

ROTHS FUNDAMENTALA SATS*

HARALD BERGSTRÖM

1. Inledning. Som bekant utdelas vid de vart fjärde år återkommande stora internationella matematikerkongresserna två pris, vilka i regel tillfalla yngre matematiker för speciella insatser. Vid 1958 års kongress i Edinburgh gick ett av dessa pris till en talteoretiker från Storbritannien, K. F. Roth. Jag vill här redogöra för Roths prestation.

Ett område, som särskilt fångslat matematikernas fantasi är sambandet mellan de rationella talen och de irrationella talen. De rationella talen inneslutas i en delmängd av de algebraiska talen. Ett algebraiskt tal ϑ är nollställe till ett polynom, dvs. det satisfierar en ekvation

$$(1.1) \quad \vartheta^n + a_{n-1}\vartheta^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

med rationella koefficienter a_v , $v=0, 1, \dots, n-1$. Om polynomet i vänstra ledet av (1.1) är irreducibelt säges ϑ ha graden n .

Utanför mängden av de algebraiska talen ligga de s. k. transcendent talen, dvs. de irrationella tal, som ej äro algebraiska. I en betydelse ligga emellertid åtminstone vissa transcendent tal närmare rationella tal än algebraiska tal, nämligen så att åtminstone en del transcendent tal i en viss betydelse kunna approximeras »bättre» än algebraiska tal med rationella tal. Enligt en sats, som går tillbaka till Dirichlet, finnes oändligt många par (p, q) av naturliga relativt primiska tal för vilka olikheten

$$(1.2) \quad |\vartheta - p/q| < q^{-2}$$

är satisfierad, då ϑ är ett reellt positivt irrationellt tal. För beviset hänvisas till läroböcker i elementär talteori¹. — Emellertid kan för vissa irrationella tal ϑ olikheten

$$(1.3) \quad |\vartheta - p/q| < q^{-\kappa}$$

* NMT bringer her en artikkel som i vanskelighetsgrad ligger til dels betydelig over det vanlige nivå. Når redaksjonen likevel har funnet det riktig å ta inn artikkelen, skyldes det at Roths bevis er en av de mest omtalte prestasjoner innen matematikken i den senere tid.

¹ Se t. ex. T. Nagell: *Elementär talteori*, Uppsala 1950, s. 37.

ha oändligt många lösningar (p, q) även för $\kappa > 2$. Övre gränsen κ_0 för alla κ för vilka (1.3) alltså har oändligt många lösningar kan lämpligen betraktas som ett mått på den noggrannhet varmed ϑ approximeras av ett rationellt tal. På grund av Dirichlets sats är $\kappa_0 \geq 2$ för varje reellt irrationellt tal. Redan 1844 visade Liouville att κ_0 för ett algebraiskt tal ej kan vara större än dess grad n . Thue visade 1908 att $\kappa_0 \leq \frac{1}{2}n + 1$. Siegel sänkte (1921) denna gräns till $\min\{s + n/(s+1)\}$ ($s = 1, 2, \dots, n-1$) och Dyson sänkte den (1947) till $\sqrt{2n}$. Siegel förmodade att $\kappa_0 = 2$ för varje reellt algebraiskt tal av grad > 1 . Roth har nu visat att denna förmodan är riktig. Roths sats kan formuleras på följande sätt:

För varje reellt positivt algebraiskt tal av graden > 1 har (1.3) oändligt många lösningar (p, q) med naturliga relativt primiska tal p och q , om $\kappa = 2$, men endast ett ändligt antal sådana lösningar om $\kappa > 2$.

Beviset för satsen är indirekt, dvs. han antar att (1.3) har oändligt många lösningar (p, q) för $\kappa > 2$ och något algebraiskt tal ϑ och visar att detta leder till en motsägelse. Han kan därvid utgå från att ϑ är ett s. k. helt algebraiskt tal, dvs. att ϑ satisfierar en ekvation (1.1), där $a_0, \dots, a_{n-1}$ äro hela tal. Om nämligen ϑ satisfierar en ekvation (1.1), där koefficienterna ha största gemensamma dividenden d , är $d\vartheta$ ett helt algebraiskt tal — den ekvation, i vilken $d\vartheta$ är rot, framgår av (1.1), då denna multipliceras med d^n — och om (1.3) har oändligt många lösningar (p, q) för något $\kappa > 2$ är

$$|d\vartheta - pd/q| < d \cdot q^{-\kappa} < q^{-\kappa_1}$$

för oändligt många (p, q) och ett tal κ_1 , $2 < \kappa_1 < \kappa$ (nämligen för alla q , för vilka $d < q^{\kappa-\kappa_1}$). Vi utgå sålunda i fortsättningen från att ϑ är ett helt algebraiskt tal.

Roths bevis är elementärt i den betydelse, att det ej bygger på analytiska hjälpmedel. Emellertid är det långt ifrån enkelt. Det fordrar en ganska stor apparatur. De hjälpmedel, som han använder, äro i stort sett följande: 1° elementära diofantiska approximationer, 2° generaliserade Wronskideterminanter (Wronskimatriser), 3° Gauss' lemma om koefficienternas delbarhet i en produkt av polynom, 4° ett nytt begrepp, s. k. index för polynom (detta bestämmer en s. k. värdering).

Roths resultat är av stor betydelse i olika sammanhang. Bl. a. generaliserar det en bekant sats av Siegel, vilken nu kan givas följande formulering:

Om $f(x, y)$ är ett homogent irreducibelt polynom av graden n med heltalskoefficienter och $g(x, y)$ är ett polynom (ej nödvändigtvis homogent) av graden $\leq n-3$ med heltalskoefficienter, så har ekvationen

$$f(x, y) = g(x, y)$$

blott ett ändligt antal heltalslösningar.

Dysons uppskattning ger motsvarande sats för det fallet att graden av $g(x, y)$ är mindre än $n - \sqrt{2n}$. Beviset av ovannämnda sats följer ganska direkt av Roths sats¹.

Det här nedan givna beviset ansluter sig närmast till framställningen i J. W. S. Cassels: *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge 1957, vilken dock i stort sett följer Roths originalbevis i *Matematika*, Vol. 2, Part 1, No 3 (1955). Emellertid använder jag genomgående vektorframställning. Uppskattningar som vi göra i det följande väljas endast med så stor precision att de äro tillräckliga för beviset av Roths sats.

2. Beteckningar. För att nå en förenkling i uttrycksmedlen, inför jag *vektorer*. En vektor betecknas med stor bokstav, t. ex. A , och dess koordinater med motsvarande liten bokstav, som indiceras för att angiva koordinatens plats, alltså

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

0 betecknar 0-vektorn. Små bokstäver beteckna rationella tal, då ej något särskilt förbehåll göres. Med vektorer A, B osv. räkna vi enligt de vanliga vektorreglerna, alltså

$$\begin{aligned} A &= B \text{ om } a_i = b_i, \ i = 1, 2, \dots, m \\ A + B &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \\ \lambda A &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m). \end{aligned}$$

Vidare använda vi de speciella beteckningarna $A < B$, om $a_i < b_i$ för alla i , $A \leq B$ om $a_i \leq b_i$ för alla i och

$$A/B = (a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_m/b_m), \quad |A| = \sum_{i=1}^m |a_i|,$$

och för vektorer J, K med icke negativa heltalskoordinater:

$$\begin{aligned} J! &= j_1! j_2! \dots j_m!, \quad \binom{J}{K} = \binom{j_1}{k_1} \binom{j_2}{k_2} \dots \binom{j_m}{k_m}, \\ A^J &= a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m}. \end{aligned}$$

För deriveringsoperatoren (observera att vi här endast behöva betrakta derivator i algebraisk mening) använda vi beteckningen

¹ Jfr. t. ex. Nagell, loc. cit., s. 253–254.

$$D^J = \frac{\partial^{j_1+j_2+\dots+j_m}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_m^{j_m}}.$$

D är sålunda den enda stora bokstav som inte betecknar en vektor.

Ett polynom av variablerna $x_1, x_2, \dots, x_m$ (variabeln $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$) med rationella koefficienter $c_J = c_{j_1 j_2 \dots j_m}$ kan då skrivas

$$(2.1) \quad f(X) = \sum_{J \leq R} c_J X^J,$$

varvid x_ν har graden högst r_ν . Taylorutvecklingen för $f(X)$ omkring punkten A har i dessa beteckningar formen

$$(2.2) \quad f(A + X) = \sum_{J \leq R} \frac{X^J}{J!} D^J f(A).$$

Speciellt är

$$(2.3) \quad 2^{|R|} = (1+1)^{|R|} = \sum_{0 \leq K \leq R} \binom{R}{K}.$$

Slutligen bör observeras att $[a]$ betecknar det största heltal, som är mindre än eller lika med a och att $[a, b]$ för hela tal a och b betecknar den största gemensamma divisorn till a och b .

3. Elementära diofantiska approximationer.

HJÄLPSATS 3.1. *Ett system*

$$l_j(Z) = \sum_{1 \leq k \leq s} a_{jk} z_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, t, \quad s > t$$

av linjära ekvationer med heltalskoefficienter, som satisfiera olikheten $|a_{jk}| \leq b$ ($b \geq 1$), har åtminstone en heltalslösning $Z = (z_1, z_2, \dots, z_s) \neq 0$, där

$$|z_\nu| \leq c = [(sb)^{t/(s-t)}], \quad \nu = 1, 2, \dots, s.$$

BEVIS: Låt z_ν antaga värdena $0, 1, \dots, c$ för $\nu = 1, 2, \dots, s$. Vektorn Z antager då $(1+c)^s$ olika värden och vektorn

$$L(Z) = (l_1(Z), l_2(Z), \dots, l_t(Z))$$

antager lika många värden. Därvid måste varje koordinat $l_j(Z)$ tillhöra ett slutet intervall av längden sbc omkring origo. Antalet heltalsvärden i detta är $sbc + 1$. Vektorn $L(Z)$ kan således högst antaga $(sbc + 1)^t$ olika värden. Nu är

$$sbc + 1 \leq sb(c + 1) < (c + 1)^{(s-t)/t}(c + 1) = (c + 1)^{s/t},$$

varför antalet vektorer Z är större än antalet olika värden $L(Z)$. Det

finnes då åtminstone två olika vektorer $Z^{(1)}$ och $Z^{(2)}$, för vilka $L(Z^{(1)}) = L(Z^{(2)})$. Då är $L(Z) = 0$ för $Z = Z^{(1)} - Z^{(2)}$, där

$$|z_v^{(1)} - z_v^{(2)}| \leq \max(z_v^{(1)}, z_v^{(2)}) \leq c.$$

HJÄLPSATS 3.2.¹ Låt R vara en given m -dimensionell vektor, vars koordinater äro naturliga tal. Antalet vektorer J av dimensionen m med icke negativa heltalskoordinater, för vilka

$$1^\circ \quad J \leq R, \quad |J/R| \leq \frac{1}{2}(m - \lambda), \quad \lambda > 0$$

är då högst

$$2^\circ \quad (2m)^{\frac{1}{2}\lambda-1}(r_1+1)(r_2+1) \dots (r_m+1).$$

Beviset föres genom fullständig induktion. Vi kunna antaga att $\lambda > (2m)^{\frac{1}{2}}$, ty eljest finnes inget att bevisa. För $m=1$ är då satsen självklar. Betrakta $m > 1$. Enligt vårt induktionsförfarande kunna vi antaga att antalet lösningar, som satisfiera 1° för fixt $j_m = j \leq r_m$, högst är (λ ersättes med $\lambda - 1 + 2j/r_m$, m med $m-1$)

$$(2m-2)^{\frac{1}{2}(\lambda-1+2j/r_m)-1}(r_1+1) \dots (r_{m-1}+1).$$

Summera vi de värden, som detta uttryck antager för $j=0, 1, \dots, r_m$ och observera vi relationen

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{r_m} \frac{1}{\lambda-1+2j/r_m} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{r_m} \frac{1}{\lambda-1+2j/r_m} + \sum_{j=0}^{r_m} \frac{1}{\lambda+1-2j/r_m} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{r_m} \frac{\lambda}{\lambda^2 - (1-2j/r_m)^2} \leq (r_m+1) \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \end{aligned}$$

samt att

$$\lambda^2 - 1 = \lambda^2(1 - 1/\lambda^2) \geq \lambda^2(1 - 1/m)^{\frac{1}{2}},$$

finna vi att antalet lösningar till 1° ej kan vara större än det värde som anges av 2° .

4. Ett bekant lemma av Gauss. Följande bekanta lemma av Gauss finner man i klassiska läroböcker i algebra².

Om polynomen $f(X)$ och $g(X)$ ha rationella koefficienter och $f(X) \cdot g(X)$ har heltalskoefficienter så finnes ett rationellt tal γ så att $\gamma f(X)$ och $\gamma^{-1}g(X)$ ha heltalskoefficienter.

¹ Denna hjälpsats har givits av H. Davenport.

² Se t. ex. Perron: *Algebra II*, Berlin 1932, s. 184.

5. Linjär oavhängighet och generaliserade Wronskideterminanter (Wronskimatriser). Polynomen $f_v(X)$, $v=1, 2, \dots, h$, med rationella koefficienter säges vara linjärt avhängiga, om det finnes rationella tal c_v , som icke alla äro 0 för vilka

$$(5.1) \quad l(X) = \sum_{v=1}^h c_v f_v(X) \equiv 0.$$

Eljest säges de vara linjärt oavhängiga. Man kan avgöra om polynom äro linjärt oavhängiga eller ej med hjälp av följande

KRITERIUM. *Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att polynomen $f_v(X)$, $v=1, 2, \dots, h$, äro linjärt oavhängiga är att Wronskimatrisen*

$$(5.2) \quad \{D^J f_v(X)\}, \quad v=1, 2, \dots, h, \quad |J| \leq h-1,$$

har rangen h .

Observera att elementen i en rad äro derivatorna $D^J f_v(X)$, för en bestämd deriveringsoperator D^J , där $v=1, 2, \dots, h$, och att matrisen innehåller alla rader för vilka $|J| \leq h-1$.

Vi bevisa kriteriet för rationella funktioner, för vilka det likaledes gäller (med samma oavhängighetsbegrepp).

Att villkoret är tillräckligt följer av en bekant sats om lösning av linjära homogena ekvationer¹. Om nämligen (5.1) består, framgår därav relationen $D^J l(X) \equiv 0$ och för att minst h sådana relationer samtidigt skola bestå, fordras enligt nämnda sats, att tillhörande matris har en rang som är mindre än h .

Nödvändigheten av villkoret bevisa vi genom fullständig induktion. Vi antaga sålunda att de rationella funktionerna äro linjärt oavhängiga och ha att visa att detta leder till att matrisen (5.2) har rangen h .

För $h=1$ är påståendet trivialt. Betrakta $h>1$. Om $f_v(X)$ för $v=1, 2, \dots, h$ äro linjärt oavhängiga, äro även $\{f_1(X)\}^{-1} f_v(X)$, $v=1, 2, \dots, h$, linjärt oavhängiga. Om vidare $f_v(X)$ ersättes av $\{f_1(X)\}^{-1} f_v(X)$ i (5.2), kan den matris som uppkommer vid substitutionen ej ha större rang än matrisen (5.2), ty varje determinant av ordningen d till den substituerade matrisen är en summa av determinanter av ordningen d till (5.2) multiplicerade med produkter av derivator till $\{f_1(X)\}^{-1}$. Utan inskränkning av allmängiltigheten kunna vi då antaga att redan $f_1(X)=1$. Då måste någon derivata av första ordningen, låt vara $\frac{\partial f_h(X)}{\partial x_1}$, till $f_h(X)$ vara skild från 0, ty $f_h(X)$ kan ej vara en (rationell) konstant samtidigt som $f_1(X)$. Av

¹ Se t. ex. Perron, loc. cit., s. 101.

derivatorna $\frac{\partial f_\nu(X)}{\partial x_1}$ äro således minst en och högst $h-1$ skilda från 0 och således också minst en och högst $h-1$ linjärt oavhängiga. Av de rationella funktionerna $\frac{\partial f_\nu(X)}{\partial x_1}$, $\nu=2, 3, \dots, h$, utvälja vi ett maximalt antal, som äro linjärt oavhängiga. Låt dessa vara $\frac{\partial f_\nu(X)}{\partial x_1}$, $\nu=k+1, \dots, h$ ($0 < k < h$).

De övriga derivatorna äro då linjärt avhängiga av de nyssnämnda oavhängiga derivatorna och kunna framställas som linjärkombinationer av dem. Genom att addera lämpliga linjärkombinationer av $f_{k+1}(X), \dots, f_h(X)$ till $f_\nu(X)$ för $\nu=1, 2, \dots, k$ kunna vi så finna rationella funktioner $\varphi_\nu(X)$ för vilka $\frac{\partial \varphi_\nu(X)}{\partial x_1} = 0$, $\nu=1, 2, \dots, k$. Om vi ersätta $f_\nu(X)$ i (5.2) med $\varphi_\nu(X)$ för $\nu=1, 2, \dots, k$ få vi en ny matris, som tydligen icke kan ha större rang än (5.2). Utan inskränkning av allmängiltigheten kunna vi därför antaga att redan $f_\nu(X)$ för $\nu=1, 2, \dots, k$ har egenskapen $\frac{\partial f_\nu(X)}{\partial x_1} = 0$.

Emedan $f_\nu(X)$ för $\nu=1, 2, \dots, k$ äro linjärt oavhängiga, kunna vi enligt vårt induktionsförfarande sluta, att det finnes en determinant

$$(5.3) \quad |D^{J_\lambda} f_\nu(X)|, \quad \nu, \lambda = 1, 2, \dots, k, \quad |J_\lambda| \leq k-1,$$

som är skild från 0. Emedan $\frac{\partial f_\nu(X)}{\partial x_1}$ för $\nu=k+1, \dots, h$ äro linjärt oavhängiga, kunna vi analogt antaga att det finnes en determinant

$$(5.4) \quad \left| D^{K_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_1} f_\nu(X) \right|, \quad \nu, \lambda = k+1, \dots, h, \quad |K_\lambda| \leq h-k-1,$$

som är skild från 0. Vi bilda nu den determinant

$$(5.5) \quad |D^{J'_\lambda} f_\nu(X)|, \quad \nu, \lambda = 1, 2, \dots, h,$$

där $J'_\lambda = J_\lambda$ för $\lambda=1, 2, \dots, k$, $J'_\lambda = K_\lambda \frac{\partial}{\partial x_1}$ för $\lambda=k+1, \dots, h$. Emedan $\frac{\partial}{\partial x_1} f_\nu(X) = 0$ för $\nu=1, 2, \dots, k$ är (5.5) produkten av (5.3) och (5.4). Alltså är determinanten (5.5) skild från 0. Den satisfierar vidare villkoret $|J'_\lambda| \leq h-1$. Därmed är kriteriet bevisat.

Betrakta nu ett polynom $f(X)$ av formen (2.1) med heltalskoefficienter. Ett sådant kan på olika sätt sönderläggas på formen

$$(5.6) \quad f(X) = \sum_{v=1}^h \varphi_v(X) \psi_v(X)$$

i polynom $\varphi_v(X)$ och $\psi_v(X)$ med rationella koefficienter. (Man kan t. ex. välja $\varphi_v(X)$ som potensen x_1^v .) Vi utgå här från en sönderläggning (5.6) som har följande egenskaper:

1° Polynomen $\varphi_v(X)$, $v=1, 2, \dots, h$, bero endast av variablerna $x_1, \dots, x_k$ och polynomen $\psi_v(X)$, $v=1, 2, \dots, h$, endast av variablerna $x_{k+1}, \dots, x_m$.

2° Polynomen $\varphi_v(X)$, $v=1, 2, \dots, h$, äro linjärt oavhängiga och polynomen $\psi_v(X)$, $v=1, 2, \dots, h$ äro likaledes linjärt oavhängiga.

Utgående från en godtycklig sönderläggning (5.6) kunna vi alltid finna en sådan, som uppfyller villkoret 2°. Äro nämligen polynomen $\varphi_v(X)$, $v=1, 2, \dots, h$, linjärt avhängiga, kunna vi utvälja ett maximalt antal linjärt oavhängiga polynom bland dessa och framställa de andra polynomen $\varphi_v(X)$ som linjärkombinationer av de förstnämnda. Så få vi en sönderläggning (5.6) med färre termer än i den ursprungliga sönderläggningen. Analogt förfar man med polynomen $\psi_v(X)$. Upprepas förfarandet får man slutligen en sönderläggning (5.6) som satisfierar villkoret 2°.

Vi välja nu vektorerna J och K (och motsvarande indicerade vektorer) så att de $m-k$ sista koordinaterna i J och de k första koordinaterna i K äro 0. Dessa vektorer skola f. ö. ha icke negativa heltalskoordinater. Emedan vi då ha

$$D^{J+K}f(X) = \sum_{v=1}^h D^J \varphi_v(X) \cdot D^K \psi_v(X),$$

gäller enligt regeln för determinantmultiplikation:

$$(5.7) \quad |D^{J+K}f(X)| = |D^{J\lambda} \varphi_v(X)| \cdot |D^{K\mu} \psi_v(X)|.$$

Indices λ , μ och v tillordnas rader och kolumner på lämpligt sätt. Enligt det nyssnämnda kriteriet kunna vi här välja determinanterna så att de äro skilda från 0 och så att $|J_\lambda| \leq h-1$, $|K_\mu| \leq h-1$.

I (5.7) ersätta vi $D^{J\lambda}$ med $\frac{1}{J_\lambda!} D^{J\lambda}$ och $D^{K\mu}$ med $\frac{1}{K_\mu!} D^{K\mu}$. Observera vi att här

$$(J_\lambda + K_\mu)! = J_\lambda! K_\mu!$$

få vi av (5.7):

$$(5.8) \quad \left| \frac{1}{(J_\lambda + K_\mu)!} D^{J_\lambda + K_\mu} f(X) \right| = \left| \frac{1}{J_\lambda!} D^{J_\lambda} \varphi_v(X) \right| \cdot \left| \frac{1}{K_\mu!} D^{K_\mu} \psi_v(X) \right|$$

$$\lambda, \mu, v=1, 2, \dots, h, \quad |J_\lambda| \leq h-1, \quad |K_\mu| \leq h-1.$$

Elementen i determinanten i vänstra ledet av (5.8) äro polynom med

heltalskoefficienter. Detta framgår av Taylorutvecklingen (2.2), om vi där betrakta X och A som variabler. Enligt Gauss' sats (§ 4) kan man då multiplicera determinanterna i högra ledet med rationella tal respektive γ och γ^{-1} så att dessa determinanter övergå i heltalspolynom. Sålunda få vi en sönderläggning av formen

$$(5.9) \quad s(X) = s_1(X) \cdot s_2(X),$$

där polynomen $s_1(X)$ och $s_2(X)$ ha heltalskoefficienter och $s(X)$ är polynomet i vänstra ledet av (5.8).

6. Maximalkoefficienten för polynom. Beloppet av den numeriskt största koefficienten till ett polynom $f(X)$ betecknar Roth med $|\overline{f(X)}|$. För det följande behöva vi några uppskattningar av maximalkoefficienten.

Låt $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ vara en vektor med icke negativa heltalskoordinater. Om $f(X)$ är givet genom (2.1), finna vi

$$\frac{1}{K!} D^K f(X) = \sum_{K \leq J \leq R} \binom{J}{K} c_J X^{J-K}.$$

Alltså är på grund av (2.3):

$$(6.1) \quad \left| \frac{1}{K!} D^K f(X) \right| \leq 2^{|R|} |\overline{f(X)}|.$$

Betrakta nu polynomet $s(X)$, som är givet genom determinanten i vänstra ledet av (5.8). Denna innehåller $h!$ produkter som vardera består av h faktorer av formen $\frac{1}{K!} D^K f(X)$. Då varje sådan faktor består av högst $(r_1+1)(r_2+1) \dots (r_m+1)$ monom (detta är maximalantalet monom i $f(X)$) få vi på grund av ovanstående uppskattning:

$$|\overline{s(X)}| \leq 2^{|R|h} \{(r_1+1) \dots (r_m+1) |\overline{f(X)}|\}^h \cdot h!,$$

eller om vi beakta att

$$(6.2) \quad \begin{aligned} h! &\leq h^{h-1} \leq 2^{h(h-1)}, \quad r_v + 1 \leq 2^{r_v} \\ |\overline{s(X)}| &\leq \{2^{2|R|+h-1} |\overline{f(X)}|\}^h. \end{aligned}$$

7. Index. Polynom med små index. Låt $f(X)$ vara ett polynom och A och S givna punkter med reella koordinater, $S > 0$. Det finnes då ett tal γ så att $D^J f(A) = 0$ när $|J/S| < \gamma$ medan $D^J f(A) \neq 0$ för något J med $|J/S| = \gamma$. Detta tal γ kallar Roth »index för $f(X)$ » (i punkten A med av-

seende på S) och betecknar det med $\text{ind}f(X)$. För givna A och S gälla följande räkneregler, vilka man lätt verifierar genom Taylorutvecklingen (2.2):

$$(7.1) \quad \text{ind}\{f_1(X) + f_2(X)\} \geq \min\{\text{ind}f_1(X), \text{ind}f_2(X)\}$$

$$(7.2) \quad \text{ind}f_1(X)f_2(X) = \text{ind}f_1(X) + \text{ind}f_2(X)$$

$$(7.3) \quad \text{ind}D^J f(X) \geq \text{ind}f(X) - |J/S|.$$

Vi bevisa nu

HJÄLPSATS 7.1. Låt $\varepsilon < 1$ vara ett positivt tal, m ett naturligt tal, P, Q och R vektorer av dimensionen m med heltalskoordinater respektive p_μ, q_μ och r_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$), $p_\mu \geq 0, q_\mu > 0, r_\mu > 0, [p_\mu, q_\mu] = 1$, vilka för

$$\omega = \omega(m, \varepsilon) = 24 \cdot 2^{-m} (\varepsilon/12)^{2^{m-1}}$$

satisfiera olikheterna

$$1^\circ \quad r_{\mu+1}/r_\mu \leq \omega(m, \varepsilon), \quad q_\mu^{r_\mu} \geq q_1^{r_1}, \quad q_1^{\omega(m, \varepsilon)} \geq 2^{3m}$$

för $1 \leq \mu \leq m$. Låt vidare polynomet

$$f(X) = \sum_{J \leq R} c_J X^J$$

ha heltalskoefficienter och satisfiera olikheten

$$2^\circ \quad |\overline{f(X)}| \leq q_1^{\omega(m, \varepsilon) r_1}.$$

Då är

$$\text{ind}f(X) \leq \varepsilon$$

i punkten P/Q med avseende på R .

BEVIS: Vi föra beviset genom fullständig induktion med avseende på antalet m av variabler x_i i X .

För $m = 1$ är $\text{ind}f(x_1)$ i p_1/q_1 med avseende på r_1 lika med t/r_1 om

$$f(x_1) = (q_1 x_1 - p_1)^t g(x_1)$$

med $g(p_1/q_1) \neq 0$. På grund av Gauss' lemma (§ 4) har $g(x_1)$ heltalskoefficienter, ty $[p_1, q_1] = 1$. Men av ovannämnda relation och 2° följer då

$$q_1^t \leq |\overline{f(x_1)}| \leq q_1^{\omega(1, \varepsilon) r_1} = q_1^{\varepsilon r_1},$$

dvs.

$$t/r_1 \leq \varepsilon.$$

Betrakta nu fallet $m > 1$ och antag att satsen gäller för polynom med färre variabler än m . Vi uppskatta $\text{ind}f(X)$ med hjälp av polynomet $s(X)$, dvs. determinanten i vänstra ledet av (5.8). Här låta vi $\psi_s(X)$

endast bero av x_m och $\varphi_r(X)$ endast av $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ (för $r = 1, 2, \dots, h$).
Det är klart att vi då ha

$$(7.4) \quad h \leq r_m + 1.$$

Vidare är för $m > 1$:

$$(7.5) \quad 2\omega(m, \varepsilon) = \omega(m-1, \varepsilon^2/12), \quad 2\omega(m, \varepsilon) \leq \varepsilon^2/12.$$

Antagandet 1° medför således att

$$(7.6) \quad r_{\mu+1} < r_\mu, \quad q_\mu > q_1.$$

På grund av (6.2), 2° och den sista olikheten 1° är då

$$(7.7) \quad |\overline{s(X)}| \leq \{2^{3|R|} q_1^{\omega(m, \varepsilon) r_1}\}^h \leq q_1^{2r_1 h \omega(m, \varepsilon)}.$$

Eftersom $s_1(X)$ och $s_2(X)$ definierade genom (5.9) bero av olika variabler, följer nu av (5.9), (7.5) och den andra olikheten 1°:

$$\begin{aligned} |s_1(X)| &\leq q_1^{2r_1 h \omega(m, \varepsilon)} = q_1^{r_1 h \omega(m-1, \varepsilon^2/12)} \\ |\overline{s_2(X)}| &\leq q_1^{2r_1 h \omega(m, \varepsilon)} \leq q_m^{r_m h \varepsilon^2/12}. \end{aligned}$$

Enligt vårt induktionsförfarande och enligt det ovan behandlade fallet ($m=1$) få vi då

$$\text{ind } s_1(X) \leq \varepsilon^2/12, \quad \text{ind } s_2(X) \leq \varepsilon^2/12$$

i P/Q med avseende på hR . Regeln (7.2) ger nu

$$(7.8) \quad \text{ind } s(X) \leq \varepsilon^2 h/6$$

i P/Q med avseende på R .

Det återstår att uppskatta $\text{ind } f(X)$ med hjälp av $\text{ind } s(X)$. Vi sätta

$$\text{ind } f(X) = \varrho$$

och observera, att determinanten i vänstra ledet av (5.7) (som endast skiljer sig från $s(X)$ med en konstant faktor) är en summa av produkter, som var och en består av h faktorer av formen $D^{J_\lambda + K_\mu} f(X)$ med

$$|J_\lambda| \leq h-1 \leq r_m, \quad |K_\mu| \leq h-1 \leq r_m.$$

Vidare genomlöper K_μ de h talen $0, 1, \dots, h-1$. Använda vi reglerna (7.1), (7.2) och (7.3) finna vi

$$(7.9) \quad \text{ind } s(X) \geq \min \sum' \{\varrho - |(J+K)/R|\},$$

där $J = (j_1, j_2, \dots, j_{m-1}, 0)$, $K = (0, 0, \dots, 0, k)$ och $J+K$ genomlöper h vektorer med $|J| \leq h-1 \leq r_m$, $k = 0, 1, \dots, h-1$. Markeringen (') på summatecknet utmärker att endast positiva termer skola medtagas (index är alltid icke negativt). Nu är $|J/R| \leq |J|/r_{m-1}$ och således

$$|J/R| \leq r_m/r_{m-1} \leq \omega(m, \varepsilon) \leq \varepsilon^2/24.$$

Av (7.8) och (7.9) få vi då

$$(7.10) \quad \varepsilon^2 h/4 > \sum'_{0 \leq k \leq h-1} \{\varrho - k/r_m\}.$$

Antingen är här $\varrho \geq (h-1)/r_m$ och då få vi av (7.10):

$$\varepsilon^2 h/4 > h\varrho - h(h-1)/2r_m \geq h\varrho/2,$$

dvs. $\varrho < \varepsilon$, eller också är $\varrho < (h-1)/r_m$ och då få vi av (7.10):

$$\varepsilon^2 h/4 > \sum_{0 \leq j \leq r_m \varrho} \{\varrho - j/r_m\} = \{\varrho - [r_m \varrho]/2r_m\} \{[r_m \varrho] + 1\} \geq \varrho^2 h/4,$$

och vi få även i detta fall $\varrho < \varepsilon$. Därmed är hjälpsatsen bevisad.

8. Index för ett polynom i en punkt $\theta = (\vartheta, \dots, \vartheta)$, ϑ algebraiskt tal.

HJÄLPSATS 8.1. *Låt det reella positiva talet ϑ satisfiera ekvationen (1.1), där koefficienterna a_v , $v = 0, 1, \dots, n-1$, är hela rationella tal som satisfierar olikheten*

$$1^\circ \quad |a_v| \leq a, \quad v = 0, 1, \dots, n-1.$$

Antag vidare att

$$2^\circ \quad m > 8n^2\varepsilon^{-2},$$

där ε är ett positivt tal. Då finnes ett heltalspolynom $f(X)$ av formen (2.1) (dimensionen av X lika med m , graden av x_i högst r_i , $R = (r_1, \dots, r_m)$) för vilket

$$1' \quad \text{ind} f(X) > \frac{1}{2}m(1-\varepsilon)$$

i $\theta = (\vartheta, \dots, \vartheta)$ med avseende på R , och

$$2' \quad |\overline{f(X)}| \leq \gamma^{|R|} \text{ med } \gamma = 4(a+1).$$

BEVIS: Av (2.1) få vi för $\theta = (\vartheta, \dots, \vartheta)$:

$$(8.1) \quad \frac{1}{K!} D^K f(\theta) = \sum_{K \leq J \leq R} \binom{J}{K} c_J \theta^{|J-K|}.$$

Om 1' skall vara uppfyllt måste vänstra ledet av (8.1) vara lika med 0 för

$$(8.2) \quad |K/R| \leq \frac{1}{2}m(1-\varepsilon).$$

Utgående från (1.1) visa vi lätt att

$$(8.3) \quad \vartheta^k = a_{n-1}^{(k)} \vartheta^{n-1} + a_{n-2}^{(k)} \vartheta^{n-2} + \dots + a_0^{(k)}$$

för $k \geq n$ (och alltså för alla $k \geq 0$), där

$$(8.4) \quad |a_v^{(k)}| \leq (a+1)^k, \quad v = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ersätta vi potenserna $\vartheta^{|J-K|}$ i högra ledet av (8.1) med uttrycken i högra ledet av (8.3) och sätta vi sedan koefficienterna för $\vartheta^0, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{n-1}$ i det polynom, som därvid erhålles, lika med 0, få vi linjära ekvationer

$$(8.5) \quad \sum_{K \leq J \leq R} \binom{J}{K} a_k^{(|J-K|)} c_J = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Antalet obekanta koefficienter c_J är

$$s = (r_1+1)(r_2+1) \dots (r_m+1) \leq 2^{|R|}.$$

Enligt hjälpsats 3.2 (med $\lambda = m\varepsilon$) är antalet K som satisfiera olikheten (8.2) högst

$$(2m)^{\frac{1}{2}}(m\varepsilon)^{-1}s.$$

Betecknar t antalet linjära ekvationer (8.5) för vilka K satisfierar (8.2), är således

$$t \leq n \cdot (2m)^{\frac{1}{2}}(m\varepsilon)^{-1}s,$$

och enligt 2° är då

$$t \leq \frac{1}{2}s.$$

På grund av (8.4) satisfierar koefficienten för c_J i (8.5) olikheten

$$\left| \binom{J}{K} a_k^{(|J-K|)} \right| \leq 2^{|R|}(a+1)^{|R|} = (2a+2)^{|R|} = b.$$

Vi kunna nu tillämpa hjälpsats 3.1 och finna enligt denna att ekvationerna (8.5) för K , som satisfiera (8.2), ha en lösning, där icke alla c_J äro 0 och där

$$|c_J| \leq (sb)^{t/(s-t)} \leq (4a+4)^{|R|} = \gamma^{|R|}.$$

9. Det slutliga beviset för Roths sats. Vi utgå från ett reellt positivt helt algebraiskt tal ϑ och antaga att olikheten (1.3) har oändligt många lösningar (p_μ, q_μ) för ett reellt tal $\varkappa = 2 + \delta$, $\delta > 0$. Här skola p_μ och q_μ vara naturliga tal med $[p_\mu, q_\mu] = 1$. Tydligt kunna vi antaga att $\delta < \frac{1}{2}$. Vi använda nu hjälpsatserna 7.1 och 8.1 för att bevisa att ovannämnda antagande leder till en motsägelse.

Välj för det första $\varepsilon > 0$ så litet att

$$(9.1) \quad \varepsilon < \delta/12,$$

och sedan det naturliga talet m så stort att

$$(9.2) \quad m > 8n^2\varepsilon^{-2},$$

där n är graden av polynomet i vänstra ledet av (1.1). Välj sedan lösningen (p_1, q_1) så att

$$(9.3) \quad q_1^{\omega(m, \varepsilon)} > 2^{3m}$$

$$(9.4) \quad q_1^{\omega(m, \varepsilon)} > \gamma^m, \quad \gamma = 4(a+1)$$

$$(9.5) \quad q_1^\varepsilon > 32(a+1) \max(1, \vartheta) = 8\gamma \max(1, \vartheta),$$

där $\omega(m, \varepsilon)$ och a har samma betydelse som i §§ 7, 8. Välj därefter lösningarna (p_μ, q_μ) (genom lämplig numrering) för $\mu = 1, 2, \dots, m$ så att

$$(9.6) \quad \frac{1}{2}\omega(m, \varepsilon) \log q_{\mu+1} > \log q_\mu,$$

och de naturliga talen r_μ så att

$$(9.7) \quad \varepsilon r_1 \log q_1 \geq \log q_m$$

och

$$(9.8) \quad r_\mu = [r_1 \log q_1 / \log q_\mu] + 1$$

för $2 \leq \mu \leq m$. Som tidigare sätta vi

$$P = (p_1, \dots, p_m), \quad Q = (q_1, \dots, q_m), \quad R = (r_1, \dots, r_m), \\ \theta = (\vartheta, \dots, \vartheta).$$

Av villkoren (9.6), (9.7) och (9.8) följer (obs att $\omega(m, \varepsilon) < 1$) $q_{\mu+1} > q_\mu$, och

$$(9.9) \quad r_1 \log q_1 \leq r_\mu \log q_\mu \leq r_1 \log q_1 + \log q_\mu \leq (1+\varepsilon)r_1 \log q_1$$

$$(9.10) \quad \omega(m, \varepsilon)r_\mu > 2r_\mu \log q_\mu / \log q_{\mu+1} \geq 2r_1 \log q_1 / \log q_{\mu+1} \\ \geq 2(1+\varepsilon)^{-1}r_{\mu+1} > r_{\mu+1}.$$

På grund av (9.2) kunna vi enligt hjälpsats 8.1 bestämma ett polynom $f(X)$ av formen (2.1) för vilket

$$(9.11) \quad \text{ind} f(X) > \frac{1}{2}m(1-\varepsilon)$$

i θ med avseende på R , och

$$(9.12) \quad |\overline{f(X)}| \leq \gamma^{|R|}.$$

Av (9.12) och (9.4) följer att detta polynom satisfierar villkoret 2° i hjälpsats 7.1 och på grund av (9.9), (9.10) och (9.3) satisfierar polynomet även villkoren 1° i samma hjälpsats. Av denna följer då

$$(9.13) \quad \text{ind} f(X) \leq \varepsilon$$

i P/Q med avseende på R . Vi visa att (9.11) och (9.13) äro oförenliga och få sålunda den motsägelse, som bevisar Roths sats. I själva verket visa vi att (9.11) medför olikheten

$$(9.14) \quad \text{ind} f(X) \geq \delta m / 12$$

i P/Q med avseende på R , vilket strider mot (9.13) eftersom $\varepsilon < \delta/12 < \delta m/12$.

Betrakta $D^J f(P/Q)$ för

$$(9.15) \quad |J/R| < \delta m/12.$$

Sätta vi

$$P/Q = \theta + \Gamma$$

och utveckla enligt Taylors formel, få vi

$$(9.16) \quad \frac{1}{J!} D^J f(P/Q) = \sum_{0 \leq J+K \leq R} \frac{1}{J! K!} \Gamma^K D^{J+K} f(\theta).$$

Nu innehåller $D^{J+K} f(X)$ högst

$$(r_1 + 1) \dots (r_m + 1) \leq 2^{|R|}$$

termer och då enligt (9.10) $r_{\mu+1} < r_\mu$ följer av (9.9):

$$q_1^{|R|} \leq q_1^{mr_1} \leq q_1^{r_1} q_2^{r_2} \dots q_m^{r_m} = Q^R.$$

Alltså få vi på grund av (6.1) och (9.5):

$$(9.17) \quad \left| \frac{1}{J! K!} D^{J+K} f(\theta) \right| = \binom{J+K}{K} \left| \frac{1}{(J+K)!} D^{J+K} f(\theta) \right| \\ \leq \left(\frac{R}{K} \right)^{2|R|} \gamma^{|R|} \{\max(1, \vartheta)\}^{|R|} < \left(\frac{R}{K} \right)^{2-|R|} (Q^R)^\varepsilon.$$

På grund av (9.11) försvinna emellertid de termer i högra ledet av (9.16) för vilka

$$|(J+K)/R| \leq \frac{1}{2}m(1-\varepsilon).$$

Då vi endast betrakta sådana J för vilka (9.15) är uppfyllt och då $\varepsilon < \delta/12$ behöva vi i (9.16) endast medtaga de termer för vilka

$$|K/R| > \frac{1}{2}m(1-\varepsilon) - \delta m/12 > \frac{1}{2}m(1-\delta/4).$$

På grund av de gjorda förutsättningarna att (p_μ, q_μ) äro lösningar till (1.3) med ovannämnda egenskaper är för de K som satisfiera den sistnämnda olikheten:

$$(9.18) \quad |\Gamma^K| \leq \prod_{\mu=1}^m q_\mu^{-(2+\delta)k_\mu} \leq q_1^{-(2+\delta)r_1|K/R|} \\ \leq q_1^{-(1+\delta/2)r_1 m(1-\delta/4)} \leq (Q^R)^{-(1+\delta/2)(1-\delta/4)(1+\varepsilon)^{-1}}.$$

Av (9.16), (9.17) och (9.18) få vi om vi utnyttja (2.3):

$$(9.19) \quad \left| Q^R \frac{1}{J!} D^J f(P/Q) \right| \leq (Q^R)^{-(1+\delta/2)(1-\delta/4)(1+\varepsilon)^{-1}+1+\varepsilon}.$$

Här är på grund av (9.1):

$$\begin{aligned}(1 + \delta/2)(1 - \delta/4) &= 1 + (1 - \delta/2)\delta/4 > 1 + 3\varepsilon(1 - \delta/2) \\ &\geq 1 + 2\varepsilon + 2\delta\varepsilon - 3\delta\varepsilon/2 > (1 + \varepsilon)^2,\end{aligned}$$

och högra ledet av (9.19) är då ett tal mellan 0 och 1. Men vänstra ledet av (9.19) måste tydligen vara ett helt tal och detta tal är alltså 0. Således är

$$\text{ind}f(X) \geq \delta m/12$$

i P/Q med avseende på R i motsägelse till (9.13).

Därmed är Roths sats bevisad.

DIXON'S SERIES EXPRESSED AS A CONVOLUTION

H. W. GOULD

An examination of the literature shows that many papers have been written concerning the evaluation of Dixon's series [1]

$$S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3},$$

and it is our purpose here to demonstrate the following result:

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n A_k A_{n-k} = (-1)^n 2^{2n} \binom{2n}{n} S,$$

where

$$A_k = \binom{n+k}{n} \binom{2n+2k}{n+k}.$$

In order to accomplish this, we use two different expressions for the Legendre polynomials

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^n (x+1)^n].$$

Differentiating the two forms, we get (cf. [2]):

$$(2) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}$$

$$(3) \quad P_n(x) = \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k.$$

We now make the following definition:

$$(4) \quad Q_n(x) = (x-1)^n P_n \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$$

From this definition and the expression (3), it follows easily that

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^k.$$

We see at once that the coefficient of x^{2n} in the polynomial

$$(x-1)^{2n} Q_{2n}(x)$$

is equal to

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i}^3,$$

which is Dixon's series.

On the other hand, by combining the definition (4) with the expression (2), we find

$$(5) \quad (x-1)^{2n} Q_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{4n-2k}{2n} (x+1)^{2n-2k} (x-1)^{2n+2k}.$$

The coefficient of x^j in $(x+1)^{2n-2k} (x-1)^{2n+2k}$ is equal to

$$\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{2n+2k}{i} \binom{2n-2k}{j-i}.$$

Upon substituting this expression in (5), we find that the coefficient of x^{2n} in $(x-1)^{2n} Q_{2n}(x)$ is equal to

$$(6) \quad \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{4n-2k}{2n} \sum_{i=2k}^{2n} (-1)^i \binom{2n+2k}{i} \binom{2n-2k}{2n-i},$$

which is therefore another form of Dixon's series.

To reduce this further, call the inner summation in (6) K_k , and note the binomial identity

$$(7) \quad \binom{2n+2k}{i} \binom{2n-2k}{2n-i} = \frac{(6n)!}{((2n)!)^3} \cdot \frac{\binom{2n}{i} \binom{2n}{i-2k}}{\binom{4n-2k}{2n} \binom{6n}{4n-2k}}.$$

Also we note the known formula

$$\sum_{i=0}^{2t} (-1)^i \binom{m}{i} \binom{m}{2t-i} = (-1)^t \binom{m}{t},$$

which is obtained by equating coefficients in the identity

$$(1-x)^m (1+x)^m = (1-x^2)^m.$$

As an application of this, we have

$$(8) \quad \begin{aligned} \sum_{i=2k}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} \binom{2n}{i-2k} &= \sum_{i=0}^{2n-2k} (-1)^i \binom{2n}{i+2k} \binom{2n}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{2n-2k} (-1)^i \binom{2n}{i} \binom{2n}{2n-2k-i} = (-1)^{n-k} \binom{2n}{n-k}. \end{aligned}$$

Substituting (7) and (8) in the expression for K_k , we find

$$K_k = (-1)^{n-k} \frac{(6n)!}{((2n)!)^3} \cdot \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{4n-2k}{2n} \binom{6n}{4n-2k}},$$

and therefore expression (6) becomes

$$(9) \quad (-1)^n \frac{(6n)!}{2^{2n}((2n)!)^3} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{2n}{n-k} \binom{6n}{4n-2k}^{-1},$$

which is still another way of expressing Dixon's series.

To finally obtain our proposed relation (1), we note the binomial identity

$$\begin{aligned} \binom{2n}{k} \binom{2n}{n-k} \binom{6n}{4n-2k}^{-1} \\ = \frac{((2n)!)^2 (n!)^2}{(6n)!} \binom{n+k}{n} \binom{2n+2k}{n+k} \binom{2n-k}{n} \binom{4n-2k}{2n-k}, \end{aligned}$$

which when applied to the expression (9) yields

$$(-1)^n 2^{-2n} \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n} \binom{2n+2k}{n+k} \binom{2n-k}{n} \binom{4n-2k}{2n-k}.$$

This is equivalent to (1), which is therefore proved. Our formula expresses Dixon's sum in terms of a series of *all positive terms*.

To show that the convolution obtained leads to an easy evaluation of Dixon's series, we have only to note the identity

$$A_k = \binom{n+k}{n} \binom{2n+2k}{n+k} = (-1)^k 2^{2k} \binom{2n}{n} \binom{-n-\frac{1}{2}}{k},$$

from which we have

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n A_k A_{n-k} &= (-1)^n 2^{2n} \binom{2n}{n}^2 \sum_{k=0}^n \binom{-n-\frac{1}{2}}{k} \binom{-n-\frac{1}{2}}{n-k} \\ &= (-1)^n 2^{2n} \binom{2n}{n}^2 \binom{-2n-1}{n} = 2^{2n} \binom{2n}{n}^2 \binom{3n}{n}. \end{aligned}$$

When substituted in (1), this gives

$$S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \binom{3n}{n} \binom{2n}{n} = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

From this point of view, Dixon's series depends on an easy application of Vandermonde's convolution which we used above.

REFERENCES

- [1] A. C. DIXON: *On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem*. Messenger of Math. 20 (1891), pp. 79–80.
- [2] H. W. GOULD: *A note on a paper of Grosswald*. Amer. Math. Monthly 61 (1954), pp. 251–253.

See also

O. KOLBERG: *Et bevis for Dixons formel*. NMT 5 (1957), pp. 87–90,
with further references.

ETT MYNTFÖRDELNINGSPROBLEM

OLOF HANNER

Följande problem utgör en omformulering av ett problem som framkommit vid vissa undersökningar av konvexa polyedrar:

Problem: Tre personer ville dela en samling mynt. Varje mynt var värt mindre än de övriga mynten tillsammans. Man ville dela mynten så att varje person fick ett belopp som var mindre än vad de båda övriga fingo tillsammans. Det gick inte. Ett av mynten var en 25-öring. Vilka voro mynten ?

Innan vi löser problemet låt oss påpeka att vi vid lösandet inte får förutsätta, att det blott finns en enda lösning. I själva verket ligger den svårare delen av problemet i att visa, att lösningen är entydig.

Låt oss säga, att en samling mynt har egenskaperna E_1 respektive E_2 om:

E_1 : Varje mynt är värt mindre än de övriga mynten tillsammans.

E_2 : Man kan uppdelar mynten på tre personer så att varje person får mindre än de båda övriga tillsammans.

Vi är alltså intresserade av myntsamlingar med egenskapen E_1 men utan egenskapen E_2 . Låt oss för att bestämma dessa söka fördela mynt någorlunda rättvist. Vi kommer att använda följande metod: Vi delar ut mynten ett och ett, börjar med det största myntet och fortsätter med allt mindre mynt, och ger varje mynt till den person (eller en av de personer) som under utdelningen erhållit minst.

Låt oss räkna alla belopp i öre. Antag att vi har n mynt. Vi ordnar dem i fallande storleksordning. Låt mynten vara värda $a_1, a_2, \dots, a_n$. Vi har då

$$(1) \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0.$$

Sätt

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

där a är det totala värdet av mynten i samlingen. Vårt villkor E_1 kan då skrivas

$$(2) \quad a_i < \frac{1}{2}a, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

För att detta skall kunna vara uppfyllt måste vi ha minst tre mynt.

De tre personerna kallar vi A_1, A_2 och A_3 . Vi börjar myntutdelningen med att ge första myntet, värt a_1 , till någon av de tre personerna, där-

efter det andra myntet, värt a_2 , till någon av de båda övriga personerna och så det tredje myntet, värt a_3 , till den återstående personen. Om det finns ytterligare mynt, utdelar vi dem ett och ett, och vi ger det i -te myntet, värt a_i , till den (eller en av dem), som under utdelningen av de föregående mynten erhållit det minsta beloppet. De belopp, som A_1 , A_2 och A_3 fått, då utdelningen är färdig, betecknar vi med respektive b_1 , b_2 och b_3 . Vi har

$$a = b_1 + b_2 + b_3.$$

Villkoret E_2 kan skrivas

$$b_k < \frac{1}{2}a, \quad k = 1, 2, 3.$$

Om detta inte skall vara uppfyllt för alla k , måste någon av personerna erhållit $\geq \frac{1}{2}a$. Låt oss välja numreringen av personerna så att detta inträffat för A_1 , så att vi alltså har

$$(3) \quad b_1 \geq \frac{1}{2}a,$$

eller, vilket är detsamma,

$$(4) \quad b_1 \geq b_2 + b_3.$$

Ur (2) och (3) inser vi att A_1 fått minst 2 mynt. Låt oss betrakta den tidpunkt under utdelningen då A_1 får sitt sista mynt, vilket vi antar vara det p -te myntet, värt a_p . Innan A_1 tilldelas detta mynt, var hans tilldelning $b_1 - a_p$, och A_2 och A_3 var tilldelade minst detta belopp (annars skulle någon av dem fått det p -te myntet). Härur får vi dels att

$$(5) \quad b_1 - a_p \geq a_p,$$

eftersom $b_1 - a_p$ skall innehålla A_1 :s första mynt, vilket är ett av de tre största mynten och därför $\geq a_p$ enligt (1), och dels att

$$(6) \quad b_2 \geq b_1 - a_p \quad \text{och} \quad b_3 \geq b_1 - a_p,$$

eftersom b_2 och b_3 måste vara minst lika med vad A_2 respektive A_3 redan erhållit då det p -te myntet utdelas.

Låt oss kombinera (4), (5) och (6). Vi får

$$b_1 \geq b_2 + b_3 \geq (b_1 - a_p) + (b_1 - a_p) \geq a_p + (b_1 - a_p) = b_1.$$

Då första ledet här överensstämmer med sista ledet, måste likhetstecknen gälla, och detta innebär, att vi måste ha likhetstecken i olikheterna (4), (5) och (6). Alltså ur (5):

$$(7) \quad b_1 = 2a_p,$$

och därefter ur (6):

$$(8) \quad b_2 = a_p \quad \text{och} \quad b_3 = a_p.$$

Men då vi har $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_p$, och då varje person erhåller ett av de tre första mynten, inser vi att (8) endast kan vara uppfyllt om A_2 och A_3 får vardera endast ett mynt, värt a_p , och att (7) endast kan vara uppfyllt, om A_1 förutom det p -te myntet, värt a_p , får ytterligare ett mynt, också värt a_p . Vi har alltså 4 lika mynt: $p = n = 4$.

Låt oss sammanfatta vad vi gjort: Vi har lyckats finna en metod att fördela myntsamlingar med egenskapen E_1 , en metod som visar att alla samlingar, som inte består av 4 lika mynt, har egenskapen E_2 . Å andra sidan inser vi lätt, att en samling med 4 lika mynt dels har egenskapen E_1 , dels inte kan fördelas på tre personer utan att någon får minst två mynt, d. v. s. minst så mycket som de båda andra tillsammans, så att alltså en sådan samling saknar egenskapen E_2 .

Vi kan nu besvara frågan i vårt problem. Vi vet att mynten hade egenskapen E_1 men inte egenskapen E_2 . Alltså var det 4 lika mynt. Då vi dessutom vet att ett av mynten var en 25-öring, är det fullständiga svaret: Enda möjligheten är att mynten voro 4 stycken 25-öringar.

I den ovanstående lösningen av problemet har vi aldrig utnyttjat att talen a_i egentligen måste vara vissa speciella heltal, nämligen värdena på de olika myntslagen. Därför kommer allt vad som sagts om myntfördelningsproblemet att gälla även om dessa tal a_i är godtyckliga positiva tal, d. v. s. om vi kan tänka oss mynt av godtyckliga valörer.

I det problem om konvexa polyedrar som lett fram till ovanstående myntproblem motsvaras den slutliga lösningen, 4 lika mynt, av en reguljär oktaeder.

För att beskriva oktaedern tar vi ett rätvinkligt koordinatsystem (x, y, z) och låter oktaederns hörn vara punkterna

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1).$$

Då blir de 8 sidoytorna givna genom

$$\begin{aligned} x - y - z &= \pm 1 \\ -x + y - z &= \pm 1 \\ -x - y + z &= \pm 1 \\ x + y + z &= \pm 1. \end{aligned}$$

Kallar vi vänstra ledet i dessa ekvationer för respektive t_1, t_2, t_3, t_4 , (d. v. s. $t_1 = x - y - z$ o. s. v.), så ser vi att varje punkt i rummet ger bestämda värden åt dessa t -storheter, varvid man alltid har

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0.$$

En punkt tillhör oktaedern om de motsvarande t -storheterna uppfyller

$$-1 \leq t_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Låt oss nu ta 4 positiva tal a_1, a_2, a_3, a_4 och i stället studera den polyeder som ges av olikheterna

$$(9) \quad -a_i \leq t_i \leq a_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Vi får då en klass av polyedrar som alla är symmetriska med avseende på origo.

Geometriskt innebär varje par av olikheter i (9) att punkterna i polyedern skall ligga i bandet mellan två parallella plan. Polyedern är den gemensamma delen av dessa 4 band. Vi kan alltså vänta oss att polyedern har 8 sidor. Men om ett av talen a_i , exempelvis a_4 , är $\geq$ summan av de övriga, bidrar inte olikheterna $-a_4 \leq t_4 \leq a_4$ till definitionen av polyedern. Ty eftersom $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ är då $-a_4 \leq t_4 \leq a_4$ en konsekvens av olikheterna $-a_i \leq t_i \leq a_i$ för $i = 1, 2, 3$. Bandet mellan de båda planen $t_4 = \pm a_4$ innehåller alltså redan skärningen mellan de övriga 3 banden och polyedern har endast 6 sidor och är en parallelepiped.

Vi vill undvika detta fall och kräver därför att vart och ett av talen a_i skall vara $<$ summan av de övriga. Om därför talen a_i uppfattas som mynt skall dessa ha egenskapen E_1 . För vår oktaeder är alla $a_i = 1$ vilket ju just svarar mot 4 lika mynt.

Vi vill nu utan bevis formulera den egenskap för polyedrar som svarar mot att motsvarande myntsamling saknar egenskapen E_2 , en egenskap alltså som oktaedern har men alla övriga av våra polyedrar saknar:

När man gör 3 parallellförskjutningar av polyedern och de så erhållna polyedrarna parvis rår varandra så finns det alltid en punkt som ligger i alla tre.

I själva verket svarar de 3 personerna i myntfördelningsproblemet mot de 3 parallellförskjutningarna. Om man kan uppdelar mynten så att varje person får $<$ de båda övriga tillsammans så kan man med hjälp av vetenskapen om vilka mynt var och en av de 3 personerna får, konstruera 3 parallellförskjutningar så att de erhållna polyedrarna parvis råras men saknar gemensam punkt.

Att myntfördelningsproblemet saknar lösningar om antalet mynt är > 4 betyder att vissa polyedrar i rum av högre dimensioner alla saknar den ovan beskrivna egenskapen hos oktaedern.

Vi har här endast betraktat vissa speciella polyedrar. Sålunda skall ju t. ex. i det 3-dimensionella rummet antalet sidoytor vara 8. Förutom oktaedern har också kuben den ovan beskrivna egenskapen. Men förutom dessa båda och deras affina motsvarigheter, parallelepipeder och sneda oktaedrar, finns inga andra 3-dimensionella polyedrar med denna egenskap. För beviset av detta hänvisar vi till Math. Scand. 4 (1956), sid. 65–87.

ON THE DIOPHANTINE EQUATION $2^x + 11^y = 5^z$

A. MAKOWSKI

The purpose of the present note is to prove the following

THEOREM. *The only solutions in non-negative integers x, y, z of the equation*

$$(1) \quad 2^x + 11^y = 5^z$$

are given by $x=2, y=0, z=1$ and $x=y=2, z=3$.

PROOF. It is evident that $x \geq 1$. For $x=1$ we obtain the equation $2 + 11^y = 5^z$. Since $z \geq 1$ and $11^y \equiv 1 \pmod{5}$, we have $2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ which is impossible. For $x=2$ we obtain the equation $4 + 11^y = 5^z$, hence $(-1)^y \equiv 1 \pmod{4}$ and $2|y$. After the substitution $11^{\frac{1}{2}y} = X$ we obtain the equation $4 + X^2 = 5^z$. Nagell has proved ([1], theorem 27) that the equation $4 + \xi^2 = \eta^n$ has no solution with $n > 3$, thus $z \leq 3$. We find the two solutions of (1) given above.

If $x \geq 3$, then $(-5)^y \equiv 11^y \equiv 5^z \pmod{8}$. Hence y and z are both even: $y=2u, z=2v$. The equation (1) may now be written in the form

$$2^x = (5^v - 11^u)(5^v + 11^u).$$

This yields

$$(2) \quad 2^\alpha = 5^v - 11^u$$

$$2^{x-\alpha} = 5^v + 11^u,$$

hence $2^\alpha(1 + 2^{x-2\alpha}) = 2 \cdot 5^v$, and so $\alpha = 1$. As (2) has no solution, the equation (1) has no solution with $x \geq 3$. This proves our theorem.

The equation $2^x + 5^y = 11^z$, similar to (1), has no solution because the congruence $2^x + 5^y \equiv 11^z \equiv (-1)^z \pmod{12}$ holds only for odd $x \geq 3$, but $2^x + 5^y \equiv 11^z \equiv 1 \pmod{5}$ is fulfilled only if x is divisible by 4.

REFERENCE

- [1] T. Nagell: *Contributions to the theory of a category of diophantine equations of the second degree with two unknowns*. Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsaliensis (4), 16 (1954), no. 2.

BOKMELDINGER

LUDWIG BAUMGARTNER: *Gruppentheorie*. Dritte, vollständige Neubearbeitete Auflage. (Sammlung Götschen 837.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 110 S. DM 2.40.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 170.)

Bogen behandler Gruppeteorien fra Grunden, forudsætter uden for den kun saadanne Kundskaber, som enhver Matematiker har eller let kan forskaaffe sig, og omtaler efter et skønsomt Udvalg de Emner, som er vigtige for et videre gruppeteoretisk Studium; dog kunde man maaske ønske lidt mere om de abelske Grupper og den »principale« Undergruppe (Gennemsnit af alle største Undergrupper) og endelig en Tilføjelse om Kommutatorgruppen, nemlig, at den er Gennemsnittet af Normaldelejerne med abelsk Faktorgruppe. Bogen er helt igennem overskuelig og indeholder et Stikordsregister og Henvisninger til nyere gruppeteoretisk Literatur.

Med enkelte Undtagelser er Emnerne præcist behandlet og Beviserne nemme, og Bogen maa utvivlsomt betegnes som letlæselig, instruktiv og af stor didaktisk Værdi. Selv saa forholdsvis indviklede Ting som Sætningerne af Zassenhaus, Schreier og Jordan-Hölder bliver letfattelige, og overalt illustreres Definitioner og Sætninger ved talrige Eksempler, der er alsidige nok til, at Læseren lærer en hel Del saavel endelige som uendelige Gruppetyper at kende samtidig med, at enkelte af dem gentages ofte og studeres nærmere i 3 indklæbede Skemaer; i denne Forbindelse vilde jeg dog mene, at man savner Omtale af Begrebet en Graf eller Situationsplan over Undergrupperne af en given Gruppe. Foruden Eksemplerne er der ikke mindre end 94 Opgaver (med Lösningsliste) til Kontrol af Forstaaelsen; skønt disse ogsaa nærmest har Karakter af Eksempler og kun stiller smaa Fordringer til Læserens Fantasi og Opfindsomhed, giver de dog en Del Indsigt, og samlet kan man sige, at den Læser, som har studeret Bogen med Eksempler og Opgaver, har tilegnet sig et godt gruppeteoretisk Grundlag.

Helge Tvermoes

I. N. BRONSTEIN — K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik* für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen. (Aus dem Russischen übersetzt.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1958. 12+548 S., 427 Fig. In Plastikfolie DM 22.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 121–122.)

Forfatterne til denne boken sier i et forord bl. a.: »Die Aufgabe, in einem Taschenbuch geringen Umfanges diejenigen Kenntnisse aus der Mathematik zu vermitteln, die von Ingenieuren und Studenten der Technischen Hochschulen sowohl beim Studium als auch in der praktischen Arbeit benötigt werden, war keineswegs einfach.« Med sine 548 sider er boken så langt fra blitt noen »Taschenbuch«, snarere heller en oppslagsbok eller håndbok i matematikk beregnet på folk for hvem matematikken er et hjelpemiddel. På disse 548 sider har forfatterne klart å presse inn mye stoff. Å gi en oversikt over dette, tror jeg er vanskelig. Her finner man tabeller over såvel elementære funksjoner som mer spesielle funksjoner (f. eks. elliptiske funksjoner), en kort innføring i elementærmatematikken, differensialgeometri og grunntrekkene av analysen. I et kapittel for seg behandles komplekse funksjoner, vektorregning, fourierrekker og variasjonsregning. Boken avslutter med litt om sannsynlighetsregning og utvikling av empiriske formler.

Denne summariske oppregning kan ikke på noen som helst måte gi noe inntrykk av hvordan forfatterne har behandlet stoffet. Jeg skal i det følgende forsøke å formidle mitt inntrykk av dette.

Boken er selvsagt ikke ment å være noen lærebok, men ikke desto mindre kan den i sin grundighet svært ofte minne om en slik. Det kunne nevnes en mengde eksempler på dette, men jeg skal bare ta med et par. På side 398 behandles lineære differensiallikninger av 2. orden. Først får vi en almen løsningsmetode. I et utregnet eksempel viser så boken metoden i bruk. Eller på side 235 finner vi det almene konvergensprinsippet (i boken: Konvergenzkriterium von Cauchy). Først fortelles uten bruk av andre symboler enn funksjonssymbolet hva som er nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at en funksjon skal ha en grenseverdi for $x = a$. Umiddelbart etter gir forfatterne oss hva de kaller en eksakt formulering og som er beregnet på en noe mer matematisk interessert bruker av boken. En slik behandling av stoffet virker pedagogisk overbevisende, og gjør sikkert boken lettere å bruke for dem som har behov for å slå opp en slik definisjon.

Figurene, 427 i alt, er meget gode og klare selv om de er små. Et eksempel vil vise det fortreffelige samspill mellom tekst og figurer. På side 208 behandles singulære punkter. Ved hjelp av 10 små figurer blir forskjellige

typer av singulære punkter vist. I den etterfølgende tekst forklares (uten bevis) hvordan man bestemmer disse punktene og tilslutt gis noen eksempler.

Men boken forsømmer heller ikke sin oppgave å være formelsamling også. Vi kan nevne at her finnes en liste over 53 funksjoner utviklet i rekker og samtidig er konvergensområdet angitt. Kanskje mest impoerende er listen over integraler. Den er på 515 ubestemte og 45 bestemte integraler. Dessuten blir det gjort rede for bruken av residuregningen til beregning av bestemte integraler.

Jeg synes det er en vellykket oppslagsbok selv om det er enkelte emner man leter forgjeves etter. Den store stoffmengden som er presset inn på 548 sider har ført til at boken er satt med meget små typer. I teksten henvises det svært ofte til spesiallitteratur og bak i boken finner man en fyldig litteraturliste. Boken avsluttes med et solid sakregister.

Ragnar Johs. Solvang

ALMAR NÆSS: *Lærebok i høyere matematikk*. Grøndahl & Søn, Oslo, 1958. 455 s. N. kr. 70.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 171.)

Nærværende lærebog er på opfordring af Norges Ingeniør- og Teknikerorganisasjon udarbejdet som en indførelse i den højere matematik med direkte sigte på teknikkens behov. Organisationens introducerende ord udtrykker yderligere, at man har ønsket en omfattende og fuldstændig fremstilling med mange øvelser og eksempler, samt at bogen skulle egne sig for selvstudium. På titelbladet er der af forfatteren, og måske inspireret af ovenstående, indføjet ordene »Til Selvstudium«.

Inden anmelderen går over til en mere detaljeret omtale af bogen, kunne det være fristende at citere enkelte korte stykker af forfatterens eget forord. Forfatteren skriver bl. a.: »Skal en fremstilling av matematikk være et verktøy, f. eks. for teknikken, så vil dette ha innflytelse på valg av stoff som behandles og til en viss grad hvordan dette stoff legges frem. Men selve logikken og deduksjonene må være like stringente som i en analyse i matematikk som bare søker sitt mål i seg selv. Det er derfor lagt vekt på at bokens karakter som lærebok i ren matematikk skal bli bevart.« »Det helt grunnleggende i høyere matematikk er innføringen av differensialene, de såkalte uendelig små størrelser, det er bare ved disse at man kan uttrykke kontinuitet.« Og senere: »Det er også ved eksempler forsøkt vist at ved utregning av visse naturprosesser må differensialene i ligningene ombyttes med (meget) små konkrete tall. Dvs.: Den deri-

verte bevarer sin brøkkarakter. Den blir kvotienten mellom to (meget) små tall og ikke en grenseverdi.»

Læseren af disse linier vil nu, efter de mange indledende ord, nysgerigt spørge om, hvad resultatet af disse anstrengelser så er blevet? Har vi fået en ny lærebog i matematisk analyse, der på stringent måde indfører sin læser i de grundlæggende begreber, eller giver bogen blot en summarisk fremstilling af disse begreber med tydelig omtale af forbige gæde ting og klar påvisning af, hvad der er bevist i bogen og hvad der med vilje er udeladt som for vanskeligt stof? Svaret må fra anmelderen blive et klart: desværre ingen af delene! Fremstillingen er på så godt som alle væsentlige punkter springende og usikker. Definitioner og begreber svirrer i luften, ofte er de som et ekstra krydderi forsynet med fine fremmedartede betegnelser. Løse slutninger og halvbeviste sætninger kommenteres og endevendes, uden at man rigtig er klar over, hvorom det i grunden drejer sig. Hvorledes en stakkels læser ved selvstudium af denne bog skal kunne lære sig de grundlæggende matematiske begreber, er anmelderen komplet uforståeligt. Selv i en kyndig og erfaren pædagogs hånd vil bogen være vanskelig at anvende som grundlag for undervisningen.

Desværre er det jo i en anmeldelse som denne umuligt udførligt at omtale og kommentere hele bogen, men enkelte eksempler, tilfældigt udvalgt blandt mange, vil forhåbentlig give en fornemmelse af sandheden i det ovenfor sagte. Såfremt dette ikke bliver tilfældet, henvises læseren til selv at granske bogen, eller til at lade bemærkningerne stå på anmelderens ansvar.

Ret tidligt under læsningen står det klart, at forfatteren ikke tillægger begreberne nødvendig og tilstrækkelig særlig vægt, mere kraftigt kan det siges, at de på sine steder direkte forveksles. Specielt kan det nævnes, at muligheden af indførelse af falske løsninger ved kvadrering ikke direkte omtales, således f. eks. ved udledning af keglesnitsligningerne i den analytiske geometri.

Kurveteorien indledes med en »tangentdefinition«. En ret linie antages at skære en kurve i to punkter A og B , derefter parallelforskydes linien, således at disse punkter rykker tættere sammen. Og nu med forfatterens egne ord: »I den stilling da den er blitt tangent har A og B falt sammen til ett. Derfor: En tangent er en rett linje som skjærer en kurve i to sammenfallende punkter. Man sier også, at når l er blitt tangent, er avstanden mellom A og B blitt uendelig liten (forsvinnende). At den er blitt uendelig liten innebærer at den ikke kan iakttas eller måles med noe hjelpemiddel til rådighet. Men en avstand som ikke kan konstateres eksisterer ikke.« Man spørger undrende sig selv, hvorledes denne halve og iøvrigt

bagvendte definition kan anvendes i det følgende (men det lykkes!!). Ligeledes efter mange ord og behandlingen af et specialtilfælde når man frem til definitionen af en asymptote: »En asymptot til en kurve er en rett linje, som tangerer kurven i dens uendelig fjerne punkt«, uden at de i denne definition indgående begreber kan siges i forvejen at have fået nogen præcis betydning.

Intetsteds finder man præcise definitioner på grænseværdi af en funktion. Fra afsnittet om uendelig store og uendelig små størrelser er det derimod fristende at citere med forfatterens egne ord: »Vi bruker symbolet ∞ for å uttrykke at et tall er blitt større enn ethvert tall vi kan oppskrive, eller på annen måte uttrykke (tenke oss). På den annen side blir 0 (null) også symbol for ethvert tall som er så lite at dets størrelse ikke kan oppskrives eller på annen måte direkte uttrykkes.« Videre: »Null brukes i to noe forskjellige betydninger. Det vanlige i matematikk er at null er uttrykk for absolutt mangel på størrelse. Når vi fra noe (en størrelse) tar absolutt alt vekk, blir intet igjen.«

Man er efter dette spændt på definitionen af en kontinuert funktion. Den lyder: »En kurve, funksjon, er kontinuerlig når en (uendelig) liten forandring i x frembringer en (uendelig) liten forandring i y .« Med tilføjjelsen »Da blir funksjonsbildet en sammenhengende kurve.« Den sidste påstand synes at fremtræde som en selvfølge. Så let slipper forfatteren over en af analysens vigtigste sætninger, man kan vist roligt tilføje: det er dog for let!

Et langt afsnit beskæftiger sig med determinanter og ligningssystemer. Følgende citat er egnet til at vise fremstillingsformen: »Vi merker oss: betingelsen for at ligningene kan løses er at determinanten av koeffisientene ikke er null. For en brøk med nevner null har ikke mening. Er determinanten av koeffisientene null, sier vi at ligningssystemet har forsvinnende determinant. Da skjelner vi mellom to tilfelle: a) Tellerne i røttene er ikke null. Da har systemet ingen (endelig) løsning. b) Tellerne er også null. Da er løsningen ubestemt. x og y blir da av formen $\frac{0}{0}$ og kan ha uendelig mange verdier.«

Definitionen af differentialkvotient er ingenlunde fyldestgørende. Den springer mellem det ene øjeblik at være grænseværdien af differenskvotienten til det næste simpelthen at være forholdet mellem to (ikke veldefinerede) differentialer. Den følgende udledning (eller måske rettere omtale) af differentiationsreglerne hviler derfor på et meget løst grundlag. Differentialregningens middelværdisætning dukker slet ikke op i fremstillingen, men overalt betragtes dens konsekvenser som indlysende, således ved behandlingen af maksimum og minimum. Den for elever

typiske misforståelse, at $y' = 0$ medfører maksimum, minimum eller vendepunkt, går igen i bogen. Ligeledes den fejlagtige tro på, at differentialkvotienten er positiv til venstre og negativ til højre for et maksimumspunkt.

Ved differentiation af de trigonometriske funktioner klarer forfatteren sig med påstanden: »Når en vinkel er (tilstrækkelig) liten, blir den lik sin sinus.« Senere i bogen findes grænseværdien af $\sin x/x$ ved differentiation af tæller og nævner, selvom dette grænseforhold allerede tidligere er »anvendt« ved udledelsen af differentialkvotienten af $\sin x$.

Integralregningens teknik er ganske udførligt beskrevet. Der findes ikke bevis for sætningen om den brudne rationale funktions spaltning i partialbrøker (hvilket efter anm.'s mening er helt naturligt), men den for forfatterens stil karakteristiske bemærkning »At spaltningen i partialbrøker er mulig, fremgår derav at vi i hvert enkelt tilfælde kan finde konstantene« bør dog citeres.

Da begrebet »uendelig« hos forfatteren har en umatematisk lidt udflydende filosofisk betydning, bliver også indledningen til rækkelæren vanskelig forståelig og ikke eksakt i vor tids forstand. Endvidere må det tilføjes, at da Taylors formel ikke er udledt i bogen, bliver læren om potensrækkerne (spec. Taylors og Maclaurins rækkeudviklinger for de elementære funktioner) smuglet ind på en utilfredsstillende måde (ledvis differentiation af potensrækker). Ligeledes er anvendelsen af Taylors række ved løsning af ekstremumsproblemer fejlagtig og misvisende.

Anmelderen har i ovenstående beskæftiget sig med bogen efter dens titel: Lærebok i høyere matematikk, og har ikke omtalt anvendelsen på tekniske problemer. Disse er mangeartede og fylder store dele af bogen. Men anmelderen er af den bestemte opfattelse, at uden et solidt og vel-funderet matematisk grundlag vil selv en meget habil tekniker ikke selvstændigt kunne klare nye problemer fra den tekniske problemkreds.

Kai Rander Buch

MOTTATTE BØKER

Lamberto Cesari: *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 16.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 7+271 S., 37 Fig. DM 68.00.

Preface V * Some remarks on the concept of stability 1-14 * Linear systems with constant coefficients 14-33 * Linear systems with variable coefficients 34-55 * Linear systems with periodic coefficients 55-80 * The second order linear differen-

tial equation and generalizations 80–90 * Some basic theorems on nonlinear systems and the first method of Ljapunov 91–107 * The second method of Ljapunov 107–115 * Analytical methods 115–156 * Analytic-topological methods 156–182 * Asymptotic developments in general 182–197 * Bibliography 197–266 * Index 267–271.

Max Deuring: *Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation*. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I 2, Heft 10, Teil 2.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1958. 60 S. DM 15.00.

Funktionentheoretische Grundlagen 2–18 * Zahlentheoretische Grundlagen 19–23 * Der erste Hauptsatz 23–46 * Der zweite Hauptsatz 46–58 * Bemerkungen 59–60.

Leonhard Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra*. In revidierter Fassung neu herausgegeben von Jos. E. Hofmann. Reclam-Verlag, Stuttgart, 1959. 571 S. Ganzl. DM 18.50.

Biographisch-wissenschaftsgeschichtliche Einleitung 7–36 * Literatur 37 * Vorbericht 39–40 * Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Grössen 41–123 * Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Grössen 124–178 * Von den Verhältnissen und Proportionen 178–244 * Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung 245–365 * Von der unbestimmten Analytik 366–556 * Nachwort 557–566 * Sachweiser 567–571.

Carl-Erik Fröberg: *Numerisk analys*. Lunds Universitet, Lund, 1959. 160 s. Sv. kr. 16.00.

Inledning 5–6 * Interpolation 7–30 * Numerisk derivation 31–33 * Numerisk kvadratur samt summation 34–59 * Ordinära differentialekvationer 60–77 * Dubbelintegraler 78–81 * Partiella differentialekvationer 82–88 * Numerisk lösning av ekvationer 89–102 * Lineära ekvationssystem 103–113 * Matrisinversion 114–121 * Egenvärdesproblem 122–132 * Approximation av funktioner 133–145 * Monte Carlo-metoden 146–148 * Lineär programmering 149–158 * Litteraturförteckning 159–160.

Wolfgang Hahn: *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 22.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 8+142 S. DM 28.00.

Die Grundbegriffe 1–12 * Hinreichende Bedingungen für die Stabilität oder Instabilität der Ruhelage 12–18 * Anwendungen der Stabilitätssätze auf konkrete Probleme 18–51 * Die Umkehrungen der Hauptsätze 51–72 * Ljapunovsche Funktionen mit bestimmtem Wachstumsverhalten 72–87 * Die Empfindlichkeit des Stabilitätsverhaltens gegen Störungen 87–96 * Die kritischen Fälle 96–109 * Verallgemeinerungen des Stabilitätsbegriffs 109–127 * Nachträge bei der Korrektur 127–128 * Literatur 129–138 * Namenverzeichnis 139–140 * Sachverzeichnis 141–142.

Sven Henrysson: *Elementär statistik för psykologer, pedagoger m. fl.* 2:a upplagan. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1959. 118 s.

Förord 5 * Inledning 7-8 * Tabulering 11-16 * Medelvärden 17-20 * Spridningsmått 21-25 * Förenklade beräkningar 26-31 * Normalfördelningen 32-35 * Poängsättning 36-41 * Regression och korrelation 42-52 * Speciella korrelationsmetoder 53-59 * Samplingteori 63-67 * Konfidensintervall 68-79 * Hypotesprövning 80-93 * Chi-kvadratmetoden 94-118.

L. Holzer: *Zahlentheorie*. Teil II. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 14.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. 4+127 S. DM 9.00.

Über die Einheiten in einem Zahlkörper 1-14 * Primitive Wurzeln nach einem Primideal 15-16 * Die Körperdifferente 16-23 * Relativkörper 24-26 * Relativdiskriminante und Relativedifferente 26-38 * Die Hilbertsche Theorie des Galoisschen Körpers 38-58 * Primeidealzerlegung im relativzyklischen Körper von Primzahlgrad l , wenn die primitive l -te Einheitswurzel im Teilkörper ist 58-68 * Bestimmung der Klassenzahl 69-93 * Allgemeines über relativ-zyklische Körper von Primzahlgrad 94-101 * Signaturen, unendliche Primstellen 102-104 * Das Einheitenhauptgeschlecht 104-113 * Die Anzahl der ambigen Idealklassen 113-115 * Das Theorem von Moriya 115-120 * Verschärfung der Schranke für die Idealnorm in einer Klasse eines reellquadratischen Körpers 121-127.

Loo-Keng Hua: *Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie*. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I 2, Heft 13, Teil 1.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1959. 123 S. DM 13.00.

Inhaltsübersicht 1-8 * Elementare Methoden 8-22 * Abschätzung von Exponentialsummen 23-48 * Primzahlverteilung 49-72 * Das Waringsche Problem 72-84 * Das Goldbachsche Problem 85-93 * Gleichverteilung 93-101 * Weitere zahlen-theoretische Funktionen 101-123.

Matts Håstad — Brita Schwarz — Stephan Schwarz: *Tentamensproblem med lösningar*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1957. 135 s.

Uppgifter 9 * Algebra 11-13 * Talföljder 13 * Gränsvärden 14-16 * Olikheter 16-17 * Integraler 17-20 * Kurvkonstruktioner 20-22 * Serier m. m. 22-24 * Övrig analys 24-26 * Geometri 26-31 * Lösningar 33-134 * Förteckning över tentamensproblemens placering 135.

Serge Lang: *Abelian varieties*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 7.) Interscience Publ., New York, London, 1959. 12+256 pp. \$ 7.25.

Algebraic groups 1–18 * General theorems on abelian varieties 20–53 * The theorem of the square 55–83 * Divisor classes on an abelian variety 86–122 * Functorial formulas 123–146 * The Picard variety of an arbitrary variety 147–177 * The l -adic representations 179–195 * Algebraic systems of abelian varieties 198–229 * Composition of correspondences 231–243 * Bibliography 245–252 * Table of notation 253 * Index 255–256.

E. A. Maxwell: *Fallacies in mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1959. 95 pp. sh. 13/6.

Preface 7–8 * The mistake, the howler and the fallacy 9–12 * Four geometrical fallacies enunciated 13–19 * Digression on elementary geometry 20–23 * The “Isosceles triangle” fallacy analysed 24–32 * The other geometrical fallacies analysed 33–36 * Some fallacies in algebra and trigonometry 37–54 * Fallacies in differentiation 55–64 * Fallacies in integration 65–74 * Fallacy by the circular points at infinity 75–80 * Some “limit” fallacies 81–87 * Some miscellaneous howlers 88–95.

Numerische Mathematik. (Neue Zeitschrift.) Band 1, Heft 1. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 60 S. DM 16.80.

E. Stiefel: Über diskrete und lineare Tschebyscheff-Approximationen 1–28 * Alston S. Householder — Friedrich L. Bauer: On certain methods for expanding the characteristic polynomial 29–37 * Morris Weisfeld: Orthogonal polynomials in several variables 38–40 * A. J. Perlis — K. Samelson: Report on the algorithmic language ALGOL 41–60.

Wilhelm Specht: *Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten*. Zweite, neubearbeitete Auflage. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I 1, Heft 3, Teil 2.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1958. 76 S. DM 19.00.

Einleitung 1–5 * Der Fundamentalsatz 6–17 * Schrankensätze 17–37 * Zählung der Nullstellen in vorgegebenen Gebieten 37–55 * Die kritischen Punkte eines Polynoms 55–68 * Kompositionssätze 68–76.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 172–175 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 20. august 1959.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

172. En Fibonacci-serie definieras genom $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, där a_0 och a_1 är givna heltal. Visa, att

$$a_{r+2n} + (-1)^n a_r = k_n a_{r+n}$$

där k_n bildar en speciell Fibonacci-serie. Angiv de första termerna i denna serie.

Carl-Erik Fröberg

173. For $x > 0$ er gitt en kontinuerlig funksjon $\varphi(x)$, der

$$0 < \varphi(x) < x.$$

Vis at dersom det eksisterer minst en funksjon $f(x)$ som tilfredsstiller det ene av kravene

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(\varphi(x))}{x} > \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{xf(x)}{f(x) - f(\varphi(x))} > \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0,$$

så eksisterer det ikke noen funksjon som tilfredsstiller det andre.

H. Killingbergtrø

174. Talen k_i^p (Ove J. Munch: Om potensproduktsummer, NMT 7 (1959), s. 14) har för konstant p ett maximum M_p . Bevisa

$$M_p \sim p^p e^{-p} \sqrt{12}.$$

Gerhard Arfwedson

175. Serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+a)^n}{n!} (ze^{-z})^n = \frac{e^{az}}{1-z}$$

konvergerar inom tvenne genom punkten $z=1$ skilda områden. Visa, att formeln gäller inom det område, som omsluter origo. Talet a är godtyckligt.

Gerhard Arfwedson

LÖSNINGER

166. Fibonaccifölgen $a_0, a_1, a_2, \dots$ definieras ved

$$a_0 = 1, a_1 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n = 2, 3, \dots$$

Vis, at

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{Arctg} \frac{1}{a_{2n}} + \operatorname{Arctg} \frac{1}{a_{2N+1}} = \frac{\pi}{4}, N = 1, 2, 3, \dots,$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{a_{2n}} = \frac{\pi}{4}.$$

(Sml. V. Bruns artikel i NMT 5 (1957), s. 170–71.)

Asmus L. Schmidt

Lösning: Genom induktion kan man visa, att Fibonacciföljden satisfierar

$$a_m^2 - a_{m-1}a_{m+1} = (-1)^m.$$

Med hjälp härav finner man

$$\frac{\frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{m+1}}}{1 - \frac{(-1)^m}{a_m a_{m+1}}} = \frac{1}{a_{m-1}}.$$

Således blir för $m=2n$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2n}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2n+1}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2n-1}},$$

varav uppgiftens formel följer genom summation från 1 till N .

[För $m=2n+1$ erhålles

$$\operatorname{artghyp} \frac{1}{a_{2n+1}} + \operatorname{artghyp} \frac{1}{a_{2n+2}} = \operatorname{artghyp} \frac{1}{a_{2n}}.$$

Summation från 1 till N ger

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{artghyp} \frac{1}{a_{2n+1}} + \operatorname{artghyp} \frac{1}{a_{2N+2}} = \frac{\log 3}{2},$$

varav

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1} + 1}{a_{2n+1} - 1} = 3.]$$

Gerhard Arfwedson

Også løst av Gustaf Borenius, Lars-Olof Hjalmar, H. Killingbergtrø, Lennart Lindskog, Henrik Meyer, Arne Pleijel, K. V. Rask, Rolv Rasmussen, Ragnar Johs. Solvang og Hans-Olav Zetterström.

167. Visa, att talen c_{rs} i uppgift 161 för $q = 1$ satisfiera formeln

$$\sum_{s=1}^n (n-1) \dots (n-s+1) c_{rs} = n^r,$$

där n är godtyckligt. Härav följer, att $c_{r2}, \dots, c_{rr}$ är delbara med $r+1$, om detta är primtal.

Gerhard Arfwedson

Lösning: Jag skriver påståendet på formen

$$\sum_{s=1}^n n(n-1) \dots (n-s+1) c_{rs} = n^{r+1}.$$

Jag får

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n n(n-1) \dots (n-s+1) c_{r+1, s} \\ &= \sum_{s=2}^n n(n-1) \dots (n-s+1) c_{r, s-1} + \sum_{s=1}^n n(n-1) \dots (n-s+1) s c_{rs} \\ &= \sum_{s=1}^{n-1} n(n-1) \dots (n-s) c_{rs} + \sum_{s=1}^n n(n-1) \dots (n-s+1) s c_{rs} \\ &= \sum_{s=1}^{n-1} n^2(n-1) \dots (n-s+1) c_{rs} + n^2(n-1) \dots 1 c_{rn} \\ &= n \sum_{s=1}^n n(n-1) \dots (n-s+1) c_{rs}. \end{aligned}$$

Då påståendet är riktigt för $r=1$, gäller det för alla r . Det andra påståendets riktighet framgår, om man använder Fermats sats på uttrycket för $n=2, 3, \dots, r$.

Arne Pleijel

Også løst av Gustaf Borenius og H. Kyhl.

169. Når m er et naturlig tall, skal $\nu(m)$ være eksponenten for den høyeste potens av 2 som går opp i m . Vis at rekken

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu(m)+1}{m} \sin(m \cdot 2\pi x)$$

konvergerer for alle reelle x .

R. Tambs Lyche

Løsning: For $m = 2^v(2n+1)$ settes

$$u_{n,v}(x) = \frac{1}{2n+1} \sin \{(2n+1)2\pi 2^v x\}, \quad v_m(x) = \frac{v+1}{2^v} u_{n,v}(x),$$

$$R_M(x) = \max_{p \geq M} \left| \sum_{m=M}^p v_m(x) \right|, \quad S_{N,v}(x) = \max_{p \geq N} \left| \sum_{n=N}^p u_{n,v}(x) \right|.$$

Da $v_m(x)$ er det m -te leddet i den gitte rekken, skal en vise at $R_M(x) \rightarrow 0$ når $M \rightarrow \infty$. En har

$$(1) \quad R_M(x) \leq \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v+1}{2^v} S_{(v),v}(x),$$

der indekset $(v) = \left\lfloor \frac{M+2v-1}{2^{v+1}} \right\rfloor$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,v}(x)$ konvergerer for alle x og v , kan en til et vilkårlig positivt ε finne to tall N_1 og N_2 slik at

$$\frac{v+2}{2^v} S_{n,v}(x) < \varepsilon \quad \text{for } n \geq 0 \text{ og } v \geq N_2$$

og

$$S_{n,v}(x) < \varepsilon \quad \text{for } n \geq N_1 \text{ og } 0 \leq v < N_2,$$

når x har en fast verdi. Tar en $M > 2^{N_2}(2N_1+1)$, blir etter (1)

$$R_M(x) \leq \sum_{v=0}^{N_2-1} \frac{v+1}{2^v} \varepsilon + \sum_{v=N_2}^{\infty} \frac{v+1}{2^v} \cdot \frac{2^{N_2}}{N_2+2} \varepsilon < 6\varepsilon.$$

H. Killingbergtrø

170. Låt z vara ett komplext tal och x dess reella del. Visa, att

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| \leq \frac{e^x - 1}{x}.$$

Gerhard Arfwedson

Løsning: Ved $f(z) = e^z$ blir en rett linje gjennom origo avbildet i en ekte eller degenerert logaritmespiral, der

$$|e^z - 1| \leq |z|(e^x - 1)/x$$

er en ulikhet mellom korde- og buelengden fra $f(0)$ til $f(z)$.

H. Killingbergtrø

Også løst av Gustaf Borenus, F. P. Dahlkild, P. W. Karlsson, Tord Martinson, Henrik Meyer, K. J. Overholt, Arne Pleijel, K. V. Rask og Rolv Rasmussen.

171. Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-2n} \prod_{r=1}^n (x+2^r)^{1/2^{n-r}} = \frac{1}{4},$$

uafhængig af x .

R. Tambs Lyche

Løsning: En logaritmering ger

$$\begin{aligned} & -2n \log 2 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{2^{n-r}} \log (x+2^r) \\ &= -2n \log 2 + \log 2 \sum_{r=1}^n \frac{r}{2^{n-r}} + \sum_{r=1}^n \frac{1}{2^{n-r}} \log \left(1 + \frac{x}{2^r} \right) \\ &= -2n \log 2 + \frac{\log 2}{2^n} \sum_{r=1}^n r \cdot 2^r + O \left(x \sum_{r=1}^n \frac{1}{2^n} \right) \\ &= -2n \log 2 + \log 2 \left(2n - 2 + \frac{2}{2^n} \right) + O \left(\frac{nx}{2^n} \right) \\ &= -2 \log 2 + O \left(\frac{n}{2^n} \right), \end{aligned}$$

varur påståendets riktighet framgår.

Arne Pleijel

Også løst av Gerhard Arfwedson, H. Killingbergtrø, Lennart Lindskog, Rolv Rasmussen og Ragnar Johs. Solvang.

RESULTAT AF PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIASTER

(Opgaverne i NMT 6 (1958) s. 177-178.)

Der indkom ialt 25 besvarelser. Præmien på 150 kr. tildeltes Henrik Stetkær-Hansen, III G mn, Nykøbing Mors Gymnasium. Præmien på 100 kr. tildeltes Jens Bjørneboe, III G mn, Rungsted Statsskole. Desuden uddeltes bogpræmier til Jens Lyng Petersen, II G mn, Vestre Borgerdydskole, og Erik Lund, II G mn, Sct. Knuds Gymnasium, Odense.

SUMMARY IN ENGLISH

HARALD BERGSTRÖM: *The fundamental theorem of Roth.* (Swedish.)

An expository article, following generally the lines of Roth's original paper. A simplification of the presentation is obtained by a systematic use of vectors.

H. W. GOULD: *Dixon's series expressed as a convolution.* (English.)

Let

$$S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

be the well known Dixon's series. It is shown that

$$\sum_{k=0}^n A_k A_{n-k} = (-1)^n 2^{2n} \binom{2n}{n} S,$$

where

$$A_k = \binom{n+k}{n} \binom{2n+2k}{n+k}.$$

OLOF HANNER: *A problem of coin distribution.* (Swedish.)

We seek a collection of coins with the following properties: 1° Each coin is smaller than the sum of the remaining coins. 2° It is impossible to distribute the coins between three persons in such a way that each person gets less than the two other persons together.—Clearly a collection of 4 equal coins satisfies the conditions, and it is shown that this is the only type of collection with the given properties. The coin problem is closely related to an intersection problem for convex polyhedra, treated by the author in Math. Scand. 4 (1956), pp. 65–87.

A. MAKOWSKI: *On the diophantine equation $2^x + 11^y = 5^z$.* (English.)

It is shown that the equation of the title has the only solutions $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ and $(2, 2, 3)$ in non-negative integers.