

F. BACHMANN'S AKSIOMATISKE OPBYGNING AF GEOMETRIEN, I

P. O. NEERUP

Indledning.

Den elementære geometri er opstået ved betragtninger af visse figurer fra den materielle verden og tilstræber at give en beskrivelse af sådanne. For ikke at gøre beskrivelsen for kompliceret foretager man dog visse forenklinger, således at geometrien kommer til at omhandle genstande, der ikke er virkelige, men tænkte, og som kun med en vis tilnærmelse kan realiseres.

At geometrien har denne abstrakte karakter, har man fuldt ud været klar over allerede i den græske oldtid. »*Euklids Elementer*« (fra ca. 300 år før vor tidsregnings begyndelse) er ikke beskrivelse af genstande fra den virkelige verden, men af de tænkte genstande, hvis egenskaber er søgt præciseret i Euklids »forudsætninger« eller »postulater«.

Medens man har nemt ved i princippet at anlægge dette synspunkt på geometrien, er det ikke så lige til at fastholde det i alle detaljer. Når man dyrker elementær plangeometri (og i det følgende vil vi kun betragte plangeometri), vil man nødig undlade at tegne. Man må naturligvis også gerne tegne, og det er fortsat tilrådeligt at gøre det, når man blot opfatter tegninger på rette måde, nemlig som anskuelige billeder, der tjener til at fastholde tankegangen i et bevis, at stå som symbol for en i ord formuleret sætning eller at lede til formodning om, at en vis sætning er gyldig. Derimod kan man ikke godtage en tegning som et bevis for en sætning. Til trods for at grækerne i oldtiden — som nævnt — var fuldt ud klare herover og i beundringsværdig grad anlagde dette synspunkt, er det dog ikke lykkedes Euklid i alle tilfælde at gennemføre sin opbygning af geometrien i overensstemmelse hermed.

En af de væsentlige mangler i Euklids opbygning af geometrien knytter sig til læren om kongruente figurer eller — som Euklid siger — »lige store størrelser«. Blandt Euklids »almindelige begreber« finder man et, som udsiger, at »størrelser, som kan dække hinanden, er indbyrdes lige

store«, og det fremgår af Euklids beviser, at han hermed faktisk mener, at »to størrelser er lige store, når og kun når de kan dække hinanden«. Erstatte man i denne sætning udtrykkene »størrelser« og »lige store« med henholdsvis »figurer« og »kongruente«, får man den sædvanligt anvendte definition af kongruens. Sædvanligvis får man ikke at vide, ved hvilken proces man skal undersøge, om en figur kan dække en anden; det er heller ikke tilfældet hos Euklid, og det er en tydelig mangel i Euklids opbygning. Af Euklids beviser fremgår, at den proces, han tænker på, er den sædvanlige, nemlig — idet man tænker sig de to figurer fremstillet af et ustrækkeligt og ubøjeligt materiale — en materiel flytning af den ene figur over på den anden. Euklid erstatter altså her sine tænkte figurer med konkrete, hvilket er uforeneligt med hans fremstilling i øvrigt. I overensstemmelse hermed anvender han kun nødtigt flytningsbetragtninger, således at forstå, at han i flere tilfælde foretrækker beviser ved hjælp af tidligere (ved flytningsbetragtninger beviste) sætninger frem for beviser ved hjælp af direkte flytningsbetragtninger, selv om de sidste ville være simple end de første.

Når Euklid her er omtalt så meget, som tilfældet er, skyldes det, at den traditionelle opbygning af elementargeometrien stadig har den euklidiske opbygning til forbillede. I skolegeometrien kan man ikke håndhæve geometriens abstrakte karakter. De geometriske genstande opfattes her som virkelige (med visse modifikationer), og den anførte definition af kongruens forekommer meget naturlig. Flytninger finder anvendelse her ganske som hos Euklid, nemlig til opstilling af en række såkaldte kongruenssætninger, og når man først har disse sætninger, bruger man — så vidt muligt — dem i stedet for direkte flytningsbetragtninger. Hverken her eller hos Euklid føler man trang til nærmere at præcisere egenskaber ved flytninger, medens man dog præciserer visse egenskaber ved andre geometriske genstande såsom punkter og linier. Det hænger sammen med, at flytning ikke anvendes som en geometrisk genstand, men kun som et middel til at definere relationen »kongruent med«; Euklid ville have gjort sin fremstilling klarere ved at opstille sine ved hjælp af flytninger beviste sætninger som ubeviste forudsætninger, og skolegeometrien ville gøre fremstillingen klarere ved aldrig at føre »beviser« for de såkaldte »kongruenssætninger« (eller andre ved flytninger »beviste« sætninger), men simpelthen opstille dem som ubeviste sætninger, der er motiveret ved flytninger af virkelige, stive figurer.

D. Hilbert har med sin »Grundlagen der Geometrie« (1899) givet en dybtgående revision af den euklidiske opbygning af geometrien. Hermed er diskussionen af den euklidiske opbygning, der har stået på i et par tusind år, bragt til ophør. Hilbert har som grundbegreber de geometriske

genstande »punkt« og »linie« samt de geometriske relationer »incident med«, »mellem« og »kongruent med«. Specielt bemærkes, at Hilbert i læren om kongruente figurer klarer sig ved hjælp af relationen »kongruent med« uden anvendelse af begrebet flytning og giver hermed et nøjagtigt udtryk for, hvordan man — i upræcis form — bærer sig ad hos Euklid og i skolegeometrien.

Medens man efter Hilberts arbejder over geometriens grundlag er blevet helt klar over, at Euklid har haft alt for få »forudsætninger«, har diskussionen om den euklidiske opbygning af geometrien tidligere fortrinsvis drejet sig om, hvorvidt man kunne bevise nogle af Hilberts »forudsætninger«, specielt det berømte »parallelpostulat«, udfra de øvrige. »Parallelpostulatet«, som er ensbetydende med sætningen: »Til en given linie l og et givet punkt P findes der højst een linie gennem P , der ikke har noget punkt fælles med l «, bliver en sætning, der kan bevises, når man erstatter udtrykket »højst een« med »mindst een«. Det var derfor meget nærliggende at forsøge at bevise det nævnte postulat, og det synes, som om allerede Euklid var betænkelig ved at opstille det som forudsætning, idet han venter længe med at benytte det. Som bekendt lykkedes det ungarenen J. Bolyai og russeren N. Lobatschefskij nogenlunde samtidigt (o. 1830) og uafhængigt af hinanden at bevise, at »parallelpostulatet« ikke kan bevises, idet antagelsen om, at det ikke var gyldigt, i stedet for at føre til en modstrid, tværtimod førte til en anden geometriform, den såkaldte »ikke-euklidiske« eller »hyperbolske« geometri.

Efter den betydningsfulde erkendelse af, at den euklidiske geometri ikke var den eneste mulige (og »rigtige«), var vejen åbnet for andre former for geometri, og denne vej blev betrådt af B. Riemann (o. 1850), der først angav den såkaldte »elliptiske« geometri, hvis aksiomsystem kan fås af den euklidiske geometris aksiomsystem ved erstatning af parallelpostulatet med et postulat om, at hvilket som helst to linier har et fælles punkt (og hvor ordningen af punkterne på en linie må beskrives på en anden måde end ved relationen »mellem«).

Disse tre klassiske geometriformer kan alle fås som specielle tilfælde af den projektive geometri, som kan opbygges alene med de to geometriske genstande »punkt« og »linie« samt den ene geometriske relation »incident med« (»punkt på linie«, »linie gennem punkt«) som grundbegreber. Det vil imidlertid også være naturligt at stile mere direkte mod den elementære geometri. I denne (hvortil vi her vil henregne alle de tre lige nævnte former) spiller relationen »kongruent med« en dominerende rolle, og den tanke er derfor nærliggende at foretage en opbygning af geometrien, hvor man supplerer det anførte projektivegeometriske grundlag med denne relation, altså medtager begrebet »flytning« som geometrisk genstand.

Herved viser det sig hensigtsmæssigt ved flytning at tænke på hele planen og ikke blot på figurer i denne.

Den nævnte mulighed, at man opbygger geometrien ud fra de geometriske genstande »punkt«, »linie«, »flytning« og den geometriske relation »incident med«, således at man lægger såvel et projektivt som et flytningsgeometrisk synspunkt til grund, er bl. a. realiseret af J. Hjelmslev (o. 1910). Men man kan endda opbygge geometrien fra et rent flytningsgeometrisk synspunkt, hvor man alene har »flytning« som grundbegreb. En sådan opbygning er angivet af F. Bachmann (1952), og det er denne opbygning af geometrien, der er det egentlige emne for det følgende.

Det er i god overensstemmelse med den om sig gribende algebrisering inden for matematikken, at Bachmanns metoder vidtgående algebriserer den syntetiske geometri. Derfor bliver første afsnit en algebraisk forberedelse.

Når man tager flytning (af hele planen) som grundbegreb, må man finde frem til visse egenskaber ved sådanne flytninger, som man vil lægge til grund. Derfor vil andet afsnit omhandle egenskaber ved flytninger, som man udfra en primitiv anskuelig betragtning vil acceptere.

Endelig vil i tredje afsnit Bachmanns aksiomsystem blive gengivet og hans opbygning af geometrien herudfra blive skitseret¹.

A. Elementer af gruppeteori.

1. Ved en *kompositionsregel* $\circ$ for en mængde $\mathfrak{M}$ forstås en forskrift, der til ethvert ordnet par a, b af elementer fra $\mathfrak{M}$ tilordner netop eet element c fra $\mathfrak{M}$; dette betegnes $c = a \circ b$. At et element a tilhører $\mathfrak{M}$, betegnes $a \in \mathfrak{M}$.

2. Ved en *gruppe* G forstås en mængde $\mathfrak{M}$ forsynet med en kompositionsregel $\circ$, for hvilken der gælder:

1° For $a, b, c \in \mathfrak{M}$ er $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

2° Der findes et $\varepsilon \in \mathfrak{M}$ således, at $a \circ \varepsilon = \varepsilon \circ a = a$ for ethvert $a \in \mathfrak{M}$.

3° Til ethvert $a \in \mathfrak{M}$ findes et $x \in \mathfrak{M}$ således, at $a \circ x = x \circ a = \varepsilon$.

Et element ε med den i 2° nævnte egenskab kaldes et *indifferent element* (eller *enhedselement*) i G . Hvis ε_1 og ε_2 betegner indifferente elementer i G , fås ved hjælp af 2°:

¹ Af tidligere artikler i NMT med aksiomatisk-geometrisk indhold nævnes:
R. Nevanlinna: Gauss och den icke-euklidiska geometrin. Bind 4 (1956), pp. 195–209.
J. O. Stubban: Aksiomatisk grundlag for den euklidiske geometri. Bind 4 (1956), pp. 76–84.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_2.$$

Vi ser altså, at en gruppe har netop eet indifferent element.

Et element x med den i 3° nævnte egenskab kaldes et til a *inverst* element. Hvis x_1 og x_2 betegner inverse elementer til a , fås ved hjælp af 1°, 2° og 3°:

$$x_1 = x_1 \circ \varepsilon = x_1 \circ (a \circ x_2) = (x_1 \circ a) \circ x_2 = \varepsilon \circ x_2 = x_2.$$

Vi ser altså, at der til a findes netop eet inverst element i $\mathfrak{M}$; det betegnes a^{-1} .

Specielt bemærker vi, at $(a^{-1})^{-1} = a$ og $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Til $a, b \in \mathfrak{M}$ findes netop eet $x \in \mathfrak{M}$ således, at $a \circ x = b$. For et sådant x gælder nemlig ifølge 1°, 2° og 3°:

$$a^{-1} \circ b = a^{-1} \circ (a \circ x) = (a^{-1} \circ a) \circ x = \varepsilon \circ x = x,$$

og at omvendt dette element $a^{-1} \circ b$ tilfredsstiller ligningen $a \circ x = b$, ses ligeledes ved hjælp af 1°, 2° og 3°, idet

$$a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = \varepsilon \circ b = b.$$

Analogt ser man, at der til $a, b \in \mathfrak{M}$ findes netop eet $y \in \mathfrak{M}$ således, at $y \circ a = b$, nemlig $y = b \circ a^{-1}$.

3. En gruppe G bestående af en mængde $\mathfrak{M}$ med kompositionsregel $\circ$ kaldes *kommutativ* (eller abelsk), når den kommutative lov:

$$\text{For } a, b \in \mathfrak{M} \text{ er } a \circ b = b \circ a,$$

er opfyldt.

Hvis G er kommutativ, har for $a, b \in \mathfrak{M}$ ligningerne $a \circ x = b$ og $y \circ a = b$ samme løsning, nemlig $a^{-1} \circ b = b \circ a^{-1}$; denne løsning betegnes $\frac{b}{a}$.

4. Som nærliggende eksempler på grupper kan nævnes mængden af alle hele (eller rationale eller reelle) tal med $+$ som kompositionsregel og mængden af alle fra 0 forskellige rationale (eller reelle) tal med $\cdot$ som kompositionsregel. De her nævnte grupper er alle kommutative.

5. Ved en *permutation* af en mængde $\mathfrak{M}$ forstås en enetydig afbildning af $\mathfrak{M}$ på sig selv. At en permutation a af $\mathfrak{M}$

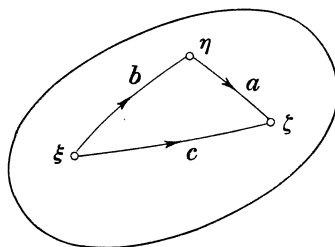


Fig. 1

afbilder et element ξ af $\mathfrak{M}$ på elementet η af $\mathfrak{M}$, udtrykker vi ved at skrive $\eta = a(\xi)$.

Ved sammensætningen af to permutationer a og b af $\mathfrak{M}$ vil vi forstå den permutation c af $\mathfrak{M}$, vi får ved først at udføre permutationen b og dernæst permutationen a (fig. 1). Vi har altså, at $\zeta = a(\eta)$ og $\eta = b(\xi)$ medfører $\zeta = c(\xi)$.

Vi betragter nu mængden $\mathfrak{P}$ af alle permutationer af $\mathfrak{M}$. I mængden $\mathfrak{P}$ er sammensætning en kompositionsregel, thi til to vilkårlige permutationer a og b af $\mathfrak{M}$ findes der netop een permutation c af $\mathfrak{M}$, som er sammensat af a og b ; denne kompositionsregel betegner vi med det foran indførte tegn $\circ$, og vi kan altså skrive $c = a \circ b$. For $\zeta = a(\eta)$ og $\eta = b(\xi)$ har vi da:

$$(*) \quad [a \circ b](\xi) = \zeta = a(\eta) = a(b(\xi)).$$

Det er let at se, at mængden $\mathfrak{P}$ med $\circ$ som kompositionsregel er en gruppe, nemlig således:

1) For $a, b, c \in \mathfrak{P}$, $\xi \in \mathfrak{M}$ har vi ifølge (*):

$$\begin{aligned} [[a \circ b] \circ c](\xi) &= [a \circ b](c(\xi)) = a(b(c(\xi))), \\ [a \circ [b \circ c]](\xi) &= a([b \circ c](\xi)) = a(b(c(\xi))), \end{aligned}$$

altså er for ethvert $\xi \in \mathfrak{M}$

$$[[a \circ b] \circ c](\xi) = [a \circ [b \circ c]](\xi),$$

og det betyder netop, at $[a \circ b] \circ c$ og $a \circ [b \circ c]$ er samme permutation af $\mathfrak{M}$, altså

$$[a \circ b] \circ c = a \circ [b \circ c].$$

2) Idet ε betegner den permutation af $\mathfrak{M}$, der til ethvert element af $\mathfrak{M}$ tilordner elementet selv (denne permutation kaldes *identiteten*), har vi for $a \in \mathfrak{P}$, $\xi \in \mathfrak{M}$ ifølge (*):

$$[a \circ \varepsilon](\xi) = a(\varepsilon(\xi)) = a(\xi) = \varepsilon(a(\xi)) = [\varepsilon \circ a](\xi),$$

altså

$$a \circ \varepsilon = \varepsilon \circ a = a.$$

3) Idet a betegner en vilkårlig permutation af $\mathfrak{M}$ og x den permutation af $\mathfrak{M}$, der til et vilkårligt element η af $\mathfrak{M}$ tilordner det element ξ af $\mathfrak{M}$, for hvilket $a(\xi) = \eta$ (denne permutation kaldes den inverse til permutationen a), har vi ifølge (*):

$$\begin{aligned} [a \circ x](\eta) &= a(x(\eta)) = a(\xi) = \eta, \\ [x \circ a](\xi) &= x(a(\xi)) = x(\eta) = \xi, \end{aligned}$$

altså

$$a \circ x = x \circ a = \varepsilon.$$

Mængden $\mathfrak{P}$ med $\circ$ som kompositionsregel, altså mængden af alle permutationer af $\mathfrak{M}$ med sammensætning som kompositionsregel, kaldes *permutationsgruppen* over $\mathfrak{M}$.

6. En permutation a af en mængde $\mathfrak{M}$ siges at have et element φ som *fixelement*, når $a(\varphi) = \varphi$.

Lad $\mathfrak{M}$ være en mængde (f. eks. med tre elementer) og a, b to permutationer af $\mathfrak{M}$ således, at a har netop eet fixelement φ , medens b ingen fixelement har; for $\psi = b(\varphi)$ er altså $\psi \neq \varphi$ og $a(\psi) \neq \psi$. Vi har da:

$$[b \circ a](\varphi) = b(a(\varphi)) = b(\varphi) = \psi,$$

$$[a \circ b](\varphi) = a(b(\varphi)) = a(\psi),$$

altså:

$$a \circ b \neq b \circ a,$$

hvoraf ses, at permutationsgruppen over en mængde $\mathfrak{M}$ ikke i almindelighed er kommutativ.

7. Lad G være en gruppe bestående af en mængde $\mathfrak{M}$ med en kompositionsregel $\circ$, og lad $\mathfrak{M}'$ være en delmængde af $\mathfrak{M}$.

Hvis $\circ$ er en kompositionsregel også for $\mathfrak{M}'$, og $\mathfrak{M}'$ med denne kompositionsregel er en gruppe G' , siges G' at være en *undergruppe* af G . Det er tilfældet, når og kun når $\mathfrak{M}'$ opfylder følgende tre betingelser:

4° $a, b \in \mathfrak{M}'$ medfører $a \circ b \in \mathfrak{M}'$.

5° $\varepsilon \in \mathfrak{M}'$.

6° $a \in \mathfrak{M}'$ medfører $a^{-1} \in \mathfrak{M}'$.

Er nemlig G' en undergruppe af G , må 4° være opfyldt, fordi $\circ$ er en kompositionsregel for $\mathfrak{M}'$, medens 5° og 6° må være opfyldt, fordi ligningen $a \circ x = b$ for $a, b \in \mathfrak{M}'$ har en løsning i $\mathfrak{M}'$ (for $b = a$ fås 5° og for $b = \varepsilon$ fås dernæst 6°). Og er omvendt 4°, 5° og 6° opfyldt, må $\circ$ være en kompositionsregel for $\mathfrak{M}'$, som opfylder 1°, 2° og 3°.

8. Lad G være en gruppe bestående af en mængde $\mathfrak{M}$ med kompositionsregel $\circ$ og G^* en gruppe bestående af en mængde $\mathfrak{M}^*$ med kompositionsregel $\bullet$.

Gruppen G siges at være isomorf med gruppen G^* , når følgende to betingelser er opfyldt:

7° Der findes en enentydig afbildning af $\mathfrak{M}$ på $\mathfrak{M}^*$.

8° Hvis ved denne afbildning $a, b \in \mathfrak{M}$ bliver afbildet på henholdsvis $a^*, b^* \in \mathfrak{M}^*$, da afbildes $a \circ b$ på $a^* \bullet b^*$.

Enhver afbildning 7° med egenskaben 8° kaldes en *isomorfi* fra G til G^* .

Hvis G^* er den samme gruppe som G , kaldes en isomorfi fra G til G^* en *automorfi* i G .

9. Lad G være en gruppe bestående af en mængde $\mathfrak{M}$ med kompositionsregel $\circ$ og a et vilkårligt, men fast element af $\mathfrak{M}$. Den forskrift, der til $x \in \mathfrak{M}$ tilordner

$$(**) \quad x^* = a \circ x \circ a^{-1},$$

er en permutation af $\mathfrak{M}$, thi

$$x^* = a \circ x \circ a^{-1}, \quad x \in \mathfrak{M},$$

er ensbetydende med

$$x = a^{-1} \circ x^* \circ a, \quad x^* \in \mathfrak{M}.$$

Den ved $(**)$ bestemte permutation af $\mathfrak{M}$ er yderligere en automorfi i G , thi for $x, y \in \mathfrak{M}$ vil

$$x^* = a \circ x \circ a^{-1}, \quad y^* = a \circ y \circ a^{-1} \quad \text{medføre} \quad x^* \circ y^* = a \circ (x \circ y) \circ a^{-1}.$$

Den ved $(**)$ givne automorfi i G kaldes den til a hørende *indre automorfi* i G .

10. Lad G være en gruppe bestående af en mængde $\mathfrak{M}$ med $\circ$ som kompositionsregel.

Mængden af alle indre automorfier i G er en undergruppe af permutationsgruppen over $\mathfrak{M}$. Mængden af alle indre automorfier i G er nemlig en delmængde af mængden af alle permutationer af $\mathfrak{M}$, og at den udgør en undergruppe af permutationsgruppen, ses således:

4) En indre automorfi hørende til $a \in \mathfrak{M}$ sammensat med en indre automorfi hørende til $b \in \mathfrak{M}$ giver igen en indre automorfi, nemlig den indre automorfi hørende til $a \circ b$, thi

$$z = a \circ y \circ a^{-1}, \quad y = b \circ x \circ b^{-1}$$

medfører

$$z = a \circ b \circ x \circ b^{-1} \circ a^{-1} = (a \circ b) \circ x \circ (a \circ b)^{-1}.$$

5) Identiteten er en indre automorfi, nemlig den indre automorfi hørende til ε , thi

$$x = \varepsilon \circ x \circ \varepsilon^{-1}.$$

6) Den inverse permutation til en indre automorfi hørende til $a \in \mathfrak{M}$ er igen en indre automorfi, nemlig den indre automorfi hørende til a^{-1} , thi

$$y = a \circ x \circ a^{-1} \quad \text{medfører} \quad x = a^{-1} \circ y \circ a = (a^{-1}) \circ y \circ (a^{-1})^{-1}.$$

11. Selv i en ikke kommutativ gruppe G findes der et element, som er ombytligt med alle andre, nemlig ε , thi for et vilkårligt element x i G har vi jo

$$x \circ \varepsilon = x = \varepsilon \circ x.$$

Hvis en gruppe G kun indeholder eet element, som er ombytligt med alle andre elementer i G , er gruppen af indre automorfier i G isomorf med G .

Vi har nemlig, når G består af mængden $\mathfrak{M}$ med kompositionsregel $\circ$:

7) To indre automorfier hørende til henholdsvis $a \in \mathfrak{M}$ og $b \in \mathfrak{M}$ er den samme, når og kun når $a = b$, thi

$$a \circ x \circ a^{-1} = b \circ x \circ b^{-1} \text{ for alle } x \in \mathfrak{M}$$

er ensbetydende med

$$(b^{-1} \circ a) \circ x = x \circ (b^{-1} \circ a) \text{ for alle } x \in \mathfrak{M}$$

og altså — ifølge forudsætningen — med $b^{-1} \circ a = \varepsilon$ eller $a = b$. Heraf følger, at de indre automorfier hørende til elementerne i $\mathfrak{M}$ kan parres med disse.

8) En indre automorfi hørende til $a \in \mathfrak{M}$ sammensat med en indre automorfi hørende til $b \in \mathfrak{M}$ giver — som vist i 10 — den indre automorfi hørende til $a \circ b$.

12. Lad G være en gruppe bestående af mængden $\mathfrak{M}$ med kompositionsregel $\circ$.

Et $x \in \mathfrak{M}$ kaldes et *involutorisk element* i G , når

$$x \neq \varepsilon, \quad x \circ x = \varepsilon,$$

hvilket er ensbetydende med

$$x \neq \varepsilon, \quad x = x^{-1}.$$

For $a, b \in \mathfrak{M}$ siges a at være *involutorisk med b* i G , når $a \circ b$ er et involutorisk element i G ; dette skrives $a \text{ I } b$.

Vi bemærker, at $a \text{ I } b$ medfører $b \text{ I } a$, thi

$$a \circ b \neq \varepsilon, \quad a \circ b = b^{-1} \circ a^{-1} \text{ medfører } b \circ a \neq \varepsilon, \quad b \circ a = a^{-1} \circ b^{-1},$$

og vi kan derfor sige, at a og b er indbyrdes involutoriske elementer i G .

Med skrivemåden $a \text{ I } b, c$ vil vi mene $a \text{ I } b$ og $a \text{ I } c$; betegnelser som $a \text{ I } b, c, d$ og $a, b \text{ I } c, d$ har analog betydning.

Specielt gælder det, at hvis x og y er involutoriske elementer i G , da er

$$x \text{ I } y, \text{ når og kun når } x \neq y, \quad x \circ y = y \circ x,$$

med andre ord: To involutoriske elementer i G er indbyrdes involutoriske, når og kun når de er forskellige og ombyttelige.

Endvidere gælder det, at hvis x er et involutorisk og a et vilkårligt element i G , da er $a \circ x \circ a^{-1}$ et involutorisk element i G , thi

$$a \circ x \circ a^{-1} \neq \varepsilon, \text{ da } x \neq \varepsilon,$$

og

$$a \circ x \circ a^{-1} = (a \circ x \circ a^{-1})^{-1}, \text{ da } x = x^{-1}.$$

13. Lad G være en gruppe bestående af en mængde $\mathfrak{M}$ med en kompositionsregel $\circ$, og lad $\mathfrak{M}'$ være en delmængde af $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}'$ kaldes et system af *frembringere* (generatorer) for G , når et vilkårligt $x \in \mathfrak{M}$ kan skrives:

$$x = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_{n_x}, \quad a_1, a_2, \dots, a_{n_x} \in \mathfrak{M}',$$

hvor n_x er et naturligt tal afhængigt af x .

I de følgende to afsnit vil der aldrig blive tale om mere end een kompositionsregel. Vi vil derfor fremtidig erstatte $\circ$ med et almindeligt multiplikationstegn og hyppigt udelade dette ligesom ved sædvanlig multiplikation. Eksempelvis vil vi skrive $ab \cdot aba \cdot c$ i stedet for $(a \circ b) \circ (a \circ b \circ a) \circ c$.

B. Nogle egenskaber ved flytninger i planen.

Som bemærket i indledningen vil vi i dette afsnit ud fra et passende primitivt grundlag finde frem til visse i denne sammenhæng væsentlige egenskaber ved flytninger. Vi vil gøre dette således, at såvel ræsonnementer som resultater er gyldige i alle de tre foran omtalte former for elementær geometri. Disse egenskaber vil på naturlig måde føre os til det i næste afsnit opstillede Bachmann'ske aksiomsystem.

1. Ved en flytning tænkes som tidligere nævnt på en flytning af hele planen.

Et punkt kaldes et *fixpunkt* ved en flytning, når det ved flytningen føres over i sig selv.

En linie kaldes en *fixlinie* ved en flytning, når ethvert af dens punkter ved flytningen føres over i et punkt af samme linie (men ikke nødvendigvis over i sig selv).

2. En flytning er en permutation af mængden $\mathfrak{E}$ af planens punkter, nemlig den permutation af $\mathfrak{E}$, hvorved et vilkårligt punkt P i planen

tilordnes det punkt P' , som P ved flytningen føres over i. Mængden af alle flytninger er altså en delmængde af mængden af alle permutationer af $\mathfrak{E}$, og endvidere gælder:

4) Sammensætningen af to flytninger er igen en flytning.

5) Identiteten er en flytning.

6) Den inverse permutation til en flytning er igen en flytning.

Heraf følger, at mængden af alle flytninger er en undergruppe af permutationsgruppen over mængden af planens punkter, specielt altså en gruppe. Denne gruppe kaldes *flytningsgruppen*; dens kompositionsregel er sammensætning.

3. Til en given linie a findes der netop een fra identiteten forskellig flytning, der har ethvert punkt af a som fixpunkt; denne flytning kaldes *aksespejlingen* med a som akse og betegnes σ_a .

Da aksens for en aksespejling er den eneste linie med lutter fixpunkter, må vi for to linier a og b have, at

$$\sigma_a = \sigma_b \text{ medfører } a = b,$$

hvoraf følger, at *aksespejlingerne kan parres med deres spejlingsakser*.

Da en aksespejling ikke selv er identiteten, men sammensat med sig selv giver identiteten, er en *aksespejling et involutorisk element i flytningsgruppen*; for en vilkårlig linie a har vi altså: $\sigma_a \neq \varepsilon$, $\sigma_a \sigma_a = \varepsilon$ eller, anderledes skrevet, $\sigma_a \neq \varepsilon$, $\sigma_a = \sigma_a^{-1}$.

4. Til et givet punkt A findes der netop een fra identiteten forskellig flytning, der har enhver linie gennem A som fixlinie; denne flytning vil vi kalde *punktspejlingen* med A som centrum og betegne σ_A . Den kan sammensættes af to aksespejlinger med to vilkårlige på hinanden vinkelrette linier gennem A som spejlingsakser; for to vilkårlige sådanne linier x og y har vi altså:

$$\sigma_A = \sigma_x \sigma_y = \sigma_y \sigma_x.$$

Da centrum for en punktspejling er det eneste punkt med den egenkab, at alle linier gennem det er fixlinier, må vi for to punkter A og B have, at

$$\sigma_A = \sigma_B \text{ medfører } A = B,$$

hvoraf følger, at *punktspejlingerne kan parres med deres centre*.

Da en punktspejling ikke selv er identiteten, men ved sammensætning med sig selv giver identiteten, er en *punktspejling et involutorisk element i flytningsgruppen*; for et vilkårligt punkt A har vi altså: $\sigma_A \neq \varepsilon$, $\sigma_A \sigma_A = \varepsilon$ eller, hvad der er det samme, $\sigma_A \neq \varepsilon$, $\sigma_A = \sigma_A^{-1}$.

5. En vilkårlig flytning φ kan sammensættes af (endda højst tre) akse-spejlinger.

Lad nemlig (fig. 2) en orienteret linie h gennem et punkt A ved φ blive

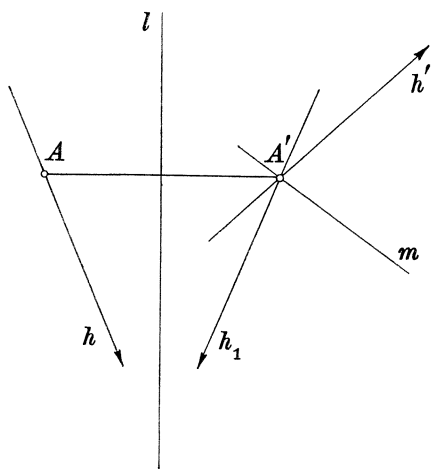


Fig. 2

ført over i en orienteret linie h' gennem et punkt A' . Lad dernæst l være en spejlingsakse for A og A' . Spejlingen σ_l fører A over i A' og h i en orienteret linie h_1 gennem A' . Lad endvidere m være en spejlingsakse for h_1 og h' . Spejlingen σ_m lader da A' ligge fast og fører h_1 over i h' . Hvis flytningen φ ikke hermed er fuldført, kan der kun mangle en spejling i h' , d. v. s. vi må have

$$\varphi = \sigma_m \sigma_l \text{ eller } \varphi = \sigma_{h'} \sigma_m \sigma_l.$$

6. Dersom α og φ betegner to flytninger, siges flytningen $\varphi' =$

$\alpha \varphi \alpha^{-1}$ at være flytningen φ transformeret med flytningen α .

Lad eksempelvis φ være en akse-spejling σ_a , medens α er en vilkårlig flytning, og lad a' være den linie, som a føres over i ved flytningen α . Et vilkårligt punkt P på a' er da fixpunkt ved flytningen $\varphi' = \alpha \sigma_a \alpha^{-1}$, thi ved flytningen α^{-1} føres P over i et punkt Q på a , ved flytningen σ_a er Q fixpunkt, og ved flytningen α føres Q tilbage i P . Da σ_a ikke er identiteten, kan φ' heller ikke være identiteten, men så må vi have $\varphi' = \sigma_{a'}$. Altså:

En akse-spejling σ_a transformeret med en vilkårlig flytning α er akse-spejlingen $\sigma_{a'}$, hvor a' er den linie, som a ved flytningen α føres over i.

Lad dernæst φ være en punktspejling σ_A , medens α stadig er en vilkårlig flytning, og lad A' være det punkt, som A føres over i ved flytningen α . En vilkårlig linie l gennem A' er da fixlinie ved flytningen $\varphi' = \alpha \sigma_A \alpha^{-1}$, og da φ' ikke kan være identiteten, må vi have $\varphi' = \sigma_{A'}$. Altså:

En punktspejling σ_A transformeret med en vilkårlig flytning α er punktspejlingen $\sigma_{A'}$, hvor A' er det punkt, som A ved flytningen α føres over i.

Lad nu φ være en punktspejling σ_A og α en akse-spejling σ_a . Når A ligger på a , er $\sigma_a \sigma_A \sigma_a = \sigma_A$, og da yderligere $\sigma_A \neq \sigma_a$, er $\sigma_A \nmid \sigma_a$. Er omvendt $\sigma_A \nmid \sigma_a$, haves $\sigma_a \sigma_A \sigma_a = \sigma_A$, d. v. s. A ligger på a (eller ved elliptisk geometri i a 's pol, men da er $\sigma_A = \sigma_a$ i strid med $\sigma_A \nmid \sigma_a$). Altså: *Et punkt A og en linie a er incidente, når og kun når $\sigma_A \nmid \sigma_a$.*

Lad endelig φ være en akse-spejling σ_b og α en akse-spejling σ_a . Vi har

da $\sigma_a \sigma_b \sigma_a = \sigma_{b'}$, hvor b' er den linie, som b føres over i ved aksspejlingen σ_a . Da $b' = b$, når og kun når $b = a$ eller $b \perp a$, får vi $\sigma_a \sigma_b \sigma_a = \sigma_b$ eller altså $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_a$, når og kun når $b = a$ eller $b \perp a$. Følgelig er *to linier a og b vinkelrette på hinanden, når og kun når $\sigma_a \perp \sigma_b$* .

7. Lad (fig. 3) a og b være to orienterede linier gennem samme punkt O . Vi betragter flytningen $\varphi = \sigma_a \sigma_b$. Vi vælger en positiv omløbsretning i planen og regner vinkler med fortegn efter denne.

Lad l være en vilkårlig orienteret linie gennem O . Den føres ved spejlingen σ_b over i en orienteret linie l_1 således, at vinklerne (lb) og (bl_1) er lige store. Endvidere føres linien l_1 ved spejlingen σ_a over i en orienteret linie l' således, at vinklerne (l_1a) og (al') er lige store. Vi har da:

$$\begin{aligned} (ll') &= (ll_1) + (l_1l') = (lb) + (bl_1) + (l_1a) + (al') \\ &= 2(bl_1) + 2(l_1a) = 2(ba), \end{aligned}$$

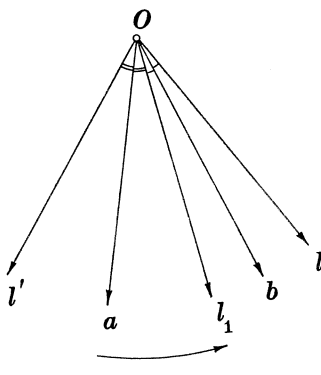


Fig. 3

hvoraf ses, at *flytningen $\varphi = \sigma_a \sigma_b$ er en drejning om O , og drejningsvinklen er det dobbelte af vinklen (ba)* .

Lad dernæst (fig. 4) a , b og c være tre orienterede linier gennem samme punkt O . Vi vælger som før en positiv omløbsretning i planen og regner vinkler med fortegn efter denne. Idet d er en orienteret linie gennem O således, at $(cd) = (ba)$, er $\sigma_a \sigma_b$ og $\sigma_d \sigma_c$ den samme drejning om O , d. v. s.

$$\sigma_a \sigma_b = \sigma_d \sigma_c$$

eller

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d.$$

Der findes altså til tre linier a , b og c gennem samme punkt O en linie d således, at:

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d.$$

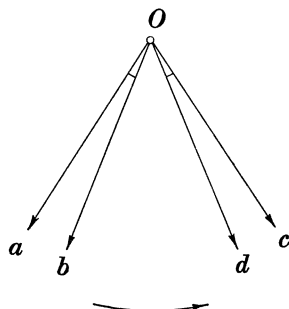


Fig. 4

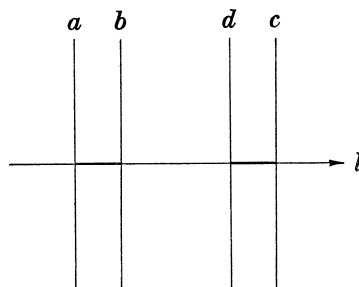


Fig. 5

Analogt finder man for to linier a og b , som er normaler til samme orienterede linie l , at flytningen $\sigma_a\sigma_b$ er en forskydning langs l , og forskydningens størrelse er det dobbelte af afstanden fra b til a (målt med fortegn på l).

Endvidere får man (se fig. 5), at der til tre linier a , b og c , som er normaler til samme linie l , findes en linie d , således at $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$ (d er nemlig en sådan normal til l , at afstandene fra b til a og fra c til d , målt på l efter samme positive gennemløbsretning af denne, er lige store).

8. Lad φ være en flytning, som er ombyttelig med enhver flytning. For en vilkårlig aksespejling σ_a gælder da

$$\begin{aligned}\text{hvoraf} \quad \varphi\sigma_a &= \sigma_a\varphi, \\ \varphi\sigma_a\varphi^{-1} &= \sigma_a.\end{aligned}$$

Ved hjælp af B 6 ser man heraf, at φ fører enhver linie over i sig selv, men så må φ være identiteten.

Ifølge A 11 gælder det altså, at gruppen af alle indre automorfier i flytningsgruppen er isomorf med flytningsgruppen selv.

9. Det i dette afsnit fremførte er som foran nævnt gyldigt i alle de tre former for elementær geometri. Af hensyn til det følgende skal her gøres opmærksom på et par forhold, hvor den ene af de tre geometrier adskiller sig væsentligt fra de to andre. I en elliptisk geometri er en aksespejling samtidig en spejling i aksens pol og en punktspejling samtidig en spejling i punktets polar. I en hyperbolsk geometri går der gennem et givet punkt, som ikke er incident med en given linie, uendelig mange linier, som ikke har noget punkt fælles med den givne linie.

(Fortsettes i neste hefte.)

MULTIPLICATION IN n DIMENSIONS

VILHJÁLMUR ÖGMUNDSSON

In the familiar representation of the complex numbers as points in a plane, the arithmetic operations correspond to certain geometric constructions, and it is therefore natural to ask whether there are some kind of algebraic systems which correspond to higher dimensional spaces. This question was in fact raised by Hamilton over a century ago.

If we regard the points of an n -dimensional space as n -tuples of real numbers, there is a natural way of introducing operations of addition and subtraction by defining the sum and the difference of the points

$$x = \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle \text{ and } y = \langle \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \rangle$$

to be the points

$$x + y = \langle \xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n \rangle$$

$$x - y = \langle \xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \dots, \xi_n - \eta_n \rangle.$$

We can also define the scalar product of a real number λ and a point x to be the point

$$\lambda x = \langle \lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n \rangle.$$

With these operations the space is a *vector space* over the field of real numbers. In addition we may define the norm or the length of a vector x to be the real number

$$|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2},$$

and we obtain a *normed vector space*.

We could of course introduce a notion of multiplication into this system in many different ways, but in order to be of interest, this operation should have some properties analogous to those of the complex numbers. Among the properties which we might consider in this connection are the following (where x , y and z are arbitrary vectors, λ is an arbitrary real number and e is some fixed vector):

- (A) $(x+y)z = xz + yz$
 (B) $x(y+z) = xy + xz$
 (C) $ex = xe = x$
 (D) $|xy| = |x||y|$
 (E) $(\lambda x)y = x(\lambda y) = \lambda(xy)$
 (F) $x(yz) = (xy)z$
 (G) $xy = yx$.

It is known that in a vector space of dimension $n > 2$ over the real numbers, it is impossible to define a multiplication which satisfies all of these conditions, and that for $n = 1$ and $n = 2$ the only possibilities are the operations of multiplication for the real and the complex numbers. If we drop the commutative law, G, we get one more system, Hamilton's *quaternions* with $n = 4$, and if we also drop the associative law, F, a fourth system is known to exist, the *Cayley numbers* with $n = 8$. It was proved by Hurwitz (*Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1898, pp. 309–316), that these are the only systems which satisfy the remaining five conditions A–E. The purpose of this note is to give a new proof of this fact, which is simpler and more elementary than any of the proofs that can be found in the literature¹.

We assume that V is a normed vector space over the real numbers. By a *unit vector* is meant a vector whose norm is 1. Two vectors x and y are said to be *orthogonal*, in symbols $x \perp y$, if

$$(*) \quad |x - y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}.$$

The vectors $x_1, x_2, \dots, x_k$ are said to form an *orthogonal sequence*, in symbols $(x_1, x_2, \dots, x_k) \perp$, if they are mutually orthogonal. If in addition each of the vectors x_i is a unit vector, then they are said to form an *orthonormal sequence*.

In addition to some more elementary properties of the norm and of the relation of orthogonality, we shall make use of the following facts:

If $|x+y| = |x| + |y|$ and if $x \neq 0$, then $y = \lambda x$ for some non-negative real number λ .

If $x \perp y$ and $x \perp z$, then $x \perp (y+z)$.

If $x \perp y$ and λ is a real number, then $x \perp \lambda y$.

¹ The author wishes to express his thanks to Professor Bjarni Jónsson for valuable help in giving this paper its final form.

If U is a subspace of V , then every vector x can be written in the form $x = y + z$, where y is in U and z is orthogonal to every vector in U .

Now assume that we have a multiplication defined in V which satisfies the conditions A–E. Observe that the identity element e must be a unit vector, because for any vector x ,

$$|x| = |ex| = |e||x|.$$

We begin by proving two lemmas.

LEMMA 1. *For any unit vectors u, v and w :*

- (i) *If $u \perp e$, then $u^2 = -e$.*
- (ii) *If $(e, u, v) \perp$, then $uv = -vu$.*
- (iii) *If $(e, u, v) \perp$, then $(e, u, v, uv) \perp$.*
- (iv) *If $(e, u, v) \perp$, then $(uv)v = -u$.*
- (v) *If $(e, u, v, w) \perp$, then $(uv)w = -(uw)v$.*
- (vi) *If $(e, u, v, uv, w) \perp$, then $u \perp vw$.*
- (vii) *If $(e, u, v, uv, w) \perp$, then $(uv)w = -u(vw)$.*

PROOF: (i). We have

$$|u^2 - e| = |u - e||u + e| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 = |u^2| + |e|.$$

Therefore $u^2 = -\lambda e$ for some non-negative real number λ . Since $|u^2| = |u|^2 = 1$ and $|\lambda e| = \lambda|e| = \lambda$, it follows that $\lambda = 1$ and, consequently, $u^2 = -e$.

(ii). Letting

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v),$$

we have $|w| = 1$ and $w \perp e$. It follows by (i) that $w^2 = -e$. But

$$w^2 = \frac{1}{2}(u + v)^2 = \frac{1}{2}(u^2 + uv + vu + v^2) = \frac{1}{2}(uv + vu) - e.$$

Therefore $uv + vu = 0$, $uv = -vu$.

(iii). Using (i) we find that

$$\begin{aligned} |uv - e| &= |uv + vv| = |u + v||v| = |u + v| = \sqrt{2} \\ |uv - u| &= |uv - ue| = |u||v - e| = |v - e| = \sqrt{2} \\ |uv - v| &= |uv - ev| = |u - e||v| = |u - e| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Therefore uv is orthogonal to each of the vectors e, u and v .

(iv). Observe that

$$2uv - (u + (uv)v) = (uv - u)(e - v).$$

Therefore

$$|2uv - (u + (uv)v)| = |uv - u||e - v| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$$

But $2uv$ is orthogonal to each of the vectors u and $(uv)v$, and is therefore orthogonal to their sum. Consequently,

$$|2uv - (u + (uv)v)| = \sqrt{|2uv|^2 + |u + (uv)v|^2} = \sqrt{4 + |u + (uv)v|^2},$$

and we infer that $u + (uv)v = 0$, $(uv)v = -u$.

(v). Since $(e, u, v + w) \perp$ and $|v + w| = \sqrt{2}$, it follows from (iv) that

$$(u(v + w))(v + w) = -2u.$$

But

$$\begin{aligned} (u(v + w))(v + w) &= (uv + uw)(v + w) \\ &= (uv)v + (uv)w + (uw)v + (uw)w = -2u + (uv)w + (uw)v. \end{aligned}$$

Therefore $(uv)w + (uw)v = 0$, $(uv)w = -(uw)v$.

(vi). It follows from (ii) and (iv) that

$$u - vw = -(uv)v + uv = (w - uv)v.$$

Therefore

$$|u - vw| = |w - uv| = \sqrt{2},$$

so that $u \perp vw$.

(vii). By (ii), (v) and (vi),

$$(uv)w = -(vu)w = (vw)u = -u(vw).$$

LEMMA 2. Suppose that $e_1, e_2, \dots, e_n$, where $e_1 = e$, is an orthonormal sequence which spans a subspace of V closed under multiplication, and that e_{n+1} is a unit vector orthogonal to $e_1, e_2, \dots, e_n$. Let $e_{n+i} = e_i e_{n+1}$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Then $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ is an orthonormal sequence which spans a subspace of V closed under multiplication. Furthermore $e_i e_{n+j} = (e_j e_i) e_{n+1}$ for $i, j = 1, 2, \dots, n$, and $e_{n+i} e_{n+j} = e_j e_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 2, 3, \dots, n$, but for $j = 1$, $e_{n+i} e_{n+1} = -e_i$.

PROOF: Let U be the subspace of V spanned by $e_1, e_2, \dots, e_n$. Each of the vectors e_{n+i} can be written in the form

$$e_{n+i} = \alpha u + \beta v,$$

where u and v are unit vectors, u is in U , v is orthogonal to every vector in U , and $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Therefore, by (ii) and (iv) of Lemma 1,

$$e_{n+1} = (e_i e_{n+1}) e_i = e_{n+i} e_i = \alpha(u e_i) + \beta(v e_i).$$

Now $u \perp v$, so that $u e_i \perp v e_i$ by the definition (*). Also $u e_i \perp e_{n+1}$ because $u e_i$ is in U . Consequently $u e_i$ is orthogonal to the vector

$$e_{n+1} - \beta(v e_i) = \alpha(u e_i),$$

which implies that $\alpha = 0$ and hence that $e_{n+i} = \beta v$. Thus e_{n+i} is orthogonal to each of the vectors $e_1, e_2, \dots, e_n$. Furthermore if $i, j \leq n$ and $i \neq j$, then

$$|e_{n+i} - e_{n+j}| = |e_i e_{n+1} - e_j e_{n+1}| = |e_i - e_j| = \sqrt{2},$$

so that $e_{n+i} \perp e_{n+j}$. The sequence $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ is therefore orthonormal. The last statement of the lemma is now an easy consequence of Lemma 1, and this in turn shows that the vector space spanned by $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ is closed under multiplication, since the product of two base vectors is always in the space.

THEOREM. *The dimension of V is either 1, 2, 4 or 8.*

PROOF: We see at once that the dimension of V must be a power of 2, for according to Lemma 2 every proper subspace U of V which is closed under multiplication is contained in another subspace of V closed under multiplication, whose dimension is twice the dimension of U . Starting with the 1-dimensional vector space U_0 spanned by the vector e , we obtain in this manner successively larger and larger spaces $U_1, U_2, U_3, \dots$ whose dimensions are 2, 4, 8, $\dots$, until the space V is exhausted. Lemma 2 also enables us to choose for each subspace U_k a basis whose multiplication table is completely determined by the last statement in the lemma. (Incidentally, this shows that for each dimension, the multiplication is essentially unique if it exists.)

Assuming now that the dimension n of V is not one of the numbers 1, 2, 4, 8, we infer that $n \geq 16$, and that V contains a 16-dimensional subspace U_4 closed under multiplication. Furthermore, we can find an orthonormal basis $e = e_1, e_2, e_3, \dots, e_{16}$ for U_4 such that

$$e_{2+i} = e_i e_3, \quad e_i e_{2+j} = (e_j e_i) e_3 \quad \text{for } i, j = 1, 2, \text{ and}$$

$$e_{2+i} e_{2+2} = e_2 e_i, \quad e_{2+i} e_{2+1} = -e_i \quad \text{for } i = 1, 2;$$

$$e_{4+i} = e_i e_5, \quad e_i e_{4+j} = (e_j e_i) e_5 \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3, 4, \text{ and}$$

$$e_{4+i} e_{4+j} = e_j e_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 2, 3, 4, \text{ but } e_{4+i} e_{4+1} = -e_i;$$

$$e_{8+i} = e_i e_9, \quad e_i e_{8+j} = (e_j e_i) e_9 \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, 8, \text{ and}$$

$$e_{8+i} e_{8+j} = e_j e_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, 8, \quad j = 2, 3, \dots, 8, \text{ but } e_{8+i} e_{8+1} = -e_i.$$

The proof will therefore be complete if we show (by means of a single example) that the multiplication defined by these formulas does not satisfy the condition D.

Consider the vectors

$$x = e_2 + e_{14} \quad \text{and} \quad y = e_3 + e_{15}.$$

Calculating the product

$$xy = e_2e_3 + e_2e_{15} + e_{14}e_3 + e_{14}e_{15},$$

we find that

$$\begin{aligned} e_2e_3 &= e_4 \\ e_2e_{15} &= e_2e_{8+7} = (e_7e_2)e_9 = -(e_2e_7)e_9 = -(e_2e_{4+3})e_9 \\ &= -((e_3e_2)e_5)e_9 = ((e_2e_3)e_5)e_9 = (e_4e_5)e_9 = e_8e_9 = e_{16} \\ e_{14}e_3 &= -e_3e_{14} = -e_3e_{8+6} = -(e_6e_3)e_9 = (e_3e_6)e_9 \\ &= (e_3e_{4+2})e_9 = ((e_2e_3)e_5)e_9 = (e_4e_5)e_9 = e_8e_9 = e_{16} \\ e_{14}e_{15} &= e_{8+6}e_{8+7} = e_7e_6 = e_{4+3}e_{4+2} = e_2e_3 = e_4, \end{aligned}$$

and so $xy = 2e_4 + 2e_{16}$. Consequently,

$$|xy| = 2|e_4 + e_{16}| = 2\sqrt{2}.$$

On the other hand,

$$|x||y| = |e_2 + e_{14}||e_3 + e_{15}| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$$

The condition D therefore fails, as was to be shown.

EN STUDIE AV HASTIGHETSANPASSNING VID KORSNING MELLAN VÄG OCH JÄRNVÄG

B. J. ANDERSSON

I samband med arbete inom Svenska matematikersamfundets kontaktnämnd har författaren till dessa rader bl. a. haft anledning att göra matematiska studier av vissa trafikproblem. Här behandlas problemet om den lämpliga hastighetsanpassningen vid passage av en järnvägs-korsning. Syftet är dels att ge ledning vid juridisk bedömning av trafikmål och dels att ge objektiva grunder för omkonstruktion av »farliga» järnvägs-korsningar samt placering av hastighetskontroller.

I fig. 1 anger O korsningen mellan en väg, som representeras av x -axeln, och en järnväg. För enkelhets skull har vägen och järnvägen ritats med rätta linjer, som skär varandra under rät vinkel. Den i

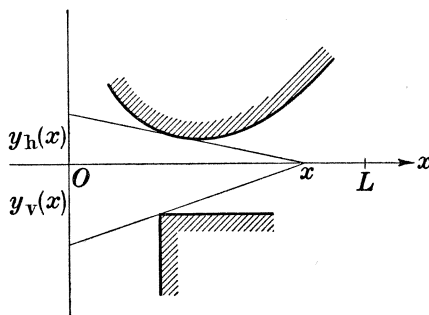


Fig. 1

det följande redovisade analysen gäller emellertid allmänt för krokiga vägar, som skär varandra under godtycklig vinkel. Vi definiera då x -koordinaten som avståndet från O , mätt utmed vägen.

En bilförare, som närmar sig O , antas kunna se korsningen, då $0 < x < L$. För $x > L$ är korsningen skydd av kurvor, backkrön eller liknande.

Från en punkt x , $0 < x < L$, ser bilisten en sträcka $y_h(x)$ av järnvägen på höger hand och en sträcka $y_v(x)$ på vänster hand, räknat från O . Vi beteckna vidare

$$y(x) = \text{det minsta av } y_v(x) \text{ och } y_h(x).$$

Ett tåg, som framföres på järnvägen, antas hålla en konstant hastighet u . Tåget förutsättes vara mycket långt. Detta innebär, att en bilist, som ej hinner passera korsningen före tåget, skall kunna stanna sin bil före

korsningen. Bilisten tillåtes alltså ej förlita sig på att ett eventuellt uppdykande tåg har begränsad längd.

Antag, att bilisten observerar det uppdykande tåget på avståndet x från O . Bilens hastighet är då v_0 . Om bilisten fortsätter med bibehållen hastighet, så skulle han passera O efter tiden x/v_0 . Tåget passerar korsningen efter tiden $y(x)/u$, och ingen kollision inträffar, om $x/v_0 < y(x)/u$, dvs.

$$(1) \quad v_0 > u \frac{x}{y(x)}.$$

Kvoten $x/y(x)$ kan bestämmas för olika x genom mätningar på den aktuella platsen. I allmänhet ökar $y(x)$, då x avtar mot noll.

Antag nu att

$$(2) \quad v_0 < u \frac{x}{y(x)},$$

dvs. med bibehållen hastighet hinner inte bilföraren över korsningen före tåget. Det finnes då två alternativ (vi utgå från att tåget ej bromsar inför uppdykande bilar annat än i yttersta nödfall, varvid bilisten tagit en otillåten risk):

- A. bilen bromsas till stillastående före korsningen,
- B. bilen ökar farten och hinner på så sätt före tåget.

Vi observera, att fallet B ej helt utesluter fallet A. Om korsningen ligger på ett slättlandskap, så kan det inträffa, att bilens hastighet kan ökas avsevärt, men att bilen i alla fall kan stannas före korsningen. Genom en hastighetsökning kan i så fall villkoret (1) bli uppfyllt utan att man eftersätter villkoret att bilen skall kunna stannas före korsningen, ifall bilisten skulle konstatera, att han ökat farten alldeles i onödan.

Vi studera nu fallet A. I diskussionen antas, att en bilist ej tillåtes att helt få förlita sig på en hastighetsökning inför järnvägs-korsningar, utan hastighetsökning tillåtes endast i de fall en bibehållen konstant fart ger riskfri passage av korsningen.

I fig. 2 har inritats kurvorna $v = u \frac{x}{y(x)}$ samt $v = v_B(x)$, där $v_B(x)$

är den maximala hastighet en bil antas få ha, om den med rimliga antaganden om retardation och reaktionstid kan stannas på sträckan x . Om retardationen är r meter/sek² och reaktionstiden T sekunder, så blir

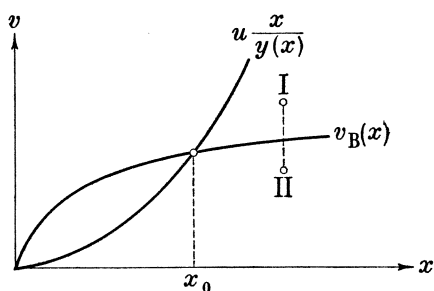


Fig. 2

$$(3) \quad v_B(x) = \sqrt{2rx + r^2 T^2} - rT \text{ meter/sek.}$$

Det är rimligt att anta att $0 < T < 1$. Vidare betyder

$$\begin{array}{ll} r = 2.5 \text{ meter/sek}^2 & \text{lätt inbromsning} \\ r = 5 & - \quad \text{hård inbromsning} \\ r = 7.5 & - \quad \text{mycket hård inbromsning,} \end{array}$$

och värdet $r = 7.5$ förutsätter mycket goda friktionsegenskaper hos vägen och hög kvalitet hos bilen och framför allt dess bromssystem och däck.

Vi antar nu, att $u \frac{x}{y(x)} = v_B(x)$ för $x = x_0$, $0 < x_0 < L$. Om $y(x)$ är en avtagande funktion av x , så gäller

$$u \frac{x}{y(x)} < u \frac{x}{y(x_0)} \quad \text{för} \quad 0 < x < x_0$$

$$u \frac{x}{y(x)} > u \frac{x}{y(x_0)} \quad \text{för} \quad x_0 < x.$$

I intervallet $0 < x < x_0$ ligger alltså kurvan $v = u \frac{x}{y(x)}$ under den räta linjen $v = u \frac{x}{y(x_0)}$ och för $x > x_0$ ligger kurvan över samma räta linje (se fig. 3). Härav följer att det finnes högst en skärningspunkt $x = x_0 > 0$ mellan de två studerade kurvorna.

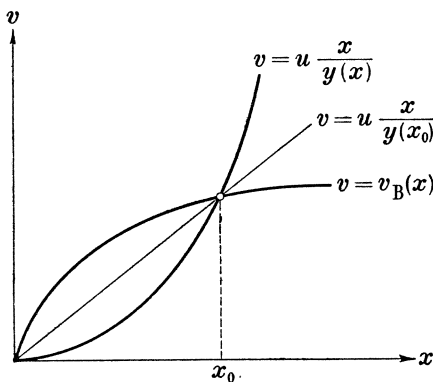


Fig. 3

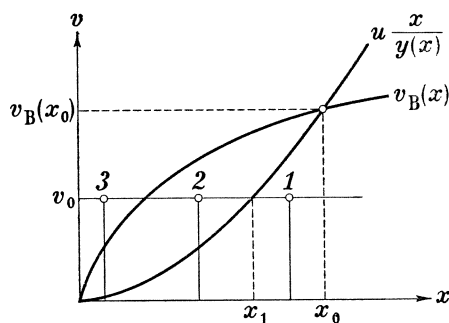


Fig. 4

Om olikheten (2) gäller, så ligger punkten (x, v_0) under kurvan $v = u \frac{x}{y(x)}$. Då kan inträffa två fall (se fig. 2):

I) $v_0 \geq v_B(x)$. Bilen kan ej stannas genom rimlig inbromsning inför

tåget, och bilistens enda chans är en hastighetsökning (eller inbromsning av tåget).

II) $v_0 < v_B(x)$. Då kan bilen stannas före korsningen.

För $x \geq x_0$ bör alltså v_0 vara $\leq v_B(x)$, därest bilisten i fallet A skall vara garderad inför ett uppdykande tåg. Om bilisten passerar punkten x_0 med en hastighet $v_0 < v_B(x_0)$, så kan han hålla denna hastighet oförminskad och antingen hinna över korsningen eller bromsa före korsningen, därest ett tåg skulle dyka upp (se fig. 4).

Ifall tåget blir synligt, då bilen befinner sig på ett avstånd $x < x_0$ från korsningen, varvid $v_0 < u \frac{x}{y(x)}$, så kan och bör bilen stannas (fall 1, fig. 4). Om $v_0 > u \frac{x}{y(x)}$ (fall 2), så hinner bilen före tåget, ifall den ej bromsas.

Om $v_0 > v_B(x)$ (fall 3), går det ej att bromsa bilen.

När bilföraren är säker på att han passerat den punkt $x = x_1$ där $v_0 = u \frac{x}{y(x)}$, så kan han som en säkerhetsåtgärd öka farten före passagen av korsningen.

Om $u \frac{x}{y(x)} < v_B(x)$ för alla $x < L$, så kan man sätta $x_0 = L$ (fig. 5). Det farliga fallet I kan då ej inträffa.

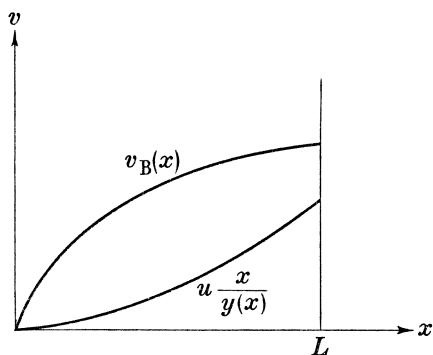


Fig. 5

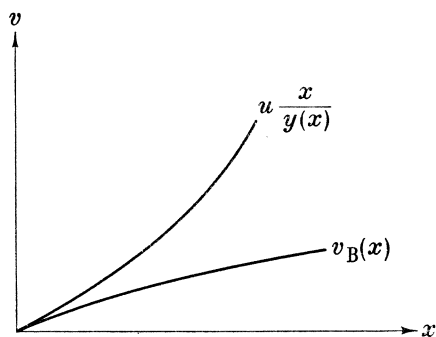


Fig. 6

Om $u \frac{x}{y(x)} > v_B(x)$ för alla $x < L$ (fig. 6) så har man en ur trafiksäkerhetssynpunkt helt förkastlig korsning, där man antingen skall införa stopplikt för bilarna och bilisterna skall genom skylt rekommenderas att lyssna efter tåg, och/eller tågen skall åläggas fartreducering vid korsningen. Det är angeläget att alla dylika korsningar elimineras genom vägomläggning eller bortröjning av sikthindrande föremål.

BOKMELDINGER

PAUL H. DAUS — WILLIAM M. WHYBURN: *Introduction to mathematical analysis*. With applications to problems of economics. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), 1958. 8 + 244 pp., 114 fig. \$ 6.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 40.)

Med visse forventninger åpner man en ny lærebok i matematikk for sosialøkonomer, denne gang skrevet for amerikanske »business students« av to professorer i matematikk. I en viss utstrekning er boken mer matematisk stringent enn mange forgjengere, men dessverre — dette blir mer enn oppveiet av lettvinthet i bruken av økonomiske, statistiske og dels også matematiske begreper. Boken behandler et meget begrenset område, den gir innføring i derivasjon og integrasjon i en variabel, partiell derivasjon i to variable, implisitt derivasjon, samt det enkleste av teorien for ekstremalverdier av funksjoner i en og to variable. Funksjoner av flere variable blir overhodet ikke nevnt. Av spesielle funksjoner forekommer bare polynomer, de fleste av 1. eller 2. grad, samt logaritme- og eksponensialfunksjoner. Det forutsettes at leseren har en viss bakgrunn i algebra (ut over vårt artiumspensum), f. eks. de to forfatteres egen bok. I kap. 2 behandles grense- og kontinuitetsbegreper på en matematisk forsvarlig måte, men så pass kortfattet og kommentarløst at de færreste studenter vil få tak i pointet ved disse grunnleggende begrepene. Eksempler med uendelige desimalbrøker appellerer neppe særlig til økonomistudenten. Og gjengangeren »Limit of an independent variable« (p. 38) kan bare tjene til å festne hans inntrykk av at matematikk er umulig å forstå. Derivasjon er mer utførlig behandlet. Differensialsymbolet blir brukt, men ikke forklart før i kap. 4, og da ikke godt. Ekstremal- og vendepunkter er bra forklart, med behandling av den nødvendige og den tilstrekkelige betingelse (annenordensbetingelsen) hver for seg, men på s. 164 blir første- og annenordensbetingelsen omtalt som »The necessary and sufficient conditions«.

Den vesentlige del av boken opptas av tallrike eksempler og øvelsesoppgaver (med løsninger) hentet fra det økonomiske område, og de ser bra ut så langt de går, men hovedvekten er lagt på tallregning. Generelle

konklusjoner, spørsmål om eksistensen av løsninger, o. l., kommer ikke frem. Behandlingen av eksemplene, og spesielt første kapitel, »Applications of graphical analysis« samt siste kapitel, »Introduction to curve fitting«, er egnet til å gi en fersk student en helt skjev oppfatning av bruken av matematikk og statistikk som hjelpemidler i økonomisk teori. Han vil tro det hele går ut på å tegne noen pene kurver, og regne små regnestykker med første- eller annengradspolynomer. Selvsagt må eksempler og øvelser til for å innarbeide regneregler og illustrere sammenhenger, men de må være slik at de understreker og ikke drukner det vesentlige: å vise hvordan matematikken bygges opp og hvordan den kan tas til hjelp ved formuleringen av problemene gjennom oppstilling av modeller og løsning ved matematiske metoder. Dette er ikke gjort bare ved å fortelle at en »normal« etterspørselskurve skal være fallende og en tilbudskurve stigende, og slett ikke ved å ty til »økonomiske resonner« *utenfor* den matematiske modellen, som i avsnitt 1.4 om markedets likevektspunkt (selv om eksemplet nesten er »klassisk«). Kap. 7 bør man helst unngå.

Det er synd at en så velskrevet og omhyggelig utarbeidet bok med bra oppsetning, trykk og papir — og ikke fler trykkfeil enn det må ventes i en førsteutgave — ikke kan anbefales hverken som oppslags- eller lærebok.

Henvisningene til andre elementære lærebøker, dels økonomisk-matematiske og dels ren-matematiske, er ganske omfattende.

Herdis Thorén Amundsen

LEONHARD EULER: *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Unter Mitwirkung von Joh. Niessner in revidierter Fassung neu herausgegeben von Jos. E. Hofmann. Reclam-Verlag, Stuttgart, 1959. 571 S. Ganzl. DM 18.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 88.)

I 1770 kom den første utgaven av denne kjente boken av Euler. På denne tid var Euler på det nærmeste blind og en skreddersvenn nedskrev manuskriptet etter Eulers diktat. Kanskje har dette medvirket til at Euler særlig har lagt an på at boken skulle kunne leses av folk med minimale forkunnskaper i matematikk. Man kan forbause seg over at Euler, som aldri hadde hatt noen forelesningsplikt, har maktet å skrive en så pedagogisk god fremstilling. Begynnelsen er meget elementær. Han begynner med de fire første regningsarter. Men han driver det etter hvert ganske langt, for eksempel til å behandle tredje- og fjerdegradsligninger. Av særlig interesse her er hans innførelse av imaginære tall: »Es ist klar, dass die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht einmal

zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, dass sie unmögliche Zahlen sind . . . , die bloss in der Einbildung vorhanden sind.« Også hans syn på muligheten av å løse ligninger av høyere grad enn fjerde er av interesse: »Alle Bemühungen jedoch, die Gleichungen höherer Grade auf gleiche Art aufzulösen oder diese wenigstens auf Gleichungen der niedrigsten Grade zurückzuführen, sind fruchtlos gewesen, so dass man nicht imstande ist, allgemeine Regeln zu geben, durch die die Wurzeln von höheren Gleichungen ausfindig gemacht werden können.« Det er lett å tenke seg hvordan en slik bemerkning må ha virket ansporende på unge matematikere. Man kan vel gå ut fra at Abel også har lest denne boken. Han gjentar iallfall i sine notisbøker fra skoleårene Eulers utsagn:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

og lignende.

Eulers historiske opplysninger om løsningen av tredje- og fjerdegradsligninger er mangelfulle. Hans påstand om at ligningen

$$y^2 - ax^2 = 1$$

var løst av en lærer englander ved navn Pell« skal også være helt uriktig. J. Hofmann sier i sitt »Nachwort« at W. Brouncker skulle ha vært nevnt istedenfor Pell og han tilføyer: »Eulers Autorität hat dann dazu geführt, dass diese Gleichung in der nachfolgenden mathematischen Literatur als die Pellsche bezeichnet wird, obwohl sie einzig und allein mit Fermats Namen zu Recht in Verbindung gebracht werden könnte.«

Det forekommer meg at den eneste riktige betegnelse på ligningen bør være den »indiske ligning« eller »Bhâskaras ligning«, da hans behandling av ligningen (fra ellevehundretallet e. Kr.) er på det nærmeste fullstendig og høyst beundringsverdig.

Euler utfører skrittvis løsningen av

$$y^2 - ax^2 = 1$$

i hele tall x og y for $a = 2, 3, 5, 6, 7$ og 8 og han tilføyer: »Bisweilen gelangt man bald zum Ziele, bisweilen aber sind dazu viele Operationen nötig, je nach Beschaffenheit der Zahl a , von der man doch keine gewissen Kennzeichen angeben kann Daher ist es dienlich, die Arbeit anderer zu benutzen und eine Tabelle beizufügen, in der zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werte der Buchstaben x und y angegeben werden, damit man in vorkommenden Fällen daraus für jede Zahl a die zugehörigen Buchstaben x und y entnehmen kann.«

Det kan vel tenkes at det er denne bemerkningen som har inspirert C. F. Degen til å utarbeide sin Canon Pellianus (1817).

J. Hofmann har foruten et »Nachwort« skrevet en »Einleitung« med mange interessante oplysninger om Euler og hans samtid.

Viggo Brun

D. HILBERT — W. ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Vierte Auflage. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 27.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 8 + 188 S. DM 33.00, Ganzl. DM 36.60.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 40.)

Bogen er næppe egnet som det første møte med matematisk logik. Men den, der — efter mere eller mindre omfattende læsning af orienterende art om matematisk grundlagsforskning — føler et behov for en systematisk fremstilling af det vigtige hjælpemiddel, logikkalkylen er, ham kan bogen anbefales.

Den foreliggende 4. udgave adskiller sig gennemgribende fra de foregående. Afsnittet om klassekalkylen, der var mindre heldigt, er således ikke til at kende igen; det præg af mystik, der her kunne være for den uindviede, er forsvundet; den helt forandrede symbolik er mere overskuelig. For udsagnskalkylen og den snævrere prædikatkalkyle benyttes nu aksiomsystemer af Gentzens type; afledningsreglerne er her formuleret således, at kan en formel overhovedet bevises, så kan man også finde et bevis.

I sin nuværende form giver bogen en gennemarbejdet, klar og fuldt moderne fremstilling af den matematiske logik. Frem til den snævrere prædikatkalkyles Entscheidungsproblem møder man en fuldt gennemført behandling; bogens sidste tredjedel er mere refererende, men giver et godt indblik i videregående problemstillinger.

Om anvendelser i den matematiske grundlagsforskning må man læse andetsteds; de falder uden for bogens ramme.

Tage Gutmann Madsen

HERBERT LUGOWSKI — HANNES JOACHIM WEINERT: *Grundzüge der Algebra, I*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 9.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 4 + 234 S., 15 Fig. DM 10.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 42.)

Denne boka er den første i en serie på tre små bind som behandler elementene av den abstrakte algebra. Bøkene har fått følgende titler:

1. Allgemeine Gruppentheorie.
2. Allgemeine Ring- und Körpertheorie.
3. Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen.

Hvert avsnitt er rikelig forsynt med oppgaver og gjennomarbeidete eksempler, og boka egner seg således godt for selvstudium. Definisjoner av abstrakte algebraiske begreper er gjerne gitt en konkret motivering. Boka er selvforsynt, men enkelte belysende eksempler har fått en litt knapp formulering. Eventuelle lesere vil for eksempel ha glede av litt kjennskap til lineær algebra. Fremstillingen er delt i fire hovedpunkter:

I. Grundbegriffe der Gruppentheorie.

II. Permutations- und Transformationsgruppen.

III. Homomorphe Abbildungen.

IV. Einige wichtige Strukturaussagen über Gruppen.

Kapitel IV omhandler begreper som særlig skal anvendes i bind 3, slik som enkle grupper, normalrekker og komposisjonsrekker og løsbare grupper. Kapitlet kulminerer med satsene til Schreier og Jordan-Hölder.

P. Holm

E. A. MAXWELL: *Fallacies in mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1959. 95 pp. sh. 13/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT 7 (1959), s. 90.)

Dette er en samling matematiske feilresonnementer og »beviser« for åpenbart gale satser. Feilene er stort sett gamle og velkjente (divisjon med null, falske fortegn for kvadratrøtter, geometriske bevis ut fra villledende figurer, og bruk av divergente rekker og integraler), men de er fikst kamuflert, og gir »beviser« som ser høyst troverdige ut.

Kommentarene som er knyttet til hver enkelt »fallacy«, er meget gode. De påviser klart og greit hvor feilen ligger, og inneholder ofte en del interessante tilleggsbemerkninger, som i et par tilfelle er meget dyptgående og utførlige.

Boken inneholder også noen meget morsomme eksempler på det forfatteren kaller »howlers«, det vil si åpenbart vanvittige resonnementer som gir riktig resultat.

Samlingen vil sikkert falle vanskelig for gymnasiaster, men det forhindrer ikke at mye av stoffet må kunne anvendes med fordel i undervisningen, både i gymnasier og mer videregående kurser.

Bent Birkeland

M. MILLER: *Variationsrechnung*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 24.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 133 S., 23 Fig. DM 8.10.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 131.)

Med sitt beskjedne omfang er den foreliggende bok meget innholds-

rik, kanskje noe *for* innholdsrik, idet mange av de behandlede emner er tatt temmelig summarisk. Verdifull er den rikholdige samling av eksempler som ledsager teksten. Enkelte av disse eksempler er kanskje behandlet med unødig bredde; eksempelvis er det ofret atskillig plass på det nokså banale problem å bestemme den korteste forbindelseslinje fra et gitt punkt til en gitt rett linje.

En alvorlig innvending må nevnes: til innledende orientering omtaler forfatteren problemet om ekstremalverdier av en gitt funksjon. Her kommer han i skade for å formulere den åpenbart uriktige setning: »... so sind für das Eintreten eines relativen Extremums die folgenden Bedingungen *notwendig* und *hinreichend*:

$$\frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_m, y_m)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_m, y_m)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_m, y_m)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_m, y_m)}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0 .«$$

I betraktning av de spesielle problemer som i variasjonsregningen knytter seg til »nødvendige« og »tilstrekkelige« vilkår, er det svært uheldig at en slik sammenblanding forekommer i den orienterende innledning.

Den nettopp siterte setning gir også et eksempel på en nokså klosset typografisk oppstilling, noe som går igjen i hele boka, og gjør lesningen temmelig anstrengende.

Alt i alt kan undertegnede, trass i bokas mange gode sider, ikke ubetinget anbefale den.

R. Tambs Lyche

MOTTATTE BØKER

Annales de l'institut Fourier. Tome VIII. Année 1958. Université de Grenoble. Chartres, Imprimerie Durand 1958. 290 pp. Fr. 6500.

L. Schwartz: Théorie des distributions à valeurs vectorielles (II) 1–209 * C. Chamfy: Fonctions méromorphes dans le cercle-unité et leurs séries de Taylor 211–261 * R. E. Edwards: La théorie du balayage de Cartan pour les surfaces de Riemann hyperboliques 263–272 * J. P. Kahane: Sur la totalité des suites d'exponentielles imaginaires 273–275 * W. Hayman: Sur l'interpolation par des fonctions bornées 277–290.

E. Asmus: *Einführung in die höhere Mathematik*. Dritte Auflage. Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1959. 11 + 410 S.

Allgemeines über Funktionen und ihre Darstellung 3–20 * Die wichtigsten Funktionstypen 21–92 * Die Logarithmusfunktion 92–118 * Die Exponentialfunktion 118–159 * Die Kreisfunktionen 160–166 * Näherungsverfahren zur Auflösung von Gleichungen 167–178 * Reihendarstellung von Funktionen 179–198 * Unbestimmte Ausdrücke 199–207 * Allgemeines über Differentialgleichungen 211–238 * Integrationsmethoden 239–286 * Graphische, numerische und mechanische Integralauswertung 287–307 * Darstellung von Funktionen zweier Veränderlichen 311–340 * Differentiation 341–364 * Integration 365–384 * Aufgaben 385–391 * Lösungen 391–399 * Namen- und Sachregister 401–410.

Friedrich Bachmann: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 96.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 13 + 311 S., 160 Fig. Ganzl. DM 49.80.

Spiegelungen in der euklidischen Ebene 1–19 * Der Begriff der metrischen Ebene 19–31 * Das Axiomensystem der metrischen (absoluten) Geometrie 32–56 * Sätze der metrischen Geometrie 56–75 * Projektive und projektiv-metrische Ebenen 76–93 * Begründung der metrischen Geometrie 93–124 * Über das Transitivitätsgesetz für beliebige involutorische Elemente 127–141 * Projektiv-metrische Koordinatenebenen und metrische Vektorräume 141–157 * Orthogonale Gruppen 157–169 * Darstellung metrischer Vektorräume und ihrer orthogonalen Gruppen mit Hilfe hyperkomplexer Systeme 170–186 * Die Bewegungsgruppen der hyperbolischen projektiv-metrischen Ebenen als abstrakte, aus ihren involutorischen Elementen erzeugte Gruppen (H-Gruppen) 186–199 * Der Satz von Pappus–Pascal in der euklidischen Geometrie 201–210 * Algebraische Darstellung der euklidischen Be-

wegungsgruppen 210–218 * Hyperbolische Bewegungsgruppen 219–230 * Darstellung der hyperbolischen Bewegungsgruppen durch binäre lineare Gruppen 231–238 * Begründung der elliptischen Geometrie 239–244 * Der Gruppenraum einer elliptischen Bewegungsgruppe 244–275 * Über die metrischen Bewegungsgruppen 275–285 * Metrisch-euklidische Ebenen 286–296 * Literatur 297–303 * Zusammenstellung besonderer Zeichen 303 * Axiomentafel 304 * Namen- und Sachverzeichnis 305–311.

Ross H. Bardell — Abraham Spitzbart: *Intermediate algebra*. (Addison-Wesley series in mathematics.) Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), 1959. 9 + 274 pp. \$ 4.75.

The real number system and fundamental operations 1–25 * Special products and factoring 26–44 * Fractions 45–62 * Functions and graphical representation 63–78 * Linear equations and systems of linear equations 79–102 * Quadratic equations and the quadratic function 103–125 * Systems of equations involving quadratics 126–140 * Exponents and radicals 141–163 * Exponential and logarithmic functions 164–184 * Polynomials of higher degree 185–203 * The binomial formula and mathematical induction 204–218 * Progressions 219–232 * Answers to odd-numbered exercises 233–261 * Tables 265–267 * Index 269–274.

Robert M. Exner — Myron F. Roszkopf: *Logic in elementary mathematics*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1959. 9 + 274 pp. sh. 52/6.

Glossary of special symbols and abbreviations ix * Mathematics, formal logic, and names 1–16 * The statement calculus 17–56 * Proof and demonstration 57–99 * Abstract mathematical systems 100–125 * The restricted predicate calculus 126–181 * Applications of logic in mathematics 182–242 * Appendix: Symbolic treatment of the miniature geometry 243–270 * Index 271–274.

Loo-Keng Hua: *Additive Primzahltheorie*. (Aus dem Chinesischen übersetzt von Victor Ziegler.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 6 + 174 S. Kunstleder DM 20.50.

Erläuterungen 1 * Trigonometrische Summen 2–11 * Abschätzung von Summen, die die Teilerfunktion enthalten 12–18 * Sätze über den Mittelwert einiger trigonometrischen Summen (I) 19–25 * Der Vinogradovsche Mittelwertsatz und seine Folgerungen 26–39 * Sätze über den Mittelwert einiger trigonometrischen Summen (II) 40–64 * Trigonometrische Summen, die Primzahlen enthalten 65–76 * Asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen des Waring–Goldbachschen Problems 77–98 * Singuläre Reihen 99–106 * Weitere Untersuchung des Waring–Goldbachschen Problems 107–120 * Systeme diophantischer Gleichungen mit Primzahlen als Unbekannten 121–152 * Weitere Untersuchungen zum Problem des zehnten Kapitels 153–169 * Einzelergebnisse 170–174.

Marc Kac: *Probability and related topics in physical sciences*. (Proceedings of the Summer Seminar, Boulder, Colorado 1957. — Lectures in applied

mathematics, Vol. I.) Interscience Publ., New York, London, 1959. 13 + 266 pp. \$ 5.60.

Nature of probabilistic reasoning 1–24 * Some tools and techniques of probability theory 25–57 * Probability in some problems of classical statistical mechanics 59–159 * Integration in function spaces and some applications 161–182 * G. E. Uhlenbeck: The Boltzmann equation 183–203 * A. R. Hibbs: Quantum mechanics 205–221 * Balth. van der Pol: Smoothing and “unsmoothing” 223–235 * Balth. van der Pol: The finite difference analogy of the periodic wave equation and the potential equation 237–257 * Bibliography 259–264 * Index 265–266.

L. V. Kantorovich — V. I. Krylov: *Approximate methods of higher analysis*. (Translated from the Russian fourth edition by Curtis D. Benster.) P. Noordhoff, Groningen, 1959. 12 + 681 pp. \$ 17.00.

Fourier's method 1–19 * Infinite systems of equations 20–44 * The solution of boundary-value problems by means of nonorthogonal series 44–68 * The application of double series to the solution of boundary-value problems 68–77 * The improvement of the convergence of series 77–96 * The replacement of an integral equation by a system of linear equations 97–110 * The method of successive approximations and analytic continuation 110–119 * The application of integral equations to the solution of the Dirichlet problem 119–141 * The solution of integral equations by replacing an arbitrary kernel by a degenerate one 141–161 * Expressions for the derivatives in terms of difference ratios. Relations between the values of a function at the nodes of a net and the harmonic and biharmonic operators 162–191 * Differential equations and the finite-difference equations that correspond to them 191–217 * The solution of finite-difference equations 217–241 * Variational problems connected with the most important differential equations 241–258 * Ritz's method and the method of B. G. Galerkin 258–303 * Reduction to ordinary differential equations 304–327 * Estimate of the error in variational methods and their order of convergence 327–357 * Introduction 358–365 * The property of minimum area in the transformation of a region into a circle 365–376 * The property of minimum contour length in the transformation of a region into a circle 376–381 * Orthogonal polynomials and conformal transformation 381–390 * Expansion in a series of the powers of a small parameter in the case of the transformation of a region into a circle 390–414 * Expansion in a series of the powers of a small parameter in the case of the transformation of a circle into a region 414–451 * Melentiev's method of approximate conformal transformation 451–478 * Green's functions and the conformal transformation of regions 478–500 * The application of integral equations to conformal transformation 501–520 * Mapping a polygon on a half plane 521–542 * Principles of the application of conformal transformation to the solution of the fundamental problems for canonical regions. Introduction 543–561 * The Dirichlet problem 561–575 * The Neumann problem 575–582 * The general boundary-value problem for harmonic functions 582–595 * The fundamental problems for biharmonic functions 595–615 * Schwarz's method for the solution of the Dirichlet problem for the sum of two regions 616–639 * The Schwarz–Neumann method for the solution of the Dirichlet problem for the intersection of two regions 640–659 * An example of the application of Schwarz's method 659–670 * Bibliography 671–681.

Konrad Knopp: *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie, II. Aufgaben zur höheren Funktionentheorie*. Fünfte Auflage. (Sammlung Götschen 878.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1959. 151 S. DM 3.60.

Vorbemerkungen 4 * Weitere Aufgaben zu I, Kap. 1–5 5–13 * Singuläre Stellen 13–20 * Ganze und meromorphe Funktionen 20–29 * Periodische Funktionen 29–32 * Analytische Fortsetzung 32–38 * Mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen 38–41 * Konforme Abbildung 41–151.

Werner von Koppenfels — Friedemann Stallmann: *Praxis der konformen Abbildung*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 100.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 13 + 375 S., 251 Fig. Ganzl. DM 69.00.

Komplexe Zahlen 1–6 * Komplexe Funktionen 7–22 * Beispiele zur Lösung physikalisch-technischer Probleme mit Hilfe der konformen Abbildung 22–35 * Konforme Abbildung gekrümmter Flächen 35–44 * Der Logarithmus 44–48 * Die allgemeine Potenz 48–59 * Die linearen Funktionen 59–84 * Der Mittelwertsatz 84–99 * Abbildungssätze 99–109 * Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip 109–114 * Abbildung von Kreisbogenpolygonen 114–141 * Polygone in Isothermennetzen 142–171 * Zweifach zusammenhängende Polygone 171–181 * Die eigentlichen Näherungsverfahren 181–188 * Die Integralgleichungsverfahren 188–203 * Zweiecke 203–207 * Geraden-Dreiecke 207–216 * Kreisbogen-Dreiecke 216–234 * Einteilige Geraden-Vierecke 234–258 * Zweiteilige Geraden-Vierecke 258–299 * Andere Polygone, deren Abbildungsfunktion vollständig angegeben werden kann 299–314 * Polygone, die von Kegelschnittbögen berandet sind 315–336 * Zweifach zusammenhängende Polygone 336–365 * Verzeichnis der Abbildungen 366–370 * Literatur 371 * Namen- und Sachverzeichnis 372–375.

Wolfgang Krull: *Elementare und klassische Algebra, II*. (Sammlung Götschen 933.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1959. 132 S. DM 3.60.

Literatur 4 * Vorbemerkungen 5–6 * Gruppentheorie, insbesondere Theorie der Abbildungsgruppen 7–36 * Galoissche Theorie. Reintranszendente Körper 37–64 * Berechnungsprobleme und Homomorphiesätze 64–82 * Affine und projektive Darstellungen. Gleichungen 5. und 6. Grades 82–111 * Bizyklische Gruppen und reelle Radikalkörper 111–130 * Sachverzeichnis 131–132.

Paul Lorenz: *Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik*. Bd. II/1: Der Schluss vom Teil aufs Ganze. S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1959. 11 + 213 S., 27 Fig. Ganzl. DM 18.60.

Der statistische Begriff der Wahrscheinlichkeit und Folgerungen daraus 1–14 * Die binomische Verteilung 15–45 * Empirische Verteilungen und die Gaussverteilung 46–58 * Die Verteilungen von Stichproben und ihre Charakteristiken 59–70 * Näherungen für die Verteilungen der Mittelwerte, der Varianzen und der Quotienten $\tau = \frac{M - M_U}{\sigma}$ von Stichproben mässigen und kleinen Umfangs 71–99 * Be-

stimmung von Mutungsgrenzen für σ_U und M_U . Irrtumswahrscheinlichkeiten. Theorie 100–114 * Die praktische Durchführung des Schlusses vom Teil aufs Ganze; Lexissche Zahl 115–135 * Tabellen 139–201 * Anhang 202–207 * Literatur 208 * Verzeichnis der Bilder 209 * Namenverzeichnis 210 * Sachregister 211–213.

K. O. May: *Elements of modern mathematics*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), 1959. 16 + 607 pp. \$ 7.50.

Preface ix–xii * Note to the student xiii–xiv * Note to the teacher xv–xvi * Elementary algebra 1–69 * Elementary logic 70–133 * Elementary theory of sets 134–172 * Plane analytic geometry 173–243 * Relations and functions 244–320 * Numbers 321–376 * Calculus 377–484 * Probability 485–528 * Statistical inference 529–547 * Abstract mathematical theories 548–583 * Tables 586–592 * Table of special symbols 593–597 * Index 599–607.

M. Miller: *Variationsrechnung*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 24.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 133 S., 23 Fig. DM 8.10.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 125–126.)

Die Problemstellung der Variationsrechnung 1–7 * Die Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung 8–88 * Isoperimetrische Probleme der Variationsrechnung 88–112 * Direkte Methoden zur Lösung von Variationsproblemen 112–122 * Rand- und Eigenwertprobleme 123–133.

Fritz Neiss: *Determinanten und Matrizen*. Fünfte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 6 + 111 S., 1 Fig. DM 6.60.

Allgemeine Vorbemerkungen 1–5 * Kombinatorik 5–13 * Determinanten 13–42 * Matrizen 42–74 * Systeme linearer Gleichungen 74–93 * Orthogonalisierung 93–100 * Quadratische Formen 100–109 * Sachverzeichnis 110–111.

A. V. Pogorelov: *Differential geometry*. (Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron.) P. Noordhoff, Groningen, 1959. 9 + 171 pp. Paper cover \$ 3.90, cloth bound \$ 4.50.

Introduction viii * The concept of curve 1–21 * Concepts for curves which are related to the concept of contact 22–41 * Fundamental concepts for curves which are related to the concepts of curvature and torsion 42–66 * Concept of surface 67–79 * Fundamental concepts for surfaces which are related to the concept of contact 80–99 * First quadratic form of a surface and concepts related to it 100–115 * Second quadratic form of a surface and questions about surface theory related to it 116–141 * Fundamental equations of the theory of surfaces 142–152 * Intrinsic geometry of surfaces 153–167 * Bibliography 168 * Index 169–171.

D. E. Richmond: *Introductory calculus*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), 1959. 15 + 207 pp. \$ 5.50.

Functions and graphs 1-33 * Derivatives 34-89 * The area under a curve 90-119 * Exponentials and logarithms 120-144 * Complex numbers and trigonometry 145-186 * Appendix on real numbers 187-194 * Answers to odd-numbered exercises 197-202 * Index 203-207.

Israel H. Rose: *A modern introduction to college mathematics*. John Wiley & Sons, New York, London, 1959. 21+530 pp. \$ 6.50.

Sets 3-17 * Functions, operations and relations 18-52 * Reason and irrationality 53-69 * The real number systems 70-104 * Algebraic equations and inequalities 105-136 * Introduction to analytic geometry 137-186 * Introduction to trigonometry 187-222 * Trigonometry continued 223-278 * Graphs 279-299 * Graphs of second degree equations 300-345 * Exponential and logarithmic functions 346-366 * Parametric equations 367-375 * Polar coordinates 376-387 * Introduction to the calculus 389-427 * Statistics and probability 428-493 * Tables 494-500 * Answers 501-518 * Index 519-530.

Hanno Rund: *The differential geometry of Finsler spaces*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 101.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 13+284 S. Ganzl. DM 59.60.

Calculus of variations. Minkowskian spaces 1-43 * Geodesics: Covariant differentiation 44-64 * The "Euclidean connection" of E. Cartan 65-93 * The theory of curvature 94-149 * The theory of subspaces 150-214 * Miscellaneous topics 215-262 * Bibliographical references to related topics 262-265 * Bibliography 266-280 * Index 281-283 * Symbols 284.

SYVENDE BIND AV SOPHUS LIE'S SAMLEDE AVHANDLINGER

De seks første bind av Sophus Lie's samlede verker er forlengst utkommet. Det sist trykte bind ble utsendt i 1937. Samtlige bind ble utgitt av Norsk Matematisk Forening ved bevilgning fra Statens Forskningsfond av 1919 og med understøttelse av Videnskapsakademiet i Oslo og Videnskapernes Akademi i Leipzig. Utgivere var Friedrich Engel og Poul Heegaard. Bindene utkom på B. G. Teubners forlag i Leipzig og H. Aschehougs forlag i Oslo.

Før sin død hadde F. Engel gjort helt trykkferdig et syvende og siste bind som skulle inneholde en del etterlatte arbeider av Sophus Lie. Det Saksiske Videnskapsakademi i Leipzig og Norsk Matematisk Forening har nå besluttet å utgi dette syvende bind. Ansvarlig for korrekt gjengivelse av Engels manuskript blir herrene K. Faber og W. Neumer.

Subskripsjonsprisen på dette syvende bind vil for nordiske abonnenter dreie seg om 70-80 norske kroner. H. Aschehougs forlag i Oslo (Sehestedsgt. 3) tar imot subskripsjonsanmeldelser fra de nordiske land. Teubner i Leipzig mottar subskripsjonsanmeldelser fra ikke-nordiske land. Bindet vil utkomme i nær fremtid.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 176–179 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må, for å komme med i neste hefte, være sendt innen 1. november 1959. Til samme dato forlenges fristen for oppgavene 174 og 175 i forrige hefte.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

176. Härled följande summationsformel för alternerande potenser av de naturliga talen:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^p = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} a_i n^{p-i} + \frac{1 - (-1)^n}{2} a_p,$$

där talen a_p är givna genom formeln för $n = 1, p = 1, 2, \dots, a_0 = 1$.

Gerhard Arfvedson

177. La n og r betegne naturlige tall, og

$$\sigma_r = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r}, \quad s_r = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right)^r.$$

Vis at

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \frac{2}{n^2} - \frac{\sigma_1}{n} \quad \text{og} \quad s_3 = \frac{6}{n^3} - \frac{3\sigma_1}{n^2} + \frac{\sigma_1^2 - 5\sigma_2}{2n}.$$

Angi en metode til å finne en tilsvarende formel for s_r .

W. Ljunggren

178. Bevisa identiteten

$$\sum_{r=0}^n \binom{a+r}{r} \binom{b-r}{n-r} = \binom{a+b+1}{n}.$$

Gerhard Arfvedson

179. Vis at rekken

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} - \frac{1}{6} + \dots,$$

som er framkommet av den alternerende harmoniske rekke ved omordning av leddene, er divergent.

R. Tambs Lyche

LØSNINGER

172. En Fibonacci-serie definieras genom $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, där a_0 och a_1 är givna heltal. Visa, att

$$a_{r+2n} + (-1)^n a_r = k_n a_{r+n}$$

där k_n bildar en spesiell Fibonacci-serie. Angiv de första termerna i denna serie.

Carl-Erik Fröberg

Oppgavestillerens løsning: Låt E vara förskjutningsoperatoren $Ea_n = a_{n+1}$, så finner man lätt $k_n = E^n + (-1)^n E^{-n}$, varav verifieras att $k_{n+1} = k_n + k_{n-1}$, eftersom $E^2 = E + 1$. För $n=0$ fås $k_0 = 2$; $n=1$ ger $k_1 = E - E^{-1}(E^2 - E) = 1$. Serien alltså: 2, 1, 3, 4, 7, 11, ...

Løst av Gerhard Arfwedson, F. P. Dahlkild, Sverker Eriksson og Erik Pettersson.

173. For $x > 0$ er gitt en kontinuerlig funksjon $\varphi(x)$, der

$$0 < \varphi(x) < x.$$

Vis at dersom det eksisterer minst en funksjon $f(x)$ som tilfredsstiller det ene av kravene

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(\varphi(x))}{x} > \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{xf(x)}{f(x) - f(\varphi(x))} > \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0,$$

så eksisterer det ikke noen funksjon som tilfredsstiller det andre.

H. Killingbergtrø

Løsning: Antag, at der findes en funktion $f_1(x)$, der tilfredsstiller (α) , og en funktion $f_2(x)$, der tilfredsstiller (β) . Enhver funktion $f(x) = kf_2(x)$, hvor k er en arbitrær konstant, tilfredsstiller da også (β) , og brøken tilvenstre i (β) er uafhængig af k .

Lad a_1 være et positivt tal, og lad x gennemløbe følgen $a_n = \varphi^{n-1}(a_1)$, der er aftagende og nedadtil begrænset af 0. Der gælder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; thi

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p > 0$ ville, da $\varphi(x)$ er kontinuert, medføre $\varphi(p) = \lim_{x \rightarrow p} \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$, hvilket er udelukket.

Den indledende antagelse medfører

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(a_n) - f_1(a_{n+1})}{a_n} > \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(a_n) = 0,$$

og

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n f_2(a_n)}{f_2(a_n) - f_2(a_{n+1})} > \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(a_n) = 0.$$

For tilstrækkelig store værdier af n , $n \geq N_1$, følger af (1):

$$(3) \quad f_1(a_n) > f_1(a_{n+1}) > 0$$

og af (2):

$$(4) \quad f_2(a_n) > f_2(a_{n+1}) > 0.$$

Ad (4): $f_2(a_n)/(f_2(a_n) - f_2(a_{n+1})) > 0$ tillader også $f_2(a_n) < f_2(a_{n+1}) < 0$ og $f_2(a_n) \cdot f_2(a_{n+1}) < 0$; men i første fald kan funktionen $-f_2(x)$ vælges i stedet for $f_2(x)$, og sidste mulighed må forkastes, da den medfører

$$\frac{f_2(a_n)}{f_2(a_n) - f_2(a_{n+1})} < 1$$

i strid med (2).

Nu medfører (1), at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n f_1(a_n)}{f_1(a_n) - f_1(a_{n+1})} = 0,$$

og med (2) sikrer dette, at der eksisterer et tal $N_2 \geq N_1$, så der for $n \geq N_2$ gælder

$$\frac{a_n f_1(a_n)}{f_1(a_n) - f_1(a_{n+1})} < \frac{a_n f_2(a_n)}{f_2(a_n) - f_2(a_{n+1})}.$$

Med benyttelse af (3) og (4) udledes heraf

$$(5) \quad \frac{f_1(a_{n+1})}{f_1(a_n)} < \frac{f_2(a_{n+1})}{f_2(a_n)}.$$

Det kan ved passende valg af $f_2(x)$ (en ændring af $f_2(x)$ ved multiplikation med en positiv konstant er uden indflydelse i ovenstående punkter) sikres, at $f_1(a_{N_2}) = f_2(a_{N_2})$, og ved induktion fås da af (5), gældende for $n \geq N_2$:

$$(6) \quad f_2(a_n) - f_1(a_n) > 0.$$

Videre medfører (2), at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2(a_n) - f_2(a_{n+1})}{a_n} = 0,$$

og med (1) sikrer dette, at der eksisterer et tal $N_3 \geq N_1$, så der for $n \geq N_3$ gjelder

$$\frac{f_2(a_n) - f_2(a_{n+1})}{a_n} < \frac{f_1(a_n) - f_1(a_{n+1})}{a_n}$$

eller

$$(7) \quad f_2(a_{n+1}) - f_1(a_{n+1}) > f_2(a_n) - f_1(a_n).$$

Af (1) og (2) udledes $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_2(a_n) - f_1(a_n)) = 0$; men dette er i strid med, at (6) og (7) gjelder for alle $n \geq N$, hvor N er det største af tallene N_2 og N_3 . Den indledende antagelse må derfor forkastes.

F. P. Dahllkild

INTERNORDISK PRISOPPGAVE

NMT bringer her den tredje felles prisoppgave for gymnasiaster i alle nordiske land. Oppgaveteksten er gitt både på norsk og svensk, med en dansk forklaring til noen glosser i den norske tekst. Besvarelser kan selvsagt innsendes på dansk, norsk eller svensk. Det kreves løsning på minst 5 av oppgavene.

Det vil bli delt ut en 1. premie på 150 og en 2. premie på 75 n. kr., eller tilsvarende beløp i vinnerens egen valuta.

Besvarelsene vil bli bedømt av en komité innen NMT's redaksjon. Et utvalg av de beste oppgaveløsninger blir offentliggjort i tidsskriftet.

Fristen for innlevering av besvarelser er 15. februar 1960. Oppgi navn, klasse og skole. Løsninger sendes til redaksjonssekretæren, professor E. Selmer, Mat. Inst., Nygårdsgt. 114, Bergen, Norge, ledsaget av en erklæring om at besvarelsen er selvstendig arbeid.

Vi henstiller til de nordiske gymnasielærere å gjøre flinke elever oppmerksom på prisoppgaven.

Norsk tekst:

1. Gitt ligningen $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Bevis at for ethvert positivt ulike (odde) helt tall n gjelder ligningen

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

2. Et rektangulært skjema av reelle tall med n horisontalrader¹ og p vertikalrader² er gitt. Horisontalradene nummereres $1, 2, \dots, i, \dots, n$, og vertikalradene $1, 2, \dots, k, \dots, p$. I horisontalrad nr. i er det minste tall m_i , og i vertikalrad nr. k er det største tall M_k . Det største av de n tall m_i kalles m , og det minste av de p tall M_k kalles M . Bevis at $m \leq M$.

3. Det er gitt en kule med radius R og et plan α som ikke har noe punkt felles med kulen. La S være et punkt i α . S er toppunktet i en omdreiningskjegleflate som kulen er innskrevet i. Hva er det geometriske sted for sentrum i kulens røringssirkel med kjegleflaten, når S beveger seg fritt i planet α ?

4. Tre linjestykker AA_1 , BB_1 og CC_1 har alle samme lengde $2k$, er parvis vinkelrette på hverandre og har felles midtpunkt O . Med A som toppunkt og forlengelsen av OA ut over A som akse er anbrakt en omdreiningskjegleflate som vender bort fra O . Likeså for de fem andre punktene A_1 , B , B_1 , C og C_1 . De seks kjegleflatene har samme halve toppunktsvinkel v . For hvilke verdier av v bestemmer kjegleflatene et lukket område som inneholder O ?

Idet v antar en av de herved fastlagte verdier, skal man finne den største avstand fra O til noe punkt på det lukkede områdes overflate.

5. I et plan ligger det n punkter. To og to av dem er forbundet med et orientert linjestykke (altså et linjestykke med en bestemt positiv retning). Idet man bare kan bevege seg på disse linjestykkene og det i positiv retning, skal man vise at det finnes et av de gitte punkter slik at en kan nå fra dette til alle de andre punktene, enten direkte eller gjennom bare ett ekstra punkt.

6. Finn største verdi av uttrykket $u = -5x + 8y + 3z$, idet

$$2x + 5y - z \leq 1, \quad -3x - 8y + 2z \leq 4, \quad -2x - 12y + 3z \leq 9$$

samt

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Svensk text:

1. Relationen $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ är given. Visa att för alla udda positiva tal n gäller

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Dansk: ¹ vandrette rækker; ² lodrette rækker (søjler).

2. Ett rektangulärt schema av reella tal med n rader och p kolonner är givet. Raderna numreras $1, 2, \dots, i, \dots, n$ och kolonnerna $1, 2, \dots, k, \dots, p$. I rad nr. i betecknas det minsta talet med m_i , och i kolonn nr. k betecknas det största talet med M_k . Det största av de n talen m_i kallas m och det minsta av de p talen M_k kallas M . Visa att $m \leq M$.

3. En sfär med radien R samt ett plan α , som inte har någon punkt gemensam med sfären, är givna. Låt S vara en punkt i α . S är toppunkt i en rotationskon, i vilken sfären är inskriven. Bestäm geometriska orten för medelpunkten i sfärens tangeringscirkel med konen, då S rör sig fritt i planet α .

4. Tre sträckor AA_1 , BB_1 och CC_1 har alla samma längd $2k$, är parvis vinkelräta mot varandra och har gemensam mittpunkt O . Med A som toppunkt och OA :s förlängning som axel anbringas en rotationskon vänd bort från O . Analogt förfäres med de fem andra punkterna A_1 , B , B_1 , C och C_1 . De sex konerna har samma halva toppvinkel v . För vilka värden på v bestämmer konerna ett slutet område, som innehåller O ?

Låt sedan v antaga ett av de sålunda fastlagda värdena och bestäm det största avståndet från O till någon punkt på det slutna områdets yta.

5. I ett plan är givet n punkter, och varje punktpar är förbundet med en orienterad linje. I det man endast får förflytta sig på dessa sträckor och i deras positiva riktning skall bevisas, att bland de givna punkterna finns en, från vilken man kan nå till alla de andra, antingen direkt eller genom högst en extra punkt.

6. Sök det största värdet av uttrycket $u = -5x + 8y + 3z$ då:

$$2x + 5y - z \leq 1, \quad -3x - 8y + 2z \leq 4, \quad -2x - 12y + 3z \leq 9$$

och dessutom

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1959 på de matematiske gymnasielinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. Løs og diskuter ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + y - 1 &= 0 \\x^2 + (1 - a)xy - ay^2 - ax + a^2y + 1 - a &= 0.\end{aligned}$$

2. Find ligningen for den cirkel, der har radius 1 og centrum i første kvadrant, og som rører begge linierne

$$3y = 4x \quad \text{og} \quad 4y = 3x.$$

Find røringspunkternes koordinater.

Find ligningerne for tangentene til cirklen fra punktet (3, 6).

3. Et konvekst polyeder er sammensat af to tresidede pyramider $D-ABC$ og $E-ABC$, hvis fælles grundflade er den ligesidede trekant ABC med siden a . Liniestykket DM , hvor M er midtpunktet af AC , er lig med $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, og kanten BE er lig med $a\sqrt{3}$. DM og BE står begge vinkelret på trekant ABC 's plan.

Find polyedrets toplansvinkler langs AB , BC og CA .

Igennem midtpunktet af kanten AB lægges en plan α parallel med sidefladen ACD . Find vinkler og sider i den polygon, hvori α skærer polyedret.

Matematik II.

1. I et retvinklet koordinatsystem er givet punkterne $A(3, 0)$ og $B(-1, 3)$ samt linien l med ligningen $x = 9$.

Find ligningen for det geometriske sted for de punkter, hvis afstande fra A og l har et konstant forhold, når det forlanges, at det geometriske sted skal indeholde punktet B .

Angiv koordinaterne til den fundne kurves brændpunkter.

2. Konstruer en trekant ABC af siden AC og højden h_c på siden AB , idet desuden afstandene fra AB og AC til midtpunktet M af siden BC skal have forholdet $p:q$, hvor p og q er givne liniestykker. — Diskussion kræves.

Beregn trekantens vinkler og ubekendte sider samt AM , når $AC = 4,574$, $h_c = 2,902$, $p = 1$ og $q = 1$.

3. Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af abscisseaksen, kurven $y = \ln x$ og den kurvetangent, hvis røringsspunkt har ordinaten 1. ($\ln x$ betegner den naturlige logaritme af x).

Den nævnte figur drejes 360° om ordinataksen. Beregn rumfanget af det derved fremkomne omdrejningslegeme.

FINLAND

Längre kursen.

1. Denna vår (1959) äro av abiturienterna 44,37 % gossar. Från 1929 har antalet abiturienter vuxit med 229,6 % och antalet gossar med 167,8 %. Huru många % av 1929 års abiturienter utgjorde flickorna och med huru många % har flickornas antal sedan dess ökats?

2. Visa, att en aritmetisk serie finnes i vilken summan av de n första termerna för varje värde på n är $= 3n^2 + 2n$. Bestäm seriens tre första termer.

3. Visa, att $x^2 + 2x^3 - 2x^4$ för intet reellt värde på x är större än 1.

4. Vilken punkt på parabeln $x = y^2$ är närmast linjen $y = x + 1$? Beräkna detta kortaste avstånd. Rita figur.

5. Ett lån om K mk, på vilket beräknas p % ränta, amorteras på t år genom inbetalning av en (årlig) annuitet på a mk i slutet av varje år. Härled den mellan K , a , p och t gällande formeln.

6. Punkten P är belägen på förlängningen av sträckan AB . Utmed linjen AB avsätts, utgående från P , i motsatta riktningar sträckorna $PC = PD =$ medelproportionalen till PA och PB . Visa, att punkterna C och D dela sträckan AB i samma förhållande, den ena in-, den andra utvändigt.

7. I triangeln ABC är sidan $AB = 12$ cm. Vinkeln A :s bissektris avskär av BC sträckan $CD = 9$ cm och B :s bissektris av AC sträckan $AE = 8$ cm. Beräkna triangeln ABC :s perimeter.

8. Bestäm bland de i en sfär med radien r inskrivna räta konerna den, vars mantelyta är störst.

9. Lös fullständigt ekvationen

$$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 2.$$

10. Bestäm, utan bruk av logaritmtabeller, vilketdera av talen $\log_2 3$ och $\log_4 6$ är störst.

ÍSLAND

I.

1. Undersøg og tegn kurven

$$y = 4 \sin 2x - 3 \operatorname{tg} x$$

i intervallet mellem 0 og 2π .

Beregn arealet af det område, der begrænses af kurven, x -aksen og linien $x = \frac{1}{4}\pi$ i intervallet $0 \leq x \leq \frac{1}{4}\pi$.

2. Løs ligningen

$$2x^3 - (9 - 6i)x^2 + (9 - 19i)x + 3i = 0,$$

når den vides at have en reel rod.

3. Fra punktet $P(0, t)$, hvor $t > 0$, er der trukket de to tangenter til hyperblen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1) Bevis, at røringpunkterne S og S_1 har koordinaterne

$$\left(\pm \frac{a}{t} \sqrt{b^2 + t^2}, -\frac{b^2}{t} \right).$$

2) Find et udtryk for arealet A af trekanten SPS_1 , og bestem A 's mindsteværdi, når P bevæger sig på y -aksen.

3) Find et udtryk for radius R i trekanten SPS_1 's omskrevne cirkel samt mindsteværdi for R .

4) Angiv betingelsen for, at de to mindsteværdier for henholdsvis A og R svarer til samme værdi af t .

II.

1. Konstruer trekanten ABC af vinklen A , radien r i trekantens indskrevne cirkel, samt forholdet $\frac{b}{c} = \frac{p}{q}$, hvor p og q er givne liniestykker.

Beregn trekantens sider og vinkler, når $\angle A = 65,58^\circ$, $r = 2,5$ cm og $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$.

2. Tre punkter A , B og C på parablen $y^2 = px$ har ordinaterne henholdsvis y_1 , y_2 og q ($y_2 > y_1 > 0$). AC er parablens normal i A og BC dens normal i B .

Bevis, at $2y_1y_2 = p^2$ og $y_1 + y_2 = -q$.

3. Grundfladen ABC i tetraedret $O-ABC$ har siderne $a=3$, $b=7$ og $c=5$.

1) Beregn vinklen B i trekanten ABC samt dennes areal.

2) Endvidere er der givet, at i hjørnet $B-ACO$ er siden $OBC = 90^\circ$ og siden $OBA = 60^\circ$. Beregn toplansvinklen ved kanten AB .

3) Yderligere opgives kanten $BO = 4$. Beregn tetraedrets rumfang.

NORGE

Reallinjen.

1. I likningssettet

$$x \sin \frac{v}{2} + y \cos \frac{v}{2} = 0$$

$$x \cos \frac{v}{2} + y \sin \frac{v}{2} = 2 \sin \frac{v}{2}$$

er v en vinkel i området $0^\circ \leq v < 360^\circ$. Drøft løsningen av dette likningssettet, og finn x og y når v har slike verdier at likningssettet lar seg løse. Skriv svarene med

funksjoner av vinkelen v i stedet for funksjoner av $\frac{1}{2}v$. Avgjør så hva for verdier v kan ha når x og y skal 1) begge være positive, 2) begge være negative, 3) ha motsatt fortegn.

Bruk de funne verdier av x og y til å finne hva v må være om vi skal få $y = 2x$. Hva for verdier får x og y da?

2. I en regulær, firkantet pyramide er grunnflatesiden a og høyden h . I pyramiden er det innskrevet en terning slik at terningen har en sideflate liggende i pyramidegrunnflaten og de fire hjørnene i den motsatte sideflaten liggende ett på hver sidekant i pyramiden.

Konstruer et plant snitt gjennom pyramiden og terningen, når snittet er lagt gjennom pyramidehøyden og parallelt med to grunnflatesider i pyramiden. Velg $a = 8$ cm og $h = 10$ cm når du konstruerer, og forklar konstruksjonen kort.

Finn volumet av pyramiden og volumet av terningen uttrykt ved a og h . Sett $\frac{h}{a} = x$ og vis at forholdet mellom volumet av terningen og volumet av hele pyramiden er

$$f(x) = \frac{3x^2}{(x+1)^3}.$$

Denne funksjonen skal undersøkes for alle reelle verdier av x (positive, null og negative) uten tanke på pyramiden og terningen. Finn da de verdier av x som gjør $f(x)$ positiv, null og negativ. Finn de områder av x der $f(x)$ vokser og der $f(x)$ minker når x vokser, og finn de maksimal- og minimalverdier som $f(x)$ har. Hva er forholdet mellom terningsiden og pyramidehøyden når $f(x)$ har sin maksimalverdi?

3. Parabelen $y^2 = 4x$ og den rette linjen L med likning $x = a$ er gitt. La P være et punkt på L , og la S være skjæringspunktet mellom polaren til P med hensyn til parabelen og den rette linjen fra P til origo.

Når P flytter seg langs L , følger punktet S en kurve, og polaren til P dreier seg om et fast punkt. Finn det faste punktet, og forklar hvorfor det er felles for alle polarene vi får når P flytter seg. Vis at kurven som S følger, har likningen

$$2x^2 - ay^2 + 2ax = 0.$$

Drøft den geometriske tydning av denne likningen for fritt valte, endelige verdier av a . Finn spesielt sentrum og akser når kurven er en ellipse og når den er en hyperbel. Lag en tegning når $a = 6$ og når $a = -6$. Velg 1 cm til enhet, og tegn begge kurvene og den gitte parabelen i samme akse-system på millimeterpapiret.

Vis, at når den funne kurven er en hyperbel, så er asymptotene tangenter til den gitte parabelen.

SVERIGE

Matematiska grenen.

1. Den räta linjen $x + 2y = 5$ är normal till kurvan $y = a(1 + x^2)$. Bestäm värdet på konstanten a .

2. I en regelbunden tresidig pyramid är vinkeln vid spetsen i en sidoyta lika stor som vinkeln mellan en sidokant och basytan. Bestäm denna vinkel.

3. I den vid A rätvinkliga triangeln ABC är sidan BC parallell med y -axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Hörnet A ligger i punkten $(0;1)$ och hörnet B på kurvan $y=x^2$. Bestäm geometriska orten för hörnet C , när B genomlöper den angivna kurvan, och konstruera orten i dess huvuddrag med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.

4. En likbent triangel med toppvinkeln 20° är inskriven i en cirkel. En transversal genom cirkelns medelpunkt delar en av triangelns lika stora sidor i förhållandet 3:1 från spetsen räknat. I vilket förhållande delar transversalen den andra av de lika stora sidorna?

5. Undersök funktionen $y = \sin 3x + \sin x$ med avseende på maxima och minima, samt upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag. Beräkna därefter ytan av det område, som begränsas av x -axeln och kurvan för $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$.

6. Funktionen $I = F(T)$ definieras genom ekvationen $I = aT^2 \cdot e^{-\frac{b}{T}}$, där a och b är konstanter och $a > 0$. Genom sambanden

$$x = \frac{10^4}{T}, \quad y = {}^{10}\log I - 2 \cdot {}^{10}\log T$$

införes variablerna x och y i stället för T och I . Den på detta sätt erhållna funktionen $y=f(x)$ representeras grafiskt av en rät linje. Beräkna dennas riktningskoefficient, om $a=60,2$ och $F(2000)=0,0010$.

7. Ekvationen $x^2(1-a) + y^2(1+a) - 1 = 0$, där a är ett reellt tal, som kan anta olika värden, betyder ett kägelsnitt i ett rätvinkligt koordinatsystem. Undersök, hur kägelsnittets art och dess symmetriaxlars lägen beror av a . Därvid skall för en ellips anges läget av storaxeln och för en hyperbel läget av transversalaxeln. Slutligen skall genom schematiskt uppritade diagram lämnas en översikt av hur kägelsnittet varierar, när a genomlöper alla reella värden.

8. Undersök utseendet av kurvan $y = x^3 + ax + b$ för olika reella värden på konstanterna a och b . Bevisa därefter med ledning av denna undersökning, att om ekvationen $x^3 + ax + b = 0$ har tre olika reella rötter, så gäller olikheten $4a^3 + 27b^2 < 0$. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man bevisar omvändningen av föregående sats, dvs. om $4a^3 + 27b^2 < 0$, så har ekvationen $x^3 + ax + b = 0$ tre olika reella rötter.

RESULTAT AV PRISTÄVLINGEN FÖR SVENSKA GYMNASISTER

(Uppgifterna i NMT 6 (1958), s. 180–181.)

Lösningar insändes från sammanlagt 19 deltagare. Första pris, 100 kr., tilldelades Elon Ekman, Blackebergs kommunala gymnasium, Bromma, medan andra pris, 50 kr., tillföll Per Martin-Löf, Östra Realläroverket, Stockholm.

SUMMARY IN ENGLISH

P. O. NEERUP: *The axiomatic foundation of geometry by F. Bachmann, I.* (Danish.)

In his recent book: "Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff", F. Bachmann has given a purely algebraic foundation of plane geometry based on the group of displacements.

After an introduction, the present article is divided in three sections, two of which are published in this issue. These are dealing with:

A. Elements of group theory.

B. Group-theoretical properties of displacements in the Euclidean, hyperbolic and elliptic plane from an intuitive point of view, leading to the axioms of Bachmann.

The third section will follow in the next issue.

VILHJÁLMUR ÖGMUNDSSON: *Multiplication in n dimensions.* (English.)

Given a normed vector space of dimension n over the field of real numbers, it was first shown by Hurwitz that a multiplication satisfying the five conditions A-E p. 112 is only possible for $n = 1, 2, 4, 8$. The article contains an elementary and very simple proof of this fact. The central result is Lemma 2 p. 114, which shows that n must be a power of 2, and that the multiplication is essentially unique if it exists.

B. J. ANDERSSON: *A study of speed adjustment by railway crossings.* (Swedish.)

Let $y(x) = \min \{y_h(x), y_v(x)\}$ be the length of visible railroad from a car at a distance x from the crossing O (fig. 1 p. 117), and let $v_B(x)$ (formula (3) p. 119) be the maximal speed from which the car can stop after a distance x . The (constant) speed of the train is denoted by u . The possibilities are discussed for the car to stop, to accelerate or to continue at constant speed v_0 after the train is detected. Three typical cases are illustrated in fig. 4 p. 119: 1° Stop. 2° Continue (preferably accelerate) or stop. 3° Continue.

The traffic study was made by the author under a contract with the "public relation" committee of the Swedish Mathematical Society (Svenska matematiker-samfundets kontaktnämnd).