører, at F er en abelsk gruppe. Endvidere kan gruppen frembringes af to af sine elementer, f. eks. de to homotopiklasser, der indeholder henholdsvis den gennem P gående meridian og parallelcirkel, således at hver homotopiklasse kan skrives som et potensprodukt af disse to »frembringere«. Parret af de herved optrædende eksponenter er følgelig et kendetegn for klassen.

Foreligger der en topologisk, d. v. s. enentydig og kontinuert afbildning t af ringfladen på sig selv, vil der til hver lukket kurve gennem P svare en lukket kurve gennem billedpunktet tP , til en homotopiklasse af kurver gennem P en homotopiklasse af kurver gennem tP , og omvendt. Derved bestemmes en enentydig afbildning af gruppen F på sig selv, som viser sig at være isomorf, altså en automorfisme af F . Denne forbliver uændret, når den givne fladeafbildning ændres kontinuert. Sammenfatter man afbildninger, der kan overføres kontinuert i hinanden, til en »afbildningsklasse«, svarer der altså til hver afbildningsklasse (der indeholder en topologisk afbildning) en automorfisme af F , og man kan vise, at også det omvendte gælder. Nu er det indlysende, at en automorfisme af F er fuldstændigt bestemt ved de to elementer, som svarer til de valgte frembringere, altså ved to eksponentpar. På grundlag af afbildningers sammensætning kan man, ganske som for homotopiklasser af kurver, definere gruppen af afbildningsklasser (der indeholder topologiske afbildninger). På den anden side danner automorfismerne af F med sammensætningen som komposition ligeledes en gruppe, der viser sig at være isomorf med gruppen af afbildningsklasser og at være nært beslægtet med den fra de elliptiske funktioners teori velkendte modulgruppe. Hermed er de topologiske problemer vedrørende fladeafbildninger ført tilbage til algebraiske.

Specielt løses det såkaldte fikspunktproblem for ringfladen. Ved et fikspunkt for en afbildning forstås et punkt, som ved afbildningen svarer til sig selv. Er der givet en afbildningsklasse, vil hver af afbildningerne i den have et vist antal fikspunkter, muligvis ingen eller uendelig mange. Hvad er det mindste tal, der kan optræde? Jakob Nielsen viser, at dette minimaltal på simpel måde kan udtrykkes ved de to eksponentpar, der kendetegner afbildningsklassen. I et senere arbejde har han givet et særdeles tilfredsstillende bevis for dette resultat ved at indføre begrebet »fikspunktklasse«. Lad P og Q være to fikspunkter for en kontinuert afbildning af ringfladen på sig selv. En kurve k , som forbinder P og Q , vil da blive afbildet i en kurve k' , som ligeledes forbinder P og Q . Tilsammen udgør altså k og k' en lukket kurve. P og Q siges nu at høre til samme fikspunktklasse, hvis det er muligt at vælge k således, at den nævnte lukkede kurve på kontinuert måde kan trækkes sammen til et punkt.

Ved at bestemme antallet af forskellige fikspunktklasser opnås det nævnte resultat.

Den omfattende opgave, som Jakob Nielsen havde stillet sig på et tidligt tidspunkt, var at overføre disse undersøgelser til vilkårlige flader. Lige fra begyndelsen var han klar over de store vanskeligheder, denne opgave frembød, og som i første række skyldes den omstændighed, at fundamentalgrupperne i almindelighed ikke er abelske. Men med en enestående målbevidsthed kom han efter mange års arbejde til at gennemføre disse undersøgelser. En ikke ringe del af hans arbejder omhandler rent gruppeteoretiske problemer, der dukkede op på vejen, navnlig vedrørende frembringere og relationer, automorfismer og automorfismegrupper. Adskillige af hans resultater har vist sig at være af grundlæggende betydning for den abstrakte gruppeteori. Næsten alle fladers fundamentalgrupper kan fremstilles som diskontinuerte flytningsgrupper i den ikke-euklidiske plan (i ringfladens tilfælde den euklidiske). En række af Jakob Nielsens arbejder handler om disse fra de automorfe funktioners teori velkendte grupper. Mange af hans begrebsdannelser og resultater på dette område er af største interesse, også når der ses bort fra de topologiske anvendelser, han selv har gjort af dem. På trods af den koncentrerede problemstilling, der ledede ham, har Jakob Nielsens matematiske produktion således fået en anelig bredde. Men det, der vil stå som hans hovedværk, er de overordentlig dybtgående arbejder over fladernes topologi, hvori bl. a. de nævnte ingredienser indgår. Navnlig må fremhæves de tre store afhandlinger »Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen«, der udkom i *Acta Mathematica* i årene 1927, 1929 og 1932. Jakob Nielsens resultater på dette område er dog i dag som for rundt 30 år siden meget vanskeligt tilgængelige, og det må håbes, at der vil blive fundet en simplere vej til dem.

THE IRRATIONALITY OF π^2

K. INKERI

The irrationality of π was, as known, first proved by Lambert in 1761. By means of continued fractions he showed even more, namely, that $\operatorname{tg} x$ is irrational when x is rational and different from zero¹. Lambert's proof is often mentioned (cf. [8]) as a unique exception among the mathematical studies of the eighteenth century, because it almost satisfies modern requirements of mathematical strictness, especially in the treatment of convergence questions. It is perhaps worth mentioning that a small gap in Lambert's proof was filled by the editor of Lambert's complete works [3].

Since the time of Hermite, many proofs of the irrationality of π have been presented. Especially Niven's recent proof (cf. [4] or [5]) has become widely known. In fact, it seems that perhaps only the proof given by Hermite ([1], p. 74) can vie with this in simplicity and brevity. Irrespective of the fact that Pringsheim ([9], p. 471) has later revived Hermite's proof, it obviously has remained fairly unknown. Thus Popken [6] has proved the irrationality of π by a method which practically is the same as that of Hermite, as he has later [7] communicated.

Iwamoto [2] has extended Niven's proof to π^2 . In order to draw attention to Hermite's method, we present a proof of the irrationality of π^2 based on that method in a slightly modified form. Moreover, we shall prove (section 3) the following theorem which contains as special cases both this result and the above result of Lambert with regard to $\operatorname{tg} x$:

THEOREM. *If x^2 is rational and positive, then $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ (and in general $x^{2n+1} \operatorname{tg} x$, where n is an integer) is irrational.*

Now, it is impossible, by this theorem, that π^2 is rational, since otherwise $\frac{\operatorname{tg} \pi}{\pi}$ ($=0$) would be irrational. Likewise, if x is rational and $\neq 0$, then

¹ The latter restriction was not mentioned by Lambert.

$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ and hence $\operatorname{tg} x$ must be irrational.

Hermite's method is based on the theory of series. We also modify (section 4) the procedure so that the series are replaced by integrals. Thus we come to a method similar to that employed by Skolem [10].

1. We define the functions $P_h(x)$ and $Q_h(x)$, for $h = 0, 1, \dots$, recursively as follows:

$$(1) \quad \begin{cases} P_{h+1}(x) = x^3 P'_h(x) + x Q_h(x), & P_0(x) = x \\ Q_{h+1}(x) = x^3 Q'_h(x) - x P_h(x), & Q_0(x) = 0. \end{cases}$$

By induction, we can establish readily that each of $P_h(x)$ and $Q_h(x)$ is a polynomial with integral coefficients of degree at most $2h+1$ and that the former is an odd function and the latter an even one. For this it suffices to note that indeed the degree increases by two at most when h passes from a fixed h to $h+1$ and, moreover, that the derivative of an odd (even) polynomial is even (odd).

$P_h(x)$ and $Q_h(x)$ satisfy for $x \neq 0$ the identity

$$(2) \quad P_h\left(\frac{1}{x}\right) \sin x + Q_h\left(\frac{1}{x}\right) \cos x = 2^h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+h)}{(2n+2h+1)!} x^{2n}.$$

To prove this, we denote the right-hand side by $R_h(x)$ in case the series is convergent.

Since $\frac{1}{x} \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = R_0(x)$, our statement is true for $h=0$.

If it is true for a fixed h then we obtain, by differentiating term by term the convergent power series on the right side of (2),

$$\begin{aligned} R'_h(x) &= 2^h \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(n+1) \dots (n+h)}{(2n+2h+1)!} x^{2n-1} \\ &= -2^{h+1} x \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+1) \dots (m+h+1)}{(2m+2(h+1)+1)!} x^{2m} = -x R_{h+1}(x), \end{aligned}$$

and further by differentiating (2) and dividing then by $-x$,

$$\left[\frac{1}{x^3} P'_h\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} Q_h\left(\frac{1}{x}\right) \right] \sin x + \left[\frac{1}{x^3} Q'_h\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} P_h\left(\frac{1}{x}\right) \right] \cos x = R_{h+1}(x).$$

Consequently, by (1), (2) is valid when h is replaced by $h+1$ and hence always.

2. For $x=\pi$, the identity (2) gives $-Q\left(\frac{1}{\pi}\right)=R_h(\pi)$. If we now assume that $\pi^2=\frac{a}{b}$, where a and b are positive integers, then it follows, since $Q_h(x)$ is a polynomial in x^2 with integral coefficients of degree at most h , that the number

$$(3) \quad a^h R_h(\pi) = (2a)^h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1) \dots (n+h)}{(2n+2h+1)!} \pi^{2n}$$

is integral for all h . But, on the other hand, this number is also between 0 and 1 for sufficiently large h . To see this, we estimate the quotient of any two successive terms u_n and u_{n+1} ($n \geq 0$) of the series for $h \geq 1$ as follows:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\pi^2}{2(n+1)(2n+2h+3)} \leq \frac{\pi^2}{10} < 1.$$

By the alternating test for convergence, the first term of our series determines the sign of the sum of the series and also an upper bound for the sum. Thus

$$0 < a^h R_h(\pi) < \frac{h!}{(2h+1)!} (2a)^h < \frac{(2a)^h}{h!},$$

where the last expression tends to zero when h tends to infinity. Consequently π^2 is irrational.

3. To prove the theorem presented above, it suffices to show that $x^2 (> 0)$ and $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ cannot be rational at the same time. In fact, we establish by this result at once that π^2 is irrational, since $\frac{\operatorname{tg} \pi}{\pi} = 0$, and further that $\operatorname{tg} x$ is finite when x^2 is rational, because, otherwise, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ and hence π^2 is rational. The theorem then follows immediately.

Let thus both $x^2 (> 0)$ and $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ be rational. The identity (2) can be written in the form

$$x P_h\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\operatorname{tg} x}{x} + Q_h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{R_h(x)}{\cos x},$$

where each of $x P_h\left(\frac{1}{x}\right)$ and $Q_h\left(\frac{1}{x}\right)$ is a polynomial in x^{-2} with integral coefficients of degree at most h . Because now $x^2 = \frac{a}{b}$ and $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{c}{d}$, where a, b, c, d are integers and $a, b, d > 0$, it follows from the preceding identity that the number

$$\frac{a^h dR_h(x)}{|\cos x|} = \frac{(2a)^h d}{|\cos x|} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1) \dots (n+h)}{(2n+2h+1)!} x^{2n}$$

is integral. On the other hand, the quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ of any two successive terms u_n and u_{n+1} of the series is numerically equal to

$$\frac{x^2}{2(n+1)(2n+2h+3)}$$

and therefore (for all $n \geq 0$) smaller than any positive constant smaller than 1 when h is sufficiently large. Thus the number just mentioned is also between 0 and 1 when h is large. This contradiction proves the theorem.

4. Our theorem follows also from the identity

$$(2') \quad P_h\left(\frac{1}{x}\right) \sin x + Q_h\left(\frac{1}{x}\right) \cos x = \frac{1}{2^h h!} \int_0^1 (1-t^2)^h \cos(xt) dt \quad (x \neq 0),$$

where $P_h(x)$ and $Q_h(x)$ are the same polynomials as above. It is easy to prove that the right-hand sides of (2) and (2') are equal to each other and that thus (2') is valid. We shall, however, establish the truth of (2') in the following manner, independently of (2):

For $h=0$, (2') is valid because

$$\int_0^1 \cos(xt) dt = \frac{1}{x} \sin x.$$

Denote by $I_h(x)$ the integral on the right-hand side of (2'). Using integration by parts, we obtain for $h > 0$:

$$I_h(x) = \frac{2h}{x} \int_0^1 (1-t^2)^{h-1} t \sin(xt) dt = -\frac{2h}{x} I'_{h-1}(x),$$

and so $\frac{1}{2(h+1)} I_{h+1}(x) = -\frac{1}{x} I'_h(x)$ ($h=0, 1, \dots$). If now (2') is valid for a fixed h then we obtain, differentiating (2') with respect to x and dividing by $-x$,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{x^3} P'_h\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} Q'_h\left(\frac{1}{x}\right) \right] \sin x + \left[\frac{1}{x^3} Q'_h\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} P'_h\left(\frac{1}{x}\right) \right] \cos x \\ &= \frac{1}{2^h h!} \left(-\frac{1}{x} I'_h \right) = \frac{1}{2^{h+1} (h+1)!} I_{h+1}. \end{aligned}$$

Consequently, by (1), (2') is valid when h is replaced by $h+1$, and hence always.

We write (2') in the form

$$xP_h\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\operatorname{tg} x}{x} + Q_h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{I_h(x)}{2^h h! \cos x}.$$

If now $x^2 = \frac{a}{b}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{c}{d}$ ($a > 0$, $b > 0$, $d > 0$), then we see from this identity that

$$\frac{a^h d I_h(x)}{2^h h! |\cos x|}$$

is an integer. We come to a contradiction when we show that this number is between 0 and 1 for large h . For this it suffices to show that

$$(4) \quad 0 < I_h(x) < 1.$$

We may obviously assume that $x > 0$. If $x \leq \frac{\pi}{2}$, the integrand is non-negative in the interval $(0, 1)$ and so $I_h(x) > 0$. If $x > \frac{\pi}{2}$ and we put $\delta = \frac{\pi}{2x}$, then $0 < \delta < 1$ and

$$\begin{aligned} I_h(x) &> \int_0^{\frac{1}{2}\delta} (1-t^2)^h \cos(xt) dt + \int_{\delta}^1 (1-t^2)^h \cos(xt) dt \\ &> \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)^h \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{2} - (1-\delta^2)^h (1-\delta) > (1-\delta^2)^h \left[\frac{\delta}{4} \left(\frac{1-\delta^2}{1-\delta^2} \right)^h - (1-\delta) \right]. \end{aligned}$$

The last expression is positive for large h and hence also $I_h(x)$.

Since the integrand of $I_h(x)$ is ≤ 1 in the whole interval of integration and the length of this interval is 1, we have $I_h(x) < 1$.

If we only wish to prove that π^2 is irrational, then the treatment is even simpler, for we may put $x = \frac{1}{2}\pi$ whereupon (4) follows directly. It is worth noting that $P_h(x)$ and $Q_h(x)$ satisfy also the following recurrence formulae:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^2[(2n-1)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)] \\ Q_n(x) &= x^2[(2n-1)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x)] \end{aligned} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

as we can see by applying integration by parts twice to $I_h(x)$.

REFERENCES

- [1] Ch. HERMITE: *Cours de la faculté des Sciences*. Paris 1891.
- [2] Y. IWAMOTO: *A proof that π^2 is irrational*. J. Osaka Inst. Sci. Tech. (1) 1 (1949), pp. 147–148.
- [3] J. H. LAMBERT: *Opera Mathematica* (edidit A. Speiser). Zürich 1948.
- [4] I. NIVEN: *A simple proof that π is irrational*. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), p. 509.
- [5] I. NIVEN: *Irrational numbers*. New York 1956.
- [6] J. POPKEN: *On Lambert's proof for the irrationality of π* . Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 43 (1940), pp. 712–714.
- [7] J. POPKEN: *Remark on my paper "On Lambert's proof for the irrationality of π "*. Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 52 (1949), p. 164.
- [8] A. PRINGSHEIM: *Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π* . Münch. Ber. 28 (1898), pp. 325–337.
- [9] A. PRINGSHEIM: *Vorlesungen über Funktionenlehre*. Leipzig und Berlin 1925.
- [10] TH. SKOLEM: *A proof of the algebraic independence of e and $e^{\sqrt{-d}}$, d positive integer, with another proof of the irrationality of $\log x$ and $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ for rational x* . Norsk Mat. Tidsskr. 28 (1946), pp. 97–104.

EXTREMVÄRDESPROBLEM MED BIVILLKOR

FOLKE ERIKSSON

I matematikundervisningen vid universitet och högskolor brukar man som bekant lära de studerande att lösa extremvärdesproblem med bivillkor med hjälp av den s. k. Lagranges multiplikator metod. Den sats som därvid användes kan formuleras på t. ex. följande sätt:

SATS 1: Om funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ har extremvärde under bivillkoren $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, p < n$) i en punkt P , där samtliga funktioner f och g_i har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen, så finns det antingen konstanter λ_i så att i P

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_p g_p) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

eller också är samtliga funktionaldeterminanter av de p funktionerna g_i m. a. p. p av variablerna x_k noll i P :

$$(2) \quad \frac{D(g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)} = \frac{D(g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_{p+1})} = \dots = 0.$$

Min avsikt är här att framhålla vissa, både praktiska och teoretiska, fördelar med en alternativ formulering:

SATS 2: Om funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ har extremvärde under bivillkoren $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, p < n$) i en punkt P , där samtliga funktioner f och g_i har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen, så är samtliga funktionaldeterminanter av de $p+1$ funktionerna f och g_i m. a. p. $p+1$ av variablerna x_k noll i P :

$$\frac{D(f, g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1})} = \frac{D(f, g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+2})} = \dots = 0.$$

Huvuddelen av detta resultat återfinner man i flera läroböcker (t. ex. Goursat) som den viktigaste etappen i beviset av sats 1. Att satserna 1 och 2 är ekvivalenta inses lätt. Enligt sats 2 har nämligen matrisen till ekvationssystemet

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} \lambda_0 + \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \lambda_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \lambda_2 + \dots + \frac{\partial g_p}{\partial x_k} \lambda_p = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

rang $< p + 1$. Då har detta ekvationssystem icke-triviala lösningar, bland vilka finns antingen en av formen $(1, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ eller en av formen $(0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$. I det förra fallet är påståendet (1) i sats 1 bevisat. I det senare fallet har ekvationssystemet

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_k} \lambda_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \lambda_2 + \dots + \frac{\partial g_p}{\partial x_k} \lambda_p = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

icke-triviala lösningar. Då måste dess matris ha rang $< p$, dvs. undantagsfallet (2) i sats 1 inträffar. — Omvänt följer ur sats 1, vare sig (1) eller (2) gäller, att systemet (3) har icke-triviala lösningar. Då har matrisen till (3) rang $< p + 1$. Detta innebär att alla i sats 2 omnämnda funktionaldeterminanter är noll.

I jämförelse med sats 1 har sats 2 följande väsentliga fördelar:

1. Beviset är enklare. Som ovan antytts leder det naturligaste beviset för sats 1 först till sats 2. (Beviset återges sist i artikeln.)

2. Formuleringen är enklare. Undantagsfallet (2) går nämligen naturligt in i formuleringen av huvudresultatet.

3. Tillämpningen är enklare — man får ofta betydligt kortare räkningar. Man för ju aldrig in de extra obekanta λ_i , och får därigenom färre ekvationer och färre obekanta. Symmetrin mellan variablerna x_k är lika fin som då sats 1 användes. Vid problemlösning enligt den gängse metoden händer det ibland att det inte finns någon bättre väg än att genom elimination av λ_i härleda de ekvationer som man enligt sats 2 kunde ha fått direkt. I sådana fall innehåller den logiska kedjan två helt onödiga led: senare delen av beviset för sats 1 och eliminationen av λ_i (vilken ofta är besvärlig).

4. Sats 2 torde vara lättare för de studerande både att lära sig och att tillämpa. Detta är förstås bara en konsekvens av de tre förut nämnda fördelarna, men dock väsentligt.

5. Sats 2 ger en trevlig användning av funktionaldeterminanter och belyser den viktiga roll dessa spelar i teorin för funktioner av flera variabler.

För att jämförelsen mellan de båda formuleringarna skall bli rättvis bör man också nämna ett par skäl att föredra sats 1 framför sats 2:

1. Lagranges knep att införa multiplikatorerna λ_i förefaller oumbärligt i vissa närbesläktade problem (variationskalkylen). Vid behandlingen av dessa problem är analogin med sats 1 till stor hjälp.

2. Möjligheten att formulera ett tillräckligt villkor för extremvärde

med användning av hjälpfunktionen $f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_p g_p$ har ingen enkel motsvarighet vid sats 2.

Dessa skäl är emellertid i mitt tycke inte alls tillräckliga för att uppväga de förut nämnda fördelarna med sats 2, när det gäller elementär undervisning.

För fullständighetens skull och till tjänst för läsare som har sats 1 mindre aktuell, återges till sist beviset för sats 2, trots att det inte innehåller något väsentligt nytt. I huvudsak ingår det, som ovan nämnts, i gängse bevis för sats 1.

BEVIS FÖR SATS 2: Antag först att t. ex. $\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)} \neq 0$ i P .

Enligt existenssatsen för implicita funktioner bestämmer då sambanden $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ i en omgivning till P implicit $x_1, x_2, \dots, x_p$ som funktioner av $x_{p+1}, \dots, x_n$:

$$x_i = x_i(x_{p+1}, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

De partiella derivatorna av dessa funktioner m. a. p. x_{p+1} bestäms av ekvationssystemet

$$(4) \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}} + \frac{\partial g_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{p+1}} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial x_{p+1}} + \frac{\partial g_i}{\partial x_{p+1}} = 0.$$

För de punkter som uppfyller bivillkoren är nu

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f[x_1(x_{p+1}, \dots, x_n), \dots, x_p(x_{p+1}, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n] \\ &= \varphi(x_{p+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Det återstår ett extremvärdesproblem utan bivillkor för φ , och ett av de nödvändiga villkoren för extremvärde är att i P $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{p+1}} = 0$, dvs.

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{p+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial x_{p+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} = 0.$$

Av (4) och (5) framgår att ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} y_p + \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} y_{p+1} = 0 \\ \frac{\partial g_i}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_p} y_p + \frac{\partial g_i}{\partial x_{p+1}} y_{p+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \end{cases}$$

har den icke-triviala lösningen

$$(y_1, y_2, \dots, y_p, y_{p+1}) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}}, \frac{\partial x_2}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial x_p}{\partial x_{p+1}}, 1 \right).$$

Detta är möjligt endast om systemets determinant är noll:

$$(6) \quad \frac{D(f, g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1})} = 0.$$

Om nu i P $\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)} = 0$, men t. ex. $\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1})} \neq 0$, bevisas (6) analogt. Det återstår att bevisa (6) för det fall att alla funktionaldeterminanter av de p funktionerna g_i m. a. p. p av variablerna $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$ är noll i P . Då är underdeterminanterna till alla element i 1:a raden av $\frac{D(f, g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1})}$ noll, och påståendet fås direkt genom utveckling av denna determinant efter 1:a raden.

Slutligen inser man på precis samma sätt — eller genom omnumrering av variablerna — att även övriga i sats 2 nämnda funktionaldeterminanter måste vara noll i P .

OM NOGLE ULIGHEDER AF W. A. MARKOFF

OVE J. MUNCH

1. Vi vil betragte reelle polynomier $F(x)$ af højst n 'te grad,

$$F(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^{n-v},$$

som tilfredsstiller betingelsen

$$(1) \quad \max_{|x| \leq 1} |F(x)| \leq 1.$$

En særlig rolle vil i det følgende de såkaldte Tschebyscheffske¹ polynomier spille, og vi starter derfor med nogle orienterende bemærkninger om dem.

Det er velkendt — og bevises iøvrigt let ved induktion — at $\cos n\theta$ er et polynomium af n 'te grad i $\cos \theta$, altså

$$\cos n\theta = T_n(\cos \theta).$$

Det her optrædende polynomium er det Tschebyscheffske polynomium, og ved substitutionen $x = \cos \theta$ findes for $|x| \leq 1$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

De første af disse polynomier er:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Man kan simpelt beregne dem ved hjælp af rekursionsformlen

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),$$

der blot er en omskrivning af

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta.$$

Det er klart, at $T_n(x)$ tilfredsstiller betingelsen (1); endvidere ses, at

¹ P. L. Tschebyscheff (1821–1894).

$T_n(x)$ skiftevis antager værdierne $+1$ og -1 i punkterne $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{n}$, $\dots$, $\cos \frac{(n-1)\pi}{n}$ og $\cos \pi = -1$, altså i $n+1$ punkter. I det følgende benyttes betegnelsen x_ν for $\cos \frac{n-\nu}{n}\pi$.

Vi bemærker endvidere, at $T_n(x)$ enten er et lige eller et ulige polynomium; vi sætter

$$T_n(x) = \sum_{\nu=0}^n t_\nu^n x^{n-\nu},$$

da er $t_\nu^n = 0$ for ν ulige. Desuden er $t_0^n = 2^{n-1}$, og vi nævner, at der findes den eksplicite fremstilling

$$t_{2k}^n = (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} \binom{n-k}{k}.$$

De Tschebyscheffske polynomier har en lang række af interessante egenskaber, som vi ikke kan komme nærmere ind på; vi vil i det følgende kun beskæftige os med dem, forsåvidt deres koefficienter optræder i de uligheder, vi betragter.

2. Vi benytter betegnelser som før, og $F(x)$ er altså et polynomium af højst n 'te grad, som tilfredsstiller (1). Da kan koefficienterne a_ν ikke være vilkårlig store; således beviste Tschebyscheff, at hovedkoefficienten a_0 tilfredsstiller

$$|a_0| \leq 2^{n-1},$$

og at lighed kun indtræffer for $T_n(x)$. (Vi ser her og i det følgende bort fra multiplikation med -1 .) Tilsvarende vurderinger for de øvrige koefficienter blev fundet af W. A. Markoff¹, der beviste følgende

SÆTNING I. *Der gælder for p lige*

$$|a_p| \leq |t_p^n|$$

og for p ulige

$$|a_p| \leq |t_{p-1}^{n-1}|;$$

lighed indtræffer — med tilfældene $p=n$ og $p=1$, $n=2$ som eneste undtagelser — kun for henholdsvis $F(x) \equiv T_n(x)$ og $F(x) \equiv T_{n-1}(x)$, alt efter, om p er lige eller ulige.

Markoffs bevis for denne sætning er ret langt; et kortere bevis blev

¹ Wladimir A. Markoff: *Om funktioner, der i et givet interval afviger mindst fra nul*. St. Petersburg 1892 (Russ.). En lidt forkortet oversættelse til tysk fremkom i 1916 på Bernsteins foranledning [2].

fundet af S. N. Bernstein [1]; Bernsteins bevis indeholder dog ikke entydigheden for forekomst af lighedstegn, når p er ulige.

Vi vil her vise, at sætning I kan fås på simpel måde ved hjælp af Lagranges interpolationsformel. Vi begynder med

LEMMA 1. Hvis p er et lige tal, $0 \leq p \leq n$, og $F(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$ et polynomium af højst n 'te grad, for hvilket

$$|F(x_{\nu})| \leq 1, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

da er

$$|a_p| \leq |t_p^n|,$$

og lighed kan for $p < n$ kun indtræffe for $F(x) \equiv T_n(x)$.

x_{ν} betegner som foran nævnt $\cos \frac{n-\nu}{n} \pi$. Vi definerer $\varphi_{\nu}(x)$, μ_{ν} og λ_{ν} ved

$$\varphi_{\nu}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \nu}}^n (x - x_i), \quad \mu_{\nu} = \frac{1}{\varphi_{\nu}(x_{\nu})} \quad \text{og} \quad \lambda_{\nu} = F(x_{\nu}),$$

hvorved Lagranges interpolationsformel får formen

$$(2) \quad F(x) = \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} \mu_{\nu} \varphi_{\nu}(x).$$

Man ser umiddelbart, at $(-1)^{n-\nu} \mu_{\nu} > 0$, og da $T_n(x_{\nu}) = (-1)^{n-\nu}$, så giver (2), anvendt på $T_n(x)$:

$$(2a) \quad T_n(x) = \sum_{\nu=0}^n |\mu_{\nu}| \varphi_{\nu}(x).$$

Vi sætter

$$\varphi_{\nu}(x) = \sum_{i=0}^n b_i^{\nu} x^{n-i}.$$

Hvis n er ulige, har $\varphi_{\nu}(x)$ formen

$$\varphi_{\nu}(x) = (x + x_{\nu}) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \nu, n-\nu}}^{\frac{1}{2}(n-1)} (x^2 - x_i^2);$$

for n lige er

$$\varphi_{\frac{1}{2}n}(x) = \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} (x^2 - x_i^2),$$

medens

$$\varphi_{\nu}(x) = (x + x_{\nu}) x \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \nu, n-\nu}}^{\frac{1}{2}n-1} (x^2 - x_i^2)$$

for de øvrige ν . Man ser da, at b_p^{ν} (p lige) i alle tilfælde er en sum af formen

$$b_p^v = (-1)^{\frac{1}{2}p} \sum x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{\frac{1}{2}p}}^2,$$

for $p=0$ dog specielt $b_0^v=1$. b_p^v har således samme fortegn for alle v ; for $p=n$ er dog $b_n^v=0$ for alle $v \neq \frac{1}{2}n$. Dette viser, at

$$|t_p^n| = \sum_{v=0}^n |\mu_v| |b_p^v|$$

og

$$|a_p| = \left| \sum_{v=0}^n \lambda_v \mu_v b_p^v \right| \leq \sum_{v=0}^n |\lambda_v \mu_v| |b_p^v| \leq \sum_{v=0}^n |\mu_v| |b_p^v|.$$

I den sidste vurdering er benyttet, at vi har forudsat $|\lambda_v| \leq 1$; man ser endvidere, at for $p < n$ er $b_p^v \neq 0$, således at lighed kun kan indtræffe, hvis $|\lambda_v|=1$ og $\lambda_v \mu_v$ har samme fortegn for alle v .

Dette betyder netop, at

$$|a_p| \leq |t_p^n|,$$

og at lighed for $p < n$ kun kan forekomme for $F(x) \equiv T_n(x)$.

Af lemma 1 indses umiddelbart, at sætning I er gyldig for det tilfælde, at p er lige.

Lad derefter p være ulige. Polynomiet

$$L(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_p x^{n-p} + \dots + a_n$$

af højst n 'te grad antages da at tilfredsstille betingelsen (1), og vi vil bestemme $L(x)$ således, at koefficienten a_p får den størst mulige numeriske værdi. Ud fra $L(x)$ dannes polynomierne

$$P(x) = \frac{1}{2}(L(x) + (-1)^n L(-x)) = a_0 x^n + a_2 x^{n-2} + \dots$$

og

$$Q(x) = \frac{1}{2}(L(x) - (-1)^n L(-x)) = a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_p x^{n-p} + \dots$$

Begge disse polynomier tilfredsstiller (1); det ene er altid lige, det andet ulige. Det ses, at

$$L(x) = P(x) + Q(x).$$

Da koefficienten a_p til x^{n-p} er den samme i $L(x)$ og $Q(x)$, kan vi ved bestemmelsen af $\max |a_p|$ nøjes med at betragte polynomier af formen $Q(x)$, altså af $(n-1)$ 'ste grad. Her ved vi imidlertid fra det foregående, at den nævnte størsteværdi er lig $|t_{p-1}^{n-1}|$ og — for $p < n$ — kun indtræffer for $Q(x) \equiv T_{n-1}(x)$. Et brugbart $L(x)$ er da

$$L(x) = T_{n-1}(x),$$

og tilbage står blot at vise, at dette — med de i sætningen nævnte begrænsninger — er den eneste løsning, altså at

$$L(x) = T_{n-1}(x) + P(x)$$

kun kan opfylde de ønskede betingelser for $P(x) \equiv 0$. (Vi ser stadig bort fra triviell multiplikation med -1 .)

Vi antager først n lige; så er $T_{n-1}(x)$ ulige og $P(x)$ lige. Vi sætter $x_v^{n-1} = \cos \frac{n-1-v}{n-1} \pi$. Det ene af tallene $T_{n-1}(x_v^{n-1})$ og $T_{n-1}(-x_v^{n-1})$ er da $+1$, det andet -1 , medens $P(x_v^{n-1})$ og $P(-x_v^{n-1})$ er lige store.

Hvis nu $P(x_v^{n-1}) = P(-x_v^{n-1}) > 0$, bliver $L(x) > 1$ for et af argumenterne $\pm x_v^{n-1}$, og for $P(x_v^{n-1}) = P(-x_v^{n-1}) < 0$ bliver $L(x) < -1$ for et af disse argumenter. Dette er i modstrid med, at $L(x)$ tilfredsstiller (1). Vi må derfor have $P(x_v^{n-1}) = 0$. Ved et ganske lignende ræsonnement ses dette at gælde også for n ulige. I begge tilfælde har man altså for $P(x)$ fremstillingen

$$P(x) = k \prod_{v=0}^{n-1} (x - x_v^{n-1}).$$

Vi kan nu vise, at for $n \geq 3$ må der gælde $k = 0$. Vi har nemlig

$$L(x_v^{n-1}) = T(x_v^{n-1}) + P(x_v^{n-1}) = \pm 1$$

og, dersom $k \neq 0$, yderligere

$$L'(x_v^{n-1}) = T'_{n-1}(x_v^{n-1}) + P'(x_v^{n-1}) = P'(x_v^{n-1}) \neq 0.$$

For $n \geq 3$ findes imidlertid et x_v^{n-1} i det åbne interval $(-1, 1)$, og gyldigheden af de to sidst anførte ligninger for det nævnte x_v^{n-1} er da i strid med, at $L(x)$ tilfredsstiller (1). Altså må vi have $k = 0$.

For $n = 2$ fås specielt

$$L(x) = x + k(x^2 - 1),$$

der tilfredsstiller (1) for alle $|k| \leq \frac{1}{2}$. Ved sammenligning med $T_2(x)$ ses, at $|a_0| < t_0^2$. Tilfældene $n = 1$ og $n = 0$ volder ingen vanskelighed, og dermed er sætning I fuldstændig bevist.

I de i sætningen nævnte undtagelsestilfælde antages størsteværdien for $|a_p|$ af uendelig mange polynomier. For $n = 2$, $p = 1$ har således $|a_1|$ i det ovenstående andengradspolynomium $L(x)$ sin maksimale værdi 1 for alle k i det nævnte interval. For $p = n$ antages størsteværdien $|a_n| = 1$ for alle polynomier $T_{2q}(x)$ med $2q \leq n$ samt også af sådanne linearkombinationer af disse,

$$c_0 T_0(x) - c_1 T_2(x) + \dots + (-1)^q c_q T_{2q}(x),$$

for hvilke c 'erne er ikke negative og har summen 1.

3. Vi vil nu bevise en supplerende sætning, der besvarer et nærliggende spørgsmål i forbindelse med sætning I. Med benyttelse af de samme betegnelser som før kan den formuleres således:

SÆTNING II. Lad α være et reelt tal, $\alpha \geq 1$; da er

$$\sum_{v=0}^n |a_v|^\alpha \leq \sum_{v=0}^n |t_v^n|^\alpha,$$

og lighed kan for $n \geq 2$ kun indtræffe for $F(x) \equiv T_n(x)$.

Vi viser først

LEMMA 2. Dersom

$$|F(x_v)| \leq 1 \text{ for } v = 0, 1, \dots, n,$$

da er for p lige, $0 \leq p \leq n$ (og idet a_{n+1} for n lige fortolkes som 0):

$$|a_p| + |a_{p+1}| \leq |t_p^n|;$$

lighed indtræffer for $n \geq 2$ kun, hvis $F(x) \equiv T_n(x)$.¹

Vi bemærker, at det af de tidligere angivne udtryk for $\varphi_v(x)$ følger, at for p lige er

$$b_{p+1}^v = x_v b_p^v;$$

vi har således

$$a_p = \sum_{v=0}^n \lambda_v \mu_v b_p^v$$

og

$$a_{p+1} = \sum_{v=0}^n \lambda_v \mu_v x_v b_p^v.$$

I udtrykket for a_p samler vi »symmetriske« led:

$$\lambda_v \mu_v b_p^v + \lambda_{n-v} \mu_{n-v} b_p^{n-v}$$

og tilsvarende for a_{p+1} :

$$x_v (\lambda_v \mu_v b_p^v - \lambda_{n-v} \mu_{n-v} b_p^{n-v}).$$

Vi benytter, at $b_p^v = b_p^{n-v}$ (p lige) og $|\mu_v| = |\mu_{n-v}|$; endvidere, at dersom a og b er reelle tal, så er

$$|a+b| + |a-b| = 2 \max(|a|, |b|).$$

Herved findes

¹ Punkterne $x_0, x_1, \dots, x_n$ er naturligvis valgt, fordi det er ekstremumpunkterne for $T_n(x)$, men det er bemærkelsesværdigt, at de ikke kan vælges anderledes; lemma 2 er nemlig forkert, hvis de valgte punkter erstattes af et hvilket som helst andet system af $n+1$ forskellige punkter af intervallet $(-1, 1)$. Tschebyscheffpolynomiets ekstremumpunkter udgør således — her som i forbindelse med flere andre problemer — et »minimal-system med hensyn til Lagrangeinterpolation«.

Det er endvidere af betydning for lemma 2 — og dermed også for sætning II —, at polynomierne er forudsat reelle. Sætning II er ikke altid rigtig, hvis der tillades komplekse koefficienter. Eks: $\alpha = 1$ og $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x+i)$. Derimod er alle regninger i forbindelse med sætning I uændrede, hvis komplekse koefficienter tillades.

$$\begin{aligned}
& |\lambda_\nu \mu_\nu b_p^\nu + \lambda_{n-\nu} \mu_{n-\nu} b_p^{n-\nu}| + |x_\nu (\lambda_\nu \mu_\nu b_p^\nu - \lambda_{n-\nu} \mu_{n-\nu} b_p^{n-\nu})| \\
& \leq |\lambda_{\nu(-)}^+ \lambda_{n-\nu}| |\mu_\nu b_p^\nu| + |\lambda_{\nu(+)}^- \lambda_{n-\nu}| |\mu_\nu b_p^\nu| \\
& \leq 2 |\mu_\nu b_p^\nu| = |\mu_{n-\nu} b_p^{n-\nu}|.
\end{aligned}$$

Den følgende vurdering formuleres for det tilfælde, at n er ulige; det går på samme måde for n lige, blot er der da intet »symmetrisk« led til $\lambda_{\frac{1}{2}n} \mu_{\frac{1}{2}n} b_p^{\frac{1}{2}n}$.

$$\begin{aligned}
|a_p| + |a_{p+1}| &= \left| \sum_{\nu=0}^n \lambda_\nu \mu_\nu b_p^\nu \right| + \left| \sum_{\nu=0}^n x_\nu \lambda_\nu \mu_\nu b_p^\nu \right| \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (|\lambda_\nu \mu_\nu b_p^\nu + \lambda_{n-\nu} \mu_{n-\nu} b_p^{n-\nu}| + |x_\nu (\lambda_\nu \mu_\nu b_p^\nu - \lambda_{n-\nu} \mu_{n-\nu} b_p^{n-\nu})|) \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (|\mu_\nu b_p^\nu| + |\mu_{n-\nu} b_p^{n-\nu}|) = \sum_{\nu=0}^n |\mu_\nu b_p^\nu| = |t_p^n|.
\end{aligned}$$

Entydigheden af det polynomium, for hvilket lighed indtræffer, indses således: For $n \geq 2$ findes mindst et x_ν i det åbne interval $(-1, 1)$, og for $p < n$ er $b_p \neq 0$. Det ses da, at i den netop foretagne vurdering kan lighed kun indtræffe, når $|\lambda_\nu| = 1$ og samtidig $\lambda_\nu \mu_\nu$ har samme fortegn for alle ν .

For derefter at komme til sætning II bemærker vi, at da vi har forudsat $\alpha \geq 1$, så gælder der for positive a og b :

$$(a+b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha.$$

Da nu $F(x)$ tilfredsstiller betingelsen (1), så findes af lemma 2:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^n |a_\nu|^\alpha &= \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}n]} (|a_{2\nu}|^\alpha + |a_{2\nu+1}|^\alpha) \leq \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}n]} (|a_{2\nu}| + |a_{2\nu+1}|)^\alpha \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}n]} |t_{2\nu}^n|^\alpha = \sum_{\nu=0}^n |t_\nu^n|^\alpha.
\end{aligned}$$

For n lige skal man som tidligere regne med $a_{n+1} = 0$. Vi har benyttet, at $t_k^n = 0$ for ulige k . Af entydigheden i lemma 2 følger, at lighed i den sidste vurdering for $n \geq 2$ kun kan forekomme for $F(x) \equiv T_n(x)$.

For $n=1$ og $\alpha > 1$ antager den i sætning II forekommende sum sin største værdi for polynomierne $T_1(x) = x$ og $T_0(x) = 1$ og ikke for andre polynomier. Af

$$\max_{|x| \leq 1} |ax + b| = 1$$

følger nemlig $|a| + |b| = 1$, hvorefter for $a \cdot b \neq 0$:

$$|a|^\alpha + |b|^\alpha < 1.$$

4. Som en simpel anvendelse af sætning I viser vi nu

SÆTNING III. Når $F(x)$ er et polynomium af højst n 'te grad, som tilfredsstiller (1), da er for $n-p$ lige:

$$|F^{(p)}(x)| \leq \frac{|T_n^{(p)}(0)|}{(1-|x|)^p} \quad (|x| < 1)$$

og for $n-p$ ulige:

$$|F^{(p)}(x)| \leq \frac{|T_{n-1}^{(p)}(0)|}{(1-|x|)^p} \quad (|x| < 1).$$

For $x=0$ er

$$|F^{(p)}(0)| = p! |a_{n-p}| \leq p! |t_{n-p}^p| = |T_n^{(p)}(0)|,$$

eller tilsvarende

$$|F^{(p)}(0)| \leq |T_{n-1}^{(p)}(0)|,$$

alt efter, om $n-p$ er lige eller ulige. Vi indskrænker os derefter til at betragte positive x ; beviset forløber analogt for negative x . Lad altså x^* være et punkt af det åbne interval $(0, 1)$. Ved den lineære substitution

$$x = (1-x^*)y + x^*$$

føres $F(x)$ over i et nyt polynomium $G(y) = F(x)$. For $|y| \leq 1$ er $|x| \leq 1$, hvorfor $G(y)$ tilfredsstiller (1). Altså er

$$|G^{(p)}(0)| \leq \begin{cases} |T_n^{(p)}(0)| & \text{for } n-p \text{ lige} \\ |T_{n-1}^{(p)}(0)| & \text{for } n-p \text{ ulige} \end{cases}.$$

Herved bliver

$$|F^{(p)}(x^*)| = \frac{|G^{(p)}(0)|}{(1-x^*)^p} \leq \begin{cases} \frac{|T_n^{(p)}(0)|}{(1-x^*)^p} & \text{for } n-p \text{ lige} \\ \frac{|T_{n-1}^{(p)}(0)|}{(1-x^*)^p} & \text{for } n-p \text{ ulige} \end{cases},$$

hvilket skulle vises. Disse vurderinger kan også skrives på følgende form:

1) n og p begge lige:

$$|F^{(p)}(x)| \leq \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2) \dots (n^2-(p-2)^2)}{(1-|x|)^p};$$

2) n og p begge ulige:

$$|F^{(p)}(x)| \leq \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2) \dots (n^2-(p-2)^2)}{(1-|x|)^p};$$

tilfældene 3) n ulige, p lige og 4) n lige, p ulige fås af henh. 1) og 2) ved at erstatte n med $n-1$. Formuleringen 2) er ubrugelig for $p=1$ og må erstattes af

$$|F'(x)| \leq \frac{n}{1-|x|}.$$

Det overlades til læseren at verificere disse udtryk ved hjælp af

$$|T_n^{(n-2k)}(0)| = (n-2k)! |t_{2k}^n| = (n-2k)! \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1}.$$

Den i sætning III indeholdte vurdering er ikke den bedst mulige. Bernstein beviste

$$|F'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1),$$

og denne ulighed er af Duffin og Schaeffer [4] generaliseret til

$$|F^{(p)}(x)|^2 \leq \left(\frac{d^p}{dx^p} \cos n\theta \right)^2 + \left(\frac{d^p}{dx^p} \sin n\theta \right)^2, \quad x = \cos \theta,$$

og disse vurderinger er bedre end den her beviste, men vanskeligere at vise.

Fælles for de hidtil nævnte vurderinger er, at funktionerne på højre side går mod ∞ for $|x| \rightarrow 1$, og at vurderingerne derfor er intetsigende i endepunkterne af intervallet $(-1, 1)$. En anvendelig vurdering på hele intervallet blev fundet af Markoff, der beviste

$$|F^{(p)}(x)| \leq T_n^{(p)}(1) = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2) \dots (n^2-(p-1)^2)}{(2p-1)!!} \quad (|x| \leq 1).$$

LITTERATUR

- [1] S. N. BERNSTEIN: *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues*. Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, (2), vol. 4 (1912).
- [2] W. A. MARKOFF: *Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen*. Math. Ann. 77 (1916), pp. 213–258.
- [3] I. P. NATANSON: *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin 1955, pp. 49–52.
- [4] A. C. SCHAEFFER — R. J. DUFFIN: *On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff for derivatives of polynomials*. Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), pp. 289–297.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_{1r} + \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_{2r} + \dots - 1 + \dots + \frac{1}{\alpha_r} a_{sr} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_r} a_{nr} \\ \leq a_{1r} + a_{2r} + \dots - 1 + \dots + a_{sr} + \dots + a_{nr}, \end{aligned}$$

som ifølge (5) er < 0 . Da α_r er positiv (endog > 1), er det r^{te} element i (6) derfor < 0 . Forudsætningen $D=0$ fører således til modstrid og kan derfor ikke være rigtig.

Selvom de tilfælde, hvor betingelsen (5) er opfyldt, omfatter alle de selskaber, der berøres af den forannævnte skattelov, har det interesse, både fra selskabsretlige og økonomiske synspunkter, at betragte andre tilfælde.

Vi tænker os først en gruppe af selskaber, der ejer hinanden gensidigt 100%. Man får da i stedet for uligheden (5) ligningen

$$(8) \quad a_{1\nu} + a_{2\nu} + \dots + a_{n\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

I såfald er $D=0$. Man kan nemlig skaffe 0 på samtlige pladser i hvilken som helst af dens rækker ved at addere elementerne i de andre rækker til elementerne i vedkommende række.

D kan også blive 0 for grupper, hvor nogle, men ikke alle selskaberne i gruppen ejes 100% af de øvrige. Dette svarer til, at man i stedet for (5) har betingelsen

$$(9) \quad a_{1\nu} + a_{2\nu} + \dots + a_{n\nu} \leq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

hvor ulighedstegnet gælder for mindst een søjle i D , men ikke for dem alle. Blandt de determinanter, der opfylder betingelserne (3), (4) og (9), findes der både determinanter, der er forskellige fra 0, og determinanter, der er lig med 0, f. eks. følgende:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{4}{9} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Foranstående betragtninger kan sammenfattes således:

Selskaber, der ejer gensidigt i hinanden, kan deles i tre grupper.

I. Selskaber, hvor der i hvert enkelt findes mindst een ejer udenfor gruppen. Her er ejendomsfordelingen altid eentydigt bestemt.

II. Selskaber, hvor nogle, men ikke alle selskaberne i gruppen ejes 100% af de øvrige. Her kan ejendomsfordelingen være ubestemt.

III. Selskaber, hvor alle selskaber i gruppen ejes 100% af de øvrige. Her er ejendomsfordelingen altid ubestemt.

A PROPERTY OF THE COEFFICIENTS IN A CERTAIN PRODUCT EXPANSION OF THE EXPONENTIAL FUNCTION

O. KOLBERG

1. We shall consider the product expansion

$$(1.1) \quad e^{-z} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n z^n).$$

It will be proved that (1.1) is valid if $|z| < 1$; and, obviously, the expansion is unique. The purpose of this note is to prove the following property of the coefficients:

THEOREM. *We have $a_p = 1/p$ if and only if p is a prime.*

2. Formally, we get from (1.1)

$$(2.1) \quad -z = \sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + a_k z^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} (-1)^{d-1} d^{-1} a_k^d z^{dk} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} (-1)^{d-1} d^{-1} a_{n/d}^d z^n,$$

and hence

$$(2.2) \quad a_1 = -1; \quad \sum_{d|n} (-1)^{d-1} d^{-1} a_{n/d}^d = 0 \text{ for } n > 1.$$

For the moment, let us take (2.2) as the definition of a_n . We first prove that

$$(2.3) \quad 0 < a_n < \frac{2}{n} \text{ for } n > 1.$$

It is easily verified by direct evaluation that (2.3) holds for $n < 20$. Let $m \geq 20$, and suppose that (2.3) holds for $n < m$. Then we get

$$\begin{aligned} \left| a_m - \frac{1}{m} \right| &= \left| \sum_{\substack{d|m \\ 1 < d < m}} (-1)^{d-1} d^{-1} a_{m/d}^d \right| \\ &< \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{6}{m} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{8}{m} \right)^4 + \frac{2}{m} a_2^{\frac{1}{2}m} + \frac{3}{m} a_3^{\frac{1}{3}m} + \sum_{\substack{d|m \\ 5 \leq d \leq \frac{1}{4}m}} d^{-1} a_{m/d}^5 \\ &< \frac{1}{m} \left\{ 0.72 + \sum_{k=4}^{\infty} k \left(\frac{2}{k} \right)^5 \right\} < \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

and (2.3) follows by induction.

This assures the validity of (2.1) for $|z| < 1$. Therefore, (1.1) is valid for $|z| < 1$, and can be used to define a_n .

3. If p is a prime, it follows at once from (2.2) that $a_p = 1/p$. Further, if n is odd, $n \neq p$, we have by (2.2) and (2.3) $a_n < 1/n$. It remains to prove that

$$(3.1) \quad a_n \neq \frac{1}{n} \text{ for } n \text{ even, } n \neq 2.$$

Let

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{2x}{n} \right)^x.$$

We find

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \log \frac{2ex}{n} - \frac{1}{x},$$

and hence

$$(3.2) \quad f(x_1) > f(x_2) \text{ for } 0 < x_1 < x_2 \leq \frac{n}{2e}.$$

By (2.2) and (2.3) we find

$$a_n - \frac{1}{n} > - \sum_{\substack{d \text{ odd}, d|n \\ 3 \leq d \leq \frac{1}{2}n}} f(d) - \sum_{k=2}^5 \frac{k}{n} a_k^{n/k}.$$

Using (3.2), and remembering that the number of odd divisors of n does not exceed $n^{\frac{1}{2}} + 1$, we get

$$a_n > \frac{1}{n} - \left\{ f(3) + f(5) + n^{\frac{1}{2}} f(7) + \sum_{k=2}^5 \frac{k}{n} a_k^{n/k} \right\}.$$

It follows easily that

$$(3.3) \quad a_n > \frac{11}{12n} \text{ for } n \geq 40.$$

Now, take n even, $n \geq 80$. By (3.3) we have $a_{\frac{1}{2}n} > \frac{11}{6n}$, and hence

$$a_n - \frac{1}{n} > \frac{121}{72n^2} - \left\{ f(3) + n^{\frac{1}{2}} f(5) + \sum_{k=2}^5 \frac{k}{n} a_k^{n/k} \right\} > 0.$$

It remains only to verify (3.1) for $n < 80$. We omit the details, and mention only the simple case

$$a_{2p} - \frac{1}{2p} = 2^{-p} p^{-2} (2^{p-1} - p) \neq 0, \quad p \text{ an odd prime.}$$

NOGLE INTEGRALFORMLER

CHRISTIAN ANDERSEN

AALBORG KATEDRALSKOLE, 3. G.

Lad $f(x)$ betegne en n gange differentiabel funktion. Det er i nogle tilfælde let at bestemme den n^{te} differentialkvotient $f^{(n)}(x)$ som funktion af x og n , altså

$$f^{(n)}(x) = g(x, n) \quad (n \text{ positiv hel}).$$

For funktionerne

$$f(x) = x^p \quad (p \geq n), \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = x^{-1}$$

fås således henholdsvis

$$g(x, n) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}, \quad g(x, n) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad g(x, n) = (-1)^n n! x^{-n-1}.$$

Vi vil nu gå den modsatte vej, idet vi vil angive en formel for det n^{te} integral $G(x, n)$ af $f(x)$, altså bestemme $G(x, n)$, således at

$$G^{(n)}(x, n) = f(x).$$

Vi indfører betegnelsen $\int^{(n)} f(x) dx^n$ for et n -dobbelt integral. Ved delvis integration findes

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= x f(x) - \int x f'(x) dx \\ \int^{(2)} f(x) dx^2 &= \frac{1}{2} x^2 f(x) - \frac{1}{2} \int x^2 f'(x) dx - \int^{(2)} x f'(x) dx^2 \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

og vi ledes herved til formlen

$$\int^{(n)} f(x) dx^n = \frac{1}{n!} x^n f(x) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \int^{(n-i+1)} x^i f'(x) dx^{n-i+1},$$

hvis rigtighed umiddelbart indses ved induktion.

En naturlig anvendelse af denne formel får vi ved at sætte $f(x) = \ln x$.

Vi finder

$$\int^{(n)} \ln x dx^n = \frac{x^n}{n!} \ln x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \int^{(n-i+1)} x^{i-1} dx^{n-i+1},$$

der, idet

$$\int^{(n)} x^p dx^n = \frac{1}{(p+1)(p+2) \dots (p+n)} x^{p+n},$$

let omskrives til

$$\int^{(n)} \ln x dx^n = \frac{x^n}{n!} \left(\ln x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right),$$

hvortil naturligvis kan føjes et arbitrært polynomium af graden $n-1$.

BOKMELDINGER

E. ARTIN: *Galoissche Theorie*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 28.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 86 S. DM 5.30.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 41.)

Den foreliggende bok er en svakt omarbeidet utgave av tidligere stensilerte forelesninger ved Notre Dame University. Målsettingen er å gi en enkel innføring i metodikk og problemstilling fra den Galoiske teori ut fra få algebraiske forkunnskaper. Det er anmelderens mening at dette mål er nådd i fullt monn. Den Galoiske teori slik den er fremstilt i Artins lille bok, skulle av flere grunner egne seg utmerket som en første innføring i abstrakt algebra. Samtidig som den anvender praktisk talt alle de fundamentale begrepene fra denne del av matematikken, viser den i høy grad nytten av de innførte begreper ved løsning av vanskelige konkrete problemer. Vi sikter her først og fremst til løsbarehetsproblemer i forbindelse med konstruksjoner med passer og linjal og i teorien for algebraiske likninger.

Boken er delt i tre hovedavsnitt. Første del behandler elementene av den lineære algebra — spesielt begrepene vektorrom og lineær avhengighet og uavhengighet mellom vektorer. Annet avsnitt rommer teori for kropp og kropputvidelser, samt den egentlige Galoisteori: studiet av korrespondansen som til en utvidelseskropp K av en gitt grunnkropp F ordner gruppen $G(K, F)$ av alle automorfismer over K som lar elementene fra F i ro. Tredje avsnitt gir anvendelser av den foregående teori på bestemte problemer, som nevnt ovenfor. Dette avsnittet kulminerer med beviset for Abels berømte sats om at den generelle n -te grads likning ikke er løsbare ved rotutdragning og algebraiske operasjoner for $n \geq 5$.

P. Holm

R. KOCHENDÖRFFER: *Determinanten und Matrizen*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 12.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 6 + 144 S. DM 6.60.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 41.)

Detta är en bok i det lilla formatet, avsedd för nybörjarstadiet. Den ger en ytterst elementär inledning till lineär algebra med tonvikten lagd på klassisk determinantteori. Framställningen är i viss mån self-contained genom ett förberedande kapitel om induktion, polynom och permutationer. Tyvärr uppfattas de senare enbart som anordningar, inte som avbildningar. Pariteten avgöres med inversioner.

Determinanter introduceras på helt vanligt sätt: $|A| = \sum \pm a_{1p_1} \dots a_{np_n}$. Weierstrass' karakterisering nämnes men dess fulla styrka utnyttjas inte. Cramer's regel uppträder på ett mycket tidigt stadium och användes flitigt i fortsättningen, t. ex. för att visa att rangen av en matris är dimensionen av dess radrymd.

Vektorrymder införes på konkret sätt: V_n är mängden av alla $(n, 1)$ -matriser. Icke helt lyckat är att snarlika benämningar användes för homogent och inhomogent lineärt beroende.

I kapitlet om lineära ekvationssystem fäster man sig särskilt vid att numeriska (iterativa) metoder med tillhörande konvergensproblem beretts ett visst utrymme. Efter huvudaxelproblemet för hermiteska och kvadratiske former behandlas bl. a. Schur's lemma och Cayley-Hamilton's sats. Framställningens kulmen nås i det avslutande kapitlet om affin ekvivalens med elementardelarsatsen och Jordan's normalform (Reichardt's härledning).

Tore Herlestam

MAY HICKEY MARIA: *The structure of arithmetic and algebra*. John Wiley & Sons, New York, London, 1958. 14 + 294 pp. \$ 5.90.

(Innehållsförteckning i NMT 7 (1959), s. 41.)

Bogen stiller sig som formål at give en aksiomatisk opbygning af de reelle tals system, elementært og »unsophisticated«, til brug for matematiklærere (i USA) og studenter udenfor de egentlige matematiske fag. Forfatterinden går til sagen med megen alvor og søger ikke at snige sig udenom vanskelighederne, selvom hun af hensyn til letlæseligheden ikke benytter talemåder fra abstrakt algebra og overlader spørgsmålet om aksiomsystemets modsigelsesfrihed til den matematiske logik.

Men teksten er unægtelig gådefuld nogle steder. De første aksiomer udsiger, at man indenfor de reelle tal skal kunne anvende de fire regningsarter (d. v. s. at tallene udgør et tallegeme), hvorefter man møder definitionen (s. 42): »En brøk siges at være i reduceret form, dersom dens tæller og nævner ikke har nogen fælles faktor«. Man undres; det er i hvert fald ikke hele tal, der er tænkt på, for de indføres først langt senere. Lidt senere opstilles med bevis en sætning, kaldet »sætningen om substitution i brøksformer«, som udsiger, at hvis to brøker er lig to andre brøker, så

er summen af de to første lig summen af de to sidste; læseren får indtryk af, at brøker alligevel ikke er rigtige tal, og den motivering, der gives for, at sætningen er medtaget, kan kun virke vildledende på læseren og berører slet ikke kernen i problemet.

Aksiomssystemet udvikles videre med ordning af tallene og med et induktionsaksiom, som giver den naturlige talrække (og først derefter tillader forfatterinden sig at give f. eks. den distributive lov med et vilkårligt endeligt antal led), og endelig med et kontinuitetsaksiom, som gør det muligt at opskrive de reelle tal som decimalbrøker, endelige eller uendelige.

Medens begyndelsen af bogen holder sig til de abstrakte betragtninger, bliver den senere isprængt pædagogiske stykker (f. eks. om betydningen af en god orden ved opstilling af regnestykker) og regnetekniske afsnit, såsom kombinatorik og om løsningen af andengradsligningen; når der ved denne sidste gennemføres flere forskellige løsningsmetoder, og det vises, at løsningerne tilfredsstiller, og det så yderligere siges, at ved regneeksempler bør man gøre prøve både af praktiske og teoretiske grunde, så er det vist at drive omhuen for vidt. Omtalen af positionssystemet giver anledning til en længere historisk betragtning over Romernes talsystem og regneteknik.

For at fremme letlæseligheden gives tekstens henvisninger i form af forkortede betegnelser af typen TONN=Theorem on Order of Natural Numbers, ialt ca. 150 stk. (!). Systemet fungerer bedre, end man kunne frygte.

Forfatterinden er ansat ved Brooklyn College, hvor man i de senere år har gjort meget for at forbedre uddannelsen af matematiklærere til secondary schools i USA, og bogen må ses i lyset af disse bestræbelser. Den er et ganske interessant, omend ikke overalt helt vellykket forsøg på at give indsigt i de reelle tal.

Thøger Bang

PHILIPS J. MCCARTHY: *Introduction to statistical reasoning*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 13 + 402 pp. sh. 43/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT 5 (1957), s. 199.)

En er ofte litt skeptisk innstilt når en tar for seg bøker som er skrevet for å orientere såkalte »ikke-matematikere« i statistisk tenkemåte og metode, og venter å finne en samling av metoder i oppskrifts form, uten forutsetninger og begrunnelse. Denne boken er imidlertid et eksempel på at det er mulig å forklare og illustrere en del av de fundamentale statistiske grunnbegrepene for lesere uten særlige matematiske forkunnskaper. Forfatteren går så langt i møte med »ikke-matematikeren« at han til og

med forklarer π og e . Han sier i forordet at »*a first course should emphasize the concepts of statistical reasoning rather than attempt to cover a wide variety of techniques*«, og han har virkelig fulgt dette program under skrivingen av boken. Forfatteren tar således for seg en situasjon, den binomielle, der konstruksjon av en sannsynlighetsteoretisk modell er en relativt enkel sak, og drøfter fundamentalbegrepene i forbindelse med denne.

Boken inneholder 12 kapitler, hvorav det første er et kort innledningskapitel og det annet gir en orientering om grunnbegrepene populasjon, fordeling, utvalg etc. I kapitlene 3, 4 og 5 behandles den deskriptive statistikk. Kapitlene 6 og 10 er viet de alminneligste samplingmetoder. Her behandles såvel »simple random sampling«, som »stratifical random sampling«, »cluster sampling« og »systematic sampling«. Sannsynlighetsbegrepet er innført i kapitel 7 sammen med de enkleste operasjonsregler for begrepet. I kapitel 8 tar forfatteren for seg en Bernoulli-forsøksrekke og bygger opp den sannsynlighetsteoretiske modell for denne, binomialmodellen. I forbindelse med denne enkle modellen drøftes så estimering og hypoteseprøving, og de begreper som innføres, forklares greitt og klart. Samplingfordelingen for et aritmetisk gjennomsnitt $\bar{X}$ diskuteres i kapitel 9, der normalfordelingen innføres som en approksimasjon til sannsynlighetsfordelingen for $\bar{X}$. Estimering og hypoteseprøving i denne modell er også behandlet. I kapitel 11 diskuteres noen enkle situasjoner der χ^2 -observatoren kommer til anvendelse, og i kapitel 12 behandles korrelasjon og regresjon. Det bør nevnes at hvert kapitel er avsluttet med en samling øvelser og en liste litteraturhenvisninger til bruk for den som vil lese mer om de emner som er diskutert.

Boken er ifølge forordet »intended for use in a one semester non-mathematical course in statistics, in which the instructor wishes to present a careful introduction to statistical reasoning«. Fremstillingen og eksempelvalget viser at boken først og fremst henvender seg til studenter i sosialvitenskapene; men den er også egnet som en elementær førsteinnføring for alle som ønsker å vite litt om statistisk tenkemåte og statistiske metoder.

Arnljot Høyland

D. E. RICHMOND: *Introductory calculus*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), 1959. 15 + 207 pp. \$ 5.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 131.)

Med anledning av den pågående opprustningen av matematiken i amerikanske skoler är det av intresse att ta del av en lärobok, skriven av en medlem i School Mathematics Study Group. Det föreliggande arbetet

är visserligen avsett för en entermens kurs vid college men motsvarar närmast gymnasiets nivå hos oss (Finland) och kunde rekommenderas för detta stadium.

Boken kräver inga förkunskaper utom elementär algebra. I det första kapitlet fäste sig anmälaren särskilt vid den noggranna utredningen av gränsvärden. Det andra kapitlet ger en elegant behandling av derivator, derivering av algebraiska funktioner samt tillämpningar. Det tredje behandlar i korthet antiderivator och bestämda integraler utgående från ett area-problem. Det fjärde är ägnat exponential- och logaritmfunktionerna med tillämpning bl. a. på några differentialekvationer. De komplexa talen presenteras i det femte kapitlet, som sedan över exponentialfunktionen och enhetscirkeln leder till de trigonometriska och cyklometriska funktionerna.

Det »ändligt lilla« och beteckningen Δx , Δy undviks helt. Författaren går icke in på serieteori. Där serieutveckling behövs, används ett ändligt antal termer jämte restterm.

Författaren lägger vikt vid en stringent bevisföring och ger en god bild av matematiskt tänkesätt. Framställningen är utpräglad induktiv, vilket i samband med en god typografi gör boken lätt och trevlig att läsa.

Carl G. Wolff

MOTTATTE BØKER

E. Artin: *Galoissche Theorie*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 28.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 86 S. DM 5.30.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 37.)

Lineare Algebra 1–16 * Körpertheorie 16–67 * Anwendungen 68–86.

G. Asser: *Einführung in die mathematische Logik*. Teil I. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 18.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 4 + 184 S., 7 Fig. DM 11.25.

Wahrheitswerte und Wahrheitsfunktionen 1–10 * Ausdrücke des klassischen zweiwertigen Aussagenkalküls 10–17 * Interpretation der Ausdrücke des klassischen zweiwertigen Aussagenkalküls 18–27 * Überblick über die wichtigsten aussagenlogischen Identitäten 27–44 * Theorie der aussagenlogischen Normalformen 44–70 * Ableitbarkeit im Aussagenkalkül 70–77 * Das Axiomatisierungstheorem für den klassischen zweiwertigen Aussagenkalkül 77–103 * Axiomatisierbarkeit, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit 104–125 * Unabhängigkeit, logische Matrizen und deduktiv abgeschlossene Mengen 125–150 * Repräsentierbarkeit von

Funktionen und Definierbarkeit von Funktoren 150–155 * Natürliches Schliessen und Bolzanosches Folgern 155–170 * Bemerkungen zum allgemeinen Kalkülbegriff 170–184.

Carl-Erik Fröberg — Yngve Roloff: *Nordiskt symposium över användning av matematikmaskiner*. Beställes från Matematikmaskinnämnden, Box 6131, Stockholm 6. 445 s. Karlskrona och Lund, 1959. Sv. kr. 20.00.

Allmänna problem 7–60 * Databehandling 61–110 * Kodning 111–171 * Numerisk analys 173–288 * Operationsanalys 289–367 * Tekniska problem 369–428 * Deltagarlista 429–445.

F. R. Gantmacher: *Applications of the theory of matrices*. Translated from Russian by J. L. Brenner. Interscience Publ., New York, London, 1959. 9 + 317 pp. \$ 9.00.

Complex symmetric, antisymmetric and orthogonal matrices 2–28 * Singular bundles of matrices 29–60 * Matrices with nonnegative elements 61–134 * Applications of the theory of matrices to the study of systems of linear differential equations 135–202 * The Routh–Hurwitz problem and related questions 203–297 * Appendix I–IV 299–307 * Bibliography 309–312 * Index 313–317.

Ulf Grenander: *Probability and statistics*. (The Harald Cramér Volume.) Wiley publications in statistics. Almqvist & Wiksell, Stockholm; John Wiley & Sons, New York, 1959. 434 pp. \$ 12.50.

T. W. Anderson: Some scaling models and estimation procedures in the latent class model 9–38 * M. S. Bartlett: The impact of stochastic process theory on statistics 39–49 * J. L. Doob: A Markov chain theorem 50–57 * G. Elfving: Design of linear experiments 58–74 * W. Feller: On combinatorial methods in fluctuation theory 75–91 * E. Fix. — J. L. Hodges — E. L. Lehmann: The restricted chi-square test 92–107 * U. Grenander: Some non-linear problems in probability theory 108–129 * M. Kac: Some remarks on stable processes with independent increments 130–138 * D. G. Kendall: Unitary dilations of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition-probability matrices 139–161 * P. Lévy: Construction du processus de W. Feller et H. P. McKean en partant du mouvement Brownien 162–174 * P. Masani: Cramér's theorem on monotone matrix-valued functions and the Wold decomposition 175–189 * P. Masani — N. Wiener: Non-linear prediction 190–212 * J. Neyman: Optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses 213–234 * H. Robbins: Sequential estimation of the mean of a normal population 235–245 * M. Rosenblatt: Statistical analysis of stochastic processes with stationary residuals 246–275 * C. O. Segerdahl: A survey of results in the collective theory of risk 276–299 * J. W. Tukey: An introduction to the measurement of spectra 300–330 * S. S. Wilks: Non-parametric statistical inference 331–354 * H. Wold: Ends and means in econometric model building 355–434.

Edwin M. Hemmerling: *Mathematical analysis*. McGraw–Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1959. 11 + 332 pp. sh. 45/–.

Fundamental algebraic operations 1–16 * Fractions 17–26 * Functional notation and equations 27–44 * Cartesian coordinates 45–63 * The straight line 64–76 * Operations with radicals 77–86 * Complex numbers 87–101 * Quadratic equations 102–114 * Determinants 115–130 * Trigonometric functions 131–160 * Vector analysis 161–171 * Graphical analysis 172–194 * Exponential and logarithmic functions 195–206 * Theory of equations 207–226 * Partial fractions 227–233 * Infinite series 234–267 * Elements of differential calculus 268–298 * Tables 299–307 * Index 309–315 * Answers to odd-numbered problems 317–332.

Jakob Horn — Hans Wittich: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Sechste Auflage. (Götschen Lehrbucherei 10.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1959. 275 S., 10 Fig. Ganzl. DM 32.00.

Elementare Integrationsmethoden 9–36 * Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Näherung 37–51 * Numerische und graphische Näherungsmethoden 52–66 * Lineare Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden 67–122 * Lineare Differentialgleichungen; weitere Untersuchungen im reellen Gebiet 123–132 * Existenzbeweis im komplexen Gebiet 133–141 * Lineare Differentialgleichungen im Komplexen 142–163 * Spezielle lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung 164–207 * Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten 208–232 * Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen 233–255 * Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten 256–272 * Namen- und Sachverzeichnis 273–275.

C. Hyltén-Cavallius — L. Sandgren: *Matematisk analys II*, häfte A och B. Lund studentkårs intressebyrå, Lund, 1959. 461 s. Sv. kr. 49.00.

Häfte A: De naturliga talen 1–3 * Axiomsystem 3–5 * De positiva rationella talen 5–11 * De positiva reella talen 11–21 * Reella tal av godtyckligt tecken 21–28 * Några beteckningar i mängdläran 29–31 * Funktioner och avbildningar 31–37 * Ändliga och oändliga mängder, uppräknelighet 37–40 * Punktmängder på linjen och i planet 40–47 * Punktföljder 47–52 * Gränsvärden 53–72 * Kontinuitet 72–81 * Heine-Borels lemma 81–85 * Derivator 85–88 * Definition av Riemannintegralen 89–90 * Satser om Riemannintegrerbara funktioner 90–102 * Numeriska serier 103–128 * Generaliserade integraler 128–136 * Funktionsföljder 136–161 * Funktionsserier 161–174 * Potensserier 174–186 * Inledning 187–190 * Omgivning 190–194 * Satser om punktmängder och punktföljder i n dimensioner 194–195.

Häfte B: Funktioner och avbildningar 201–211 * Gränsvärden 211–220 * Kontinuitet 220–228 * Derivator och differentialer av första ordningen 229–258 * Derivator och differentialer av högre ordning 258–284 * Definition av extremvärden. Nödvändiga villkor för extremvärden 285–291 * Undersökning av extremvärden med hjälp av Taylorutveckling 291–300 * Algebrans fundamentalsats 300–303 * Inledning 304–307 * Funktionaldeterminanter 307–316 * Existenssatser för implicit givna funktioner 316–337 * Extremvärdesproblem med bivillkor 337–342 * Dubbelintegraler 343–392 * Generaliserade integraler 392–414 * Linjeintegraler 414–436 * Trippelintegraler 437–443 * Svar till övningar 444–453 * Index 454–457 * Symboler 458.

Mark Kac: *Statistical independence in probability, analysis and number theory*. (The Carus Mathematical Monographs 12.) John Wiley & Sons, New York, 1959. 14 + 93 pp. \$ 3.00.

From Vieta to the notion of statistical independence 1–12 * Borel and after 13–35 * The normal law 36–52 * Primes play a game of chance 53–79 * From kinetic theory to continued fractions 80–93.

Konrad Knopp: *Elemente der Funktionentheorie*. Fünfte Auflage. (Sammlung Göschen 1109.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1959. 144 S., 23 Fig. DM 3.60.

Grundlagen 6–18 * Das System der komplexen Zahlen und die Gauss'sche Zahlenebene 19–41 * Die Riemannsche Zahlenkugel 41–48 * Abbildung durch lineare Funktionen 48–59 * Normalformen und besondere lineare Abbildungen 59–71 * Punkt- und Zahlenmengen 71–77 * Zahlenfolgen. Unendliche Reihen 77–89 * Potenzreihen 89–95 * Funktionen einer komplexen Veränderlichen 95–106 * Analytische Funktionen und konforme Abbildung 106–111 * Potenz und Wurzel. Die rationalen Funktionen 111–118 * Die Exponentialfunktion, die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen 118–132 * Der Logarithmus, die zyklometrischen Funktionen und die Binomialreihe 132–141 * Register 142–144.

W. Meyer-Eppler: *Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie*. (Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen 1.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 18 + 446 S., 178 Fig., 1 Tafel. Ganzl. DM 98.00.

Buchliteratur xv–xvii * Bibliographien xvii * Zeichenerklärung xviii * Die Kommunikationskette 1–5 * Strukturtheorie der Signale 5–40 * Eigenschaften linearer Übertragungssysteme 40–53 * Symbolstatistik 53–132 * Gestörte Systeme 133–153 * Sicherung gegen Übertragungsfehler 153–172 * Die Sinnesorgane als Informationsempfänger 172–250 * Signal und Zeichen 250–282 * Akustische und optische Valenzklassen als Zeichenträger 282–329 * Formstrukturen und Konstruktionen 329–354 * Die gestörte sprachliche Kommunikation 354–401 * Tabelle der Funktion — p ld p 402–404 * Namenverzeichnis 405–409 * Sachverzeichnis 410–446.

Poul Mogensen: *Indledning til funktionslæren*. Gyldendal, København, 1959. 105 s. D.kr. 15.85.

Afbildning af tal og talpar 1–14 * Beskrivelse af funktioner 15–24 * Proportionalitet 25–31 * Den lineære funktion 32–38 * Ligninger 39–47 * Andengradspolynomiet 48–56 * Lidt om potens og rod. Logaritmer 57–71 * Trigonometri 72–85 * Omvendt proportionalitet 86–90 * Opgaver 91–105.

F. und R. Nevanlinna: *Absolute Analysis*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 102.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 8 + 259 S., 4 Fig. DM 36.00, Ganzl. DM 39.00.

Einleitung 1–3 * Lineare Algebra 4–73 * Differentialrechnung 73–113 * Integralrechnung 113–144 * Differentialgleichungen 144–181 * Differentialgeometrie 181–250 * Literaturverzeichnis 251 * Namen- und Sachverzeichnis 252–259.

Jaak Peetre: *Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels*. Meddelanden från Lunds Universitets matematiska seminarium, Band 16. CWK Gleerup, Lund, 1959. 122 s. Sv. kr. 20.00.

Avant-propos 3–4 * Introduction 5–7 * Préliminaires 8–13 * Quelques espaces de distributions 14–31 * Opérateurs à coefficients constant 32–44 * Opérateurs du type (M). Cas général 45–60 * Opérateurs du type (M). Cas hypoelliptique 61–71 * Problèmes aux limites 72–105 * Appendice. Opérateurs quasi linéaires hypoelliptiques 106–118 * Bibliographie 119–122.

I. I. Priwalow: *Einführung in die Funktionentheorie, II*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 22. Aus dem Russischen übersetzt von Victor Ziegler.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 5 + 194 S. DM 8.00.

Integrale nach einer komplexen Veränderlichen 1–8 * Der Cauchysche Integralsatz 8–29 * Das Cauchysche Integral 29–58 * Gleichmässig konvergente Reihen analytischer Funktionen 59–64 * Die Taylorreihe 64–82 * Übungen zum zweiten Kapitel 82–84 * Laurententwicklung 85–89 * Die Klassifizierung der singulären Punkte einer eindeutigen Funktion 89–97 * Das Verhalten einer analytischen Funktion im Unendlichen 97–101 * Die einfachsten Klassen analytischer Funktionen 102–105 * Anwendungen auf die Hydrodynamik 105–115 * Übungen zum dritten Kapitel 115–118 * Die allgemeine Residuentheorie 119–127 * Anwendung der Residuentheorie 128–140 * Übungen zum vierten Kapitel 140–141 * Der Satz von Bloch 142–146 * Der Satz von Landau 146–149 * Die Ungleichung von Schottky 149–153 * Der allgemeine Satz von Picard 153–154 * Übungen zum fünften Kapitel 154–155 * Unendliche Produkte 156–164 * Anwendung der unendlichen Produkte auf die Theorie der ganzen Funktionen 164–171 * Verallgemeinerung des Satzes über die Eindeutigkeit analytischer Funktionen 171–179 * Übungen zum sechsten Kapitel 179–180 * Das Prinzip der analytischen Fortsetzung 181–187 * Beispiele 187–190 * Übungen zum siebenten Kapitel 190–191 * Sachverzeichnis 194.

Donald E. Richmond: *Calculus with analytic geometry*. (The A–W series in mathematics.) Addison–Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), London, 1959. 12 + 458 pp. \$ 8.75, sh. 66/–.

Functions and graphs 1–33 * Derivatives 34–89 * The area under a curve 90–119 * Exponentials and logarithms 120–144 * Complex numbers and trigonometry 145–186 * Antidifferentiation and integration 187–217 * Definite integrals 218–256 * Linear differential equations 257–278 * Vectors 279–302 * The inverse square law 303–321 * Vectors in space. Partial derivatives 322–364 * Multiple integration. Volumes 365–389 * Approximation of functions. Series 390–421 * Appendix on real numbers 423–430 * Answers to odd-numbered exercises 433–447 * Index 451–458.

Robert Sauer: *Ingenieur-Mathematik, I.* Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 8 + 304 S., 178 Fig. Ganzl. DM 24.00.

Reelle Zahlen 3–11 * Funktionen von einer Veränderlichen; Stetigkeit 11–16 * Spezielle Funktionen; Kurvendiskussion 17–29 * Lineare analytische Geometrie der Ebene 29–44 * Analytische Geometrie der Kegelschnitte 45–57 * Grenzwert 57–67 * Grundzüge der Differentialrechnung 68–75 * Mittelwertsätze der Differentialrechnung 75–80 * Numerische und graphische Differentiation; Interpolation 80–86 * Grundzüge der Integralrechnung 87–98 * Graphische und numerische Integration 98–104 * Logarithmus und Exponentialfunktion; Hyperbelfunktionen 104–118 * Rechenschieber und logarithmische Papiere 118–121 * Unendliche Reihen 121–132 * Taylor-Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen 132–139 * Anwendungen der Taylor-Entwicklung für das numerische Rechnen 140–145 * Komplexe Zahlen 145–156 * Elementar integrierbare Funktionenklassen 156–161 * Differentialgeometrie der ebenen Kurven 161–180 * Anwendung der Differentialgeometrie auf die Getriebelehre 180–184 * Funktionen von mehreren Veränderlichen 184–191 * Graphische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher (Nomographie) 192–196 * Vektorrechnung 196–206 * Determinanten und Systeme linearer Gleichungen 206–213 * Lineare analytische Geometrie des Raumes 213–222 * Analytische Geometrie der Flächen 2. Ordnung 223–228 * Grundzüge der Differentialrechnung bei Funktionen von mehreren Veränderlichen 228–232 * Taylor-Entwicklung für Funktionen von mehreren Veränderlichen 233–240 * Anwendung der Taylor-Entwicklung bei mehreren Veränderlichen für das numerische Rechnen 240–244 * Allgemeine Abbildungen und allgemeine Koordinatensysteme 244–251 * Integraldarstellung von Funktionen 251–255 * Mehrfache Integrale 256–267 * Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im Raum 267–274 * Anwendungen der Integralrechnung in der Mechanik 275–279 * Anhang 280–300 * Sachverzeichnis 301–304.

B. L. van der Waerden: *Algebra.* Zweiter Teil, vierte Auflage. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 34.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 9 + 275 S. Ganzl. DM 29.60.

Algebraische Funktionen einer Variablen 1–28 * Topologische Algebra 28–59 * Allgemeine Idealtheorie der kommutativen Ringe 59–93 * Theorie der Polynomideale 93–115 * Ganze algebraische Grössen 115–140 * Lineare Algebra 141–177 * Algebren 177–224 * Darstellungstheorie der Gruppen und Algebren 225–267 * Namen- und Sachverzeichnis 268–275.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 185–189 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i neste hefte, være sendt innen 20. mai 1960. Til samme dato forlanges fristen for oppgavene 181–183 i forrige hefte. (Se innledning til Løsninger nedenfor.)

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

185. Låt $a_0, a_1, \dots$ vara komplexa tal med $|a_n| \leq 1$. Med z_n betecknas det till beloppet största nollstället till $P_n(z) = z^n - a_{n-1}z^{n-1} - \dots - a_0$. Visa, att $|z_n| < 2$.

Om $a_n \rightarrow 1$, då $n \rightarrow \infty$, visa att $z_n \rightarrow 2$ och att mängden nollställena till $P_1, P_2, \dots$ för övrigt saknar hopningspunkter utanför enhetscirkeln.

Magnus Tideman

186. Cirklarna C_A och C_B , med radier a resp. b , tangera varandra i O . Sök största värdet för ytan av triangeln OAB , när A ligger på C_A och B på C_B .

Harry Björk

187. Visa, att ekvationen

$$f(x) = a \int_{x-1}^x f(y) dy,$$

där $0 < a < 1$ och $f(x) = 1$ för $x < 0$, har för $x \geq 0$ en entydig lösning, som kan framställas antingen som en ändlig, alternerande serie eller som en oändlig, positiv serie. (Jfr. uppgift 175, NMT 7, s. 91.)

Gerhard Arfwedson

188. Finn summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{s_n}{n+1},$$

der $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

R. Tambs Lyche

189. Beregn integralet

$$I = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

R. Tambs Lyche

LØSNINGER

En løsning av oppgave 174 (NMT 7, s. 91) er innsendt av Magnus Hegranes. Da løsningen er noe vidløftig og dessuten bygger på setninger som tør være lite kjent av flertallet av tidsskriftets lesere, gjengis den ikke her.

Oppgave 181 (NMT 7, s. 183) er løst av F. P. Dahlkild. Da løsningen er noe mer omstendelig enn påkrevd, utsettes gjengivelsen i påvente av kortere løsninger.

I oppg. 177 (NMT 7, s. 133) er en feil, idet det skal stå $s_1 = \frac{1}{n}$, ikke $s_1 = \sigma_1$. Noen løsning av denne oppgave er ikke mottatt. Også i oppg. 182 (NMT 7, s. 183) er en feil, idet produktet skal tas fra $j=0$, ikke fra $j=1$.

180. La $a_1, a_2, \dots, a_n$ være positive tall ≥ 1 . Vis at

$$(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1} (1+a_1+a_2+\dots+a_n).$$

Viggo Brun

Løsning: Om $c_v \geq 0$, så är

$$\left(1 + \frac{c_1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{c_n}{2}\right) \geq 1 + \frac{c_1 + \dots + c_n}{2} \geq 1 + \frac{c_1 + \dots + c_n}{n+1}.$$

För $c_v = a_v - 1$ följer härav uppgiftens formel.

Gerhard Arfwedson

Også løst av Harry Björk, Lars Ingelstam, P. W. Karlson, H. H. Kyhl, Tage Nørgaard, Carl-Axel Sjöblom, Ragnar Johs. Solvang, Steffen Strøbæk, Arne Strøm, Torsten Ström og Magnus Tideman.

184. La $r_1, r_2, \dots, r_k$ være k av tallene $1, 2, \dots, n$, ordnet etter størrelsen, og $s_1, s_2, \dots, s_l$ ($k+l=n$) de øvrige, også ordnet etter størrelsen. Sett

$$V(r_1, r_2, \dots, r_k) = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \dots & r_1^{k-1} \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \dots & r_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & r_k & r_k^2 & \dots & r_k^{k-1} \end{vmatrix}, \quad V(r_1) = 1.$$

Vis riktigheten av følgende likning:

$$V(r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{(n-1)!!}{(s_1-1)!(s_2-1)! \dots (s_l-1)!(n-s_1)!(n-s_2)! \dots (n-s_l)!} \cdot V(s_1, s_2, \dots, s_l),$$

idet $m!! = 1! 2! \dots m!$, $0!! = 1$.

$$\text{Eksempel: } V(1, 2, 3, 5, 7) = \frac{6!!}{3! 5! 3! 1!} V(4, 6).$$

R. Tambs Lyche

Løsning: Setter vi

$$p = \prod_{i=1}^k (n+1-r_i), \quad q = n! \prod_{i=1}^l (n+1-s_i)^{-1},$$

blir $p=q$. Ifølge en kjent egenskap ved van der Mondes determinant er

$$V(r_1, r_2, \dots, r_k, n+1) = p \cdot V(r_1, r_2, \dots, r_k).$$

Hvis vi derfor innfører en ny rand i venstre determinant, idet vi øker n med en ener, vil i oppgavens ligning venstre side bli multiplisert med p ; samtidig blir høyre side multiplisert med q . På samme måte ses at ligningen vedblir å bestå om en tilføyer en ny rand i høyre determinant. Oppgavens ligning kan derfor skrittvis bygges opp fra tilfellet $n=2$ av.

Johs. Lohne

Også løst av Magnus Tideman.

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1959 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 16.2 K. R. Buch: *Om måling af information.*
2.3 H. D. Brunk, Missouri: *Recent generalizations of the Glivenko–Cantelli theorem.*
12.3 H. Tornehave: *Nyere synspunkter i matematisk svingningsteori.*
6.4 T. Ganelius, Göteborg: *Approximation och Tauberska resttermsatser.*
9.4 Chr. Andersen: *Lidt om elektronregnemaskinens aritmetik.*
20.4 E. Alfisen, Oslo: *Noen betraktninger over integrasjonsteoriens grunnlag.*
14.5 O. Schmidt: *Om reciproktavler og pythagoræiske tal.*
8.10 B. Fuglede: *Det Hilbert'ske rum.*
2.11 A. Dvoretzky, Jerusalem: *A property of convex sets and its application to linear spaces.*
19.11 H. Brøns: *Stikprøveudtagning uden tilbagelægning.*
7.12 W. Fenchel, A. Engelund og M. Pihl: *Jakob Nielsen og hans livsværk.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

- 20.10 O. Rindung: *Om det matematiske gymnasiums læseplaner.*
20.10 A. Bager: *»Kært barn har mange navne« — lidt om lattice theory.*
21.10 Forhandling om det matematiske gymnasiums læseplaner.

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 21.1 P. Laasonen: *Elliptisen yhtälön diskretointiratkaisun virhe [Felet vid diskretionslösning av elliptiska ekvationer].*
28.1 L. V. Ahlfors, Cambridge (Mass.): *Modulproblemet.*
18.2 P. J. Myrberg: *Riemannin pintain konformikuvauksesta [Om konform avbildning av riemannska ytor].*
18.3 F. Gehring, Ann Arbor: *Harmonic functions and Tauberian theorems.*
15.4 K. Bleuler, Neuchâtel: *Über Spinoren.*
19.5 L. Carleson, Uppsala: *Om funktioner med begränsad Dirichletintegral.*
16.9 P. J. Myrberg: *Toisen asteen iteraatiosta [Om iteration av andra graden].*
13.10 F. Nevanlinna: *Alkulukulauseesta [Om primtalssatsen].*
18.11 J. Väisälä: *Kvasikonformikuvauksen määritelmä [Definition av kvasikonform avbildning].*
9.12 K. Vala: *Ortogonaalisten systeemien projektioista [Om projektioner av ortogonala system].*

FINLANDS MATEMATIK-, FYSIK- OCH KEMILÄRARFÖRBUND.

- 28.2 Årsmöte. Förbundets namn ändrades (för att omfatta även kemilärarna) till Matemaattisten aineiden opettajien liitto — Matematik-, fysik- och kemiläraryörbundet. Kemiundervisningen diskuterades. Demonstrationskurs i fysik.
- 5-8.8 Föreläsnings- och exkursionsdagar i Kotka. Föredrag av matematiskt innehåll:
- V. Paatero och B. L. Stara: *Förnyelse av gymnasiekurserna i matematik*. Diskussion.
- V. Paatero: *Integralkalkylen i matematiklinjens kurs*.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

- 8.2 Steingrímur Baldursson: *Om lave temperaturer*.
- 29.4 Páll Theódórsson: *Fysikundervisningen i islandske skoler*.
- 31.8 Sigurður Helgason: *Symmetriske rum*.
- 27.10 Ari Brynjólfson: *Anvendelser af radioaktive isotoper*.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 5.5 R. V. Kadison, New York: *Certain aspects of spectral theory*.
- 21.5 E. Alfsen og J. E. Fenstad: *Noen undersøkelser over et hovedproblem i generell topologi*.
- 8.9 M. Krasner, Paris: *Recherches sur le théorème de Fermat*.
- 13.10 Th. Skolem: *Noen betraktninger over mengdelærens grunnlag*.

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

- 26.2 C. E. Sjöstedt, Stockholm: *Matematiken i den svenska skolan*. (Oslo.)
- 18.4 E. Eriksen og K. Kolden: *Matematikken på språklinjene*. (Kristiansand S.)
- 26.4 F. Berntsen: *OEEC's kursvirksomhet*. (Trondheim.)
- 28.4 K. Friis: *Matematikken på språklinjene*. (Oslo.)
- 3.10 B. Rudberg: *Ligninger*. (Lillehammer.)
- 23.10 O. Lindstad: *Kjenner vi kjeglesnittene?* (Oslo.)

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

- 21.3 Möte i Stockholm:
- L. Gårding: *Utvecklingslinjer och problem i differentialekvationsteorien*.
- I. Brinck: *Ett villkor för diskret spektrum*.
- S. Selberg, Trondheim: *Om en del problemer med tilknytning til den Riemannske formodning*.
- 6.6 Möte i Lund:
- H. O. Kreiss: *Differensapproximationer med hög noggrannhet*.
- B. Kjellberg: *Några problem rörande hela funktioners växande*.
- B. Malgrange, Strasbourg: *Un théorème*.
- Å. Pleijel: *Egenfunktionsfördelning vid indefinita problem*.
- L. Gårding: *Lerays version av Laplaces transformation*.

28.11 Möte i Stockholm:

L. Hörmander: *Differentialekvationer utan lösningar.*

M. Tideman: *Numerisk derivering och minsta kvadrat-metoden.*

J.-E. Roos: *Några samband mellan homologi- och homotopi-grupper.*

H. Rådström: *Rekonstruktion av intensitetsfördelningar vid fysikaliska mätningar.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I LUND.

12.4 Vårmöte med studiebesök och föredrag på Kockums varv i Malmö.

15-16.11 Höstmöte som ägnades åt matematik, fysik och kemi. Föredrag av matematiskt intresse:

E. Malmsjö: *Aktuella synpunkter på undervisningen i matematik på enhets-skolans högstadium och i realskolan.* Diskussion.

H. Malmheden: *Algebraiska ekvationssystem.* Diskussion.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM.

7-8.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 7, s. 54.

FORENINGSNYTT

DANSK MATEMATISK FORENING

holdt generalforsamling den 8.2.1960. Til bestyrelse genvalgttes prof. W. Fenchel (formand), prof. H. Tornehave (næstformand), prof. K. Buch (kasserer), prof. S. Bundgaard og aman. Chr. Andersen.

FINLANDS MATEMATIK-, FYSIK- OCH KEMILÄRARFÖRBUND.

Förbundets lokala klubbar har arbetat såsom hittills. En av styrelsen tillsatt kommitté har utarbetat ett förslag till nya kurser i matematik för de båda linjerna i gymnasiet. Förslaget antogs av förbundet vid sommandagarna i Kotka. Det finnes goda utsikter att de uppgjorda kurserna slutligt kommer att fastställas av undervisningsministeriet. Styrelsen har samarbetat med kemistorganisationerna för att förbättra kemins ställning i läroverken. Betänkande därom är numera färdigt.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM

höll årsmöte den 7-8 januari 1960. Till ordförande resp. vice ordförande omvaldes lektorerna Ernst Knave och Fredrik Ehrnst samt till sekreterare resp. skattnästare omvaldes adjunkterna Jan O. Unenge och Jacob Isander.

Under årsmötet hölls följande föredrag och demonstrationer:

O. Karlkvist: *Elektroniska datamaskiners konstruktion och användningsområden.*

L.-G. Sillén: *Varför har havsvattnet den sammansättning det har?*

- L. Sandgren: *Några synpunkter på terminologin i matematikundervisningen. Diskussion.*
 J. Stenman och S. Lindholm: *Några fysikaliska experiment.*
 I. Stål: *Kemiförsök.*
 G. Funke: *Det europeiska samarbeidet kring högenergi problemet.*
 C. E. Lind och E. Strand: *Synpunkter och erfaringheter fråan eftergranskning av skriftliga examensprov i matematik i student- och realexamen.*

AKA-film visade filmen »Kolhydrater«.

DØDSFALL

Professor E. J. Nyström, Tekniska Högskolan, Helsingfors, døde 13.2.1960. En nærmere omtale av professor Nyström og hans livsverk kommer i neste hefte av NMT.

Professor Nyström representerte Finlands matematiske forening i redaksjonen for NMT. Som hans etterfølger har foreningen utsett professor G. af Hällström, Åbo Akademi.

UTNEVNELSER

Til professor i matematik (rationel mekanik) ved Danmarks tekniske Højskole: Lektor sammesteds K. Rander Buch.

Til professor i matematisk statistikk ved Stockholms Högskola: Fil. dr. U. Grenander.

Til dosent i matematikk ved Universitetet i Oslo: Dr. K. E. Aubert.

Til dosent i matematikk ved Universitetet i Bergen: Cand. real. O. Kolberg.

Til laborator i tillämpad matematik vid Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm: Fil. dr. G. Dahlquist.

OEEC-SEMINAR I MATEMATIKK 1959

Fra 23. nov. til 5. des. ble det holdt et seminar om matematikk i skolen i Royaumont utenfor Paris. Det var ialt 46 deltakere fra 18 land. De representerte universitet, matematikklærerutdanning, inspeksjon og vanlig skole. Fra de nordiske land var uttatt: Bundgaard, Neerup og Rindung fra Danmark, Gjelsvik, Johansson og Piene fra Norge, og Frostmann og Sandgren fra Sverige. Av disse var Bundgaard foredragsholder; han talte om »The mathematics competencies of teachers—and the consequent problems of training and retraining«.

Professor Marshall Stone (Chicago) var seminarets president og professorene Fehr (New York), Dieudonné (Paris) og inspecteur général Théron (Paris) var ledere av de tre »seksjoner« som seminaret var delt i, og som hver forføyte over en tredjedel av den tiden seminaret varte. Det ble hver dag gjerne holdt to foredrag med etterfølgende diskusjon, som brakte både faktiske opplysninger (»i vårt land gjør vi så og så«) og meningsyttringer (»vil ha mer mengdelære« — »til helvete med Euklid«). Ofte ble det laget tre grupper som hver diskuterte et hovedproblem i foredraget. Siden var det så igjen plenumsmøte med referat fra hver gruppe og fortsatt diskusjon.

Møtestedet var et tidligere kloster, helt isolert beliggende, hvor deltakerne for-

uten møter også hadde sove- og spiserom, slik at det ikke ble megen tomgang de 14 dagene seminaret varte. Det var et utpreget »arbeids«-seminar. En kveld var det mottagelse i OEEC's hus i Paris, en annen kveld et ytterst fornøyet foredrag om matematikkundervisning i Sovjetsamveldet (av prof. Rourke), og en kveld ble det vist en film om stoffstruktur. Ellers ble fritiden brukt til småturer og til hyggelig og opplysende samvær med de utenlandske kolleger.

Nedenfor gjengis presidentens åpningsforedrag samt den vedtatte resolusjon.

Åpningstale av prof. Marshall H. Stone.

1. Av alle formale skolefag er matematikk blant de eldste. I mellom to og tre tusen år har det hatt en sentral posisjon i skolens pensum. I denne lange perioden har utviklingen innen matematikken forårsaket mange endringer i forskjellige sider av undervisningen. Den matematikk som ble undervist i greske, romerske og middelalderse skoler måtte gi opp etter århundrer med relativ pedagogisk ro, til fordel for det nye stoff som kom da renessansen satte inn med den moderne fase i matematisk forskning. Regneundervisningen ble da tilpasset til bruk av arabiske talltegn. Algebra, logaritmer, trigonometri og høyere matematikk fant fort sin vei i skolen, og i et langt tidsrom har de utgjort hovedparten av skoleundervisningen og den første universitetsundervisning i matematikk. I det hele tatt er det ofte blitt sagt at all den matematikk som ungdom opp til 18 eller 19 år lærer, er alt minst to hundre år gammel.

2. Det er mange umiskjennelige tegn på at vi står foran viktige, endog radikale endringer i det matematiske pensum, som har forblitt relativt statisk i et temmelig langt tidsrom. Faktisk er dette seminar blitt arrangert p. g. a. en overbevisning om at slike endringer er nødvendige for fremgang, og at de må drøftes med fantasi og skarpsinn før de settes ut i praksis.

Det er to hovedfaktorer som tvinger oss til å granske med friske øyne den matematikk som vi underviser for ungdom i de høyere skoler og de første universitetsår. Den ene er den ekstraordinære vekst i ren matematikk i moderne tid. Den andre er den økende avhengighet vitenskapelig tenkning står i til matematiske metoder, og dette faller sammen med samfunnets påtrengende krav om en innsats av naturvitenskapsmenn av alle kategorier. De virkninger som disse to faktorer utøver på vårt skolesystem, er ganske klart i ferd med å sprengne den tradisjonelle ramme for matematikk-undervisningen, og forbereder således veien for en forsinket modernisering og forbedring av vår matematikkundervisning. Likesom krepsdyret måtte splitte og kaste bort det gamle skall for å vokse, må vi til slutt sprengne rammene for et pensum som ikke lenger svarer til våre løpende behov eller våre nåværende livsvilkår.

3. I de siste to hundre år — endog i de siste hundre år, kan jeg trygt si — er det blitt oppdaget mer ny matematikk enn i hele den foregående menneskehetens historie. Likevel har like til ganske nylig bare en liten del av denne nye matematikk hatt noen uttalt innflytelse på undervisningen i skolen og de første universitetsår. Bare i algebraen alene har moderne begreper og synspunkter beriket faget, slik at det er fullstendig forskjellig fra hva det var for 50 eller endog 25 år siden. Likevel er det bare i det siste tiår at mer enn en håndfull av verdens universiteter har innført begynnerkurser i moderne algebra, beregnet på å åpne dette imponerende nye kunnskapsforråd for den alminnelige matematikkstuderende.

Idag fører spesialforelesninger i matematikk i det store og hele, om ikke alltid,

til et nivå som svarer til fagets nåværende stadium, og er knyttet til det hurtige tempo i moderne matematisk forskning. Det er allerede gjort en god del for å tilpasse begynnermatematikken på universitetet til de nye nivåer som er etablert for den videregående matematikk, og det vil ikke gå mange år før denne tilpasning er fullført ved alle ledende universiteter. Siden det er de samme professorer som er ansvarlige for lavere og høyere matematikkundervisning på universitetene, har det ikke vært eller vil bli noen alvorlige vansker med å realisere denne tilpasning.

På den annen side ser vi etterhvert klarere at moderniseringen av universitetenes begynnerundervisning er kilde til en stadig økende forrykning mellom skolens og universitetets matematikkundervisning. Bare av denne grunn kan vi ikke lenger utsette inngående drøftelser om innføring av noe moderne matematikk av passende sort i den høyere skole. En slik reform er uomgjengelig nødvendig hvis vi overhodet skal forberede fremtidige universitetsstudenter for den slags matematisk tenkning som vil bli ventet av dem.

Men der er øyensynlig videre og like viktige formål som vil bli tilgodesett ved å gi matematikkundervisningen en virkelig moderne ånd og inkorporere i pensum noen emner som er av forholdsvis ny opprinnelse. Det dannede menneske, som vi ser på som sluttproduktet av vår innviklede skoleprosess, bør ikke bli latt tilbake noen hundre år i matematikk, bare fordi han ikke skal bli spesialist i realfag eller matematikk — minst av alt i en tidsalder da matematikken vokser så kraftig og trenger seg så dypt inn i så mange tankeområder. Fra et rent teknisk standpunkt er vi forpliktet overfor alle målbevisste og ivrige matematikkstuderende til å eliminere døde, unyttige, foreldete eller mindre viktige deler av matematikken, hvor hellige de enn må være på grunn av tradisjonen, og isteden by dem de mest levende og stimulerende sider av matematikken, for å utvikle deres forståelse og deres skapende talenter.

4. Gjennom nesten hele oppdragelsens historie har matematikk hatt sin plass i skolene vesentlig fordi man har ansett faget som nødvendig for å skape det dannede menneske, dvs. det kyndige menneske som er trenet til å nærme seg det daglige livs affærer med en viss objektivitet, slik at han kan resonnerer på en nøktern og korrekt måte. Ingen som kan se under tingenes overflate vil kunne benekte at matematikken virkelig har spilt en viktig rolle nettopp i denne henseende, og nå heller har større enn mindre muligheter for å bidra til å gi våre borgere almen dannelse.

På samme tid har matematikken gjennom sin nytteverdi i praktiske saker fått ny betydning som en del av skolepensumet. I den nåværende periode av historien er det den moderne vitenskaps fremkomst og den derav følgende skapelse av et teknisk samfunn som tvinger oss til å legge økende vekt på de rent nyttemessige argumenter for en mer intens matematikkundervisning. Faktisk er det ikke lenger mulig å behandle matematikkens plass i våre skoler uten å komme inn på dens forhold til moderne naturvitenskap og teknikk. Hvis det er en krise i skolen idag — og det er mange av oss som tror det — har det vesentlig skjedd fordi intet teknisk samfunn av den sort som det vi holder på å skape, kan utvikle seg fritt og sunt før skolen har tilpasset seg til den veldig økte rolle vitenskapen har i menneskelige forhold. Det er ikke mulig å komme utenom den konklusjon at, på tross av den uunngåelige opposisjon, må en betraktelig større del av elevenes skoletid vies til studiet av realfag og matematikk. Dette synes så mye sikrere som vitenskapene vender seg mer og mer til matematikken for å få satt opp og løst sine mer subtile og utfordrende problemer. Fysikken er alt fullstendig avhengig av matematikk i

denne henseende, og de andre realfag beveger seg åpenbart i samme retning. Selv i det vitenskapelige studium av menneskelig atferd er det de klareste tegn på samme tendens. Således er matematikkundervisningen blitt mer og mer tydelig anerkjent som den sanne grunnsten for det tekniske samfunn som det er vår tids skjebne å skape. Vi er bokstavelig talt tvunget av denne skjebne til å reformere vår matematiske opplæring, og tilpasse og styrke den utilitaristiske oppgave å bære den stadig tyngre byrde av vitenskapelig og teknisk overbygning som hviler på den.

5. Den rette behandling av realfag og matematikk i vårt skolesystem blir ytterligere komplisert når vi tenker på det nå mer eller mindre alminnelige mål å gjøre den høyere skole, likesom grunnskolen, fri, universell og obligatorisk. Dette måls opprinnelse er av politisk natur, men våre anstrengelser for å realisere det blir stimulert og holdt oppe ved erkjennelsen av at det moderne tekniske samfunn krever et stadig voksende antall høyt utdannede tekniske fagarbeidere, i et stadig økende antall yrker. Oppgaven å organisere masseopplæring på sekundær-trinnet blir følgelig vanskeliggjort av nødvendigheten av å ha å gjøre med et stort antall elever, vidt spredt over intelligensskalaen, og samtidig spredt med hensyn til både motivering og interesser.

Den nærliggende fremgangsmåte, å by forskjellige pensja til elever med ulike anlegg og mål, blir noen ganger hindret av de økte omkostninger som dette fører med seg, eller av opposisjon, som i U. S. A., fra dem som ser på demokrati som ensbetydende med fullstendig likhet. I det lange løp kan det imidlertid ikke bli noen annen løsning på masseoppdragelsens problem i et demokrati, siden rettferdighet, sosial nødvendighet og sunn fornuft krever at vi skal gi hver fremtidig borger akkurat så mye opplæring som han kan absorbere effektivt. Det er kanskje verdt å betone elementet sosial nødvendighet, fordi det i diskusjoner om skoleproblemer ikke ofte nok blir poengtert at vi trenger å vie like mye oppmerksomhet i våre skoler til teknisk utdanning av fagarbeidere som til utdanning av fremtidige universitetsstudenter, ingeniører og naturvitenskapsmenn.

Det fulle omfang av den revisjon som kreves i matematikkundervisningen synes følgelig ikke fullt ut erkjent. Vi ville ha et mye bedre inntrykk av det som trenger å bli gjort for de gymnasiaster som ikke skal studere videre, hvis det var tilgjengelig en grundig og ajourført analyse av de enkle anvendelser av mer elementær matematikk — regning, algebra, geometri og statistikk — i den moderne industri, i faglige yrker og i det daglige liv av en gjennomsnittsborger, en som er stemmeberettiget og betaler skatt. Selv om man mangler en slik undersøkelse, er det lett nok å se hvordan i det militære den moderne teknikk har øket betydningen av intelligens og teknisk trening for den alminnelige soldat, eller å forutsi hvordan automatisering i industrien stadig vil skifte tyngden fra manuelt arbeid til arbeid som kombinerer håndens og hjernens trening i operasjon og vedlikehold av forseggjort elektronisk utstyr.

6. Ved en lignende leilighet som denne, summerte jeg den situasjon vi står overfor med disse ordene: »Således vil matematikklærere overalt finne seg under et økende press om å undervise mer matematikk til flere unge menn og unge kvinner på alle trinn. De reformer som de derved stimuleres til å innføre, skulle som et ideal resultere i et system av matematisk oppdragelse som vil ta imot barnet når det begynner i skolen, og gi det sammenhengende matematisk trening og erfaring opp til det punkt hvor det er passende og fordelaktig å slutte de matematiske studier, hva enten dette er i folkeskolen, den høyere skole eller universitetet. Et slikt ideelt system eksisterer ikke noe sted i verden i dag, og realiseringen av det ville

komme både tid og anstrengelse i et hvert land som ville prøve å sette det ut i livet. Det forekommer imidlertid meg at det ikke ville være noen alvorlig vanske med å oppnå hel enighet mellom matematikere om de viktigste trekk i et slikt matematisk instruksjonsskjema. Mitt eget forslag kunne summeres omtrent slik:

På primærskoletrinnet og til en viss grad på sekundærskoletrinnet skal undervisningen baseres på de best uttenkte pedagogiske metoder, og skal sikte på gode intuitive og praktiske kunnskaper i regning, rudimentær algebra og geometri. Denne del av matematikkpensumet skal tilegnes som integrerende del av masseopdragelsen.

På sekundærskoletrinnet må det gjøres et skille i pensum mellom elever som skal til universitet og høyskole og de som bare skal ta studenteksamen. Mens de siste skal trenes i en bedre forståelse og beherskelse av de mer praktiske aspekter av matematikken, må de vordende studerende hele tiden jevnlig få undervisning i algebra, geometri og elementært statistisk resonnement, beregnet på å gi dem en ganske høy grad av matematisk ferdighet innen et forelagt matematisk område, og å sette dem i stand til å gå hurtig fram med mer krevende matematikk. De skal forlate dette trinn av sin matematiske dannelselse med evner til å analysere, angripe og løse problemer av rimelig vanskelighetsgrad i algebra og geometri. De skal ha fått noen følelse for numeriske og geometriske størrelser, skal lett kunne uttrykke seg i matematiske ordelag, og ha noen øvelse i abstraksjonens kunst. For dem skal matematikken alt være en alminnelig deduktiv vitenskap snarere enn en samling nyttige regler og formler. De skal i alle disipliner ha lært noen begreper og fått en innsikt som er anerkjent som viktig i moderne matematikk.

Hvis forholdene gjør det mulig, skal de første universitetskurser inneholde forelesninger i sannsynlighetsregning og statistikk samt elementær analyse, men en avgjørende faktor her er det punkt der overgangen fra skole til universitet normalt inntreffer. På universitetet trenger matematikkundervisningen å bli videre modernisert, så vel som beriket, gjort mer enhetlig og noe mer trinnvis enn vanlig er tilfellet. Den må kulminere i det sterkest mulig spesialiserte forskningsarbeid.»

7. Både i skole og universitet trenger vi å ta forholdet mellom undervisningen i matematikk og i realfagene opp til ny vurdering. Av grunner som jeg alt har nevnt, er det ikke nok å forbedre det matematiske pensum som en isolert del av det som doseres i skolen og i de første universitetsår. Det er av stor viktighet at undervisningen i matematikk og i de forskjellige naturfag må bli tilstrekkelig koordinert på begge trinn.

Rent praktisk vil de første reformtiltak sannsynligvis bestå i å få i stand et bedre oppbygd pensum i matematikk, uten hensyn til den senere koordinering med realfagene. Faktisk er det rimelig å tro at de sistnevnte også vil undergå endringer, særlig på skoletrinnet, betydelig mer drastiske enn noe av det som gjøres i matematikken. Derfor vil et forsøk på å veve sammen matematikk og realfagsundervisning på dette stadium være for tidlig. Men det vil være klokt å se fremover til et tidspunkt om ikke så lenge, da matematikklærere og naturfagslærere bør forene seg i alvorlige bestrevelser etter å koordinere sin undervisning i den utstrekning begge parter er opptatt av å innprente matematiske prinsipper og matematiske ferdigheter.

Det som vil bli krevd er ekte samarbeid i en rolig granskning ned til de minste detaljer, om måten de enkelte matematiske emner skal komme inn i bildet og bli behandlet i de forskjellige deler av realfagenes pensum. Det er ikke for tidlig å foreslå at dette problem bør bli tema på en konferanse som må holdes i nær fremtid.

8. Mens det er sant at vårt hovedproblem gjelder sekundærskolen og de første universitetsårene, må vi huske på at det vi kan oppnå på disse trinn, må baseres på og blir begrenset av det som er ydet i primærskolen. Jeg kan ikke understreke sterkt nok den fundamentale viktighet av å gjøre alt som er mulig for å forbedre matematikkundervisningen der. Vi finner oss der i sannhet ansikt til ansikt med et ytterst påtrengende pedagogisk problem. Det er alt for opplagt at vi i vår folkeskole i det hele tatt ikke greier å utvikle fullgodt eller formålstjenlig gjennomsnittsbarnets latente matematiske talenter og interesser. Enda verre er det at vi i alt for mange tilfelle oppnår det negative resultat å vende elevene helt bort fra matematikken. Det er uomgjengelig nødvendig å finne hjelperåder for disse defekter i vår elementære matematikkundervisning, hvis vi noen gang skal oppnå det vi vil i våre høyere skoler.

Heldigvis er det klare tegn til at vi kan utvikle metoder som er langt overlegne i forhold til dem vi nå vanlig bruker i vår grunnskole. Individuelle eksperimenter, slike som de som nylig er utført av matematikeren Paul Rosenbloom i Minneapolis-skolene, viser hvor lett og med hvilken stimulerende virkning en kyndig og dyktig lærer kan vekke entusiasme hos unge elever i en folkeskoleklasse. De grundig gjennomarbeidete og velprøvede metoder for regneundervisning utarbeidet uavhengig av hverandre av Cuisenaire og Stern har hatt stor suksess ved å gjøre regning livlig og interessant for svært unge barn. Opplysende psykologiske undersøkelser, spesielt de som Piaget har gjort, viser veien til hittil ukjente pedagogiske muligheter.

Ofte når jeg tenker på denne siden av vårt undervisningssystem, kan jeg ikke la være å undre meg over om vi ikke er blinde overfor den sanne natur av det voksende sinn og de effektive veier til å hjelpe det til å utvikle seg. Det ville ikke overraske meg hvis en senere epoke vil se tilbake på våre forsøk som frukt av uvitenhet og overtro.

Hvis vi skal realisere selv i liten målestokk noen av de potensielle fremskritt i kunsten å lære barn de første skritt i matematikk, må vi oppmuntre gruppen av matematikere, psykologer og lærere til å arbeide på å klargjøre de bakenforliggende psykologiske prinsipper og deres anvendelse på undervisningssystemer. Hvis vi en gang kan makte å lage vesentlige fremskritt i retning av å forbedre og levendegjøre regneundervisningen, vil vi være i stand til å vinne tid og leilighet til å ta inn andre matematiske emner i folkeskolens leseplaner.

Det første skritt synes jeg burde være å begynne med geometri i de lavere klasser, og det på et intuitivt grunnlag. På den måten kunne vi legge et solid fundament for senere innføring av bevisende geometri, og gjøre undervisningen her i den høyere skole langt mer fruktbar og effektiv enn den er idag. Der er visselig ikke noen uovervinnelig hindring for å undervise de vesentlige begreper og mønstre i geometrien til svært unge barn, som eksperimenter av matematikerne Suppes og Hawley i Palo Alto begynner å klargjøre. Jeg ser slett ikke noen grunn til å vente på den heldige fullføring av nye undersøkelser av regneundervisningen før en starter undersøkelser over geometriundervisning i folkeskolen. Begge undersøkelser kan meget vel bli utført samtidig.

9. For å komme noen vei med de hovedproblemer som er blitt trukket fram her — revisjonen av de samlede matematikkplanene fra bunn til topp, koordinering av undervisningen i matematikk og realfag, forbedring av undervisningsmåtene på grunnskoletrinnet — må vi forlate den teoretiske diskusjon og vende oss mot spesielle forholdsregler av helt praktisk karakter. De største vansker med å gjennomføre en reform er ikke nødvendigvis det å definere målene. Det er kanskje et

viktigere formål å overbevise andre om gyldigheten av mål som kan være lette å stille opp, og å arbeide ut praktiske måter for å gjennomføre overgangen fra gamle veier til nye. Det kan i det hele tatt være slik at målene vil forbli ufullstendige og vage, og forsøk på overtalelse nyttesløse, inntil detaljene i overgangen er blitt helt fullstendig utarbeidet. Jeg synes derfor at på dette møte, hvor vi neppe er uenige om våre alminnelige mål eller trangten etter å prøve å realisere dem, vil den mest verdifulle bruk jeg kan gjøre av den tid jeg har igjen, være å legge fram for seminaret noen tanker om overgangsproblemene. De vesentlige poenger er ganske få.

10. La oss først legge merke til at den åpenbare innledning til innføring av et nytt pensum består i å skaffe egnet undervisningsmateriale og forberedelse av lærerne til å bruke dette. Da sakens kjernepunkt ligger i å bestemme akkurat det som skal læres i klassen, så er det første og vesentligste skritt å lage lærebøker og annet materiale som apparater, modeller eller filmer som skal brukes. Det er derfor en av våre viktigste oppgaver å stimulere og organisere produksjonen av slikt materiale, slik at det kan bli gjort hurtig tilgjengelig og det på en koordinert måte. Dette vil si at en må finne kompetente folk og gi dem tid, stimulanse og oppmunt-ring til å samarbeide om å utarbeide lærebøker og å forberede andre slags læremid-ler. Opplagt må en finne en administrativ enhet eller skape en slik for dette øye-med, og utstyre den med penger til å sammenkalle og holde i gang så lenge som nødvendig en slik passende arbeidsgruppe.

Etter som det nye undervisningsmateriale blir ferdig, vil de lærere som skal bruke det kreve spesiell forberedelse før de innfører det i klassene. For lærere som alt er i arbeid, vil dette bety at man må by dem spesielle trenings- eller oppfrisk-ningskurser under passende betingelser, men for dem som ennå er i lærerseminaret vil det bety innføring av nye eller reviderte kurser som ledd i deres utdanning. I hvert tilfelle vil det nesten sikkert bli følt behov for nye bøker om matematiske emner, skrevet spesielt for skolelærerne og tilgjengelige både for selvstendig lesning og for bruk som lærebøker på lærerskoler. En systematisk stimulering av produksjonen av slike bøker kunne utgå fra den samme institusjon som produserer under-visningsmateriale.

Ofte er det en tendens til å neglisjere problemet med lærerutdanningen inntil siste øyeblikk, når endringen i skoleplanene er i ferd med å bli gjort. Med mindre det er tale om noen få isolerte endringer, synes jeg det ville være klokt å planlegge passende skritt til å forberede de lærere som saken gjelder, god tid i forveien før deres plikter i klassene vil bli endret eller modifisert. De problemer jeg har nevnt her må tas opp straks. Vi må ikke forsømme muligheten for å diskutere dem, og må ikke godta noen unødvendig utsettelse med å nå og sette ut i livet avgjørelser som sikter på å løse dem.

11. Saken er noe annerledes med koordinering av matematikk- og naturfags-undervisningen, som jeg alt har pekt på. Her kan vi gå fram mer langsomt og mer planmessig, fordi de sentrale spørsmål neppe kan bli angrepet effektivt før mate-matikkklærerne og naturfagslærerne vet bedre hvordan de skal få orden i sine egne saker.

Ved å utsette et detaljert studium av disse spørsmål til matematikkpensum selv er blitt systematisk revidert, vil vi uungåelig lage noe besvær for oss selv i fremtiden. Vi må i det minste være forberedt på å ta opp igjen og redigere på nytt, i lys av våre diskusjoner med naturfagslærerne, de lærebøker som er laget for de nye matematikkplaner. Den fullstendige integrering av matematikk- og naturfags-undervisning vil helt sikkert medføre noen modifisering og nyordning av de lære-

bøkene som utelukkende er skrevet ut fra matematikerens eller matematikklærens synspunkt, og det samme gjelder andre former for undervisningsmaterieil. Det er imidlertid en svært god sjanse for at det ikke vil bli krevd noen mer drastiske skritt når vi skal foreta koordinering på en systematisk måte.

Ikke desto mindre kan forberedende diskusjoner som blir påbegynt i nær fremtid, ha stor innflytelse på vår revisjon av vårt matematiske pensum og således hjelpe oss til å minske de videre endringer som trengs i koordinasjonens interesse. Det er derfor jeg alt har talt for at man tidlig skal komme igang med utveksling av idéer mellom matematikk- og naturfagslærere. Naturligvis vil en slik utveksling først ha en prøvende og granskende karakter. Når det viser seg at den alminnelige form for koordinasjonsproblemet er vel forstått på alle sider, er det tid til å danne arbeidsgrupper som skal utarbeide detaljer i en løsning som alle de den angår er tilfreds med. Det er neppe nødvendig å si at disse grupper må organiseres og bli skikkelig understøttet, på en lignende måte som beskrevet for grupper som holder på med å forberede undervisningsmateriale.

12. Hvis vår målsetting for forbedring av matematikkundervisningen var begrenset til å heve kvaliteten av opplæringen av en relativt liten del av det totale elevtall, kunne vi ha råd til å vie forholdsvis liten oppmerksomhet til den alminnelige forbedring av pedagogiske metoder og innføring av nytt undervisningsmateriale. Men siden vi betrakter en sterk utvidelse av elevtallet i matematikk som et sentralt og nødvendig mål for den prosjekterte reform, så er det motsatte tilfelle.

Når det gjelder å utvikle bedre undervisningsmetoder, har jeg alt diskutert dette poeng og understreket nødvendigheten av fundamental forskning såvel som dens systematiske anvendelse på våre undervisningsproblemer. Her må vi også i tillegg bemerke at våre reformplaner er truet av alvorlige vansker p. g. a. en akutt mangel på lærere — ikke bare lærere med de høye kvalifikasjoner som en bedre matematisk leseplan vil kreve, men selv lærere med den beskjedne bakgrunn som vi bør få oss til å godta i et kompromiss med det nødvendige. Naturligvis må vi gjøre alt for å minske følgene av denne mangel, men på samme tid må vi søke nye veier for å heve lærernes effektivitet mest mulig.

I denne forbindelse må vi håpe på nye organisasjonsformer i skolen, og på nye og relativt uprøvde instruksjonsmåter, som film og televisjon. Jeg tror at når vi har oppdaget de rette måter å bruke disse midler på, kan de meget vel ta plass ved siden av den trykte bok som en uunnværlig hjelp for lærerne. Vi er så vant til å bruke bare trykte bøker i undervisningen at det er vanskelig for oss å forestille oss hvordan lærere og elever noen gang greidde seg uten. Høyst sannsynlig vil våre etterkommere undre seg over hvordan vi en gang klarte oss uten film og televisjon i klasserommet. Det kan sikkert ikke være tvil om at det er opplysninger som langt mer virkningsfullt kan bli bibrakt med film enn ved hjelp av det trykte ord eller forelesninger. Derfor kan vi anta at vi ved å bruke de audiovisuelle hjelpemidlers muligheter, mer effektivt og intenst kan utnytte de disponible lærerkrefter.

Idet vi forutser behovet for mange studier og eksperimenter før vi kan gjøre best mulig bruk av de nye undervisningsmedier, forstår vi at vi her har en annen viktig oppgave som må bringes inn under det brede forsøksprogram som alt er antydnet. Jeg tror at dette forsøksprogram i matematikkundervisningen er så utstrakt og variert at vi må gjøre usedvanlige anstrengelser, hvis vi skal få det tilfredsstillende i gang. Det er et program som kunne trenge ett eller flere forskningsinstitutter, ja kanskje er dette helt nødvendig. Å sikre de midler man trenger til å opprette og drive bare ett slikt institutt ville ikke være lett, selv om vi kunne få

et stort fond eller en stiftelse til å interessere seg for dets arbeid. I alle fall kan vi påta oss å gjennomføre programmet stykkevis, uten å vente på realiseringen av vårt håp om et institutt. Visse deler av den forskning jeg har i tankene kan finne en naturlig plass i forskjellige universiteters forskningsprogram, og økonomisk støtte må man kunne søke fra interesserte fonds og andre kilder. Etter min mening må vi gjøre den størst mulige anstrengelse for å fremme forskning langs disse linjer, som grunnlag for den slags reform som vi foreslår i matematikkundervisningen.

Behovet for denne reform er påtrengende, tiden er gunstig for å lansere den, de praktiske forholdsregler som er nødvendige for å sette den ut i livet er lette å angi. Under disse omstendigheter er vår oppgave grei. Jeg ber dere innstendig om å bruke den glimrende mulighet dette seminar gir oss til å innlede en gjennomføring av reformen.

Resolusjon.

1. (a) Det er et påtrengende behov for å tilpasse skolegeometrien og algebraen til de raske fremskritt som nå blir gjort i moderne matematikk.

(b) Denne tilpasning krever at mye gammeldags eller teknisk verdiløst materiale blir tatt bort fra den tradisjonelle plan- og romgeometri, algebra og trigonometri i den høyere skole, så vel som en mer grundig og effektiv behandling enn før av disse disipliners logiske aspekter.

(c) Denne tilpasning krever videre en tidligst mulig påvisning av forbindelsene mellom geometri og algebra, spesielt lineær og vektor-algebra.

(d) Undervisningen i deduktiv geometri i den høyere skole må grunnes på passende forutgående erfaringer med intuitiv eller fysisk geometri.

2. (a) Elementær sannsynlighetsregning må bli anerkjent som en egnet del av den høyere skoles matematikkundervisning.

(b) Statistisk induksjon må bli anerkjent som anvendt matematikk som bidrar på en vesentlig måte til valgprosesser (decision processes) i den »vitenskapelige metodes« ånd, grunnleggende for så mange områder i de fysiske vitenskaper og vitenskapen om menneskelig atferd. Videre er statistisk resonnement av voksende betydning i det offentlige liv.

(c) Passende, elementær undervisning i sannsynlighetsregning og statistikk må bli innført i den høyere skoles pensum.

(d) Passende forberedende kurser for lærere i disse emner må bli innført i lærerseminarer og institusjoner for lærerutdanning.

3. En reform i den høyere skoles matematikkundervisning er ikke mulig hvis ikke kompetente lærere blir tiltrukket av og forblir i lærergjerningen. For dette formål er det også viktig at matematikklæreren er et aktivt, verdsatt og respektert medlem av samfunnet. Seminaret kom til den konklusjon at lærerens prestisje må heves. Det er nødvendig at læreren har:

(a) En tilstrekkelig lønn;

(b) Gunstige vilkår for personlig utvikling;

(c) Mulighet for avansement; og

(d) Tilfredsstillende arbeidsvilkår. (Leseplikt og klassestørrelse.)

4. Matematikkundervisningen i den høyere skole skal bare gis av universitetsutdannede lærere (graduates majoring in mathematics). Dette er særlig viktig for de høyere klasser.

5. For å skaffe matematikklærerne i alle OEEC-land kjennskap til viktige publikasjoner om de emner som ble diskutert på seminaret, skal hvert land for-

berede en liten bibliografi (5–10 titler) for sitt land, som skal sendes til OEEC-kontoret og ledsage den generelle rapport fra seminaret.

6. Medlemmene av seminaret er enstemmig for en modernisering av matematikk-undervisningen.

For å realisere denne modernisering, er det nødvendig for de forskjellige land å lage lærebøker og håndbøker. Dette arbeidet vil lettes sterkt hvis en synopsis som beskriver forskjellige mulige moderniseringsmåter, ble stilt til rådighet for disse land, som så kunne bruke den til å lage sine egne lærebøker og til å gå i gang med eksperimentell prøving av det moderne materiale.

(a) For å legge grunnlaget for et slikt arbeid, anbefaler seminarets medlemmer at OEEC organiserer en gruppe av eksperter som består av matematikklærere fra universitetene, den høyere skole og pedagogiske institusjoner for den høyere skole. Gruppen skal utarbeide en detaljert synopsis for sekundærskolematematikken, med anvisninger på den ånd som den skal undervises i. Denne synopsis skal inneholde vink om forskjellige behandlingsmåter, med motiverte tilrådinger; OEEC sender så denne synopsis til medlemsstatene med anbefaling om å sende den til alle autoriteter for de høyere skoler.

For å nå disse mål så fort som mulig, må ekspertgruppene ha forberedende møter i skoleåret 1959–60, og et utvidet møte på ikke mindre enn 4 uker i sommerferien 1960.

(b) Seminarets medlemmer anbefaler at grupper av OEEC-land, som er parat til å foreta moderniseringsarbeid etter parallelle linjer, må oppmuntres til å gjøre dette med økonomisk støtte av OEEC etter OEEC's retningslinjer. Slike regionale grupper av matematikklærere fra universitetene, den høyere skole og pedagogiske institusjoner for den høyere skole må samarbeide nært med ekspertgruppen nevnt i (a) ovenfor.

K. P.

SUMMARY IN ENGLISH

WERNER FENCHEL: *Jakob Nielsen in memoriam.* (Danish.)

A short general and scientific biography of Jakob Nielsen, October 15, 1890–August 3, 1959.

K. INKERI: *The irrationality of π^2 .* (English.)

A very simple but fairly unknown proof of the irrationality of π is due to Hermite. The author uses Hermite's method to show that π^2 is irrational and, more generally, that $\frac{\text{tg } x}{x}$ is irrational when $x^2 > 0$ is rational.

Hermite's method is based on the theory of series. In an alternative approach, the series are replaced by integrals.

FOLKE ERIKSSON: *Restricted extremum problems.* (Swedish.)

The author suggests the following (equivalent) alternative to the commonly used Lagrange multiplier method: Let $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ have an extremum under the restrictions $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, p < n$) at a point P , where f and g_i have continuous partial derivatives of the first order. Then all functional determinants of the $p + 1$ functions f and g_i with respect to $p + 1$ of the variables vanish at P .

OVE J. MUNCH: *On some inequalities by W. A. Markoff.* (Danish.)

Let

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}, \quad T_n(x) = \sum_{\nu=0}^n t_{\nu}^n x^{n-\nu},$$

where $F(x)$ is a real polynomial of degree $\leq n$, satisfying $|F(x)| \leq 1$ for $|x| \leq 1$, and where $T_n(x)$ is the Tschebyscheff polynomial of degree n . It was first proved by Markoff that

$$|a_p| \leq |t_p^n| \quad \text{for } p \text{ even}, \quad |a_p| \leq |t_{p-1}^{n-1}| \quad \text{for } p \text{ odd},$$

where equality implies $F(x) \equiv T_n(x)$ or $F(x) \equiv T_{n-1}(x)$ respectively, except if $p = n$ or if $p = 1, n = 2$. A short proof of Markoff's theorem is given, using the interpolation formula of Lagrange.

It is also shown that if $\alpha \geq 1$, then

$$\sum_{\nu=0}^n |a_{\nu}|^{\alpha} \leq \sum_{\nu=0}^n |t_{\nu}^n|^{\alpha},$$

where equality for $n \geq 2$ again implies $F(x) \equiv T_n(x)$.

It is finally shown that for $|x| < 1$:

$$|F^{(p)}(x)| \leq \frac{|T_n^{(p)}(0)|}{(1-|x|)^p} \quad \text{for } n-p \text{ even,}$$

$$|F^{(p)}(x)| \leq \frac{|T_{n-1}^{(p)}(0)|}{(1-|x|)^p} \quad \text{for } n-p \text{ odd.}$$

A stronger inequality is given by Duffin and Schaeffer, but their proof is more complicated.

K. G. GUÐMUNDSSON: *A determinant problem from the Icelandic tax legislation.* (Danish.)

When a group of companies have mutual interests in each other, the assets of the different companies are determined by a system of linear equations (2) (p. 30) satisfying the conditions (3)–(4). It is shown by an indirect argument that the system always has a unique solution, provided that no company is completely owned by other companies of the group (condition (5)).

O. KOLBERG: *A property of the coefficients in a certain product expansion of the exponential function.* (English.)

The product expansion

$$e^{-z} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n z^n)$$

is valid for $|z| < 1$. It is shown that $a_1 = -1$; $0 < a_n < 2/n$ for $n > 1$, and that $a_p = 1/p$ if and only if p is a prime.

CHRISTIAN ANDERSEN: *Some integration formulas.* (Danish.)

The n^{th} integral of a function $f(x)$ is expressed by a formula containing higher integrals of $f'(x)$, and $f(x) = \ln x$ is treated as an example.