

F. BACHMANN'S AKSIOMATISKE OPBYGNING AF GEOMETRIEN, II¹

P. O. NEERUP

C. Den Bachmann'ske opbygning af plangeometrien.

Som foran omtalt vil i dette afsnit Bachmanns aksiomsystem og — i stærkt begrænset omfang — hans opbygning af den plane geometri blive gengivet.

På forhånd bemærkes, at aksiomsystemet tilsyneladende ikke er af geometrisk art, idet det handler om en gruppe G med visse egenskaber. Til orientering skal dog allerede her anføres, at denne gruppe G kan fortolkes som flytningsgruppen i en geometri (se C8), og at denne geometri defineres ved hjælp af selve gruppen G på en efter afsnit B nærliggende måde (se C2).

Endvidere forudskikkes, at aksiomsystemet er af meget almen karakter, idet det kun omfatter sådanne aksiomer, som — fortolket geometrisk — er gyldige i alle de tre former for elementargeometri. Specielt skal anføres, at de i aksiomsystemet omtalte delmængder $\mathfrak{L}$ og $\mathfrak{P}$ (i geometrisk fortolkning mængderne af linier og punkter) af hensyn til den elliptiske geometri ikke forudsættes disjunkte, samt at aksiomsystemet af hensyn til den hyperbolske geometri ikke indeholder nogen almindelig forudsætning om eksistensen af, hvad man i geometrisk fortolkning kalder to liniers skæringspunkt (smlgn. bemærkningerne i B9).

Skønt det følgende skal opfattes som en strengt aksiomatisk fremstilling, er der indsat adskillige figurer. Det er helt væsentligt for forståelsen, at disse figurer — som allerede nævnt i indledningen — kun betragtes som visuelle hjælpemidler til at fastholde den logiske tankegang.

1. Givet en gruppe G bestående af en mængde $\mathfrak{M} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ med en kompositionsregel samt to delmængder $\mathfrak{L} = \{a, b, c, \dots\}$ og $P = \{A, B, C, \dots\}$ af $\mathfrak{M}$, hvor $\mathfrak{L}$ er et system af involutoriske frembringere for G , og $\mathfrak{P}$ er mængden af alle involutoriske produkter af to elementer fra $\mathfrak{L}$. Bachmanns aksiomer er da følgende:

¹ Første del sto i NMT, denne årgang, s. 97–110.

- I. Til P og Q , hvor $P \neq Q$, findes der mindst eet g således, at $g \mid P, Q$.
- II. $P \neq Q$ og $g, h \mid P, Q$ medfører $g = h$.
- III. Til P og g findes der mindst eet l således, at $l \mid P, g$.
- IV. Til a, b, c, P , hvor $a, b, c \mid P$, findes der et d således, at $abc = d$.
- V. Til a, b, c, g , hvor $a, b, c \mid g$, findes der et d således, at $abc = d$.
- VI. Der findes tre elementer g, h, j således, at $g \mid h$, men ikke $j \mid g$, ikke $j \mid h$ og ikke $j \mid gh$.

2. Vi definerer nu en geometri på følgende måde:

Elementerne i mængden $\mathfrak{P} = \{A, B, C, \dots\}$ kalder vi *punkter*.

Elementerne i mængden $\mathfrak{L} = \{a, b, c, \dots\}$ kalder vi *linier*.

Et punkt A og en linie a siges at være *incidente*, når $A \mid a$.

To linier a og b siges at være *vinkelrette* på hinanden ($a \perp b$), når $a \mid b$.

De første aksiomer kan herefter formuleres således:

I. Til to forskellige punkter P og Q findes der mindst een linie, som er incident med P og Q .

II. Til to forskellige punkter P og Q findes der højst een linie, som er incident med P og Q .

III. Til et punkt P og en linie g findes der en linie l , som er incident med P og vinkelret på g .

Det sidste aksiom kan ved hjælp af nedenstående sætning I og aksiom II formuleres således, idet g, h, j åbenbart er indbyrdes forskellige:

VI. Der findes tre linier g, h, j således, at g og h er vinkelrette på hinanden, at j ikke er vinkelret på nogen af linierne g og h , samt at g, h, j ikke er incidente med samme punkt.

Aksiomerne IV og V fortolkes også let geometrisk, når flytninger er defineret (se C8).

3. Udfra aksiomsystemet kan man vise en række sætninger.

SÆTNING 1: $ab = P$ er ensbetydende med $a \mid b$, $P \mid a, b$.

BEVIS: 1) Hvis $ab = P$, er $a \mid b$ ifølge definitionen af P , og da $ab = P$ er ensbetydende med såvel $aP = b$ som $Pb = a$, er $P \mid a, b$.

2) Hvis $a \mid b$, er $ab = Q$. Ifølge 1) er da $Q \mid a, b$, og dette sammen med $P \mid a, b$ ville for $P \neq Q$ ifølge aksiom II give, at $a = b$ i strid med $ab = Q \neq \varepsilon$. Altså er $ab = P$.

SÆTNING 2: $a \mid P$ medfører, at $aP \in \mathfrak{L}$.

Bevis: Ifølge aksiom III findes der et b således, at $b \mid a, P$. Da således $b \mid a$, $P \mid a, b$, følger af sætning 1, at $P = ab$, altså $aP = b$.

SÆTNING 3: $aPa \in \mathfrak{P}$.

Bevis: Ifølge aksiom III findes der (fig. 6) et l således, at $l \perp a, P$. Da $l \perp P$, følger af sætning 2, at $lP = p$ og dermed $P = lp$. Specielt gælder da $p \perp l$ og altså også $a, p \perp l$. Da $a, p, a \perp l$, følger af aksiom V, at $apa = b$. Da $l \perp a$, er $aPa = alpa = lapa = lb$, og da aPa er involutorisk, er $aPa = lb = Q$.

SÆTNING 4: Til a findes et A således, at $a \perp A$.

Bevis: Ifølge aksiom VI findes (fig. 7) et involutorisk produkt P af netop to frembringere. Ifølge aksiom III findes der et l således, at $l \perp a, P$. Af $l \perp a$ følger $la = A$ og altså $Aa = l$, hvoraf $a \perp A$.

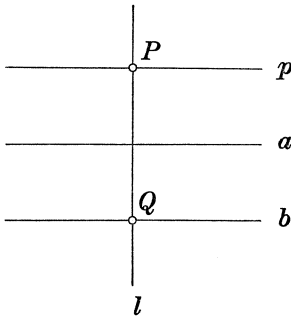


Fig. 6

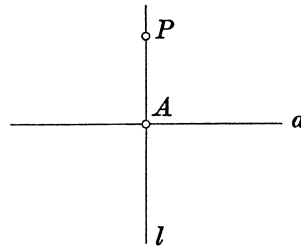


Fig. 7

SÆTNING 5: $aga \in \mathfrak{L}$.

Bevis: Ifølge sætning 4 findes der (fig. 8) et A således, at $A \perp a$. Ifølge aksiom III findes der et l således, at $l \perp g, A$. Specielt er $l \perp g$ og altså $lg = P$. Ifølge sætning 3 er $aPa = Q$. Da $a, l, a \perp A$, har vi ifølge aksiom IV, at $ala = m$. Vi har nu: $Q = aPa = alga = ala \cdot aga = m \cdot aga$. Heraf følger $aga = mQ$, og da således $m \perp Q$, følger af sætning 2, at $aga = mQ = h$.

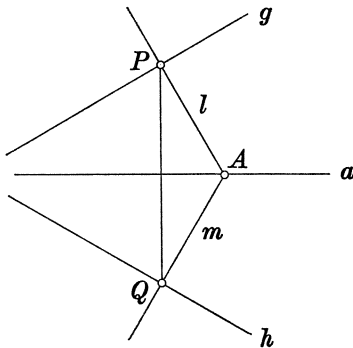


Fig. 8

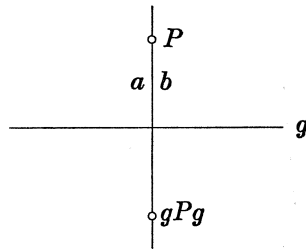


Fig. 9

4. Da et vilkårligt element α i gruppen G kan skrives

$$\alpha = a_1 a_2 \dots a_{n_\alpha}, \quad a_1, a_2, \dots, a_{n_\alpha} \in \mathfrak{L},$$

fremgår af sætning 5, at

$$g \in \mathfrak{L} \text{ medfører } \alpha g \alpha^{-1} \in \mathfrak{L},$$

samt af sætning 3, at

$$P \in \mathfrak{P} \text{ medfører } \alpha P \alpha^{-1} \in \mathfrak{P}.$$

Da vi for tre vilkårlige gruppeelementer α, β, γ har $\alpha \beta \alpha^{-1} \cdot \alpha \gamma \alpha^{-1} = \alpha(\beta \gamma) \alpha^{-1}$, følger af den sidste bemærkning i A 12, at

$$a \mid b \text{ medfører } \alpha a \alpha^{-1} \mid \alpha b \alpha^{-1}$$

og

$$a \mid A \text{ medfører } \alpha a \alpha^{-1} \mid \alpha A \alpha^{-1}.$$

5. SÆTNING 6: $P \neq g, P \mid a, b$ og $a, b \perp g$ medfører $a = b$.

Bevis (fig. 9): Af $P \mid a, b$ følger ved hjælp af A 12, at $gPg \mid gag, gbg$ eller altså $gPg \mid a, b$. For $P \neq gPg$ følger da af aksiom II, at $a = b$. For $gPg = P$ er $P \mid g$, og ifølge sætning 1 er da $P = ag = bg$, hvoraf $a = b$.

SÆTNING 7: $a, b, c \mid P$ og $abc = d$ medfører $d \mid P$.

Bevis: 1) $dP = abcP = abPc = aPbc = Pabc = Pd$.

2) $d \neq P$; thi $d = P$ ville medføre $abc = P$, altså $ab = Pc$ og dermed $a \perp b$. Ifølge sætning 1 var da $P = ab$, altså $c = \varepsilon$ i strid med $c \in \mathfrak{L}$.

SÆTNING 8: $a, b, c \perp g$ og $abc = d$ medfører $d \perp g$.

Bevis: 1) $dg = abcg = abgc = agbc = gabc = gd$.

2) $d \neq g$; thi $d = g$ ville medføre $abc = g$, altså $ab = gc$. For $ab = gc = P$ måtte vi da ifølge sætning 1 have $P \mid a, b, c, g$ og $P = ag = bg$, altså $a = b$, men desuden $a \perp b$.

SÆTNING 9: For $a, b \mid P$ og $a \neq b$ er $abc = d$ ensbetydende med $c \mid P$.

Bevis: 1) $c \mid P$ medfører $a, b, c \mid P$, hvorfor aksiom IV kan anvendes.

2) Ifølge aksiom III findes der (fig. 10) et l således, at $l \mid P$ og $l \perp c$. For $lc = C$ har vi ifølge sætning 1, at $l, c \mid C$. Ifølge aksiom IV er $abl = m$, og ifølge sætning 7 har vi $m \mid P$. Da $a \neq b$, er $m \neq l$. Hvis nu $abc = d$, er $mlc = d$, og altså $md = lc = C$. Heraf følger imidlertid $m \mid C$, og da således $l, m \mid P, C$, medfører $l \neq m$ ifølge aksiom II, at $C = P$. Følgelig har vi $c \mid P$.

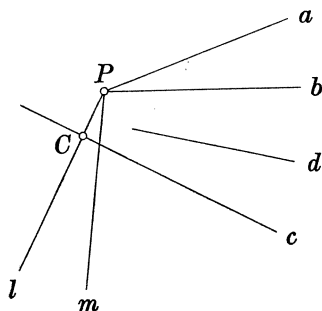


Fig. 10

SÆTNING 10: For $a, b \perp g$ og $a \neq b$ er $abc = d$ ensbetydende med $c \perp g$.

Bevis: 1) $c \perp g$ medfører $a, b, c \perp g$, hvorfor aksiom V kan anvendes.

2) Ifølge sætning 4 findes der (fig. 11, 12) et punkt P således, at $P \perp c$. Ifølge aksiom III findes der et c' således, at $c' \perp P$ og $c' \perp g$. Ifølge aksiom V er $abc' = d'$, og ifølge sætning 8 er $d' \perp g$. Da $a \neq b$, er $c' \neq d'$. Hvis nu $abc = d$, er $c'd' = cd$ og dermed $cc'd' = d$. For $c = c'$ har vi straks $c \perp g$. Ellers følger af sætning 9, at $d' \perp P$, og ifølge sætning 6 må vi da have $P = g$; for $P = g$ har vi imidlertid også $c \perp g$.

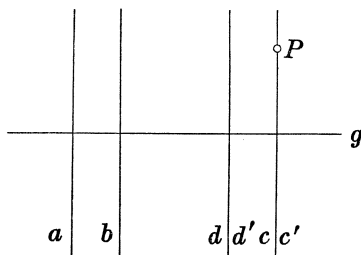


Fig. 11

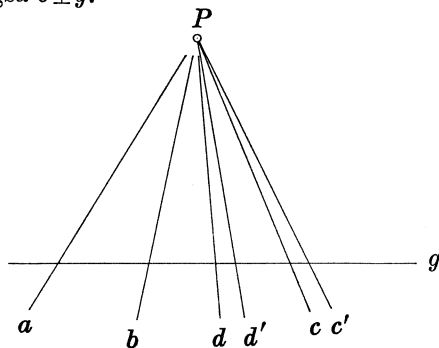


Fig. 12

SÆTNING 11: For $A, B \perp g$ og $A \neq B$ er $AcB = d$ ensbetydende med $c \perp g$.

Bevis: Ifølge aksiom III findes der (fig. 13) et a og et b således, at $a \perp A$, $b \perp B$ og $a, b \perp g$, og ifølge sætning 1 er $A = ga$ og $B = bg$, altså $a \neq b$ og $AcB = g \cdot acb \cdot g$. Vi har derfor:

1) Hvis $c \perp g$, er $AcB = ghg = d$ ifølge aksiom V og sætning 5.

2) Hvis $AcB = d$, er $g \cdot acb \cdot g = d$, $acb = gdg = h$, $cba = aha = l$, $abc = l$ og (ifølge sætning 10) $c \perp g$.

6. SÆTNING 12: Til a og b , hvor $a \neq b$, samt C , hvor ikke både $C \perp a$ og $C \perp b$, findes netop eet c således, at $c \perp C$ og $acb = d$.

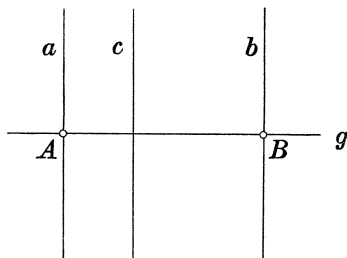


Fig. 13

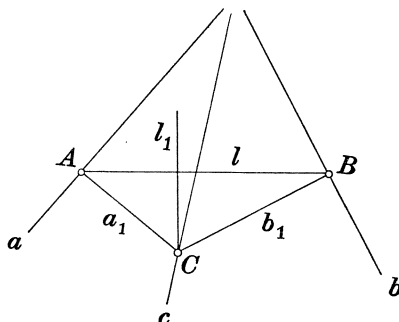


Fig. 14

Bevis: Ifølge aksiom III findes der (fig. 14) et a_1 og b_1 således, at $a_1, b_1 \perp C$ samt $a_1 \perp a$ og $b_1 \perp b$. Ifølge sætning 1 kan vi sætte $aa_1 = A$ og $bb_1 = B$. Her er $A \neq B$, thi af $A = B$, $a \neq b$ ville følge $a_1 \neq b_1$, og $a_1, b_1 \perp C, A$ ville da ifølge aksiom II medføre, at $C = A = B$, altså $C \perp a$ og $C \perp b$ i strid med det givne. Ifølge aksiomerne I og II findes da netop eet l således, at $l \perp A, B$.

For ethvert $c \perp C$ har vi ifølge aksiom IV og sætning 7, at $a_1cb_1 = l_1$, hvor $l_1 \perp C$, og derfor $acb = A \cdot a_1cb_1 \cdot B = Al_1B$. Ifølge sætning 11 har vi da $acb = d$, når og kun når $l_1 \perp l$.

Da $C = l$ ville medføre $a_1, b_1 \perp l$ og ifølge sætning 1 da også $A = aa_1 = la_1$ og $B = bb_1 = lb_1$, altså $a = l = b$, er $C \neq l$. Ved hjælp af aksiom III og sætning 6 indser man da, at der findes netop eet c af den anførte art.

SÆTNING 13: Til U, v, w findes der et a og et b således, at $Uvw = ab$.

Bevis: 1) For $v = w$ anvendes definitionen af U .

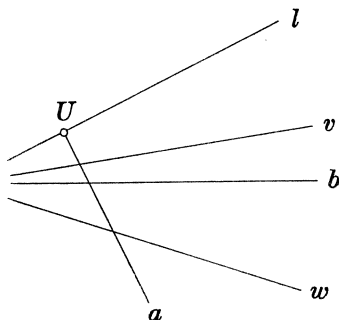


Fig. 15

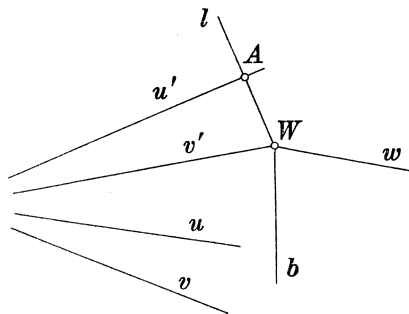


Fig. 16

2) For $v \neq w$ findes der (fig. 15) ifølge aksiom IV eller ifølge sætning 12 et l således, at $l \perp U$ og $lvw = b$. Ifølge aksiom III findes der et a således, at $a \perp U$ og $a \perp l$, hvoraf $U = al$ ifølge sætning 1. Vi har da: $Uvw = al \cdot vw = a \cdot lvw = ab$.

SÆTNING 14: Til u, v, w findes der et A og et b således, at $uvw = Ab$.

Bevis: Ifølge sætning 4 findes der et W således, at $W \perp w$.

1) Vi betragter først $u = v$. Ifølge aksiom III findes der et g således, at $g \perp W$ og $g \perp w$, og ifølge sætning 1 er $W = wg$. Vi har da $uvw = w = Wg$.

2) For $u \neq v$ findes der (fig. 16) ifølge aksiom IV eller ifølge sætning 12 et v' således, at $v' \perp W$ og $vv' = u'$. Ifølge aksiom III findes der et l således, at $l \perp W$ og $l \perp u'$. Ifølge aksiom IV er $lv'w = b$, og for $u'l = A$ har vi da $uvw = u'v'w = u'l \cdot lv'w = Ab$.

7. Af sætningerne 13 og 14 følger, at et vilkårligt element α i gruppen G kan fremstilles på en af de to former: $\alpha = ab$ eller $\alpha = Ab$.

Heraf følger ved sætning 2, at der ikke findes andre involutoriske gruppeelementer end punkterne og linierne.

Endvidere gælder det, at ingen linie og intet punkt er ombyttelig med alle gruppeelementer. Dette kan ses således:

1) Lad a være en linie, som er ombyttelig med alle gruppeelementer, specielt altså med g, h, j fra aksiom VI. Disse linier g, h, j er som tidligere bemærket indbyrdes forskellige, hvoraf følger, at a må være forskellig fra dem; thi hvis a var en af dem, måtte denne være vinkelret på de to andre i strid med aksiom VI. Vi har altså $a \perp g, h, j$, men $a \perp g, h$ medfører for $gh = P$ ifølge sætning 6, at $a = P$, og $a \perp j$ medfører da PIj i strid med aksiom VI. Der findes altså ingen linie a af den nævnte art.

2) Lad dernæst A være et punkt, som er ombytteligt med ethvert gruppeelement, specielt altså med g, h, j fra aksiom VI. A må være forskellig fra disse linier; thi hvis A var en af dem, måtte denne som før være vinkelret på de to andre i strid med aksiom VI. Altså har vi, at $A \perp g, h, j$, men $A \perp g, h$ medfører ifølge sætning 1, at $A = gh$, og $A \perp j$ medfører da $gh \perp j$ i strid med aksiom VI. Der findes altså intet punkt af den nævnte art.

Yderligere gælder det, at der ikke findes noget fra ε forskelligt gruppeelement, som er ombytteligt med alle gruppeelementer. Dette kan ses på følgende måde:

Lad α være et fra ε forskelligt gruppeelement, som er ombytteligt med alle gruppeelementer. Vi har da, idet $\alpha = \rho\sigma$, hvor ρ og σ er involutoriske gruppeelementer, at

$$\alpha\alpha = \alpha\rho\sigma = \rho\alpha\sigma = \rho\rho\sigma\sigma = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon,$$

hvoraf følger, at α er et involutorisk gruppeelement, altså et punkt eller en linie i strid med, at ingen linie og intet punkt er ombyttelig med alle gruppeelementer.

Ifølge A 11 kan vi nu slutte, at *gruppen af alle indre automorfier i G er isomorf med G .*

8. I den i C 2 definerede geometri indfører vi begrebet flytning ved følgende definition:

En *flytning* er en indre automorfi i G .

Ifølge C 4 vil en flytning lade en linie svare til en linie, et punkt til et punkt, et punkt incident med en linie til et punkt incident med den tilsvarende linie og to på hinanden vinkelrette linier til to på hinanden

vinkelrette linier. Ifølge C7 er flytningsgruppen isomorf med den givne gruppe G .

Da gruppen G har liniemængden $\mathfrak{L}$ som frembringersystem, er en indre automorfi i G entydigt bestemt ved den permutation af $\mathfrak{L}$, som den fremkalder.

Da en ret linie er entydigt bestemt ved to forskellige punkter, som er incidente med linien, har vi endvidere, at en indre automorfi i G er entydigt bestemt ved den permutation af punktmængden $\mathfrak{P}$, som den fremkalder, hvis vi blot kan vise, at der til enhver linie a findes to forskellige punkter P og Q , som er incidente med a . Dette kan ses således:

Først viser vi, at der ikke findes nogen linie, som er incident med alle punkter. Lad os antage, at x var en sådan linie. Idet g, h, j er linierne i aksiom VI, findes der (fig. 17) ifølge aksiom III en linie l således, at $l \perp j$ og $l \perp P$, hvor $P = gh$, samt en linie m således, at $m \perp g$ og $m \perp Q$, hvor $Q = lj$. Ifølge aksiom VI gælder der ikke $P \perp j$, hvorefter følger, at $P \neq Q$. Ifølge

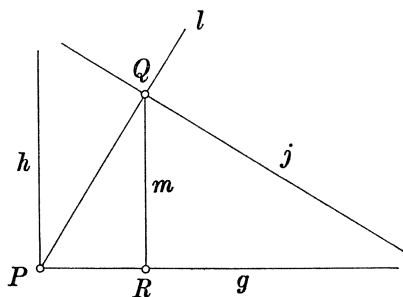


Fig. 17

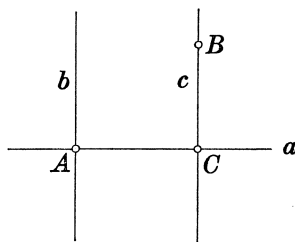


Fig. 18

aksiom II havde vi da $x = l$. Ifølge aksiom VI gælder der hverken $j \perp g$ eller $j \perp h$, hvorefter følger $l \neq g$ og $l \neq h$. Ifølge aksiom II gælder da hverken $Q \perp g$ eller $Q \perp h$. For $R = gm$ kan vi nu ikke have $R \perp l$, thi $R \perp l$ ville ifølge aksiom II medføre, at $R = P$, og dermed $m = h$, og, da $Q \perp m$, at $Q \perp h$. Altså har vi, at der ikke gælder $R \perp x$, og det er i strid med antagelsen om x .

Lad dernæst (fig. 18) a betegne en vilkårlig linie. Ifølge sætning 4 findes der et punkt A således, at $A \perp a$. Til $b = Aa$ findes der — som lige vist — et punkt B således, at der ikke gælder $B \perp b$. Ifølge aksiom III findes der en linie c således, at $c \perp B$ og $c \perp a$. For $C = ca$ er $C \neq A$, thi $C = A$ ville medføre $c = b$ og derfor $B \perp b$. Altså er $A, C \perp a$ og $A \neq C$.

9. SÆTNING 15: Til A, B, C, u og w , hvor $A \neq C$, $uAu = B$ og $wBw = C$, findes et s således, at $sAs = C$ og $usw \in \mathfrak{L}$.

Bevis: Da $u = w$ ville medføre $C = uBu = A$, er $u \neq w$. Ifølge sætning 12 (eller aksiom IV) findes der (fig. 19) et v således, at $v \perp B$ og $uvw = s$. Vi har da dels, at $usw = v$, og dels, at $sAs = wvu \cdot A \cdot uvw = wv \cdot B \cdot vw = wBw = C$.

10. SÆTNING 16: Til A, B, C, U og W , hvor $A \neq C$, $UAU = B$ og $WBW = C$, findes der en linie s således, at $sAs = C$ og $UsW \in \mathcal{Q}$.

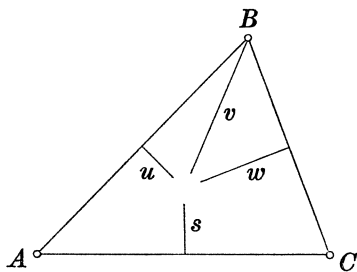


Fig. 19

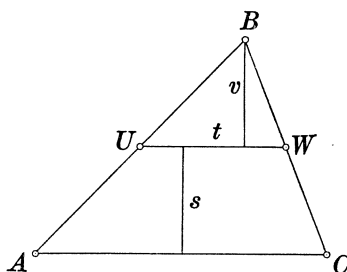


Fig. 20

Bevis: Da $U = W$ ville medføre $C = UBU = A$, er $U \neq W$. Ifølge aksiom I findes der (fig. 20) et t således, at $t \perp U, W$, og ifølge aksiom III et v således, at $v \perp B$ og $v \perp t$. Ifølge sætning 11 er $UvW = s$. Vi har da dels, at $UsW = v$, og dels, at $sAs = WvU \cdot A \cdot UvW = Wv \cdot B \cdot vW = WBW = C$.

11. SÆTNING 17: For $\alpha = Ab$, hvor hverken $A = b$ eller $A \perp b$, er $\alpha l \alpha^{-1} = l$ ensbetydende med $l \perp A$ og $l \perp b$.

Bevis: 1) Hvis $l \perp A$ og $l \perp b$, er $\alpha l = Abl = Alb = lAb = l\alpha$.

2) Hvis $\alpha l \alpha^{-1} = l$, er $AbblbA = l$. For $bblb = l_1$ er altså $Al_1A = l$, d. v. s. $l_1 = AlA$. Lad os forsøgsvis antage $l_1 \neq l$ (fig. 21). Ifølge aksiom III findes der et m således, at $m \perp A$ og $m \perp l$; vi måtte da også have $AmA \perp AlA$ eller altså $m \perp l_1$. Da $ll_1b = blb \in \mathcal{Q}$, ville af sætning 10 følge, at $m \perp b$, og for $a = Am$ derefter af aksiom V, at $abl \in \mathcal{Q}$. Ved hjælp af $al_1a = Am \cdot l_1 \cdot mA = Al_1A = l$ ville vi nu få $abl = al_1b = lab = bal$, altså $ab = ba$, og heraf $Ab = mab = mba = bma = bA$ i strid med det givne. Vi har derfor $l_1 = l$.

Af $bblb = l$ og $AlA = l$ følger $l \perp b, A$, fordi $l = b$ eller $l = A$ ville medføre $Ab = bA$ i strid med det givne.

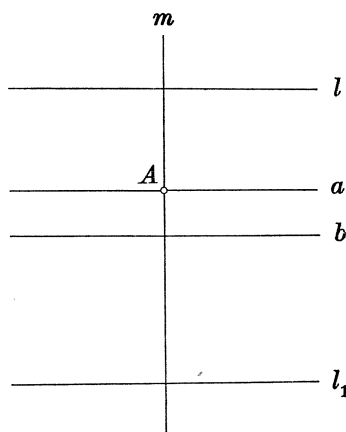


Fig. 21

SÆTNING 18: Hvis a, b, c er tre linier således, at abc ikke er en linie og $abc \neq \varepsilon$, samt h_a, h_b, h_c tre linier, for hvilke der gælder:

$$(*) \quad ah_a = h_a a, \quad bh_b = h_b b, \quad ch_c = h_c c,$$

$$(**) \quad bh_a c \in \mathcal{L}, \quad ch_b a \in \mathcal{L}, \quad ah_c b \in \mathcal{L},$$

så gælder $h_a h_b h_c \in \mathcal{L}$.

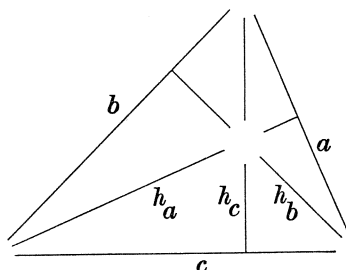


Fig. 22

Bevis: Da abc ikke er en linie, er $h_a \neq a$, $h_b \neq b$ og $h_c \neq c$ ifølge (**); af (*) følger da $h_a \perp a$, $h_b \perp b$ og $h_c \perp c$ (fig. 22).

Af (*) og (**) fås:

$$h_a = ah_a a = ab \cdot bh_a c \cdot ca = abc \cdot h_a \cdot bca,$$

$$h_b = a \cdot ah_b c \cdot c = a \cdot ch_b a \cdot c = acb \cdot h_b \cdot bac,$$

$$h_c = ch_c c = ca \cdot ah_c b \cdot bc = cab \cdot h_c \cdot abc,$$

hvoraf

$$h_a h_b h_c = abc \cdot h_a h_b h_c \cdot abc,$$

altså

$$(***) \quad \beta = \alpha \beta \alpha \text{ med } \alpha = abc \text{ og } \beta = h_a h_b h_c.$$

Ifølge sætning 14 findes (fig. 23) P, R, q, s således, at $\alpha = Pq$ og $\beta = Rs$, og af det givne følger, at der gælder hverken $P = q$ eller $P \perp q$. Ifølge aksiom III findes der et l således, at $l \perp P$ og $l \perp q$, og ifølge sætning 17 har vi da $\alpha l \alpha^{-1} = l$. Da tillige $\alpha^{-1} l \alpha = l$, får vi ved hjælp af (***) endvidere for $l_1 = \beta l \beta^{-1}$, at $\alpha l_1 \alpha^{-1} = \alpha \beta \cdot l \cdot \beta^{-1} \alpha^{-1} = \beta \alpha^{-1} \cdot l \cdot \alpha \beta^{-1} = \beta l \beta^{-1} = l_1$. Ved hjælp af sætningerne 17 og 6 slutter vi nu, at $l_1 = l$, altså at også $\beta l \beta^{-1} = l$.

Da $\alpha \alpha \neq \varepsilon$, er $\beta \neq \varepsilon$, altså $R \neq s$. Lad os antage, at der (som vist på fig. 23) ikke gjaldt $R \perp s$. Ved fornyet anvendelse af sætning 17 fik vi da $l \perp R$ og $l \perp s$. For $p = Pl$ og $r = Rl$ ville vi nu ved hjælp af aksiom V få

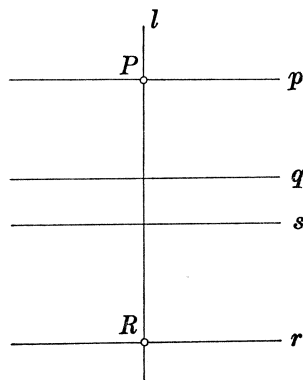


Fig. 23

$$\begin{aligned} \alpha \beta &= Pq \cdot Rs = lpq \cdot lrs = lp \cdot lq \cdot rs = p \cdot qrs = rqp \cdot s = r \cdot spq \\ &= lr \cdot lsp \cdot q = lr \cdot slp \cdot q = Rs \cdot Pq = \beta \alpha, \end{aligned}$$

som sammen med (***) ville give $\alpha \alpha = \varepsilon$ i strid med det givne. Altså er $R \perp s$, hvoraf følger $\beta = Rs \in \mathcal{L}$.

12. En geometri med det i C1 angivne aksiomsystem kalder Bachmann en *absolut* geometri. En sådan geometri er som tidligere bemærket

af meget almindelig karakter, og da såvel den euklidiske som den elliptiske og den hyperbolske geometri tilfredsstiller Bachmanns aksiomer, vil sætninger fra den absolutte geometri have gyldighed specielt i disse tre geometriformer.

Det viser sig dog muligt at indlejre enhver absolut geometri i en projektiv plan (hvor Pascals sætning er gyldig). Det kan man gøre ved at indføre ideale punkter og ideale linier. F. eks. kan man til to linier a og b , hvor $a \neq b$, indføre det af a og b bestemte idealpunkt som mængden af linier x , for hvilke $abx \in \mathcal{L}$. Man kan vise, at det samme ideale punkt bestemmes af to hvilket som helst forskellige af disse linier x . Hvis a og b har et punkt P fælles, bliver det af a og b bestemte ideale punkt ifølge aksiom IV og sætning 9 netop mængden af linier, som er incidente med P . Betegnelsen $abc \in \mathcal{L}$ kan herefter fortolkes således, at linierne a, b, c er incidente med samme ideale punkt.

Således ser man, at sætningerne 15 og 18 er generalisationer af sætningerne: Midtnormalerne for siderne i en trekant går gennem samme punkt, og den analoge for højderne i en trekant. Tilsvarende er sætning 16 en generalisation af sætningen: En midtpunktstransversal i en trekant og den tilhørende trekantsside har en fælles normal, som er midtnormal for trekantssiden. Også sætningerne: Halveringslinierne for vinklerne i en trekant går gennem samme punkt, og den analoge for medianerne i en trekant, kan vises i passende formulering at have gyldighed i en absolut geometri.

De forskellige sætninger må nødvendigvis formuleres forsigtigt, når de skal have gyldighed blot i de tre klassiske geometriformer. Således er forudsætningen $P \neq g$ i sætning 6 nødvendig, fordi sætningen uden denne forudsætning ikke er gyldig i den elliptiske geometri; i denne betyder $P = g$ nemlig, at punktet P er pol for linien g . Endvidere kan eksempelvis anføres, at vi i sætning 15 sikres eksistensen, men ikke entydigheden af en spejlingsakse s for A og C , og at u, s og w har et idealt punkt, men ikke nødvendigvis et punkt fælles; i den elliptiske geometri har nemlig A og C en fra s forskellig spejlingsakse gennem polen for s , og i den hyperbolske geometri behøver u, s og w ikke at have noget punkt fælles.

13. Man kunne spørge, hvordan man af en absolut geometri kan udskille en geometri af f. eks. euklidisk type. Dette kan ske ved tilføjelse af følgende to aksiomer:

VII. Til A, B, C findes et D således, at $ABC = D$.

VIII. Til a og b findes enten et P således, at $P \mid a, b$, eller et p således, at $p \perp a, b$.

Aksiom VII er i tilfælde af, at A, B, C er incidente med samme linie, en følge af aksiom IV. Af aksiom VII følger specielt, at $b \perp a, c$ og $d \perp a$ medfører $d \perp c$, thi for $da = A$, $ab = B$ og $bc = C$ har vi ifølge aksiom VII, at der findes et D således, at $D = ABC = da \cdot ab \cdot bc = dc$, hvoraf $d \perp c$. Af aksiom VII følger med andre ord, at hvis to linier har en fælles normal, er enhver normal til den ene af de to linier tillige normal til den anden. Man kan vise, at denne sætning endda er ensbetydende med aksiom VII.

Herefter er det nærliggende at definere to parallelle linier som to linier, der har en fælles normal. Aksiom VIII sikrer da, at to forskellige i denne betydning parallelle linier er ensbetydende med to linier, som ikke er incidente med samme punkt.

For en absolut geometri, som tilfredsstiller aksiomerne VII og VIII, viser sig at gælde, at der til A og B findes et m således, at $mAm = B$, altså at to vilkårlige punkter har en spejlingsakse. Dermed er specielt sikret, at der findes en flytning, som fører det ene af to givne punkter over i det andet, eller med andre ord, at to vilkårlige punkter er kongruente. Derimod er linier i almindelighed ikke kongruente, og to linier behøver således ikke altid at have en spejlingsakse.

En absolut geometri, som tilfredsstiller aksiomerne VII og VIII, er altså en geometri, som er mere almindelig end den sædvanlige euklidiske. Eksempler på en sådan geometri har man i en analytisk geometri, hvor man kun opererer med rationale tal, eller hvor man kun betragter hele tal og opererer med restklasser modulo et primtal ($\neq 2$). I de nævnte eksempler gælder det endda, at to på hinanden vinkelrette linier altid har en spejlingsakse. Tilføjer man yderligere følgende aksiom:

IX. Til a, b findes et m således, at $mam = b$,

får man en geometri, der f. eks. kan være en sædvanlig analytisk geometri over et såkaldt pythagoræisk tallegeme, d. v. s. et tallegeme K , som opfylder følgende betingelse:

Til $\alpha, \beta \in K$, hvor $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, findes et $\gamma \neq 0$ således, at $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

Et pythagoræisk tallegeme er — som man let ser — et dellegeme af de reelle tal, der omfatter alle rationale tal. Som eksempel kan foruden de reelle tal anføres legemet af alle konstruerbare tal.

LITTERATUR

F. BACHMANN: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. (Grundlehren der math. Wiss. 96.) Berlin 1959.

J. HJELMSLEV: *Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre*. Videnskabernes Selskabs mat.-fys. meddelelser 8 (11), 10 (1), 19 (12), 22 (6), 22 (13), 25 (10), København 1929–1949.

SIMPLE BEVISER FOR EN APPROXIMATIONSSÆTNING AF A. HURWITZ

ASMUS L. SCHMIDT

1. I teorien for diophantiske approximationer indtager følgende sætninger af Hurwitz [3] en central plads:

SÆTNING A. *Til ethvert reelt irrationalt tal ξ findes uendelig mange par af hele tal (p, q) , $q \neq 0$, som tilfredsstiller uligheden*

$$(1) \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} q^2}.$$

SÆTNING B. *Konstanten i (1) kan ikke forbedres. Thi er $c > \sqrt{5}$, findes der reelle irrationale tal ξ_0 , sådan at uligheden*

$$\left| \xi_0 - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c q^2}$$

kun har endelig mange løsninger (p, q) , $q \neq 0$. Tallet $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ er et sådant kritisk ξ_0 .

Hurwitz' originale bevis benyttede regulære kædebrøker. Efter at Borel [1] havde vist, at af 3 på hinanden følgende kædebrøkskonvergenter $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ($n \geq 1$) til ξ vil mindst en tilfredsstille (1), gav bl. a. Perron [6 (1929), p. 49] og Fujiwara [2. Gengivet i [6] (1954), p. 42] meget korte beviser for denne skærpede form af sætning A.

For sætning B har Perron [7 (1921), p. 130; (1939), p. 130] givet et simpelt bevis. Dette gengives for fuldstændighedens skyld i **2**. Det første helt elementære bevis for sætning A er givet af Le Veque. Dette bevis skitseres i **5**. Efter en lille forberedelse i **3** vil jeg i **4** give et nyt, simpelt bevis for sætning A, som er karakteristisk ved, at man trinvis når frem til uligheden (1).

2. Bevis for sætning B: Antag, at de hele tal (p, q) , $q \neq 0$ giver en løsning til uligheden

$$\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}, \quad c > \sqrt{5},$$

d. v. s. opfylder betingelsen

$$(2) \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} = \frac{1}{\gamma q^2}, \quad \text{hvor } |\gamma| > c > \sqrt{5}.$$

Da er

$$\frac{q}{2} - p = \frac{1}{\gamma q} - \frac{\sqrt{5}}{2} q,$$

hvoraf ved kvadrering

$$(3) \quad p^2 - pq - q^2 = \frac{1}{\gamma^2 q^2} - \frac{\sqrt{5}}{\gamma}.$$

Det hele tal på venstre side af (3) er $\neq 0$, da $q \neq 0$, og ligningen $x^2 - x - 1 = 0$ ingen rationale rødder har. Vi har derfor

$$\frac{1}{\gamma^2 q^2} + \frac{\sqrt{5}}{|\gamma|} \geq \left| \frac{1}{\gamma^2 q^2} - \frac{\sqrt{5}}{\gamma} \right| \geq 1,$$

$$\frac{1}{q^2} \geq \gamma^2 \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{|\gamma|} \right) > c^2 \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{c} \right) > 0.$$

q er altså begrænset: $|q| < \frac{1}{c\sqrt{1-\sqrt{5}/c}}$. Ifølge (2) er da også p begrænset.

Dette viser rigtigheden af sætning B.

3. Der findes uendelig mange par af indbyrdes primiske hele tal (p, q) , $q > 0$, som tilfredsstiller uligheden

$$(4) \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Bevis (Dirichlets skuffeprincip): Lad n være et vilkårligt naturligt tal. Vi betragter tallene $0, (\xi), \dots, (n\xi)$, hvor $(x) = x - [x]$. Blandt disse $n+1$ tal, som alle ligger i intervallet $0 \leq t < 1$, findes to, hvis indbyrdes afstand er mindre end $1/n$, d. v. s.

$$|(n_2\xi) - (n_1\xi)| < \frac{1}{n}, \quad \text{hvor } 0 \leq n_1 < n_2 \leq n,$$

$$|(n_2 - n_1)\xi - ([n_2\xi] - [n_1\xi])| < \frac{1}{n}.$$

Sættes $n_2 - n_1 = q$ og $[n_2\xi] - [n_1\xi] = p$, har vi altså $|q\xi - p| < 1/n$, $0 < q \leq n$, hvoraf

$$(5) \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Idet vi således til ethvert naturligt tal n bestemmer hele tal (p, q) , $q > 0$, som opfylder (5), får vi — i hvert fald formelt — uendelig mange løsninger (p, q) , $q > 0$ til (4). At der er uendelig mange forskellige par blandt disse, følger af, at

- a) tallene p/q har ξ som fortætningspunkt ifølge første ulighed i (5),
- b) ξ er irrational.

Skriver man hver især af de uendelig mange forskellige p/q , $q > 0$, som opfylder (4), på uforkortelig form, får man bestemt uendelig mange par (p, q) af den ønskede art.

4. Bevis for sætning A: Lad p, q være indbyrdes primiske hele tal, $q > 1$. Der findes da hele tal p_1, q_1 , sådan at

$$(6) \quad pq_1 - qp_1 = 1.$$

Herved er q_1 bestemt modulo q , d. v. s. q_1/q er bestemt modulo 1, og $q_1 \neq 0$, da $q > 1$.

δ og δ_1 defineres ved ligningerne

$$\xi - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2}, \quad \xi - \frac{p_1}{q_1} = \frac{\delta_1}{q_1^2}.$$

Sammenhængen mellem δ og δ_1 er da ifølge (6)

$$\frac{\delta_1}{q_1^2} = \frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1} + \frac{\delta}{q^2} = \frac{1}{qq_1} + \frac{\delta}{q^2},$$

altså

$$\delta_1 = \frac{q_1}{q} + \delta \left(\frac{q_1}{q} \right)^2.$$

Ideen i beviset er nu, at man ud fra en relativt dårlig approximation p/q til ξ (med $1/\sqrt{5} \leq |\delta| < 1$) under hensyntagen til (6) fremskaffer en bedre approximation p_1/q_1 (med $|\delta_1| < 1/\sqrt{5}$). For at udføre dette må vi undersøge, for hvilke x -værdier polynomiet $f(x) = x + \delta x^2$ opfylder betingelsen $|f(x)| < 1/\sqrt{5}$. Af symmetri Grunde kan vi nøjes med at se nærmere på tilfældet $\delta > 0$.

1) $\frac{1}{4}\sqrt{5} < \delta < 1$. De betragtede x -værdier udgør et åbent interval (fig. 1) omsluttende $-1/\delta$ og 0, altså af længde $> 1/\delta > 1$.

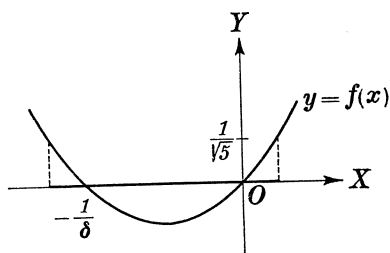


Fig. 1

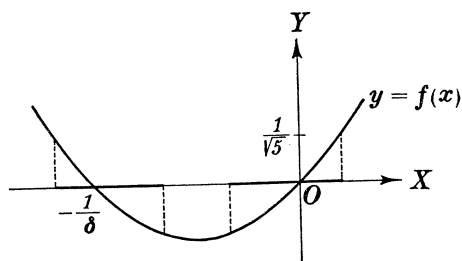


Fig. 2

2) $1/\sqrt{5} < \delta \leq \frac{1}{2}\sqrt{5}$. De betragtede x -værdier udgør to åbne intervaller (fig. 2), hvert af længde $\frac{\sqrt{1+4\delta/\sqrt{5}} - \sqrt{1-4\delta/\sqrt{5}}}{2\delta} > 1$.

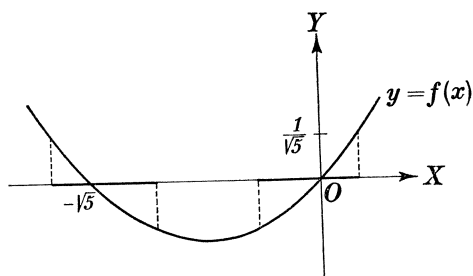


Fig. 3

3) $\delta = 1/\sqrt{5}$. De betragtede x -værdier udgør to åbne intervaller (fig. 3), hvert af længde 1; endepunkter i $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ og $-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}$.

Da q_1/q ved (6) kun er bestemt modulo 1, kan vi for $1/\sqrt{5} \leq \delta < 1$ i alle 3 tilfælde ved passende valg af q_1 opnå, at

$$|\delta_1| = \left| \frac{q_1}{q} + \delta \left(\frac{q_1}{q} \right)^2 \right| = \left| f \left(\frac{q_1}{q} \right) \right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

I tilfælde 3) benyttes, at endepunkterne er irrationale.

Beviset afsluttes nu således. I 3 viste vi, at der er uendelig mange par af indbyrdes primiske hele tal (p, q) , $q > 1$, for hvilke $|\delta| < 1$. (Vi ser bort fra de to par, hvor $q = 1$). Er yderligere $|\delta| < 1/\sqrt{5}$ for uendelig mange af de i 3 konstruerede par, er vi færdige med beviset. I modsat fald vil vi til ethvert af de uendelig mange par (p, q) med $1/\sqrt{5} \leq |\delta| < 1$ bestemme et par (p_1, q_1) efter ovenstående forskrift. Herved fås — i hvert fald formelt — uendelig mange par (p_1, q_1) med $|\delta_1| < 1/\sqrt{5}$. At der er uendelig mange forskellige par blandt disse, følger af, at

a) tallene p_1/q_1 har ξ som fortætningspunkt, idet

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{q|q_1|} \leq \frac{1}{q},$$

og tallene p/q vides at have ξ som fortætningspunkt,

b) ξ er irrational.

Hermed er sætning A bevist.

Bemærkning: For $\delta = 1/\sqrt{5}$ (fig. 3) sker der det ekstraordinære, at de betragtede intervaller har længden 1, samtidig med at afstanden mellem dem er 1. Disse omstændigheder sætter, som man let kan overbevise sig om, en naturlig grænse for gennemførelsen af ovenstående ræsonnement. Sætning B lærer os, at dette ikke er en mangel ved beviset, idet sætning A jo slet ikke gælder, når $\sqrt{5}$ erstattes med et større tal.

5. I en nylig udkommet talteori af Le Veque findes et meget smukt bevis for sætning A ved hjælp af Fareybrøker, som fortjener omtale i denne sammenhæng [5, p. 154]. Ved Fareyrækken F_n , hvor n er et vilkårligt naturligt tal, forstås her samtlige uforkortelige brøker p/q , $1 \leq q \leq n$ opstillet i voksende rækkefølge. For to på hinanden følgende brøker p/q og r/s gælder der da den simple relation $qr - ps = 1$.

LE VEQUES SÆTNING: Hvis ξ ligger mellem de på hinanden følgende brøker $\frac{p}{q}$ og $\frac{r}{s}$ i F_n , da vil mindst et af tallene $\frac{p}{q}$, $\frac{p+r}{q+s}$, $\frac{r}{s}$ tilfredsstille uligheden (1).

Da ξ er irrational, fås for $n = 1, 2, \dots$ uendelig mange forskellige løsninger til (1). (Smlgn. Le Veques sætning med Borels skærpelse af sætning A.)

Bevis (skitseret): Omkring hver uforkortelig brøk $\frac{a}{b}$ lægges et åbent interval $I_c\left(\frac{a}{b}\right) : \left\langle \frac{a}{b} - \frac{1}{cb^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{cb^2} \right\rangle$, $c > 0$. Le Veque kan nu under udnyttelse af ovennævnte relation vise, at intervallet $\left\langle \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right\rangle$ fuldstændigt overdækkes af $I_c\left(\frac{p}{q}\right)$, $I_c\left(\frac{p+r}{q+s}\right)$, $I_c\left(\frac{r}{s}\right)$, såfremt $0 < c \leq \sqrt{5}$. Heraf følger, at ξ tilhører et af intervallerne $I_{\sqrt{5}}\left(\frac{p}{q}\right)$, $I_{\sqrt{5}}\left(\frac{p+r}{q+s}\right)$, $I_{\sqrt{5}}\left(\frac{r}{s}\right)$, hvilket var sætningens påstand.

Læsere, som måtte være interesseret i at læse mere om diophantiske approximationer, henvises først og fremmest til den fortrinlige oversigt af Koksma [4].

LITTERATUR

- [1] E. BOREL: *Sur l'approximation des nombres irrationnels par des nombres rationnels*. C. R. Acad. Sci. Paris 136 (1903), pp. 1054–1055.

- [2] M. FUJIWARA: *Bemerkung zur Theorie der Approximation der irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen*. Tohoku Math. J. 11 (1916), pp. 239–242 og 14 (1918), pp. 109–115.
- [3] A. HURWITZ: *Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche*. Math. Ann. 39 (1891), pp. 279–284.
- [4] J. F. KOKSMA: *Diophantische Approximationen*. Erg. der Math. 4, Berlin 1936. Genoptrykt af Chelsea Publ. Co., New York 1951.
- [5] W. J. LE VEQUE: *Topics in number theory, I*. Reading (Mass.) 1956.
- [6] O. PERRON: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Leipzig 1929. 3. Aufl., Bd. I, Stuttgart 1954.
- [7] O. PERRON: *Irrationalzahlen*. Berlin 1921. 2. Aufl., Berlin 1939.

NUMERISK BESTÄMNING AV BÅGLÄNGDER

CARL-ERIK FRÖBERG

Antag att en funktion $y=f(x)$ är given och att båg­längden s skall bestämmas. Om funktionen är deriverbar har man

$$(1) \quad s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx ,$$

och denna integral kan beräknas antingen exakt eller numeriskt med t. ex. Simpsons formel. Om funktionen är given i tabellform för $x = \dots, x_0-h, x_0, x_0+h, x_0+2h, \dots$ skulle man vara tvungen att nume­riskt beräkna derivatan i alla punkter. För att undvika detta kan följande metod användas.

Ur den givna tabellen bygges ett differensschema upp t. o. m. andra differenserna (definierade genom $\delta^2 y_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$). Sedan använder vi Everett's interpolationsformel i intervallet $x_0 \leq x \leq x_0 + h = x_1$:

$$\begin{aligned} y_p = & \, py_1 + \binom{p+1}{3} \delta^2 y_1 + \binom{p+2}{5} \delta^4 y_1 + \dots \\ & + qy_0 + \binom{q+1}{3} \delta^2 y_0 + \binom{q+2}{5} \delta^4 y_0 + \dots , \end{aligned}$$

där $x = x_0 + ph$ och $p+q=1$. Derivation ger:

$$\begin{aligned} y'_p = \frac{1}{h} \Bigg[& y_1 - y_0 + \frac{3p^2-1}{6} \delta^2 y_1 - \frac{3q^2-1}{6} \delta^2 y_0 + \frac{5p^4-15p^2+4}{120} \delta^4 y_1 \\ & - \frac{5q^4-15q^2+4}{120} \delta^4 y_0 + \dots \Bigg] . \end{aligned}$$

Vi sätter nu $k = y_1 - y_0$ och $s_0 = \sqrt{h^2 + k^2}$. Då gäller:

$$\begin{aligned}
 s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{h^2 + h^2 y_p'^2} dp = s_0 \int_0^1 \left[1 + \frac{3p^2-1}{6s_0^2} k \delta^2 y_1 \right. \\
 &\quad - \frac{3q^2-1}{6s_0^2} k \delta^2 y_0 + \frac{5p^4-15p^2+4}{120s_0^2} k \delta^4 y_1 - \frac{5q^4-15q^2+4}{120s_0^2} k \delta^4 y_0 \\
 &\quad + \left(1 - \frac{k^2}{s_0^2} \right) \left(\frac{(3p^2-1)^2}{72s_0^2} (\delta^2 y_1)^2 + \frac{(3q^2-1)^2}{72s_0^2} (\delta^2 y_0)^2 \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{(3p^2-1)(3q^2-1)}{36s_0^2} \delta^2 y_0 \delta^2 y_1 \right) + \dots \right] dp.
 \end{aligned}$$

Här har formeln $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$ kommit till användning. Vid integrationen försvinner alla lineära termer och vi finner:

$$(2) \quad s = s_0 + \frac{h^2}{360s_0^3} (4(\delta^2 y_0)^2 + 4(\delta^2 y_1)^2 + 7\delta^2 y_0 \delta^2 y_1) + \dots$$

Om intervalllängden h är tillräckligt liten, kan man i varje intervall ersätta $\delta^2 y$ -termerna i ändpunkterna med medelvärdet:

$$\delta^2 y = \frac{1}{2}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1); \quad \delta^2 y_0 \simeq \delta^2 y_1 \simeq \delta^2 y,$$

och därvid erhålles följande enkla approximativa formel:

$$(3) \quad s = s_0 \cdot \left(1 + \frac{h^2(\delta^2 y)^2}{24s_0^4} \right).$$

Numeriska exempel:

1. Sök båg längden mellan $x=0$ och $x=0.1$ för parabeln $y=x^2$.

a) Exakt: $\frac{1}{2} \left(0.1\sqrt{1.04} + \frac{1}{2} \log(0.2 + \sqrt{1.04}) \right) = 0.10066 \ 272.$

b) Ur (3): $\sqrt{0.0101} \left(1 + \frac{0.01 \cdot 0.02^2}{24 \cdot 0.0101^2} \right) = 0.10066 \ 295.$

c) Ur Simpsons formel: $0.10066 \ 257.$

2. Sök båg längden mellan $x=0.2$ och $x=0.3$ för cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

a) Exakt: $\arcsin 0.3 - \arcsin 0.2 = 0.10333 \ 47.$

b) Ur (3): $0.10333 \ 55.$

ON THE EXPANSION OF π IN A REGULAR CONTINUED FRACTION, II

PEDER PEDERSEN

A paper [1] which recently appeared in NMT reported the results of computations by which the number π was converted into a regular continued fraction. The partial quotients, a_n , were then calculated up to and including a_{200} . This computation has later been extended, and it is the purpose of this paper to present the results obtained. After the conclusion of the computations, it is now possible to give all the partial quotients up to and including a_{400} in the expansion of π in a regular continued fraction.

As in the previous series of computations, the method described by D. H. Lehmer was used in a slightly modified form. A characteristic feature of this method is that the computation of the partial quotients is performed in several smaller steps, by which the work involved in the Euclidean algorithm is appreciably reduced. The details of this procedure were described in [1], and it will here suffice to report the results of the latest computations.

Table I shows the partial quotients, a_n , in the expansion of the continued fraction for π from a_{200} to a_{400} . As in the corresponding table in [1], α designates the number which is written with the first two digits in the subindex n , while β denotes the last digit of the subindex. The largest number occurring in the table is $a_{307} = 436$.

As the computation of the numbers x_n , which enter into the Euclidean algorithm, can be performed when only the denominators of the convergents of the continued fraction are known, it is not necessary to calculate the numerators. Of the denominators of convergents used in the computations, I state only four, viz. B_{299} , B_{300} , B_{399} and B_{400} . The last two of these may be used as the starting point for a continuation of the computations.

Tables II and III are continuations of corresponding tables in [1]. Table II shows the difference $M_n(\pi) - K$, where $M_n(\pi) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, while

$K=2.685550$ is Khintchine's constant. Table III gives the values of $\sqrt[n]{B_n}-L$, where $L=3.275823$ is Lévy's constant. It appears from the two tables that also for $200 < n \leq 400$, $M_n(\pi)-K$ and $\sqrt[n]{B_n}-L$ may assume comparatively large values, and that they coincide as far as the signs are

$\alpha \backslash \beta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	3	1	23	1	15	1	3	7	1	16
21	1	2	1	21	2	1	1	2	9	1
22	6	4	127	14	5	1	3	13	7	9
23	1	1	1	1	1	5	4	1	1	3
24	1	1	29	3	1	1	2	2	1	3
25	1	1	1	3	1	1	10	3	1	3
26	1	2	1	12	1	4	1	1	1	1
27	7	1	1	2	1	11	3	1	7	1
28	4	1	48	16	1	4	5	2	1	1
29	4	3	1	2	3	1	2	2	1	2
30	5	20	1	1	5	4	1	436	8	1
31	2	2	1	1	1	1	1	5	1	2
32	1	3	6	11	4	3	1	1	1	2
33	5	4	6	9	1	5	1	5	15	1
34	11	24	4	4	5	2	1	4	1	6
35	1	1	1	4	3	2	2	1	1	2
36	1	58	5	1	2	1	2	1	1	2
37	2	7	1	15	1	4	8	1	1	4
38	2	1	1	1	3	1	1	1	2	1
39	1	1	1	1	9	1	4	3	15	1
40	2									

Table I

concerned. In fig. 1, the values of $M_n(\pi) - K$ are plotted as ordinates against the values of n as abscissas for $n = 20, 30, \dots, 400$. The left half of the curve was also shown (in a larger scale) in [1].

$B_{299} =$										2
38026	14343	04983	14519	34572	48959	03698	90627	82578	39385	
63771	71291	99431	97458	25181	56381	82165	09912	89646	43187	
84219	60854	06037	82944	96460	41498	12827	27446	44861	69096	

$B_{300} =$										12
78208	23834	41736	32354	37461	15400	29653	14236	01306	23103	
38745	91345	73784	43335	46653	59491	53104	00237	94646	53511	
23598	27100	33699	16958	28126	38378	82396	51542	02291	45241	

$B_{399} =$										
583	35421	91526	94297	73392	68937	20269	24319	34413	35724	
95096	75206	91420	13109	86661	93995	08709	09562	53397	26859	
81654	30015	27870	01336	70742	16016	28963	61698	11924	30887	
55019	08861	53423	35903	28985	53679	13966	61953	46979	36177	

$B_{400} =$										
1714	30065	84222	35703	25880	23829	20172	78477	52672	12235	
42207	31857	48012	62273	55746	42672	64728	83962	71234	39686	
02275	85194	93488	30290	07370	57889	94882	00710	88953	88002	
85547	85920	87858	22818	16194	01885	38774	07549	97168	47937	

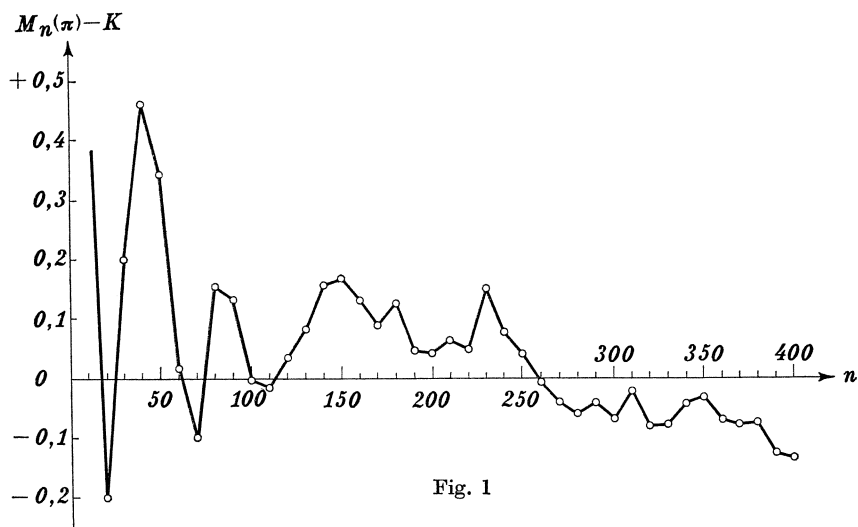


Fig. 1

n	$M_n(\pi) - K$
200	+ 0.0418
210	+ 0.0630
220	+ 0.0506
230	+ 0.1502
240	+ 0.0764
250	+ 0.0411
260	- 0.0049
270	- 0.0380
280	- 0.0589
290	- 0.0401
300	- 0.0677
310	- 0.0233
320	- 0.0792
330	- 0.0753
340	- 0.0436
350	- 0.0306
360	- 0.0687
370	- 0.0770
380	- 0.0728
390	- 0.1246
400	- 0.1331

Table II

n	$\sqrt[n]{B_n} - L$
200	+ 0.0163
210	+ 0.0278
220	+ 0.0182
230	+ 0.1199
240	+ 0.0539
250	+ 0.0222
260	- 0.0215
270	- 0.0515
280	- 0.0752
290	- 0.0560
300	- 0.0866
310	- 0.0367
320	- 0.0903
330	- 0.0855
340	- 0.0577
350	- 0.0490
360	- 0.0853
370	- 0.0914
380	- 0.0902
390	- 0.1375
400	- 0.1455

Table III

REFERENCE

- [1] PEDER PEDERSEN: *On the expansion of π in a regular continued fraction*. NMT 6 (1958), pp. 57-68.

LITT KOBLINGSALGEBRA

ODDLEIV HOLTE

Matematisk behandling av problemer i koblingsteknikken er av forholdsvis ny dato. Det var amerikaneren C. E. Shannon [4] som i 1938 utviklet en teori for å analysere slike problemer. Teorien er blitt kalt koblingsalgebra (eng. »switching algebra«). Denne teorien viste seg å ha mange likhetpunkter med en teori om matematisk logikk som George Boole [2] kom med nesten 100 år tidligere. Koblingsalgebraen blir derfor undertiden også kalt *Boole's algebra*. Den har i tiden etter siste verdenskrig funnet store anvendelser, bl. a. ved planlegning og oppbygning av elektroniske sifferregnemaskiner.

I koblingsteknikken har man å gjøre med elementer som kan ha to forskjellige tilstander. Slike elementer finnes det mange av i elektroteknikken. En bryter kan være av eller på, et reléanker kan være tiltrukket eller ikke, et rør kan være ledende eller i »cut-off« (blokert) osv.

For å symbolisere disse to tilstander kan vi karakterisere den ene med 1 og den andre med 0. Hvilken tilstand som blir kalt 1 og hvilken som blir kalt 0 er prinsipielt likegyldig. Som regel vil det imidlertid være naturligere å kalle en bestemt tilstand 1 og den andre 0 enn omvendt. F. eks. vil man helst kalle den tilstand at en bryter er lukket for 1 og den tilstand at den er åpen for 0.

Her må vi understreke at sifrene 1 og 0 ikke står for tall i vanlig betydning. I koblingsalgebraen får vi en rekke regneregler som er akkurat de samme som i vanlig algebra, men også noen som er forskjellige fra vanlig algebra. Av denne grunn må det presiseres at koblingsalgebra ikke er en algebra med tall, men med *tilstander*.

Postulater. La x betegne koblingselementets tilstand. Da x bare kan anta to forskjellige »verdier«, kalles den en *binær variabel*. Vi har da følgende postulater som teorien bygger på:

(Ia) $x = 0$ hvis $x \neq 1$	(Ib) $x = 1$ hvis $x \neq 0$
(IIa) $0 \cdot 0 = 0$	(IIb) $1 + 1 = 1$
(IIIa) $1 \cdot 1 = 1$	(IIIb) $0 + 0 = 0$
(IVa) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$	(IVb) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
(Va) $0' = 1$	(Vb) $1' = 0$.

Tegnet $\cdot$ leses »og«, og operasjonen kalles *logisk multiplikasjon*. Et annet symbol for det samme er $\&$. Men ofte sløyfes tegnet helt ved logisk multiplikasjon hvis det ikke er fare for misforståelse.

Tegnet $+$ leses »eller«, og operasjonen kalles *logisk addisjon*. Et annet symbol som også brukes er $\vee$.

x' leses »ikke x «. En annen måte å skrive det samme på er $\bar{x}$. Operasjonen kalles *komplementering*.

Postulatet I sier at den variable x kan anta de to »verdiene« 0 og 1. Postulatet V sier for så vidt det samme bare med en annen skrivemåte. I postulatene II–IV er de oppførte relasjoner de samme som for vanlig algebra bortsett fra IIb.

Videre legger vi merke til at postulatene er skrevet parvis, og at vi kommer fra a til b ved å bytte om 0 og 1, og $\cdot$ og $+$.

Ut fra de ovenfor anførte postulater kan vi nå vise en rekke setninger eller regneregler. Når det gjelder bevisene i koblingsalgebraen, er de prinsipielt lette å gjennomføre. Når vi skal vise gyldigheten av en setning, kan vi vise at den gjelder for *alle mulige kombinasjoner* av de variable. Og da de variable bare kan anta verdiene 0 og 1, er dette ofte lett overkommelig.

Setninger. Vi skal her ta med en del av de viktigste setningene i koblingsalgebraen.

(1a) $x + 0 = x$	(1b) $x \cdot 1 = x$
(2a) $1 + x = 1$	(2b) $0 \cdot x = 0$
(3a) $x + x = x$	(3b) $x \cdot x = x$
(4a) $x + x' = 1$	(4b) $x \cdot x' = 0$
(5a) $x + y = y + x$	(5b) $x \cdot y = y \cdot x$
(6a) $(x + y) + z = x + (y + z)$	(6b) $(xy)z = x(yz)$
(7a) $(x + y)z = xz + yz$	(7b) $xy + z = (x + z)(y + z)$
(8a) $(x + y)' = x'y'$	(8b) $(xy)' = x' + y'$
(9a) $x + xy = x$	(9b) $x(x + y) = x$
(10a) $(x + y')y = xy$	(10b) $xy' + y = x + y$.

Som eksempel på bevismåten skal vi ta setn. (9a). Vi setter da opp en tabell over alle mulige kombinasjoner av de variable x og y . En slik tabell kalles en kombinasjonstabell.

De to kolonnene til høyre i tab. 1 er regnet ut bare v. hj. a. postulatene. Sammenligner vi kolonnen lengst til høyre med kolonnen lengst til venstre, ser vi at for alle mulige kombinasjoner av x og y er de like. Altså gjelder

$$x = x + xy.$$

x	y	xy	$x + xy$
0	0	0	$0 + 0 = 0$
0	1	0	$0 + 0 = 0$
1	0	0	$1 + 0 = 1$
1	1	1	$1 + 1 = 1$

Tabell 1.

Som regel kan vi imidlertid bevise en setning enklere ved å ta tidligere viste setninger til hjelp. Ved å bruke noen av de foregående setningene, kan vi vise setning (9a) på følgende måte:

$$x + xy = x \cdot 1 + xy = x(1 + y) = x \cdot 1 = x,$$

idet vi omskriver v. hj. a. setningene (1b), (7a), (2a) og tilslutt (1b).

Noen anvendelser. Mellom punktene a og b på fig. 1 er det plasert en bryter. Den kan enten være åpen eller lukket. Vi betegner tilstanden når

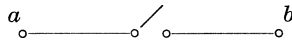


Fig. 1. Bryter.

bryteren er lukket med 1 og åpen med 0. Valget spiller som tidligere nevnt ingen prinsipiell rolle, men hvis vi tenker på en overføring (transmisjon) av signaler fra a til b eller omvendt, er det naturligst å velge som vi har gjort¹.

Vi tenker oss at vi plasserer en spenning V_a mellom punkt a og jord og måler spenningen V_b mellom b og jord. Når bryteren er åpen blir $V_b = 0$, og når bryteren er lukket blir $V_b = V_a$. Vi definerer nå en størrelse som kalles *transmisjonen* på følgende måte:

$$T = \frac{V_b}{V_a}.$$

Vi ser at $T = 0$ når bryteren er åpen og $T = 1$ når bryteren er lukket. T blir altså en binær variabel.

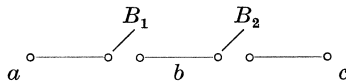


Fig. 2. Seriekobling av to brytere.

Har vi to brytere som på fig. 2, kan hver av disse være åpen eller lukket. Det gir i alt 4 kombinasjoner. Vi kan sette opp en tabell (tab. 2)

¹ I litteraturen brukes også den andre måten.

over alle mulighetene og også ta med den resulterende forbindelsen $a-c$ som er en *seriekobling* av de to brytere. Betegner vi transmisjonen gjen-

B_1	B_2	Serie- forb.	x_1	x_2	T
Åpen	Åpen	Åpen	0	0	0
Åpen	Lukket	Åpen	0	1	0
Lukket	Åpen	Åpen	1	0	0
Lukket	Lukket	Lukket	1	1	1

Tabell 2.

Tabell 3.

nom B_1 med x_1 , gjennom B_2 med x_2 , og transmisjonen fra a til c med T , så kan vi skrive tabellen som vist i tab. 3. Vi ser da at vi har

$$T = x_1 x_2 .$$

Da T avhenger både av x_1 og x_2 , sier man at T er en funksjon av x_1 og x_2 . Den siste relasjonen kan vi lett generalisere til å gjelde for n seriekoblede brytere (eller andre binære elementer):

$$T_s = x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^n x_i .$$

Altså: transmisjonen gjennom n seriekoblede elementer kan skrives som det logiske produkt av de enkelte elementers transmisjon.

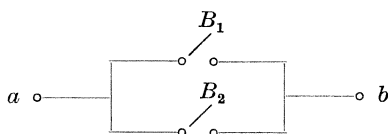


Fig. 3. Parallellkobling av brytere.

På helt tilsvarende måte som ovenfor kan vi finne at transmisjonen gjennom to *parallellkoblede* brytere kan skrives (med samme betegnelser som tidligere):

$$T = x_1 + x_2 .$$

Denne setningen kan utvides til n parallellkoblede elementer:

$$T_p = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i .$$

Transmisjonen gjennom n parallellkoblede elementer finnes ved logisk addisjon av de enkelte elementers transmisjon.

Nå kan vi beskrive ethvert ledningsnett (topolsnett) som bare inneholder serie- og parallellkoblede brytere ved hjelp av de ovenfor brukte symboler. Og omvendt kan vi representere enhver logisk formel som bare inneholder de samme symboler med et slikt nettverk.

Eksempel 1: Finn transmisjonen mellom a og c på fig. 4.

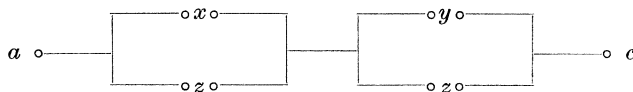


Fig. 4.

Her er istedenfor det tidligere anvendte symbol for en bryter brukt et mer generelt symbol for en kontakt, som enten kan være åpen eller lukket (prinsipielt det samme som en bryter).

Man får direkte

$$T = (x+z)(y+z),$$

som kan forenkles:

$$T = xy + yz + xz + zz = xy + z(y + x + 1) = xy + z.$$

Nettverket kan derfor enklere realiseres slik som vist i fig. 5. Denne forenklingen kunne man også se direkte av fig. 4. Men ved mer kompliserte koblinger gjøres forenklingene sikrest ved regning.

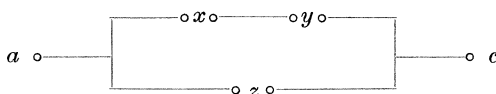


Fig. 5.

Bestemmelse av transmisjonsfunksjonen på grunnlag av kombinasjonstabell. Vi tenker oss at vi har en transmisjonsfunksjon T som er en funksjon av f. eks. tre binære variable x , y og z . For hver enkelt av de mulige kombinasjoner av x , y og z er det ført opp hvilken verdi T skal ha. Spørsmålet er da hvordan funksjonen ser ut, og hvordan man kommer fram til den.

Eksempel 2: Transmisjonsfunksjonen i tabell 4.

Først forsøker vi å få verdiene $T=1$ oppfylt. Vi ser på uttrykket

$$T = x'y'z + xy'z' + xy'z.$$

Uttrykket blir 1 om noen av addendene er 1. En addend blir 1 om hver av de tre faktorene som inngår er 1. x' symboliserer en variabel (kontakt) som er 0 (åpen) når x er 1

x	y	z	T
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Tabell 4.

(lukket) og omvendt. Da ser vi at med det viste uttrykk får vi $T=1$ for de tre tilfellene som er oppført, og bare da. Det anførte uttrykk for T fås ved at man tar de linjene i tabellen der $T=1$, skriver ned xyz for hver slik linje, adderer, og føyer til en apostrof for hvert sted som svarer til en null i tabellen.

Uttrykket for T kan forenkles:

$$T = y'(x'z + xz' + xz) = y'(z(x' + x) + xz') = y'(z + xz') = y'(x + z),$$

hvor den siste omforming bygger på (10b).

Nå er spørsmålet om uttrykket for T er riktig for de tilfellene der T skal bli null. Det kan vi naturligvis undersøke ved å prøve oss fram. Men vi vil heller forsøke ut fra de fem kombinasjonene som gir $T=0$ å bestemme en transmisjonsfunksjon som ihvertfall blir lik 0 for de fem nevnte tilfeller.

Om vi skriver

$$T_1 = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y' + z)(x' + y' + z'),$$

blir $T_1=0$ om noen av faktorene $=0$. Og da ser vi at T_1 blir 0 for de fem tilfellene som er oppført i tabellen. T_1 dannes ved at man tar hver linje i tabellen der funksjonen er 0, skriver ned $x + y + z$ for hver slik linje, danner det logiske produkt og føyer til en apostrof for hvert sted som svarer til en 1-er i tabellen.

For å forenkle uttrykket for T_1 , gjør vi bruk av følgende setning:

$$(11) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \dots, x_n) + x'_1 f(0, x_2, \dots, x_n).$$

Her er $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ generelt et uttrykk dannet av de binære variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ ved hjelp av operasjonene logisk addisjon og multiplikasjon samt komplementering. Setter man først $x_1=1$, $x'_1=0$ og etterpå $x_1=0$, $x'_1=1$, vil i begge tilfeller ligningen reduseres til en identitet. Anvender vi (11) på uttrykket for T_1 , får vi

$$T_1 = x(y' + z)(y' + z') + x'(y + z)(y' + z)(y' + z').$$

Vi anvender samme setning en gang til:

$$T_1 = y(xzz' + x'zz') + y'(x + x'z).$$

Da $zz'=0$, blir

$$T_1 = y'(x + x'z) = y'(x + z).$$

Vi ser altså at vi har fått samme uttrykk for T_1 som for T . Det var ingen tilfeldighet, det gjelder helt generelt. (Beviset tas ikke med her; det finnes f. eks. i [3] s. 84.) Hvis det er forskjellig antall 0-er og 1-ere i kolonnen for T , velger man naturligvis den måten å sette opp uttrykket for T på, som gir minst regnearbeid.

Eksempel 3 (smlgn. [1]): Det elektriske lys i et rom ønskes kontrollert av tre brytere på en slik måte at hvis lyset er slukket, skal man ved å vri på en vilkårlig bryter kunne tenne det, hvorpå det skal kunne slukkes fra en vilkårlig bryter.

De tre brytere karakteriseres med x , y og z , og den tilstand at lyset er tent med 1. La oss fastsette at lyset skal være slukket når alle tre bryterne er i stilling »av«. Kombinasjonstabellen er vist i tab. 5. Etter det som er sagt ovenfor var det nok, for å sette opp uttrykket for T , å ta med de linjene i tabellen der $T=1$, men for fullstendighets skyld er hele tabellen tatt med.

Vi får

$$T = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz = x'(y'z + yz') + x(yz + y'z').$$

Nettverket blir da som vist i fig. 6.

x	y	z	T
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabell 5.

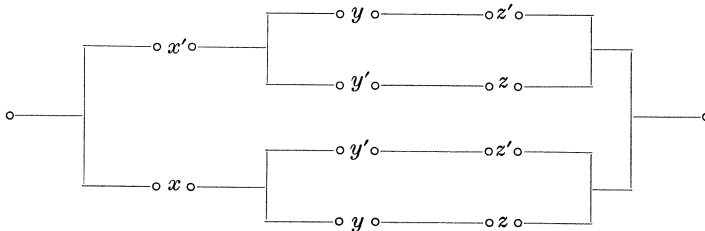


Fig. 6.

Det ønskede nettverk kan i dette eksempelet realiseres med noe færre kontakter enn de som er vist i fig. 6, ved hjelp av en såkalt brokobling. Men da vi ovenfor bare har behandlet serie- og parallellkobling, skal vi ikke gå nærmere inn på det her.

LITTERATUR

- [1] P. V. ARLEV: *Praktisk anvendelse av Boole's algebra indenfor koblingsteknikken*. Tele-teknik, 1. april 1957.
- [2] G. BOOLE: *An investigation of the laws of thought*. London 1854.
- [3] S. H. CALDWELL: *Switching circuits and logical design*. New York 1958.
- [4] C. E. SHANNON: *A symbolic analysis of relay and switching circuits*. Trans. AIEE 57 (1938), pp. 713–723.

BOKMELDINGER

N. G. DE BRUIJN: *Asymptotic methods in analysis*. (Bibliotheca Mathematica 4.) North-Holland Publishing Co., Amsterdam; P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1958. 12 + 200 pp. Guilders 20.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 170.)

Som eksempler på asymptotiske relationer kan nævnes Stirlings formel for gammafunktionen, samt den elementære relation

$$e^{-x} \int_1^x t^{-1} e^t dt = x^{-1} + x^{-2} + \dots + (n-1)! x^{-n} + O(x^{-n-1}),$$

der også skrives som en asymptotisk rækkeudvikling

$$e^{-x} \int_1^x t^{-1} e^t dt \approx x^{-1} + x^{-2} + 2! x^{-3} + \dots,$$

hvor rækken er divergent for alle x . Bogen er et forsøg på en systematisk fremstilling af de metoder, der anvendes ved udledning af sådanne relationer, men det fremhæves samtidig stærkt, at problemstillingen er af en sådan art, at matematisk erfaring og intuition må spille en væsentlig rolle ved behandlingen.

Bogen forudsætter kendskab til elementær kompleks funktionsteori samt Poissons og Maclaurins summationsformler, men ellers forudsættes kun kendskab til elementær matematisk analyse.

Den første trediedel af bogen er meget let læselig og behandler asymptotiske vurderinger af implicit givne funktioner, samt summer og integraler. Den midterste trediedel omtaler vurderinger af komplekse integraler ved hjælp af sadelpunktmetoden, som først beskrives grundigt geometrisk og belyses ved simple eksempler, og som derefter anvendes til vanskelige vurderinger. Bogens sidste trediedel behandler metoder, der af forfatteren betegnes som indirekte. Herunder vises eksempler på Taubersætninger, iteration af funktioner og enkelte eksempler på asymptotisk vurdering af løsninger til differentialligninger.

Bogen har fået et meget tiltalende særpræg gennem forfatterens grundige motivering af valget af metode i hvert enkelt tilfælde, og dette i forbindelse med de udmærkede opgaver gør bogen særlig egnet til selvstudium. Anmelderen vil på det varmeste anbefale bogen til alle ældre studerende, samt til alle, som underviser i matematik eller forfatter lærebøger i matematik.

H. Tornehave

STEN HENRYSSON: *Elementär statistik för psykologer, pedagoger m. fl.* 2:a upplagan. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1959. 118 s.

(Innehållsförteckning i NMT, denna årgång, s. 89.)

Forfatteren sier i innledningen: »Denna bok är avsedd att ge kunskap om de elementära statistiska metoder, som vanligen kommer till användning inom sociala och biologiska vetenskaper. Boken är skriven speciellt med tanke på de studerande, som inte är matematiskt inriktade men ändå behöver kännedom om grundläggande begrepp och metoder inom statistiken. För att kunna följa framställningen behöver läsaren knappast på någon punkt mer matematiska kunskaper än de varje student bör ha inhämtat, vilken gymnasielinje han än genomgått.»

Å gi en innføring i statistisk metode og tenkemåte for studenter med såvidt mangelfulle matematiske kunnskaper er en vanskelig oppgave. Denne boka er da heller ikke blitt vellykket. Fremstillingen er ofte uklar, formuleringen uheldig, ja på flere steder direkte gal. La meg bare for å understøtte denne påstand gi noen eksempler.

På side 69 forklares begrepet konfidensintervall på følgende måte: »Ofta vill man veta sannolikheten för att värdet ligger inom ett visst intervall med gräns uppåt och nedåt lika långt från medelvärdet. Ett sådant intervall kallas för konfidensintervall och motsvaras av en viss säkerhetsnivå i procent. Sannolikheten för att ett värde i en normalfördelning ligger t. ex. i intervallet mellan gränserna $z = -2$ och $z = +2$ ($\mu \pm 2\sigma$) är sålunda 95,4%. Detta procenttal finns i tabell II på sid. 114, som anger den procentuella andel av normalfördelningen, som ligger mellan vissa konfidensgränser uttryckta i standardpoäng.» Leseren må etter dette få inntrykk av at det at en standardisert normalfordelt variabel med 95,4% sannsynlighet ligger mellom -2 og $+2$, betyr at intervallet $(-2, +2)$ er et konfidensintervall. Nå skal et konfidensintervall pr. definisjon utsi noe om en parameter i vedkommende sannsynlighetsfordeling, og ovenstående »definisjon» er derfor meningsløs. Videre gis leseren inntrykk av at et konfidensintervall alltid er symmetrisk (rundt parameteren). Det har endepunkter »uppåt och nedåt lika långt

från medelvärde». Dette er ingen nødvendig egenskap for et konfidensintervall og i mange situasjoner ikke en gang hensiktsmessig. En slik situasjon har en f. eks. når en skal bestemme et konfidensintervall for standardavviket σ i en normalfordeling. Det kan til og med være hensiktsmessig med konfidensintervaller av typen $(-\infty, a)$ i noen situasjoner. Når det eksempel som skal illustrere grunnbegrepene er såvidt misvisende, blir det selvsagt umulig for en leser å oppfatte hva et konfidensintervall for en parameter er, og kapitel 10 blir nesten uforståelig.

På side 71 diskuteres estimering av »populationsmedelvärde» (forventningsverdien) i en normalfordeling (μ, σ) , hvor σ er ukjent. Forfatteren sier her: »När samplen är små följer samplingfördelningen för medelvärden den s. k. t -fördelningen i stället för normalfördelningen.» Siden intet annet er sagt må leseren med medelvärde forstå den aritmetiske middelvärde $\bar{X}$. Nå er det som kjent ikke middeltallet $\bar{X}$ som er t -fordelt, men observatoren (eng. »statistic«)

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}},$$

og denne er t -fordelt hva enten n er stor eller liten. En helt annen sak er det at t -fordelingen for store n tilnærmet faller sammen med normalfordelingen $(0, 1)$. Dette berettiger dog ikke den påstand at »normalfordelingen kan ses som ett specialfall av t -fordelingen gällande för stora sampel» (!) (footnote side 71).

Et eksempel på uheldig formulering er følgende som finnes på side 77: »... samplingfördelningen är t -fördelad». Det er selvsagt ikke fordelingen som er t -fordelt, men den observator (T) som studeres.

På side 82 står det: »Skillnaden $M - \mu_2$ beräknad i ett antal slumpvis tagna sampel ur populationen skall överförd till t -värden enligt nollhypotesen fördela sig runt värdet 0 med spridningen 1.» Dette må bety at forventning og varians i en t -fordeling er h.h.vis 0 og 1. Riktignok er forventningsverdien 0, men variansen i en t -fordeling med n frihetsgrader er $\frac{n}{n-2}$. Tar en f. eks. 9 observasjoner ($n=8$) fra en normalfordeling $(0, 1)$ og betrakter observatoren

$$T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}},$$

har denne varians $\frac{8}{6} = 1,33$ og ikke 1.

På side 95 står det: »Samplingfordelingen av χ^2 för olika frihetsgrader börjar vid noll och ökar i positiv riktning.« Hva som menes med »ökar i positiv riktning« er vanskelig å forstå. Er det den kumulative fordelingsfunksjon forfatteren tenker på, er utsagnet banalt; er det sannsynlighetstettheten, er utsagnet galt. Hvis meningen er å uttrykke det som står i den etterfølgende setning: »Ju større frihetsgraden är, ju större χ^2 -värdet kan uppkomma på ren slump«, ja da er formuleringen mildest talt uheldig, og uforståelig for dem som leser dette som en innføring.

Det skulle være unødvendig å gå i flere detaljer. Jeg kan med min beste vilje ikke si at boken kan anbefales, hverken til selvstudium eller som støttetekst for forelesninger.

Arnljot Høyland

A. V. POGORELOV: *Differential geometry*. (Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron.) P. Noordhoff, Groningen, 1959. 9 + 171 pp. Paper cover \$ 3.90, cloth bound \$ 4.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 131.)

En russisk lærebok i differensialgeometri er sjelden kost hos oss. Det er derfor med en viss nysgjerrig spenning at en gir seg til med lesningen. Og en har heller ikke lest langt, før en er klar over at denne er atskillig annerledes enn de lærebøker i differensialgeometri som vi ellers er vant med.

Det stoff den behandler, er stort sett hva vi ville betegne som temmelig elementært. Her i Norge hører det vel i stor utstrekning til bifagspensumet. Men det er i *behandlingen* av dette stoffet at forfatteren ønsker å være grundigere enn andre og har gitt oss noe nytt. Det blir lagt stor vekt på definisjon av kurve og flate, og i sin framstilling bygger forfatteren da på begreper og sammenhenger fra topologien. Derved får han gitt en klar og bestemt definisjon av de grunnbegreper, kurve og flate osv., som han ønsker å behandle i boka, mens andre forfattere, synes det meg, ofte kjører i veg med sine kurver og flater uten at noen bestemt definisjon av disse begreper noen gang blir tydelig presisert. En kan derfor si at prof. Pogorelov legger tyngden av sin framstilling forut for der hvor andre pleier å begynne. Eller som han sier i innledningen: »The author's aim is to present a rigorous discussion of the fundamentals of differential geometry and of the methods ...«. En må derfor si at denne boka utfyller den tradisjonelle litteraturen vi har, og den kan slik absolutt anbefales til alle som er interessert i dette faget. Jeg vet i alle fall ikke av noe annet verk som egentlig kan erstatte den framstilling som her foreligger. En må også nevne den behandling av singulære punkter som forfatteren gjennomfører, et emne som ellers behandles nokså lettvtint.

Men hvor langt går han i sin »rigorøse diskusjon«? Det hender stadig at han bryter av sin drøfting med å si at en fullstendig utredning ville føre oss alt for vidt. Boka er jo ment som en forholdsvis elementær lærebok. Forfatteren forutsetter også som gitt den rette linje i form av intervallet $\langle 0,1 \rangle$, og han forutsetter planet, uten å nevne med ett ord (såvidt jeg kan huske) at her kan ligge visse problemer, og at dette er noe han uttrykkelig forutsetter som gitt. Når han først trekker inn topologien, så forutsetter det noe kjennskap til dette fag fra leserens side, ellers kan man vanskelig ha fullt utbytte av lesningen. Og da er det et spørsmål om ikke forfatteren kunne ha gjort enda mer ut av dette. Når det først kjøres opp med et abstrakt apparat, så kunne det være morsomt om det kom noe mer ut av det enn bare de aller vanligste anskuelige kurver og flater.

Jeg kan tenke meg at det fra pedagogisk side kan innvendes at en student (i alle fall hos oss) vil føle dette topologiske apparat som en tyngsel, som hindrer tilegnelsen av differensialgeometriens tradisjonelle stoff, så mye mer som forfatteren — for at ikke boka skulle bli for stor — har vært nødt til å skyte ut mye av det gamle stoffet, og bare har behandlet det i form av oppgaver ved slutten av hvert avsnitt. (Det forutsettes derfor mye oppgaveregning.) På den annen side vil en viderekommen helst hatt enda grundigere behandling av »the fundamentals«. Men det er naturligvis vanskelig å veie disse hensyn mot hverandre.

Ordningen av stoffet er beundringsverdig klar og logisk. Ved behandlingen av flater f. eks., holdes akkurat den samme linje som ved kurver, analoge definisjoner blir gjentatt i samme rekkefølge og med praktisk talt de samme ord, osv. Tangent, tangentplan, oskulasjonsplan defineres alle ved kontakt av ulik orden mellom punktmengder. Det blir på den måten en tydelig linje i det hele, som er lett å følge. Det er pedagogisk godt oppbygd.

Forfatteren har valgt å stanse med den Gaussiske og de Codazzi–Mainardiske likninger, eller som han sier: Peterson–Codazzi (Peterson, grunnlegger av diff.geom. i Russland). Det er jo en meget naturlig avslutning på den elementære flateteori å gi leseren dette beviset for at når de nevnte vilkår for integrasjon er oppfylt, så er en flate fullstendig bestemt av 1. og 2. differensialform. Så langt er sammenhengen klar og nødvendig. Tilslutt kommer et lite kapittel om den indre geometri på en flate, men det virker nokså etterhengt, nokså isolert. Forfatteren har nemlig ikke med ett ord ønsket å antyde at her ligger spiren til noe nytt: at geometrien på flaten så å si kan »rive seg løs« fra det anskuelige og leve sitt eget liv i det abstrakte, som Riemannsk geometri. Forfatteren holder seg nemlig strengt til det 3-dimensjonale, anskuelige euklidske

rom. Men når den Riemannske geometri absolutt skal holdes utenfor, blir ikke den indre geometri på en flate så elegant som den ellers kunne ha blitt. Men forfatterens hensikt var jo en grundig og ensartet behandling av begrenset og elementært stoff.

Ottar Ytrehus

I. I. PRIWALOW: *Einführung in die Funktionentheorie, I.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 21.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1958. 4 + 163 S., 71 Fig. DM 7.30.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 41–42.)

Ifølge en meddelelse fra forlaget på sidste side af den foreliggende bog er den det første af tre bind, der tilsammen skal føre så langt frem som til en indførelse i analytisk fortsættelse, elliptiske funktioner og konforme afbildninger.

Den egentlige fremstilling begynner med en indførelse af komplekse tal som par af reelle tal og forløber i første og andet afsnit, som det også fremgår af innholdsfortegnelsen, i det store og hele ad de sædvanlige baner; dog støtter den sig nok mere, end normalt er, til den klassiske reelle funktionsteori. Det avsluttende tredje afsnit giver en temmelig utførlig fremstilling af lineære transformationer og deres forbindelse med den hyperbolske ikke-euklidiske geometri. Hvert afsnit sluttes med en snes opgaver med løsninger.

Forud for første afsnit er anbragt en indledning, der giver nogle eksempler på tilsyneladende paradoksale resultater, hovedsakelig hentet fra den reelle funktionsteori, som først finder deres forklaring, når man opererer i det komplekse talområde, og forfatteren har i det hele bestræbt sig på, før han indfører nye begreber eller problemstillinger, at bane vejen for dem ved heuristiske betraktninger. Han har derved opnået, at fremstillingen har fået en sammenheng og et naturligt fremadskridende forløb, der virker umiddelbart tiltalende.

Som det allerede er antydnet, bygger fremstillingen i udstrakt grad på ikke helt elementære dele af den klassiske reelle funktionsteori. Eksempelvis: Fra starten forudsættes kendskab til reelle potensrækker; flere steder anvendes regneregler for limes superior, og ligeledes bruges funktionaldeterminanter, forbindelsen mellem planintegral og dobbeltintegral samt Greens formel. Men samtidig opereres der meget ofte, især i den sidste del af bogen, med særdeles håndfaste infinitesimalbetraktninger. Overalt møder man på afgørende steder i beviserne uendelig små størrelser, summer af sådanne, infinitesimale trekanten o. s. v.; uendelig små længdelementer (udgående til alle sider fra et punkt) udvider sig og

trækker sig sammen, man opskriver ligningen for en uendelig lille cirkel o. s. v. o. s. v. Det står ikke klart, om forfatteren regner med, at læseren har lært de fra den reelle funktionsteori anvendte sætninger at kende i en fremstilling, der er lige så lidet nøjeregnende, eller i en, der omhyggeligt har tillagt disse udtryksmåder et så præcist indhold, at man uden skade tør bruge dem. Det føles derfor afgjort som en mangel, at der intetsteds gøres rede for, på hvilket niveau læseren forventes at stå. I hvert fald kan det ikke benægtes, at hvad enten forfatteren har tænkt sig at spare læseren for eller at overlade ham de vanskeligere punkter i beviserne, så slipper han ved den anvendte udtryksmåde meget let til mange ting.

Hist og her finder man uoverensstemmelser mellem tekst og figur eller mellem teksten to forskellige steder i bogen; et eksempel på det sidste fortjener at nævnes: En punktmængde kaldes ifølge bogens definition sammenhængende, hvis to vilkårlige punkter af den kan forbindes ved en helt i punktmængden forløbende brudt linie. Men senere i bogen er man tilfreds med en kontinuert kurve uden dobbeltpunkter.

Iøvrigt forekommer der en del trykfejl, også i løsningerne til opgaverne; indices, numerisktegn, konjugationstegn, ulighedstegn, bogstaver og tal er en gang imellem faldet ud (der tales f. eks. om cirklen $z = 1$ og om cirkelskiven $z < 1$, man finder Δ i stedet for Δz o. s. v.); gloserne absolut og ligelig konvergens ombyttes et enkelt sted og ligeledes euklidisk og ikke-euklidisk afstand.

Endelig må det nævnes, at det opstilles som et grundlæggende princip, at til en vilkårlig intervalindsnævring på tallinien findes der et og kun eet tal, der tilhører alle intervallerne; men det siges ikke, at intervallerne skal være lukkede, og den samme mangel findes i beviserne for Bolzano-Weierstrass' sætning og Borels overdækningssætning samt endnu et par steder; begrebet interval defineres ikke.

Som et kuriosum kan det til sidst anføres, at tegnet $\sim$ ikke ved en definition tillægges et præcist indhold; men det anvendes to steder i vidt forskellige betydninger, nemlig til at betegne kongruens modulo 2π og til at betegne tilnærmelsesvis lighed, også mellem den numeriske værdi af en tilvækst og et buedifferential.

Torkil Heiede

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 180–184 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i neste hefte, være sendt innen 10. februar 1960. Til samme dato forlenges fristen for oppgavene 176 og 177 i forrige hefte.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

180. La $a_1, a_2, \dots, a_n$ være positive tall ≥ 1 . Vis at

$$(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1} (1+a_1+a_2+\dots+a_n).$$

Viggo Brun

181. For hvilke a og b har baade $x^2+ax+b=0$ og $x^2+bx+a=0$

1) rationale Løsninger?

2) hele Løsninger?

Helge Tvermoes

182. Visa, att talen c_{rs} i uppgift 161 satisfierar formeln

$$\sum_{s=1}^r c_{r-1,s} \prod_{j=1}^{s-1} (n^j - j^j) = n^{qr}.$$

Härled härav för $q=1$ potenssummeformeln

$$\sum_{k=1}^n k^r = \sum_{s=1}^r \frac{c_{r-1,s}}{s+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-s)!}.$$

(Jfr. Johs. Lohne: Potenssummer av de naturlige tall, NMT 6 (1958), side 155.)

Gerhard Arfvedson

183. La $r_1 r_2 \dots r_n$ være en permutasjon av tallene $1, 2, \dots, n$ og la $\text{sgn}(r_1 r_2 \dots r_n)$ være $+1$ dersom permutasjonen er jamn (like) og -1 dersom den er odde (ulike). Vis at for $0 < i < n$ er

$$\text{sgn}(r_1 r_2 \dots r_n) = (-1)^{r_1+r_2+\dots+r_{i+\frac{1}{2}}i(i+1)} \text{sgn}(r_1 r_2 \dots r_i) \text{sgn}(r_{i+1} r_{i+2} \dots r_n).$$

R. Tambs Lyche

184. La $r_1, r_2, \dots, r_k$ være k av tallene $1, 2, \dots, n$, ordnet etter størrelsen, og $s_1, s_2, \dots, s_l$ ($k+l=n$) de øvrige, også ordnet etter størrelsen. Sett

$$V(r_1, r_2, \dots, r_k) = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \dots & r_1^{k-1} \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \dots & r_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & r_k & r_k^2 & \dots & r_k^{k-1} \end{vmatrix}, \quad V(r_1) = 1.$$

Vis riktigheten av følgende likning:

$$V(r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{(n-1)!!}{(s_1-1)!(s_2-1)! \dots (s_l-1)!(n-s_1)!(n-s_2)! \dots (n-s_l)!} \cdot V(s_1, s_2, \dots, s_l),$$

idet $m!! = 1! 2! \dots m!$, $0!! = 1$.

$$\text{Eksempel: } V(1, 2, 3, 5, 7) = \frac{6!!}{3! 5! 3! 1!} V(4, 6).$$

R. Tambs Lyche

LØSNINGER

175. Serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+a)^n}{n!} (ze^{-z})^n = \frac{e^{az}}{1-z}$$

konvergerer inom tvenne genom punkten $z=1$ skilda områden. Visa, att formeln gjelder inom det område, som omsluter origo. Talet a är godtyckligt.

Gerhard Arfwedson

Løsning: Med $ze^{-z}=t$ blir den givna serien av formen $\sum b_n t^n$. Man får $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = e$ med hjälp av Stirlings formel. Serien konvergerar således om $|ze^{-z}| < e^{-1}$, divergerar om den omvända olikheten gäller. Då $z=1$ är $b_n t^n = O(n^{-\frac{1}{2}})$ och positivt, dvs. serien divergerar. Uppgiftens första del följer härav. (Om a är komplext ändras resonemanget för $z=1$, man utnyttjer att $e^{-a}\sqrt{n}b_n t^n$ har positivt gränsvärde, då $n \rightarrow \infty$.)

För att visa den uppgivna likhetens giltighet i det konvergensområde G , som innehåller origo, betraktar vi en liten omgivning C_0 kring origo. Giltighet i C_0 utsträcks till giltighet i G med analytisk fortsättning.

Vi insätter

$$t^n = z^n e^{-nz} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} (nz)^k$$

och gör i C_0 en (tillåten, som lätt inses) omordning av den givna serien till $\sum A_n(a)z^n$. Det gäller att

$$\begin{aligned} A_n(a) &= \frac{(n+a)^n}{n!} - \frac{(n-1)(n-1+a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(n-2)^2(n-2+a)^{n-2}}{2!(n-2)!} - \dots \\ &= (n!)^{-1} \left[(n+a)^n - (n-1) \binom{n}{1} (n-1+a)^{n-1} + (n-2)^2 \binom{n}{2} (n-2+a)^{n-2} - \dots \right] \\ &= (n!)^{-1} \sum_{k=0}^n B_{n,k} a^{n-k}, \end{aligned}$$

där

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} n^k - \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{1} (n-1)^k + \binom{n-2}{k-2} \binom{n}{2} (n-2)^k - \dots,$$

vilket omformas med $\binom{n-\nu}{k-\nu} \binom{n}{\nu} = \binom{n}{k} \binom{k}{\nu}$ till

$$\binom{n}{k} \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (-1)^\nu (n-\nu)^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

eftersom k :te differensen till ett polynom av grad k med koefficienten 1 för högstgradstermen är $k!$. Således erhålles $A_n(a) = \sum_{\nu=0}^n a^\nu (\nu!)^{-1}$, vilket också erhålles som koefficient för z^n om serierna för e^{az} och $(z-1)^{-1}$ multipliceras.

Magnus Tideman

178. Bevisa identiteten

$$\sum_{r=0}^n \binom{a+r}{r} \binom{b-r}{n-r} = \binom{a+b+1}{n}.$$

Gerhard Arfwedson

Lösning: Vi betrakter rekken

$$\binom{N}{n}, \binom{N-1}{n-1}, \binom{N-2}{n-2}, \dots, \binom{N-n}{0}, 0, 0, \dots$$

og dens p^{te} differensrekke

$$\binom{N-p}{n}, \binom{N-p-1}{n-1}, \binom{N-p-2}{n-2}, \dots, \binom{N-p-n}{0}, 0, 0, \dots$$

Av den siste kan vi lett bygge opp igjen første rekke. F. eks. er

$$\binom{N}{n} = \binom{N-p}{n} + \binom{p}{1} \binom{N-p-1}{n-1} \\ + \binom{p+1}{2} \binom{N-p-2}{n-2} + \dots + \binom{p+n-1}{n} \binom{N-p-n}{0}.$$

I denne identitet velger vi $N = a + b + 1$ og $p = a + 1$ og får påstanden i oppgaven.

Johs. Lohne

Også løst av F. P. Dahlkild og Erik Petterssen.

179. Vis at rekken

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} - \frac{1}{6} + \dots,$$

som er framkommet av den alternerende harmoniske rekke ved omordning av leddene, er divergent.

R. Tambs Lyche

Løsning: Leddene med fortegn + forekommer i grupper, hvis antal er 2, 4, 8, 16, Summen af disse grupper kan vurderes således:

$$1 + \frac{1}{3} > 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{11} > 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{27} > 8 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{4} \\ \dots\dots\dots$$

Da rækken

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

divergerer mod $+\infty$, er det samme derfor tilfældet med den opgivne række.

Henrik Meyer

Også løst av F. P. Dahlkild, Ragnar Dybvik, Poul Einar Hansen, Johs. Lohne, Erik Petterssen og Arne Strøm.

RETTELSE

I forrige hefte var det en feil i gjengivelsen av de islandske oppgaver til studenteksamen. Ligningen i 2. linje s. 141 skal ha konstantleddet $+15i$, ikke $+3i$.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASELEVER

Oppgavekonkurranse for 1960, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Den beste samling besvarelser vil bli tildelt H. K. H. Kronprins Haralds premie på 200 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med. Oppgavene faller inn under reallinjens pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som råd er. Det er ikke nødvendig å ha svart på alle 6 oppgavene. Ingen kan vinne hovedpremien mer enn én gang.

En sender løsninger til rektor Kay Piene, Skjerstadvn. 2 A, Smestad, Oslo, innen 1.5.1960, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

1. Grunnflaten til et hus er et rektangel med sider a og b . Taket er dannet av fire plan som alle danner en vinkel lik v med horisontalplanet. Finn lengden av ryggen på taket. Finn volumet av loftet, dvs. rommet under skråtakene, og arealet av skråtakene.

Lag figur.

2. Når kan et naturlig tall N skrives som en sum av n naturlige tall slik at disse n tallene danner en aritmetisk tallfølge (rekke)? Drøft antall løsninger.

3. I et plant rettvinklet koordinatsystem er lagt inn tre punkter, som danner hjørnene i en trekant. Koordinatene kalles x og y med indeks. Alle ordinater y_i er positive eller null, og trekanten skal være en egentlig trekant.

Trekanten roterer en hel omdreining om x -aksen. Finn volumet av omdreinningslegemet som framkommer, uttrykt ved punktenes koordinater. Dann så produktet av trekantens flateinnhold og lengden av den sirkellinjen som medianenes skjæringspunkt har beskrevet ved omdreiningen. Vis at dette produktet er identisk med uttrykket for volumet av omdreinningslegemet.

4. Et talls desimalsiffer inndeles fra høyre i grupper på tre. Dersom summen av de tall som framkommer er delelig med 37, så er tallet selv

også delelig med 37. Eks.: Tallet er 25197. En får $222:37=6$ og $25197=37 \cdot 681$.

Bevis! Er betingelsen både nødvendig og tilstrekkelig?

5. En hver definisjon av et såkalt »geometrisk sted« inneholder i virkeligheten to krav. Forklar dette.

La det være gitt to punkter A og B i planet. Finn rent geometrisk og analytisk det geometriske sted for de punkter P som har den egenskapen at forholdet mellom avstandene AP og BP har et konstant forhold k .

6. I $\triangle ABC$ er gitt $\angle C = 60^\circ$.

a) Bevis at $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C}$ har en konstant verdi.

b) Hva er den største og hva er den minste verdi som $\sin A \cos B$ kan ha, og for hvilke verdier av A og B blir disse ekstremalverdier oppnådd?

c) Hvor store er vinklene A og B når høyden fra C er halvdelen av siden AB ?

d) Gjelder setningen i a) dersom $\angle C$ har en annen konstant verdi enn 60° ?

PRISTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Liksom föregående år anordnar Nordisk Matematisk Tidskrift en pristävling för svenska gymnasister. Var och en av de tre utgivande svenska föreningarna har ställt 50 kr. till disposition, varigenom ett första pris om 100 kr. och ett andra pris om 50 kr. kan utdelas.

För deltagande i tävlingen fordras, att lösningar insändas till minst fyra av nedanstående uppgifter. Gymnasister från övriga nordiska länder kunna delta utom tävlan.

Lösningar, åtföljda av en försäkran att de äro självständigt utarbetade, insändas senast den 1 april 1960 till: Nordisk Matematisk Tidskrift, Matematiska Institutionen, Lund. Bifoga uppgift om namn, klass och läroverk.

1. Visa att polynomet

$$P(x) \equiv nx^{n+1} - (1+np)x^n + (p-1)x^{n-1} + (p-1)x^{n-2} + \dots + (p-1)x + p$$

är jämnt delbart med $p(x) \equiv x^2 - (p+1)x + p$.

2. En talföljd a_n bestämmes genom $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ samt rekursionsformeln $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Visa likheten

$$a_n = \frac{u^n - v^n}{u - v},$$

där u , v är rötter till ekvationen $x^2 - x + 1 = 0$.

3. Funktionen $y=f(x)$ har bestämda första och andra derivator samt $f''(0) \neq 0$. Funktionskurvan går genom origo och tangerar där x -axeln. Normalen till kurvan i en godtycklig punkt P skär y -axeln i punkten N . Bestäm gränsläget av tyngdpunkten i triangeln OPN , då P obegränsat närmar sig origo.

4. $y = \frac{x+a}{x^2+b}$ är given. Vilket villkor skall vara uppfyllt för att kurvan skall ha tre inflexionspunkter? Visa, att dessa då ligger i rät linje.

5. Bevisa, att den sträcka, som förenar en godtycklig vinkelspets i en triangel med höjdernas skärningspunkt är två gånger så stor som normalen från den omskrivna cirkelns medelpunkt till den sida, som står emot ifrågakarande vinkels spets.

6. P_1 och P_2 är två punkter på en parabel, Q är skärningspunkten mellan tangenterna i dessa punkter och F brännpunkten. Visa att man har

$$\frac{QP_1^2}{P_1F} = \frac{QP_2^2}{P_2F}.$$

Finns det ett liknande teorem för ellipsen och hyperbeln?

RESULTAT AV PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASSELEVER

(Oppgavene i NMT 6 (1958), s. 178–180.)

I konkurransen var det 14 deltakere. Best var Arne Strøm, elev av 4. gym., Holtet h. skole. Dernest kom Ola Kai Ledang, elev av 5. gym., Namsos h. skole. Da Arne Strøm ifjor vant H. K. H. Kronprinsens premie, og denne bare kan vinnes en gang, er premien tildelt Ola Kai Ledang.

SUMMARY IN ENGLISH

P. O. NEERUP: *The axiomatic foundation of geometry by F. Bachmann, II.* (Danish.)

Based on the introductory sections A and B of part I, the present article is dealing with:

C. First Bachmann's system of axioms for his so called absolute geometry (including Euclidean, hyperbolic and elliptic geometry) is set up. The axioms are formed as properties of a group G with a system $\mathfrak{L}$ of involutoric generators and a system $\mathfrak{P}$ of involutoric products of two generators. From these axioms, Bachmann

has defined a geometry with the elements of $\mathfrak{L}$ as lines, the elements of $\mathfrak{P}$ as points and the inner automorphisms of G as displacements.

To show how such a geometry works, some theorems from elementary geometry are formulated and proved within the absolute geometry.

Finally is indicated the imbedding of the absolute geometry in a projective (Pascalean) plane and the specialization by additional axioms of the absolute geometry to a geometry of Euclidean type.

ASMUS L. SCHMIDT: *Simple proofs of an approximation theorem of Hurwitz.* (Danish.)

For irrational ξ , there is an infinity of irreducible fractions p/q satisfying

$$(1) \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2},$$

when $0 < c \leq \sqrt{5}$. A very simple proof of this famous theorem is given. From an approximation p/q satisfying (1) with $c=1$ but not with $c=\sqrt{5}$ (obtained by Dirichlet's pigeon-hole principle), it is always possible to deduce another approximation p_1/q_1 with $c=\sqrt{5}$, if we choose $pq_1 - qp_1 = 1$.

The article also sketches Le Veque's recent proof by means of Farey series.

It is well known that the value $c=\sqrt{5}$ can not be further increased. The article also contains Perron's simple proof of this fact, for $\xi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

CARL-ERIK FRÖBERG: *Numerical determination of arcs.* (Swedish.)

If the function $y=y(x)$ is tabulated for $x = \dots, x_0-h, x_0, x_1=x_0+h, \dots$, the arc of the corresponding curve between x_0 and x_1 is approximately given by

$$s = s_0 \cdot \left(1 + \frac{h^2(\delta^2 y)^2}{24s_0^4} \right).$$

Here $s_0^2 = h^2 + k^2$, $k = y_1 - y_0$, $\delta^2 y = \frac{1}{2}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1)$, where as usual

$$\delta^2 y_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}.$$

The result is obtained from a transformation of the Everett interpolation formula.

PEDER PEDERSEN: *On the expansion of π in a regular continued fraction, II.* (English.)

In an earlier paper in NMT (Vol. 6 (1958), pp. 57-68), the author computed the partial quotients a_n in the continued fraction for π up to a_{200} . In the present paper, the computation is continued to a_{400} . The earlier verification of Khintchine's and Lévy's constants is also extended.

ODDLEIV HOLTE: *Elements of switching algebra.* (Norwegian.)

The „Boolean algebra" is illustrated by the postulates and some theorems. Serial and parallel contacts are then introduced, and the algebra is applied to a few simple switching circuits.

INNHOLDSFORTEGNELSE

B. J. ANDERSSON: En studie av hastighetsanpassning vid korsning mellan väg och järnväg.....	117-120
HARALD BERGSTRÖM: Roths fundamentala sats.....	57- 72
VIGGO BRUN: An application of a "carpenter's curve" to Simpson formulas.....	20- 24
FR. FABRICIUS-BJERRE: Om lineært-monotone elementarkurver.....	27- 35
CARL-ERIK FRÖBERG: Numerisk bestämning av båglängder.....	163-164
H. W. GOULD: Dixon's series expressed as a convolution.....	73- 76
OLOF HANNER: Ett myntfördelningsproblem.....	77- 80
ODDLEIV HOLTE: Litt koblingsalgebra.....	169-175
A. MAKOWSKI: On the diophantine equation $2^x + 11^y = 5^z$	81
OVE J. MUNCH: Om potensproduktsummer.....	5- 19
P. O. NEERUP: F. Bachmann's aksiomatiske opbygning af geometrien, I, II.....	97-110, 145-156
PEDER PEDERSEN: On the expansion of π in a regular continued fraction, II.....	165-168
ASMUS L. SCHMIDT: Simple beviser for en approximationssætning af A. Hurwitz.....	157-162
ERNST S. SELMER: A note on the preceding paper by V. Brun.....	25- 26
VILHJÁLMUR ÖGMUNDSSON: Multiplication in n dimensions.....	111-116

Bokmeldinger

LUDWIG BAUMGARTNER: Gruppentheorie (HELGE TVERMOES).....	82
ARNOLD BAUR — HANS LODE — ARNO ALBRECHT: Anschauliche Mathematik (POUL NEERUP).....	36
I. N. BRONSTEIN — K. A. SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik (RAGNAR JOHS. SOLVANG).....	83
N. G. DE BRUIJN: Asymptotic methods in analysis (H. TORNEHAVE)....	176
PAUL H. DAUS — WILLIAM M. WHYBURN: Introduction to mathematical analysis (HERDIS THORÉN AMUNDSEN).....	121
LEONHARD EULER: Vollständige Anleitung zur Algebra (VIGGO BRUN)..<	122
STEN HENRYSSON: Elementär statistik för psykologer, pedagoger m. fl. (ARNLJOT HØYLAND).....	177
D. HILBERT — W. ACKERMANN: Grundzüge der theoretischen Logik (TAGE GÜTMANN MADSEN).....	124
HENRI LEBESGUE: Notice d'histoire des mathématiques (VIGGO BRUN)..	37
PAUL LORENZEN: Formale Logik (JENS ERIK FENSTAD).....	38
HERBERT LUGOWSKI — HANNS JOACHIM WEINERT: Grundzüge der Algebra, I (P. HOLM).....	124

E. A. MAXWELL: Fallacies in mathematics (BENT BIRKELAND).....	125
M. MILLER: Variationsrechnung (R. TAMBS LYCHE).....	125
ALMAR NÆSS: Lærebok i høyere matematikk (KAI RANDER BUCH).....	84
A. V. POGORELOV: Differential geometry (OTTAR YTREHUS).....	179
I. I. PRIWALOW: Einführung in die Funktionentheorie, I (TORKIL HEIEDE).....	181
Mottatte bøker.....	39, 87, 127
Oppgaver	
Oppgaver til løsning.....	43, 91, 133, 183
Løsninger.....	44, 92, 134, 184
Eksamensoppgaver.....	139
Nasjonale prisoppgaver for gymnasiaster.....	187
Internordisk prisoppgave.....	136
Kronikk.....	51
Summary in English.....	55, 96, 144, 189