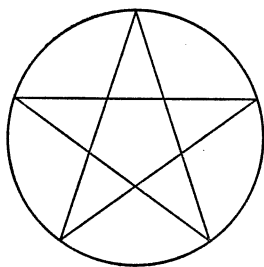


NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 7



OSLO 1959

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Suomen matematiikan ja fysiikan opettajien liitto – Finlands matematik- och fysiklärarförbund.

Íslenska stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

REDAKSJON:

Karl Dagerholm, David Fog, Carl-Erik Fröberg,

Bo Kjellberg, Regnar Norgil, E. J. Nyström, Kay Piene,

Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.

Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSER:

Redaksjon: Matematisk Institutt, Nygårdsgt. 114, Bergen.

Ekspedisjon: Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

OM POTENSPRODUKTSUMMER

OVE J. MUNCH

1. Indledning. Det er en velkendt sag, at et vilkårligt polynomium af højst n 'te grad kan skrives som en linearkombination af $n+1$ lineært uafhængige polynomier af højst n 'te grad. Et hyppigt benyttet system af »basispolynomier« er [1, p. 168]

$$\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \dots, \binom{x}{n},$$

som f. eks. indgår i Newtons interpolationsformel.

Der er næppe noget andet system, som har så mange anvendelsesmuligheder som dette; det forhindrer dog ikke, at der i specielle tilfælde findes andre systemer, som kan benyttes med fordel. Vi vil i det følgende benytte

$$(1) \quad \binom{x}{n}, \binom{x+1}{n}, \dots, \binom{x+n}{n}.$$

At disse polynomier er lineært uafhængige, ses let ved i identiteten

$$\sum_{i=0}^n b_i \binom{x+i}{n} = 0$$

at indsætte $x=0, 1, \dots, n$ efter hinanden; man får da

$$b_n = b_{n-1} = \dots = b_0 = 0.$$

Vi nævner nogle grunde til, at vi vælger det sidstnævnte system:

Hvis to polynomier $P(x)$ og $P^*(x)$ af n 'te grad tilfredsstiller relationen

$$(2) \quad P(x-1) = (-1)^n P^*(-x),$$

og $P(x)$ har fremstillingen

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i \binom{x+i}{n},$$

så er

$$P^*(x) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} \binom{x+i}{n}.$$

Benytter vi nemlig omskrivningen

$$\binom{x-1+i}{n} = (-1)^n \binom{-x+n-i}{n},$$

finder vi

$$\begin{aligned} P(x-1) &= \sum_{i=0}^n a_i \binom{x-1+i}{n} = (-1)^n \sum_{i=0}^n a_i \binom{-x+n-i}{n} \\ &= (-1)^n \sum_{i=0}^n a_{n-i} \binom{-x+i}{n}, \end{aligned}$$

der ved anvendelse af (2) fører til den anførte formel for $P^*(x)$.

Heraf — eller direkte af (2) — følger, at forbindelsen mellem $P(x)$ og $P^*(x)$ er gensidig. Hvis specielt

$$P(x-1) = (-1)^n P(-x),$$

så har man en symmetri i koefficienterne a_i , idet der på grund af entydigheden af disse må gælde $a_i = a_{n-i}$.

Vi viser yderligere, at dersom polynomiet $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i \binom{x+i}{n}$ har de heltallige nulpunkter $p, p-1, \dots, 0, -1, \dots, -q$, så gælder $a_0 = a_1 = \dots = a_{q-1} = a_{n-p} = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$. Thi indsættelse af $x=0$ giver $a_n = 0$, hvorefter $x=1$ giver $a_{n-1} = 0$, osv. indtil $x=p$, der giver $a_{n-p} = 0$. Tilsvarende finder man med $x=-1, -2, \dots, -q$, at $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{q-1} = 0$.

Man kan finde mere af interesse om denne interpolationsmetode, men vi standser her, da vi har anført tilstrækkeligt til vort formål.

2. Summation af potensprodukter. Lad $p_1, p_2, \dots, p_q$ samt n være hele positive tal. I udtrykket

$$\sum_K^n k_1^{p_1} k_2^{p_2} \dots k_q^{p_q}$$

skal summationen forstås således:

K betegner en forskrift af typen $k_{1(\leq)} k_{2(\leq)} \dots k_{q(\leq)}$, hvor der mellem hvert par på hinanden følgende k 'er skal stå enten $<$ eller $\leq$ (men på samme plads i forskriften stadig det samme). Man skal da summere over alle sæt af hele tal $k_1, k_2, \dots, k_q$, som tilfredsstiller forskriften samt betingelsen $1 \leq k_i \leq n$. Dersom der i forskriften forekommer m rene ulighedstegn, må man, for at udtrykket skal have mening, antage $n \geq m+1$.

Med en bestemt forskrift K afhænger den ovenstående sum af p 'erne samt af n ; da i det følgende ikke selve p 'erne, men kun deres antal q skal variere, vil vi betegne den

$$(3) \quad \Lambda(n; q) = \sum_K^n k_1^{p_1} k_2^{p_2} \dots k_q^{p_q}.$$

Vi sætter $\sum_{i=1}^q p_i = p$. Der gælder da følgende¹

SÆTNING 1. Udtrykket $\Lambda(n; q)$ er et polynomium i n af graden $p+q$, med hovedkoefficienten

$$\prod_{v=1}^q \left(v + \sum_{i=1}^v p_i \right)^{-1}$$

og med nulpunkter $m, m-1, \dots, m-q$.

For at vise denne sætning benytter vi induktion efter q og betragter derfor først tilfældet $q=1$ (og altså $m=0$). Vi vil her forudsætte kendt, at [2, p. 262], [4]

$$(4) \quad S_p(n) = \Lambda(n; 1) = \sum_{k=1}^n k^p$$

er et polynomium i n af graden $p+1$, med hovedkoefficienten $1/(p+1)$ og nulpunkter 0 og -1 . For fuldstændigheds skyld er et bevis anført i 3 under den nærmere omtale af dette særtilfælde.

Sætning 1 er altså rigtig for $q=1$; lad da $q>1$. Vi antager først, at der i K gælder $k_{q-1} < k_q$. Lad K_1 være den summationsforskrift, der fremgår af K , når det sidste led ($< k_q$) udelades. Ifølge vor induktionsforudsætning er da

$$\Lambda(n; q-1) = \sum_{K_1}^n k_1^{p_1} k_2^{p_2} \dots k_{q-1}^{p_{q-1}}$$

et polynomium i n af graden $p-p_q+q-1$, med hovedkoefficienten

$$\prod_{v=1}^{q-1} \left(v + \sum_{i=1}^v p_i \right)^{-1}$$

og med nulpunkter $m-1, m-2, \dots, m-q$.

Af (3) ser man, at der for $n > m+1$ gælder ligningen

$$(5) \quad \Lambda(n; q) - \Lambda(n-1; q) = n^{p_q} \Lambda(n-1; q-1),$$

medens man for $n = m+1$ har

$$(5') \quad \Lambda(m+1; q) = (m+1)^{p_q} \Lambda(m; q-1),$$

hvor i den sidste formel hvert Λ kun indeholder eet led.

¹ Når vi skriver: »Udtrykket $\Lambda(n; q)$ er et polynomium i n af graden $p+q$ o. s. v.«, er dette en kort skrivemåde for: »Udtrykket $\Lambda(n; q)$ kan i sit definitionsområde identificeres med et polynomium i n af graden $p+q$ o. s. v., og betegnelsen $\Lambda(n; q)$ vil i det følgende blive brugt også om dette polynomium.«

Under forudsætning af, at $\Lambda(n; q)$ er et polynomium, vil vi bestemme dets form og egenskaber. Man ser, at (5) må gælde for alle n . Indsættes heri $n = m + 1$, fås ved sammenligning med (5'), at $\Lambda(m, q) = 0$. Indføres derefter i (5) for n efterhånden nulpunkterne $m, m - 1, \dots, m - q + 1$ for polynomiet $\Lambda(n - 1; q - 1)$, ses det, at $\Lambda(n; q)$ har nulpunkter $m, m - 1, \dots, m - q$. Det bemærkes, at blandt disse sidste findes altid 0 og -1 .

Ved indsætning af værdierne $1, 2, \dots, n$ i (5) og addition af de fremkomne ligninger finder man

$$(6) \quad \Lambda(n; q) = \sum_{k=1}^n k^{pq} \Lambda(k-1; q-1).$$

Ifølge induktionsforudsætningen har man

$$\Lambda(k-1; q-1) = \sum_{v=0}^{p-pq+q-1} b_v k^v$$

med hovedkoefficienten

$$b_{p-pq+q-1} = \prod_{i=1}^{q-1} \left(p + \sum_{i=1}^p p_i \right)^{-1}.$$

Dermed bliver

$$(7) \quad \Lambda(n; q) = \sum_{v=0}^{p-pq+q-1} \sum_{k=1}^n b_v k^{v+pq} = \sum_{v=pq}^{p+q-1} a_v S_v(n),$$

hvor $a_v = b_{v-pq}$, specielt $a_{p+q-1} = b_{p-pq+q-1}$. Med S -polynomiernes egenskaber i erindring ser man heraf, at $\Lambda(n; q)$ må have graden $p+q$ og den i sætning 1 nævnte hovedkoefficient.

Vi kan nu omvendt indse, at det ved (7) bestemte polynomium $\Lambda(n; q)$ virkelig tilfredsstiller (3) for alle hele $n \geq m + 1$. For disse n -værdier kan man nemlig fra (7) over (6) slutte tilbage til (5') og (5) og derfra til (3).

Hvad ovenfor er sagt, kan på analog måde gennemføres, dersom K slutter med $k_{q-1} \leq k_q$. Svarende til (5) og (5') får man her

$$(5a) \quad \Lambda(n; q) - \Lambda(n-1; q) = n^{pq} \Lambda(n; q-1)$$

og

$$(5'a) \quad \Lambda(m+1; q) = (m+1)^{pq} \Lambda(m+1; q-1),$$

hvorefter fremgangsmåden er den samme som før. Beviset for sætning 1 er dermed færdigt.

Med K^* betegnes den »komplementære« summationsforskrift til K , d. v. s. den, som fremkommer af K ved gensidig ombytning af tegnene $<$ og $\leq$. Betegner altså K f. eks. $k_1 \leq k_2 < k_3$, har K^* betydningen $k_1 < k_2 \leq k_3$. Når som foran det til K svarende polynomium kaldes $\Lambda(n; q)$,

betegner vi det til K^* svarende polynomium $\Lambda^*(n, q)$. Indeholder K som før m rene ulighedstegn, vil der i K^* forekomme $q - m - 1$ sådanne, og vi har for $n \geq q - m$:

$$(3a) \quad \Lambda^*(n; q) = \sum_{K^*}^n k_1^{p_1} k_2^{p_2} \dots k_q^{p_q}.$$

Vi vil nu godtgøre, at den her anvendte betydning af en stjerne er i overensstemmelse med den i 1^o benyttede. Der gælder nemlig

SÆTNING 2. *Polynomierne $\Lambda(n; q)$ og $\Lambda^*(n; q)$ er sammenknyttet ved relationen*

$$(8) \quad \Lambda(n-1; q) = (-1)^{p+q} \Lambda^*(-n; q).$$

Beviset føres som før ved induktion. På dette sted forudsættes kendt, at polynomierne $S_p(n) = S_p^*(n)$ tilfredsstiller den til (8) svarende relation

$$(9) \quad S_p(n-1) = (-1)^{p+1} S_p(-n).$$

Et bevis herfor er medtaget i 3.

Sætning 2 er altså rigtig for $q = 1$, og vi går over til $q > 1$. Vi kan uden indskrænkning af bevisførelsen antage, at K slutter med $k_{q-1} < k_q$, og K^* altså med $k_{q-1} \leq k_q$. Polynomierne $\Lambda(n; q)$ tilfredsstiller da (5) og (5'), medens polynomierne $\Lambda^*(n, q)$ tilfredsstiller (5a) og (5'a).

I identiteten (5) indsættes for n efter hinanden værdierne $1, 2, \dots, n-1$, hvorefter man ved addition finder

$$(10) \quad \Lambda(n-1; q) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{p_q} \Lambda(k-1; q-1),$$

der også fremgår af (6), når man erstatter n med $n-1$. Af (5a) fås på lignende måde for polynomierne $\Lambda^*(n; q)$, når man for n indsætter værdierne $-1, -2, \dots, -n+1$:

$$-\Lambda^*(-n; q) = \sum_{k=1}^{n-1} (-k)^{p_q} \Lambda^*(-k; q-1),$$

d. v. s.

$$(11) \quad \Lambda^*(-n; q) = (-1)^{p_q+1} \sum_{k=1}^{n-1} k^{p_q} \Lambda^*(-k; q-1).$$

Efter induktionsforudsætningen gælder

$$\Lambda(k-1; q-1) = (-1)^{p-p_q+q-1} \Lambda^*(-k; q-1);$$

indføres dette i højre side af (10), så får man

$$\Lambda(n-1; q) = (-1)^{p-p_q+q-1} \sum_{k=1}^{n-1} k^{p_q} \Lambda^*(-k; q-1),$$

der ifølge (11) kan skrives

$$A(n-1; q) = (-1)^{p+q} A^*(-n; q),$$

altså formel (8).

Hertil vil vi endnu føje

SÆTNING 3. $m, m-1, \dots, m-q$ er samtlige heltallige nulpunkter i $A(n; q)$.

Vi har allerede set, at $A(n; q)$ har de nævnte nulpunkter. På grund af (3) er $A(n; q) > 0$ for alle hele $n > m$. Tilsvarende fås ved (8) og (3a), at $A(-n; q) = (-1)^{p+q} A^*(n-1; q) \neq 0$ for alle hele $n > q-m$, d. v. s. $-n < m-q$. Sammenfattes dette, ses sætning 3.

Vi vil derefter udtrykke polynomierne $A(n; q)$ og $A^*(n; q)$ ved hjælp af systemet (1). Af det i 1 fundne i forbindelse med sætning 1 følger, at vi på entydig måde kan udtrykke $A(n; q)$ og $A^*(n; q)$ ved

$$(12) \quad A(n; q) = \sum_{i=q-m}^{p+q-m-1} \lambda_i \binom{n+i}{p+q}$$

og

$$(12a) \quad A^*(n; q) = \sum_{i=m+1}^{p+m} \lambda_{p+q-i} \binom{n+i}{p+q}.$$

Rækken af koefficienter i (12a), læst fra højre mod venstre, er den samme som koefficientrækken i (12), læst fra venstre mod højre:

$$(12b) \quad A^*(n; q) = \sum_{i=q-m}^{p+q-m-1} \lambda_i \binom{n+p+q-i}{p+q}.$$

Man bemærker, at antallet af koefficienter altid er lig p .

Lad os slutte dette afsnit med at omtale et konkret eksempel: For $K: k_1 < k_2 \leq k_3$ finder vi for $p_1 = p_2 = p_3 = 1$:

$$(12c) \quad A(n; 3) = \lambda_2 \binom{n+2}{6} + \lambda_3 \binom{n+3}{6} + \lambda_4 \binom{n+4}{6};$$

her er

$$\lambda_4 = A(2; 3) = 4, \quad \lambda_2 = A^*(2; 3) = 2.$$

$A(n; 3)$ har hovedkoefficienten $1/2 \cdot 4 \cdot 6 = 1/48$; multiplikation af identiteten (12c) med $6! = 720$ og sammenligning af koefficienterne til leddene af højeste grad giver $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 15$. Vi må da have $\lambda_3 = 9$, hvormed

$$A(n; 3) = 2 \binom{n+2}{6} + 9 \binom{n+3}{6} + 4 \binom{n+4}{6}$$

og

$$A^*(n; 3) = 4 \binom{n+2}{6} + 9 \binom{n+3}{6} + 2 \binom{n+4}{6}.$$

Vi forlader her den almindelige teori og går over til at betragte nogle specielle tilfælde. Først skal $S_p(n)$ -polynomierne omtales, og da **2** hviler på nogle af disse polynomiers egenskaber, vil vi i **3** give en fremstilling, der er logisk uafhængig af **2**.

3. Potenssummerne $S_p(n)$. Man kender formlen

$$S_1(n) = \sum_{a=1}^n a = \binom{n+1}{2},$$

og en simpel omskrivning af

$$S_2(n) = \sum_{a=1}^n a^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

giver

$$S_2(n) = \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3}.$$

Vi vil finde tilsvarende formler for større p .²

Lad i det følgende k_i^p betegne talkoefficienter med $i = 1, 2, \dots, p$. Vi betragter formelt

$$(13) \quad S_p(n) = \sum_{i=1}^p k_i^p \binom{n+i}{p+1}.$$

Vor første opgave er da at vise, at skrivemåden (13) er mulig og entydig.

Af (13) fås

$$(14) \quad \sum_{i=1}^p k_i^p \binom{n+i}{p+1} - \sum_{i=1}^p k_i^p \binom{n-1+i}{p+1} = n^p.$$

Da

$$\binom{n+i}{p+1} - \binom{n-1+i}{p+1} = \binom{n-1+i}{p},$$

giver (14)

$$(15) \quad \sum_{i=1}^p k_i^p \binom{n-1+i}{p} = n^p;$$

indsættes heri efter hinanden værdierne $n = 1, 2, \dots, p$, fås ligningssystemet

$$(15^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_p^p \binom{p}{p} \\ k_p^p \binom{p+1}{p} + k_{p-1}^p \binom{p}{p} \\ \dots \\ k_p^p \binom{2p-1}{p} + k_{p-1}^p \binom{2p-2}{p} + k_{p-2}^p \binom{2p-3}{p} + \dots + k_1^p \binom{p}{p} \end{array} \right. = \begin{array}{l} 1^p \\ 2^p \\ \dots \\ p^p. \end{array}$$

² Disse formler er først angivet af Worpitzky [7]. De er også bevist af Piza [5]. Andre formler for potenssummerne er nylic angivet af J. Lohne i dette tidsskrift [3].

Her er p ligninger med p ubekendte; koefficientdeterminantens værdi er 1, hvorfor ligningssystemet har netop eet sæt løsninger. Dette viser, at udtryksmåden (13) er entydig, ifald den er mulig. Lad derfor k_i^p , $i = 1, 2, \dots, p$, i det følgende være de ved (15*) bestemte tal.

Ifølge (15*) gælder (15) for $n = 1, 2, \dots, p$; ved direkte indsætning ses den også at være rigtig for $n = 0$. Da begge sider af (15) er polynomier i n af højst p 'te grad, må denne ligning derfor være en identitet. Nu er (15) ensbetydende med (14); endvidere fører addition af ligningerne (14) for det benyttede n og alle mindre, hele positive værdier tilbage til (13), således at også denne sidste ligning må være gyldig for alle hele, positive n .

Hermed er muligheden og entydigheden af (13) bevist. Tilbage står at beregne koefficienterne; inden dette sker, vil vi dog vise to egenskaber ved disse.

Efter det netop sagte er begge sider af (15) polynomier i n af netop p 'te grad; multiplikation af denne identitet med $p!$ og sammenligning af koefficienterne til leddene af højeste grad giver

$$(16) \quad \sum_{i=1}^p k_i^p = p!.$$

Endvidere gælder

$$(17) \quad k_i^p = k_{p+1-i}^p.$$

Efter det i 1 sagte er (17) en følge af den allerede nævnte relation

$$(9) \quad S_p(n-1) = (-1)^{p+1} S_p(-n),$$

som vi derfor vil bevise nu. Af (14) findes

$$S_p(n) - S_p(n-1) = n^p,$$

og denne ligning må gælde for alle n . Sættes specielt $n = 1$, fås $S_p(0) = 0$, og $n = 0$ giver derpå, at også $S_p(-1) = 0$. Indsættes efter hinanden værdierne $-1, -2, \dots, -n+1$, og adderes de fremkomne ligninger, findes

$$-S_p(-n) = \sum_{k=1}^{n-1} (-k)^p = (-1)^p \sum_{k=1}^{n-1} k^p = (-1)^p S_p(n-1),$$

der er ensbetydende med (9).

Da $S_p(n) > 0$ for alle hele, positive n , så følger af (9), at $S_p(n)$ ikke kan have andre heltallige nulpunkter end 0 og -1 , hvilket allerede er indeholdt som et specielt resultat i sætning 3.

Vi vil nu bevise, at koefficienten k_i^p bestemmes ved formeln

$$(18) \quad k_i^p = \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} j^p \binom{p+1}{i-j}.$$

Dette sker ved direkte indsættelse i systemet (15*). Den i 'te ligning i dette system kan skrives

$$k_1^p \binom{p+i-1}{i-1} + k_2^p \binom{p+i-2}{i-2} + \dots + k_{i-1}^p \binom{p+1}{1} + k_i^p \binom{p}{0} = i^p,$$

eller, på kortere form:

$$\sum_{r=0}^{i-1} k_{i-r}^p \binom{p+r}{r} = i^p.$$

Indføres her k_{i-r}^p fra (18), fås

$$\sum_{r=0}^{i-1} \sum_{j=1}^{i-r} (-1)^{i-r-j} j^p \binom{p+1}{i-r-j} \binom{p+r}{r} = i^p.$$

Denne ligning skal altså vises at være rigtig. Ombytning af summationernes rækkefølge giver

$$(19) \quad \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} j^p \sum_{r=0}^{i-j} (-1)^r \binom{p+1}{i-j-r} \binom{p+r}{r} = i^p.$$

For at godtgøre dette betragter vi identiteten

$$(1+x)^{p+1}(1+x)^{-p-1} = 1,$$

der (for $|x| < 1$) kan skrives

$$\sum_{q=0}^{\infty} \binom{p+1}{q} x^q \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{p+r}{r} x^r = 1.$$

Søges her koefficienten til x^n på begge sider af lighedstegnet, fås

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p+1}{n-r} \binom{p+r}{r} = \begin{cases} 0 & \text{for } n > 0 \\ 1 & \text{for } n = 0. \end{cases}$$

Med benyttelse heraf er rigtigheden af (19) — og dermed også af (18) — klar.

Af (18) kan alle koefficienter k_i^p beregnes. Specielt ses — med benyttelse af (17) —, at for alle p er $k_1^p = k_p^p = 1$. For de øvrige værdier af i gælder relationen

$$(20) \quad k_i^p = (p+1-i)k_{i-1}^{p-1} + ik_i^{p-1}, \quad 2 \leq i \leq p-1.$$

Dette indses, når man for de to k 'er på højre side indsætter de ved (18) bestemte værdier og reducerer; man får da netop udtrykket (18) for k_i^p . Reduktionens detaljer forbigås her.

Det ses, at (20) medfører, at alle koefficienterne k_i^p er positive. Det bemærkes iøvrigt, at hvis vi definitions-mæssigt sætter $k_0^p = k_p^{p-1} = 0$, så gælder (20) også for $i=1$ og $i=p$.

									q
				1					1
			1		2				2
		1		8		6			3
	1		22		58		24		4
		1	52		328		444		5
	1	114		2436		4400		3708	6
		1	240		8562		68360		7
1	494	28806		376184		1042660		785256	8

Vi vil vise nogle egenskaber ved disse koefficienter. Af $L_q(q) = q!$ følger $h_q^q = q!$; endvidere er $h_1^q = 1$ for alle q . For at vise dette sidste bemærker vi, at ligningen (8), der her bliver

$$L_q(n-1) = L_q^*(-n),$$

sammenholdt med (22) giver, i overensstemmelse med (12) og (12b),

$$(22a) \quad L_q^*(n) = \sum_{i=1}^q h_i^q \binom{n+2q-i}{2q}.$$

Da nu $L_q^*(1) = 1$, så findes $h_1^q = 1$ ved indsættelse af værdien $n = 1$ i (22a).

Multiplikation af ligningen (22) med $(2q)!$ og sammenligning af koefficienterne til leddene af højeste grad giver

$$(24) \quad \sum_{i=1}^q h_i^q = (2q-1)!!;$$

den samme ligning (24) følger også ved induktion ud fra den nedenfor beviste, for $1 < i < q$ gyldige ligning

$$(25) \quad h_{q-i}^q = (q+i)h_{q-i-1}^{q-1} + (q-i)h_{q-i}^{q-1}.$$

Ved hjælp af (25) kan man også vise, at der gælder $h_2^q = 2k_2^q$, hvor k_2^q er den i 2 definerede koefficient.

I beviset for relationen (25) benytter vi, at dersom for $0 \leq j \leq i$

$$A(j) = (q+i) \binom{2q-1}{i-j} - (q-i) \binom{2q-1}{i-1-j},$$

idet specielt $\binom{2q-1}{-1}$ regnes for at være 0, så gælder for $0 \leq j \leq i-1$

$$\frac{A(j)}{q+j} + \frac{A(j+1)}{q+j+1} = \binom{2q+1}{i-j}.$$

Dette kan godtgøres ved en direkte indsættelse og reduktion, som her forbigås.

Af (23) fås

$$\begin{aligned} h_{q-i-1}^{q-1} &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{2q-1}{i-j} L_{q-1}(q-1+j) \\ h_{q-i}^{q-1} &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} \binom{2q-1}{i-1-j} L_{q-1}(q-1+j), \end{aligned}$$

hvor man i sidste ligning gerne kan summere helt til i . Vi vil, ved at benytte højresiderne af disse to ligninger, vise, at udtrykket

$$S = (q+i)h_{q-i-1}^{q-1} + (q-i)h_{q-i}^{q-1}$$

er lig højre side af (23). Vi finder straks

$$S = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} A(j) L_{q-1}(q-1+j).$$

Da imidlertid

$$L_q(q+j) = L_q(q+j-1) + (q+j)L_{q-1}(q+j-1)$$

og altså

$$L_{q-1}(q+j-1) = \frac{1}{q+j} (L_q(q+j) - L_q(q+j-1)),$$

så bliver

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \frac{A(j)}{q+j} (L_q(q+j) - L_q(q+j-1)) \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j} \left(\frac{A(j)}{q+j} + \frac{A(j+1)}{q+j+1} \right) L_q(q+j) + L_q(q+i) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{2q+1}{i-j} L_q(q+j) = h_{q-i}^q. \end{aligned}$$

Hermed er ligningen (25) bevist; det tilføjes, at dersom vi indfører $h_0^q = h_{q+1}^q = 0$, så gælder (25) også for $i=1$ og $i=q$. Ligningen kan, når man går ud fra $h_1^1 = 1$, benyttes til beregning af koefficienterne. Man bemærker, at det af (25) følger, at alle koefficienter h_i^q er positive.

Vi kan nu udtrykke polynomiet $\prod_{k=1}^n (x+k)$ ved

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (x+k) &= x^n + \binom{n+1}{2} x^{n-1} \\ &+ \left[\binom{n+1}{4} + 2 \binom{n+2}{4} \right] x^{n-2} + \dots + \sum_{i=1}^q h_i^q \binom{n+i}{2q} x^{n-q} + \dots + n!, \end{aligned}$$

hvor koefficienterne h_i^q er tallene i den q 'te række i den anførte koefficient-trekant.⁵

5. Bernoullis tal. De foran anførte eksempler på forskellige klasser af polynomier kan suppleres med flere; jeg skal dog afstå derfra, da disse eksempler, skønt interessante i sig selv, i deres behandling ikke afviger ret meget fra det allerede sagte.

Imidlertid kan de metoder, der er anvendt i det foregående, også benyttes til at finde formler af helt andre typer. Man kan således finde adskillige eksplicite formler for Bernoullis tal B_ν på den måde, at man udtrykker Bernoullis polynomium $B_\nu(n)$ ved et passende system af lineært uafhængige polynomier, hvorefter det konstante led opsøges.

Vi vil her nøjes med at vise, hvorledes B_ν kan udtrykkes ved koefficienterne k_i^ν ; med principielt samme metoder kan man imidlertid udtrykke B_ν ved polynomierne $L_q(n)$ eller ved tallene h_i^ν .

$B_\nu(n)$ er entydigt bestemt ved at skulle have graden ν og tilfredsstille betingelserne [1, p. 173]

$$B_\nu(x+1) - B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

og

$$B'_\nu(x) = \nu B_{\nu-1}(x), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

B_ν defineres som det konstante led i $B_\nu(n)$.

Som følge af de opstillede betingelser for $B_\nu(n)$ må der gælde

$$B_{\nu+1}(n+1) = (\nu+1)S_\nu(n) + B_{\nu+1};$$

ved differentiation heraf finder man

$$B'_{\nu+1}(n+1) = (\nu+1)S'_\nu(n),$$

hvoraf

$$(\nu+1)B_\nu(0) = (\nu+1)S'_\nu(-1),$$

d. v. s.

$$B_\nu = S'_\nu(-1).$$

Nu er

$$S'_\nu(n) = \sum_{i=1}^{\nu} k_i^\nu \frac{d}{dn} \binom{n+i}{\nu+1}$$

og derfor

$$S'_\nu(-1) = \sum_{i=1}^{\nu} k_i^\nu \frac{(i-1)!(\nu+1-i)!}{(\nu+1)!} (-1)^{\nu+1-i} = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{\nu+1-i} \frac{k_i^\nu}{\binom{\nu}{i-1}}$$

eller, når i ombyttes med $\nu+1-i$:

⁵ Worpitzky har også betragtet tallene h_i^q ; han angiver ikke rekursionsformlen for dem, men siger blot, at en sådan kan findes.

$$B_\nu = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^i \frac{k_i^\nu}{\binom{\nu}{i}}. {}^6$$

Indføres heri udtrykket (18) for k_i^ν , finder man

$$B_\nu = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^i (-1)^j j^\nu \frac{\binom{\nu+1}{i-j}}{\binom{\nu}{i}}.$$

LITTERATUR

- [1] ANDERSEN—BOHR—PETERSEN: *Lærebog i matematisk analyse, IV*. København 1949.
- [2] C. CARATHEODORY: *Funktionentheorie*. Basel 1950.
- [3] J. LOHNE: *Potenssummer av de naturlige tall*. NMT 6 (1958), pp. 155–158. Smlgn. også det følgende tillæg af R. Tambs Lyche, pp. 159–161.
- [4] N. E. NØRLUND: *Om Bernoulli-polynomierne*. Mat. Tidsskr. B, 1919, pp. 33–48.
- [5] P. A. PIZA: *Kummer numbers*. Mathematics Magazine 21 (1948), pp. 257–261. (Pacoima, Calif.)
- [6] L. SAALSCHÜTZ: *Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen*. Berlin 1893.
- [7] J. WORPITZKY: *Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*. Journal für die r. u. a. Math. 94 (1883), pp. 203–231 (Crelles Journal).

⁶ Denne formel er angivet af Worpitzky, som også viser andre formler for B_ν af lignende karakter.

AN APPLICATION OF A "CARPENTER'S CURVE" TO SIMPSON FORMULAS¹

VIGGO BRUN

1. In 1953 I gave in this journal [1] a Simpson-formula for three non-equidistant ordinates y_0 , y_1 and y_2 :

$$(1) \quad F \approx \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{a-b}{3} (y_0 - y_2) .$$

Here a and b are the distances between the ordinates.

In 1958 Ernst Selmer [3] has given—also in this journal—a further treatment of the same subject from other points of view. Of particular interest is his Simpson-formula for four non-equidistant ordinates.

I shall show here how my method, which rested on the Archimedean determination of the area of a segment of a parabola, can also be used to deduce Selmer's formula for four ordinates. But first I will reconsider my former treatment of the formula (1), as the starting point was then a little arbitrary.

As the method I used resembles the way in which a carpenter would remove the corners from a wooden board, I will start by defining a "carpenter's curve", a word which Werner Werenskiöld once used to explain my method to a non-mathematician who had not understood a lecture I had given on this subject.

2. Suppose that we have given a polygon, for instance a quadrangle $P_1P_2P_3P_4$, and that a point M is given on each of the sides (fig. 1). We wish to draw a curve through these points without discontinuities in the direction. We also demand that the sides of the quadrangle shall be tangents to the curve in the points M .

We will do it in a similar manner as a carpenter would have done if the quadrangle had been a wooden board. He would have removed the cor-

¹ Presented at the International Congress of Mathematicians, Edinburgh 1958.

ners to make the board less "edged". He would probably begin with bisecting the segments MP . At least we will do so.

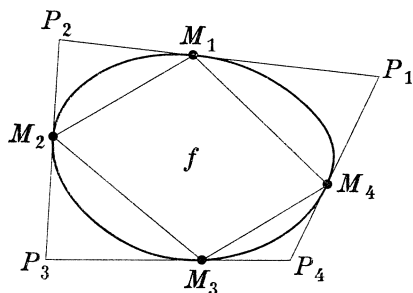


Fig. 1

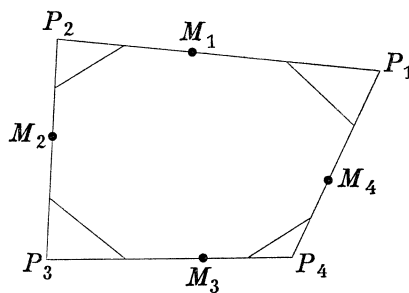


Fig. 2

We then get an octagon (fig. 2), and can choose four points N on the new sides. In continuing this process, we get a polygon with sixteen sides, and so on. I call the limit for these polygons a "carpenter's curve". As the choice of the points N (and the following similar new points) is arbitrary, we can get many different carpenter's curves corresponding to a given polygon with given tangent-points M . But they will all enclose areas of the same size.

Suppose that the area of the given polygon is F and that of the inscribed polygon f . The area enclosed in the carpenter's curve will then be

$$C = F - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) (F - f) = \frac{2}{3} F + \frac{1}{3} f.$$

Let us use this method to deduce the formula I gave in 1953 for three non-equidistant ordinates. As the choice of the broken line was then a little arbitrary, I shall here deduce my formula in a new manner. Only *parts* of the polygon will now be replaced by a carpenter's curve, but the formula for the area is still valid.

We draw a broken line (fig. 3) through the given points M_1 , M_2 and M_3 , and choose the abscissas $\frac{1}{2}a$ and $a + \frac{1}{2}b$ for the points P_1 and P_2 .

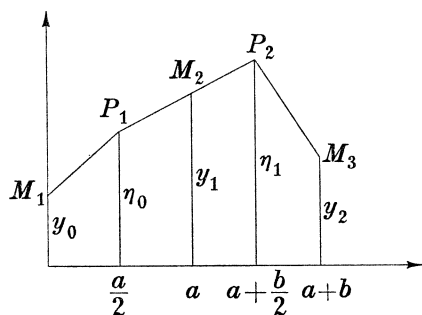


Fig. 3

The length of η_0 is chosen arbitrarily. The ordinate η_1 will be a function of η_0 , and we get for the area (C) under the carpenter's curve:

$$(2) \quad C = \frac{1}{3} \left[ay_0 + \left(a + 2b + \frac{b^2}{a} \right) y_1 + by_2 \right] + \frac{1}{3} \left[a - \frac{b^2}{a} \right] \eta_0.$$

If this formula shall have the form

$$(3) \quad C = (R_1a + S_1b)y_0 + (R_2a + S_2b)y_1 + (R_3a + S_3b)y_2,$$

with numerical coefficients R and S , then η_0 must have the form

$$\eta_0 = Ly_0 + My_1 + Ny_2,$$

where L , M and N are functions of a and b . If we demand that our formula shall be exact for $y=1$ and for $y=x$, we must have

$$L + M + N = 1, \quad aM + (a+b)N = \frac{1}{2}a.$$

If M and N are expressed by L , we get

$$(4) \quad C = \frac{1}{3} \left[a + \frac{a^2 - b^2}{a} L \right] y_0 + \frac{1}{3} \left[2a + \frac{3}{2}b + \frac{a^2}{2b} - \frac{a+b}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a} L \right] y_1 \\ + \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2}b - \frac{a^2}{2b} + \frac{a^2 - b^2}{b} L \right] y_2.$$

If formula (4) shall have the same form as (3), it will be seen that we can determine all of the six quantities R and S except one of them. Our formula will therefore contain one parameter λ , and can conveniently be written as

$$(5) \quad C = \frac{1}{2} [(a + 2\lambda b)y_0 + (1 - 2\lambda)(a + b)y_1 + (2\lambda a + b)y_2].$$

If this formula shall correspond to Simpson's formula when $a=b$, we must choose $\lambda = -\frac{1}{6}$. We then obtain the formula (1) which I gave in 1953.

I remark that we get the same result if we choose arbitrary abscissas α and $a+\beta$ for the points P_1 and P_2 (fig. 3), and then demand that the formula shall be linear in a , b , α and β , cf. (3).

3. The problem of giving a Simpson-formula for four non-equidistant ordinates can be treated in the same way, and we get for the area under the carpenter's curve a formula with three parameters λ , μ and ν :

$$(6) \quad C = \frac{1}{2} \{ [a + (1 - \lambda)b + \mu c]y_0 + [\lambda a + \lambda b + (1 - \mu - \nu)c]y_1 \\ + [(1 - \lambda - \mu)a + \nu b + \nu c]y_2 + [\mu a + (1 - \nu)b + c]y_3 \}.$$

If this formula shall correspond to "Newton's rule"

$$C = \frac{3}{8}a(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

when $a=b=c$, we must choose $\lambda=\nu$ and $\lambda-\mu=\frac{5}{4}$. We then get the formula with one parameter given by Selmer ([3], § 7):

$$(7) \quad C = \frac{1}{8} \{ [4a + (4 - 4\lambda)b + (4\lambda - 5)c]y_0 + [4\lambda a + 4\lambda b + (9 - 8\lambda)c]y_1 \\ + [(9 - 8\lambda)a + 4\lambda b + 4\lambda c]y_2 + [(4\lambda - 5)a + (4 - 4\lambda)b + 4c]y_3 \}.$$

I have only studied the special case $\lambda=1$, which gives the formula

$$C = \frac{1}{8}\{[4a-c]y_0 + [4a+4b+c]y_1 + [a+4b+4c]y_2 + [-a+4c]y_3\}.$$

As an example of this formula, I will apply it to the area of a quadrant of a circle with radius 5 (fig. 4), thereby obtaining an approximation for π .

My formula gives $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx \frac{1}{8}\{11 \cdot 5 + 17 \cdot 4 + 11 \cdot 3\}$,

and therefore

$$\pi \approx \frac{312}{100}.$$

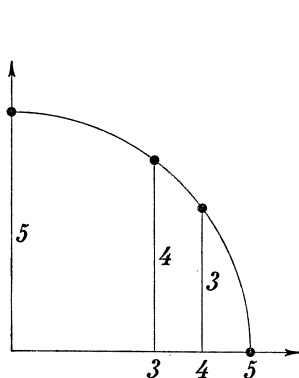


Fig. 4

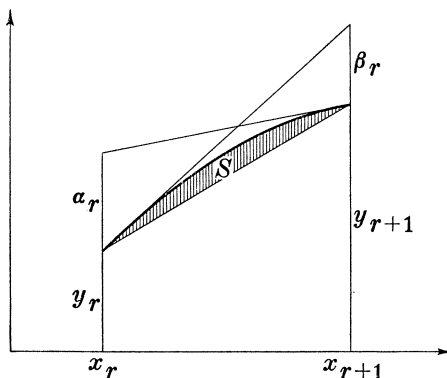


Fig. 5

4. The carpenter's curve can also be used to give a supplement to the trapezoid rule when the direction (y'_r) of the curve is given at the end-points of the arc (cf. Heidam [2]).

The supplement to the area of the trapezoid will be (fig. 5)

$$S = -\frac{1}{3} \frac{\alpha_r \cdot \beta_r}{\Delta y'_r},$$

where $\Delta y'_r = y'_{r+1} - y'_r$. We can also write

$$S = \frac{1}{3} \frac{(\Delta y_r - y'_r \Delta x_r)(\Delta y_r - y'_{r+1} \Delta x_r)}{\Delta y'_r},$$

where

$$\Delta x_r = x_{r+1} - x_r, \quad \Delta y_r = y_{r+1} - y_r.$$

The trapezoid rule for more than two ordinates will then be

$$A \approx \frac{1}{2} \sum_1^n (y_r + y_{r+1}) \Delta x_r - \frac{1}{3} \sum_1^n \frac{\alpha_r \cdot \beta_r}{\Delta y'_r}.$$

5. Our definition of a carpenter's curve can be extended to a "carpenter's surface". If a carpenter was given a wooden polyhedron and

was asked to make a block of it without edges, he would probably begin with bisecting the sides. If the polyhedron is a cube, this can be done in the manner which is seen in fig. 6, where at first eight corners are removed. Of the twelve new corners which are to be removed afterwards, we have only drawn one. The method can be continued, assuming that we always are bisecting the sides.

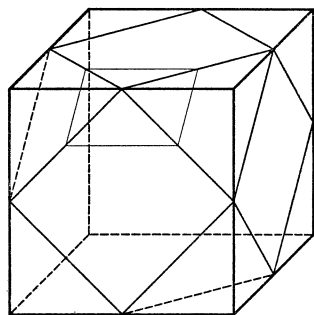


Fig. 6

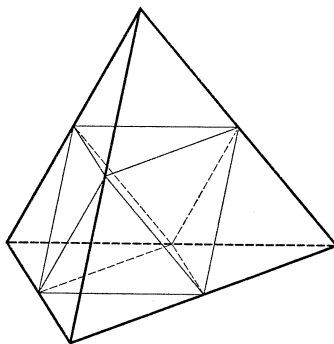


Fig. 7

The limit for the surfaces of these polyhedrons may be called the "carpenter's surface resulting from a cube". The volumes of the successive polyhedrons will here be 1 (for the cube), $1 - \frac{1}{8}$ (for the semi-regular Archimedean polyhedron), and $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}$ for the next one.

It is a little astonishing that the shape of a regular tetrahedron's carpenter's surface will be the same as that of a cube (fig. 7).

If the corners of a regular tetrahedron are removed, we get a regular octahedron, and if the corners of this octahedron are removed, we get the Archimedean semi-regular polyhedron which was the first step in the removing of corners from the cube.

If therefore two stones, one being a cube and the other a regular tetrahedron, should roll for some millions of years in the wells at the coast, their shape would probably be more and more equal.

REFERENCES

- [1] V. BRUN: *A generalization of the formula of Simpson for non-equidistant ordinates*. NMT 1 (1953), pp. 10-15.
- [2] K. Z. HEIDAM: *An approximation formula for the determination of areas*. NMT 3 (1955), pp. 107-110.
- [3] E. S. SELMER: *Numerical integration by non-equidistant ordinates*. NMT 6 (1958), pp. 97-108.

A NOTE ON THE PRECEDING PAPER BY V. BRUN

ERNST S. SELMER

In the preceding paper [1], Viggo Brun has deduced approximate integration formulae for three and four non-equidistant ordinates, under the following assumptions:

- 1° The formulae shall be *exact* for the functions $y=1$ and $y=x$.
- 2° The coefficients of the ordinates y_i shall be *linear combinations* of the intervals.

He then gets his formulae (5) and (6), containing a certain number of parameters. This number is reduced by imposing a third condition:

- 3° For equidistant ordinates, the formulae shall *coincide* with Simpson's formula and with the $\frac{3}{8}$ -rule ("Newton's rule") respectively.

For three ordinates, Brun then gets another deduction of his earlier formula (1). With four ordinates, he gets a formula (7) which I have earlier [2] deduced by a more analytical method.

The purpose of this note is only to point out the following two facts:

- 1) The conditions 1°–3° are exactly those conditions which were also used in my paper (Sections 4 and 7).—We only need to note that condition 1° above is equivalent to the vanishing of the first two terms of the Taylor expansion for the error.

- 2) Using only conditions 1° and 2°, Brun's formulae (5) and (6) are immediate consequences of my method.—I shall indicate this in the case of three ordinates:

With the notation of [2], Section 4, we now only get the equations

$$x_1 + y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 + y_1 + y_2 = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2},$$

which have the parametric solution

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2} - \lambda, \quad y_1 = \lambda, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

This determines the coefficients $B = ax_1 + bx_2$ and $C = ay_1 + by_2$, and finally A from $r_0 = a + b - (A + B + C) = 0$. The resulting approximation,

$$Ay_0 + By_1 + Cy_2 = \frac{1}{2}[(a + 2\lambda b)y_0 + (1 - 2\lambda)(a + b)y_1 + (2\lambda a + b)y_2],$$

is just the formula (5) in Brun's paper.

Similar considerations, involving slightly more calculations, lead to Brun's formula (6) in the case of four non-equidistant ordinates.

REFERENCES

- [1] V. BRUN: *An application of a "carpenter's curve" to Simpson formulas*. NMT 7 (1959), pp. 20-24.
- [2] E. S. SELMER: *Numerical integration by non-equidistant ordinates*. NMT 6 (1958), pp. 97-108.

OM LINEÆRT-MONOTONE ELEMENTARKURVER

FR. FABRICIUS-BJERRE

1. Vi betragter i det følgende en plan kontinuert kurve AB , der er givet ved en parameterfremstilling $(x, y) = (f(t), g(t))$, hvor parameteren t gennemløber et lukket interval. Idet parameteren gennemløber intervallet gennem voksende værdier af t , er punkternes rækkefølge på kurven bestemt, dvs. kurven er orienteret.

En ret linie l antages at have punkter fælles med kurven AB , der i rækkefølge på kurven betegnes $P_1, P_2, \dots, P_n$. Dersom det nu for enhver ret linie l gælder, at punkterne $P_1, P_2, \dots, P_n$ også på linien l ligger i den nævnte rækkefølge, altså (også) på linien danner en monoton følge, siges kurven AB at være *lineært-monoton*. For $n=2$ er den opstillede betingelse altid opfyldt. De konvekse buer kan derfor siges at være indeholdt i samlingen af lineært-monotone kurver.

Dersom en linie har punkter P, Q og R fælles med kurven, og Q på kurven ligger mellem P og R , skal det samme gælde på linien. Er omvendt denne betingelse opfyldt for samtlige grupper af 3 punkter, der er fælles for en given kurve og en vilkårlig ret linie, vil kurven være lineært-monoton. Det er iøvrigt tilstrækkeligt at betragte samtlige grupper af 3 punkter, der følger umiddelbart efter hinanden på kurven.

Man kan give ovenstående definition en anden formulering, idet man bemærker, at samtlige vektorer $\overrightarrow{P_i P_j}$, hvor P_i kommer før P_j på kurven AB , vil være *ensrettede*, når og kun når kurven er lineært-monoton. En lineært-monoton kurve kan således siges at fastlægge en bestemt *orientering* på de linier i planen, der har to eller flere punkter fælles med kurven, og denne egenskab er karakteristisk for denne klasse kurver. Orienteringen af en linie vil i almindelighed variere kontinuert med linien, men, som vi nedenfor skal se, kan der ved visse stillinger af linien opstå diskontinuitet.

I det følgende vil vi ikke betragte helt vilkårlige kontinuerte kurver, men nøjes med at se på de såkaldte *elementarkurver*, dvs. kurver, der er sammensat af et endeligt antal konvekse buer. Videre antages kurverne

ikke at indeholde knæk, hvilket medfører, at der i hvert punkt findes en tangent, der varierer kontinuert med punktet.

Hvor to konvekse buer mødes, kan der opstå et nyt *ordinært* (konvekst) punkt eller et *singulært* punkt, dvs. et vendepunkt eller en spids af 1. eller 2. art (tornspids eller snabelspids). En lineært-monoton elementarkurve AB betegnes i det følgende kort som en *lm-kurve*.

Vi skal nedenfor finde en række egenskaber ved *lm*-kurver, af hvilke vi særlig nævner, at en elementarkurve da og kun da er en *lm*-kurve, dersom der gennem hvert ordinært punkt af kurven kan lægges en fra tangenten forskellig linie, der kun har dette punkt fælles med kurven. Herved etableres en meget nær forbindelse mellem *lm*-kurverne og de af M. Barner [1] indførte strengt-konvekse kurver.

2. Af definitionen fremgår umiddelbart

SÆTNING 2.1. *En lm-kurve har intet dobbeltpunkt.*

Specielt ser man, at en *lm*-kurve ikke kan være lukket, da punkterne A og B ikke kan falde sammen. Videre viser vi

SÆTNING 2.2. *En lm-kurve indeholder ingen spidser af 2. art.*

Lad P være en spids af 2. art, og lad en linie gennem P skære de to fra P udgående konvekse buer i punkter Q og R . På kurven vil P ligge mellem Q og R , mens P på linien vil ligge uden for liniestykket QR . Der findes da ingen spidser af 2. art.

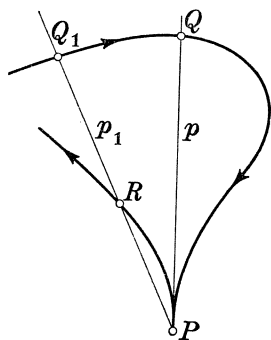


Fig. 1

Derimod kan en *lm*-kurve godt indeholde spidser af 1. art. For tangenten i en spids af 1. art gælder

SÆTNING 2.3. *Tangenten i en spids af 1. art kan ikke skære gennem kurven i et nyt punkt.*

Lad os antage, at tangenten p i spidsen P skærer gennem kurven i et punkt Q . Lad os videre antage, at Q ligger på halvtangenten i P , og at kurven gennemløbes således, at Q kommer før P (fig. 1)¹. Gennem P og et punkt R af den fra P fremadgående konvekse bue kan der, når p skærer gennem kurven i punktet Q ,

¹ Til orientering for læsere, som ikke måtte være fortrolige med mere abstrakt geometri som den her fremstillede, bemærkes, at figurerne kun tjener til at fastholde tanken, og at alle ræsonnementer er af almengyldig art og ganske uafhængige af den tilfældige figur.

Yderligere gøres opmærksom på, at kurverne på fig. 1–3 er knyttet til indirekte beviser og derfor ikke lineært-monotone. Derimod viser fig. 4–6 eksempler på *lm*-kurver.

Red.

lægges en linie p_1 nær p , der har et punkt Q_1 nær Q fælles med kurven. På kurven ligger P mellem Q_1 og R , men på linien p_1 ligger P uden for liniestykket Q_1R . På tilsvarende måde vises sætningen, dersom Q ligger på den modsatte halvlinie.

Mens spidstangenten således ikke kan skære gennem kurven i et nyt punkt, kan den godt have et eller flere punkter fælles med kurven, hvor kurven i omegnen af hvert punkt ligger helt på den ene side af linien. Spidstangenten er da *støttelinie* til kurven i disse punkter.

3. Lad et punkt P gennemløbe en lm -kurve AB fra A mod B . Vi kan da vise

SÆTNING 3.1. *Den positive halvtangent i et ordinært punkt P af en lm -kurve AB har ikke punkter fælles med den gennemløbne bue AP .*

Lad P være et ordinært (konvekst) punkt af kurven AB , og Q det første punkt af buen PA , regnet fra P , i hvilket den positive halvtangent p^+ i punktet P møder denne bue (fig. 2). Gennem Q og et punkt R nær P af buen QP kan der lægges en linie, der indeholder et punkt R_1 nær P af buen PB . På kurven ligger R mellem Q og R_1 , men på linien vil R ligge uden for liniestykket QR_1 , idet retningen fra R til R_1 er den samme som retningen fra R til Q , da begge retninger nærmer sig retningen af halvtangenten p^+ . Heraf følger sætningen.

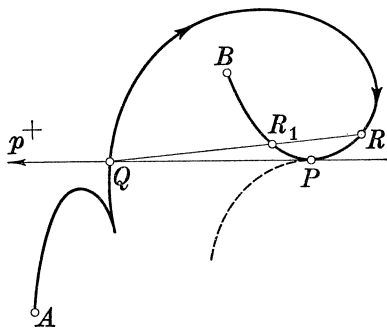


Fig. 2

For den negative halvtangent i P gælder naturligvis tilsvarende, at den ikke har punkter fælles med buen PB .

Dersom der er *vendepunkt* i P , kan halvtangenten p^+ have punktet Q fælles med buen AP , men linien kan ikke skære gennem kurven. Thi i så fald ville en positiv halvtangent i et punkt af buen QP nær P have et punkt fælles med buen AQ . Der gælder altså

SÆTNING 3.2. *Den positive halvtangent i et vendepunkt P af en lm -kurve AB vil enten ikke have punkter fælles med den gennemløbne bue AP eller være støttelinie i et eller flere punkter af denne bue.*

Hvis buen QP , som på fig. 2, kun indeholder ordinære punkter, er den en konveks bue og åbenbart den »største« bue med luttet ordinære punkter, der kan være del af en lm -kurve, idet en forlængelse af buen ud over P

eller Q vil medføre, at kurvens lineære monotonitet forsvinder. Hermed er da vist

SÆTNING 3.3. *Enhver bue, der på en lm -kurve forbinder to på hinanden følgende singulære punkter, er konveks.*

En lm -kurve indeholder således ikke spiraler.

I sætningerne 3.1 og 3.2 har vi udelukkende udtalt os om den positive halvtangent i et punkt P i forbindelse med buen AP . Med hensyn til den ikke gennemløbne bue BP gælder, at den positive halvtangent i P i almindelighed vil skære denne bue i en række punkter, hvad enten P er et ordinært punkt eller et vendepunkt. Tilsvarende gælder for den negative halvtangent i P i forbindelse med buen AP (sml. fig. 4).

Vi har i 1 nævnt, at en lm -kurve frembringer en orientering på de af planens linier, der har to eller flere punkter fælles med kurven, og at denne orientering i almindelighed varierer kontinuert med linien. Det kan bemærkes, at der vil opstå en *diskontinuitet* i de tilfælde, hvor den positive halvtangent i et vendepunkt P er støttelinie for buen AP , eller hvor tangenten i en spids tillige er støttelinie for kurven.

4. Vi vender os nu til, hvad man kan betegne som *hovedsætningen* vedrørende lineært-monotone kurver, nemlig

SÆTNING 4.1. *En elementarkurve AB er da og kun da lineært-monoton, dersom der gennem hvert af kurvens ordinære punkter kan lægges en fra tangenten forskellig linie, der kun har dette punkt fælles med kurven.*

Vi viser først, at betingelsen er tilstrækkelig. Lad en vilkårlig linie l have 3 punkter P , Q og R fælles med kurven, således, at punkterne på

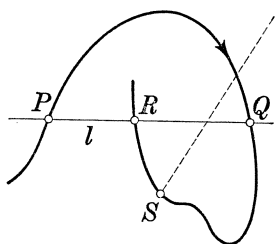


Fig. 3

kurven følger umiddelbart efter hinanden. Buerne PQ og QR har da kun endepunkterne fælles med l og danner med liniestykkerne PQ , henholdsvis QR lukkede kontinuerte kurver uden dobbeltpunkt. Dersom nu rækkefølgen af de 3 punkter P , Q og R ikke er den samme på linien som på kurven, vil f. eks. punktet R på linien ligge mellem P og Q (fig. 3).

Lad nu S være et ordinært punkt på buen QR . En fra tangenten i S forskellig ret linie vil enten have et punkt fælles med liniestykket QR og dermed med buen PQ eller (mindst) et punkt foruden S fælles med buen QR . Når den givne betingelse er opfyldt, kan R altså ikke ligge mellem P og Q . Analogt kan heller ikke P ligge mellem R og Q , dvs. på kurven som på linien ligger Q mellem P og R . Kurven er da lineært-monoton.

Lad derefter (fig. 4) P være et ordinært punkt på en lm -kurve AB . Vi vil vise, at der gennem P kan lægges en linie s , der kun har P fælles med kurven. Kurven AB antages i omegnen af P at ligge over tangenten p .

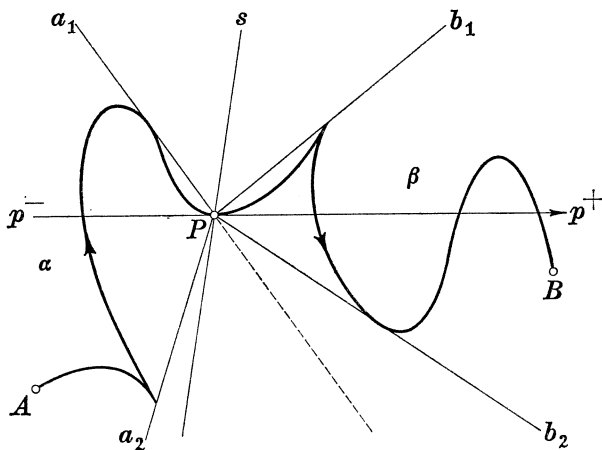


Fig. 4

Udgående fra P lægges alle de halvlinier, der foruden P har (mindst) et punkt fælles med buen AP . Disse halvlinier udfylder et område α , der ikke kan indeholde to modsat rettede halvlinier. Thi findes der på hver af de modsat rettede halvlinier et punkt af buen AP , vil punktet P ligge mellem disse punkter på linien, men ikke på kurven.

Området α vil da enten være en halvplan (hvor højst den ene begrænsende halvlinie hører med) eller udfylde en konveks vinkel. Vi vil vise, at den første mulighed ikke kan indtræffe.

Da kurven AB i omegnen af P ligger over tangenten p , vil der i α findes halvlinier over p . Den »øvre« begrænsningshalvlinie for disse halvlinier betegnes a_1 . Denne linie vil indeholde mindst et punkt af buen AP og kan da ifølge sætning 3.1 ikke falde sammen med den positive halvtangent p^+ i P . Den anden (nedre) begrænsningshalvlinie a_2 for området vil ligge under tangenten p eller falde i den negative halvtangent p^- , eftersom buen AP har punkter under p eller ikke. I første tilfælde kan a_2 ikke være modsat rettet a_1 , da a_2 indeholder et punkt af buen AP og dermed tilhører området α , og i andet tilfælde kan a_2 heller ikke være modsat rettet a_1 , da a_1 ikke kan falde i p^+ . Buen AP vil derfor altid være indesluttet i en konveks vinkel (a_1, a_2).

På tilsvarende måde vil alle de halvlinier udgående fra P , der foruden P har (mindst) et punkt fælles med buen BP , udfylde et område β , der

begrænses af halvlinier b_1 og b_2 , hvor b_1 ligger over p , mens b_2 ligger under p eller falder i p^+ . Buen BP er således indesluttet i den konvekse vinkel (b_1, b_2) .

De to områder α og β kan ikke have nogen halvlinie fælles. Thi i så fald ville denne indeholde et punkt af buen AP og et punkt af buen BP , hvor P ligger mellem de to punkter på kurven, men ikke på linien. Heraf følger, at halvlinierne a_1 og b_1 ikke kan falde sammen. Tillige ses, at også a_2 og b_2 er forskellige halvlinier. Thi de kan ikke falde sammen på en linie forskellig fra p , og på grund af konveksiteten af områderne α og β kan a_2 ikke falde i p^+ eller b_2 i p^- . De 4 forskellige begrænsningshalvlinier ligger da i rækkefølgen a_1, a_2, b_2, b_1 , hvor (a_1, a_2) og (b_2, b_1) er konvekse vinkler.

Det er herefter let at se, at man gennem P kan lægge en linie s , der kun har punktet P fælles med kurven AB . En af de vinkler, som halvlinierne a_1 og b_2 danner, vil være $\leq \pi$. Lad det være den vinkel, der indeholder halvlinien b_1 . Buerne AP og BP ligger da på hver sin side af den linie, der indeholder a_1 , således at buen AP har (mindst) et punkt fælles med halvlinien a_1 , mens buen BP muligvis har punkter fælles med den modsatte halvlinie.

Der vil da findes en linie s gennem P nær a_1 , der ligger i vinkelrummene (a_1, b_1) og (a_2, b_2) , og som kun har P fælles med kurven AB . Hermed er sætning 4.1 bevist.

I den nævnte afhandling har M. Barner kaldt en kurve *strengt-konveks* i et punkt P , dersom der gennem P kan lægges en linie, forskellig fra tangenten i P , der kun har punktet P fælles med kurven. Med anvendelse af dette udtryk kan sætning 4.1 gives den kortere formulering:

SÆTNING 4.1a. *En elementarkurve AB er da og kun da lineært-monoton, dersom den i hvert ordinært punkt er strengt-konveks.*

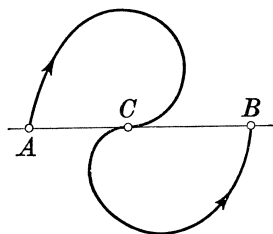


Fig. 5

Vi bemærker, at en lm -kurve ikke behøver at være strengt-konveks i et vendepunkt. Betragter vi således en kurve AB (fig. 5) bestående af en konveks bue AC , hvor tangenten i C går gennem A , og den symmetriske bue BC med hensyn til C , vil denne kurve åbenbart være lineært-monoton. Men der kan ikke gennem vendepunktet C lægges nogen ret linie, der kun har punktet C fælles med

kurven. For den forelagte kurve AB vil den positive halvtangent i C gå gennem punktet A og den negative gennem punktet B . Man kan vise, at dersom det for et vendepunkt P på en lm -kurve AB gælder, at den

positive, henholdsvis negative halvtangent i P ikke indeholder punkter af buen AP , henholdsvis BP , vil kurven også være strengt-konveks i dette punkt.

En kurve, der fremstilles ved ligningen $y = F(x)$, hvor $F(x)$ er en kontinuert funktion af x , der er defineret i et lukket interval, er lineært-monoton. Den er tillige strengt-konveks overalt, idet man gennem hvert punkt P af kurven kan lægge en linie s , nemlig linien parallel med y -aksen, der kun har punktet P fælles med kurven. De her betragtede lineært-monotone kurver kan da anses som generalisationer af de grafiske billeder af kontinuerte funktioner, hvor den lineære monotonitet er bevaret, og hvor også den strenge konveksitet i almindelighed er opretholdt, idet linierne s dog ikke bevarer deres retning, når P gennemløber kurven.

5. Med anvendelse af sætning 4.1 beviser vi derefter

SÆTNING 5.1. *Dersom en linie gennem et ordinært punkt P af en lm -kurve uden spidser skærer kurven i n punkter, går der fra P mindst $n - 2$ tangenter til kurven.*

Lad linie l skære kurven AB i n punkter, hvoraf det ene er det ordinære punkt P , og lad s være en linie gennem P , der kun har punktet P fælles med kurven. Drejer man en linie gennem P fra stillingen l til stillingen s gennem et af vinkelrummene (l, s) , mistes $n - 1$ fælles punkter med kurven. Det samme antal mistes, dersom man drejer gennem det komplementære vinkelrum. Af de $2n - 2$ punkter vil de to være endepunkterne A og B , og de resterende $2n - 4$ punkter vil mistes parvis, derved at den variable linie passerer en tangent gennem P . Der går da mindst $n - 2$ tangenter fra P til kurven. Fra et passende valgt punkt uden for kurven nær P går der yderligere to tangenter (nær tangenten i P) til kurven, således at der fra dette punkt kan lægges mindst n tangenter til kurven.

Vi viser derefter

SÆTNING 5.2. *Dersom en linie skærer en lm -kurve uden spidser i n punkter, indeholder kurven mindst $n - 2$ vendepunkter.*

Lad linien l skære kurven AB i punkterne $P_1, P_2, \dots, P_n$ (fig. 6). I et punkt M_1 på buen P_1P_2 , hvor afstanden til linien l er størst, vil tangenten til kurven være parallel med l ; vi vil vise, at den positive halvtangent i M_1 er ensrettet med vektoren $\vec{P_1P_2}$. I modsat fald ville nemlig buen M_1P_2 gå ind i det område, der begrænses af buen P_1M_1 og de halvlinier, udgående fra P_1 og M_1 , der er modsat rettede $\vec{P_1P_2}$. Punktet P_2 ligger uden for dette område, og buen M_1P_2 måtte da enten skære de nævnte halvlinier eller buen P_1M_1 , hvilket er udelukket.

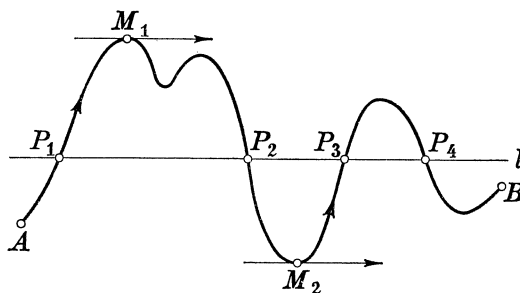


Fig. 6

Tilsvarende vil den positive halvtangent i et punkt M_2 af buen P_2P_3 , hvor afstanden til l er størst, være ensrettet med vektoren $\vec{P_2P_3}$ og dermed med $\vec{P_1P_2}$ og med den positive halvtangent i M_1 . Gennemløbes nu kurven AB fra P_1 til P_3 , vil den ligge på modsatte sider af tangenterne i punkterne M_1 og M_2 . Buen M_1M_2 kan derfor ikke indeholde lutter ordinære punkter, dvs. der findes mindst et vendepunkt på buen M_1M_2 . Da der på de $n-1$ buer $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ findes $n-1$ punkter $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$, fremkommer ialt mindst $n-2$ vendepunkter på kurven.

Sætningerne 5.1 og 5.2 såvel som sætning 3.3 er for kurver, der er strengt-konvekse i ethvert punkt, fremsat i en note af O. Haupt [2], der tillige omtaler tilsvarende sætninger for kurver i rum af 3 eller flere dimensioner.

Det bemærkes, at man ved beviset for sætning 5.2 ikke har udnyttet, at kurven er lineært-monoton, men kun, at linien l har punkter fælles med kurven, der ligger i samme rækkefølge på kurven og på linien (altså lineær monotonitet for linien l alene). De enkelte buer $P_1P_2, P_2P_3, \dots$ behøver ikke at være lineært-monotone, men må blot ikke indeholde dobbelpunkter. Der gælder derfor den mere almindelige

SÆTNING 5.3. *Dersom en elementarkurve uden spidser og dobbelpunkter skæres af en ret linie i n punkter, hvis rækkefølge er den samme på kurven som på linien, vil kurven indeholde mindst $n-2$ vendepunkter.*

Det kan vises, at dersom den linie l , der optræder i sætningerne 5.1, 5.2 og 5.3, berører kurven i et eller flere af de fælles punkter, vil det angivne minimale tal $n-2$ ikke blive formindsket, men i almindelighed vokse.

6. På forskellig måde kan man generalisere de her foretagne undersøgelser over lineært-monotone elementarkurver i den sædvanlige (affine)

plan. Man kan indføre lineært-monotone kurver i den *projektive* plan, og man kan betragte kurver i *rum* af 3 eller flere dimensioner. I det sædvanlige tredimensionale rum skal en kurve kaldes lineært-monoton, dersom det for en vilkårlig plan gælder, at når planen har en række punkter fælles med kurven, og disse tages i rækkefølge på kurven, skal punkterne i samme rækkefølge danne en *monoton* følge i planen, dvs. kunne være vinkelspidser i en *konveks polygon*.

Svarende til sætning 4.1 for plane *lm*-kurver gælder for en lineært-monoton rumkurve, at man i almindelighed gennem to vilkårlige af dens punkter kan lægge en plan, der kun har disse punkter fælles med kurven (streng konveksitet i rummet), ligesom omvendt en kurve, der har denne egenskab, vil være lineært-monoton.

Ved senere lejlighed skal vi gå nærmere ind på de her nævnte generalisationer.

LITTERATUR

- [1] M. BARNER: *Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegenden bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven*. Abh. Math. Sem. Hamburg 20 (1956), pp. 196–215.
- [2] O. HAUPT: *Streng-konvexe Bogen und Kurven in der direkten Infinitesimalgeometrie*. Arch. der Math. 9 (1958), pp. 110–116.

BOKMELDINGER

ARNOLD BAUR — HANS LODE — ARNO ALBRECHT: *Anschauliche Mathematik*. I. Teil: Geometrie. Ferdinand Hirt in Kiel, 1958. 256 S., 178 Fig. DM 14.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 170.)

Præsidenten for den internationale Matematikundervisningskommission H. Behnke introducerer denne bog med at hilse den velkommen som et bidrag til anlæggelse af nye synspunkter indenfor matematikundervisningen. I et forord af udgiveren, dr. K. M. Hoffmann, betegnes bogen som en ny vej for matematikundervisningen i gymnasier. I forordet siges endvidere, at man bevidst har viet denne første del af serien til geometrien, fordi man anser den for den vigtigste del af matematikundervisningen og som en modvægt mod den om sig gribende algebra og analyse.

Bogens emner er dog traditionelle. Den er inddelt i tre afsnit: Affine afbildninger, Differentialgeometri, Det apolloniske problem og indførelse i ikke-euklidisk geometri. Det er åbenbart i måden at behandle disse emner, man skal søge de nye synspunkter.

I første afsnit tages udgangspunkt i de almene begreber afbildning, invarians og gruppe i overensstemmelse med Kleins Erlangerprogram. Udfra dette synspunkt behandles gruppen af flytninger med undergrupper, gruppen af ligedannethedstransformationer og gruppen af affine afbildninger, dels i planen, dels i rummet. Flytningsgruppen omtales udførligere end sædvanligt. Der anvendes konsekvent vektorregning (som forudsættes bekendt). Desuden lægges der vægt på anskuelighed, og teksten ledsages af figurer, der fremhæver det væsentlige. Således fås en affin afbildning med fast akse som grænsetilfælde af en parallelprojektion mellem to planer, hvis vinkel går mod 0° eller 180° . Affine egenskaber ved ellipse og ellipsoide er medtaget. Under udartede affine afbildninger bevises Pohlkes sætning.

I andet afsnit behandles i samme stil den sædvanlige teori for kurver i planen og i rummet (herunder hastighed og acceleration) til Frenets formler; i dette afsnit findes mange opgaver.

I tredje afsnit løses det apolloniske problem ved et stykke ren cirkelgeometri (med mange konstruksionsopgaver). Løsningerne tydes simplere som konstruksjoner i cirkelmodeller af en euklidisk, en hyperbolsk eller en elliptisk geometri, og herved indføres de to sidstnævnte geometriformer.

Bogen tænkes senere suppleret med projektive afbildninger og fladeteori. En kommende anden del vil omhandle algebra og analyse, en tredje del analytik (analytisk kurvegeometri).

Poul Neerup

HENRI LEBESGUE: *Notices d'histoire des mathématiques*. (Monographies de l'Enseignement Mathématique, No. 4.) Institut de Mathématiques, Université, Genève, 1958. 116 pp. Fr. suisses 16.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 41.)

I 1920 hadde jeg den store glede å høre en del forelesninger av Henri Lebesgue i Paris. Han talte om Poncelets geometri. Jeg tror neppe jeg har hørt mere spirituelle forelesninger. Hans levende interesse for den historiske side av matematikken var åpenbar.

Det får man også et sterkt inntrykk av når man leser dette heftet. Formen er den samme spirituelle som gjør det til en sann fornøyelse å lese heftet fra ende til annen.

I et brev til utgiveren, Mlle Félix, har han gitt uttrykk for sin historiske interesse: »Mais les mathématiques en tant que résultats m'intéressent de moins en moins; ce qui me passionne, c'est le travail de pensée humaine qu'exige une recherche mathématique.« Og et annet sted skriver han: »Det gjelder å erkjenne det nære slektskap som forener undersøkelser utført med mere enn tyve århundrers avstand.«

Lebesgue skyr ikke å fortelle anekdoter og han går nøye inn på familieforhold.

Det største kapitel er viet Camille Jordan. Vi får høre at han var en nevø av den berømte maler Puvis de Chavannes. Jordan får en meget rosende omtale. Lebesgue har bare en liten innvending å gjøre. Han synes han går litt for vidt når det gjelder omsorgen for tallregninger, som om de algebraiske bestemmelser han behandler i sin *Traité des substitutions* hadde noen praktisk betydning! Jordan oppteller således oppløselige grupper inntil graden en million, og han gjør unnskyldning for at utregningen blir noe penibel når det tall man opererer med har mere enn en milliard sifre!

I kapitlet om Vandermonde, som var medlem av Jakobinerklubben, nevner Lebesgue at han er blitt mest berømt for den determinant som bærer hans navn, »qui n'est pas de lui! Det skyldes en misforståelse av

Vandermondes betegnelse at determinantsetningen er blitt tillagt ham. Men forøvrig er Vandermonde i høy grad blitt miskjent, hevder Lebesgue. Særlig bebreider han Gauss at han ikke har sitert Vandermonde. Lebesgue mener det kommer av at den setning det gjelder ikke var *bevist* av Vandermonde. Lebesgue knytter følgende bemerkning til dette: »Aldri har en oppdagelse vært gjort i matematikken ved en utfoldelse av deduktiv logikk; den skyldes et skapende arbeid av fantasien som oppbygger det som den tror å være sannheten, noen ganger støttet av analogier, noen ganger ved en ideell estetikk, men som slett ikke bygger på en logisk grunnvoll.»

Et stort kapitel er viet G. Humbert som var Lebesgues forgjenger ved Collège de France. Han blir hyldet som representant for geometrien, »den mest artistiske av de matematiske vitenskaper«.

Om Roberval (Lebesgues »compatriote de l'Oise«!) får vi høre en morsom anekdote: man fortalte ham en tragisk begivenhet, hvortil han svarte »qu'est-ce que cela prouve?« Lebesgue tilføyer at denne setning — som kanskje aldri har vært uttalt — har vært gjenfortalt om igjen og om igjen.

Om Ramus får vi høre at han hadde det enestående mot — i en tid hvor Aristoteles var den store profet — å utforme tesen »alt som Aristoteles har sagt er galt«. Om Niels Nielsens bok *Géomètres français sous la Révolution* (»un livre très curieux«) skriver Lebesgue: »Malgré tout ce qu'on peut dire contre ce livre, il reste prodigieusement captivant, à mon avis, si, au lieu de le lire, on rêve à son sujet.«

Foruten de allerede nevnte biografier inneholder heftet kortere notiser om Vieta, R.-L. Baire og A.-M. Ampère og noen få brev fra Lebesgue.

Viggo Brun

PAUL LORENZEN: *Formale Logik*. (Sammlung Götschen 1176/1176a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 165 S. DM 4.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT 6 (1958), s. 171.)

Dette er en kort, konsis — ikke alltid lettlest — innføring i den matematiske logikk. Den vil gi rik belønning til den nybegynner som arbeider seg gjennom boken, for i motsetning til lærebøker flest, som brer trivialiteter utover hundrevis av sider, er dette en bok som på vel halvannet hundre leder frem til så fundamentale resultater som Gödels fullstendighetsteorem og Churchs uavgjørbarhetssats for førsteordens predikat-kalkyl.

Den systematiske oppbygning begynner med tredje kapitel, »Kalküle der Junktorenlogik« (som tyskere har for vane, innfører Lorenzen nye

navn og skrivemåter, hvor det syns mulig: Junktorenlogikk står for utsagnskalkylen). Sentralt er her avsnittet om »Kalkülisierung«, hvor forfatterens »operative« oppfatning legges til grunn. Her skal ikke diskuteres pro et con operativistens credo, men det bør ikke unnlates å peke på at kalkyliseringen, hvis formål det er å befri den formale logikk fra den tilsynelatende sirkelgang at logikkens formalisering forutsetter logikk, bare fører vanskelighetene over på et annet område, kalkylenes anvendelse som logikkfragmenter innen det språk vi bruker og det dermed hørende relevansproblem av de formale manipulasjoner for de intuitive gitte problem.

Det synes være få trykkfeil: formlene (5.2) og (5.3) på sidene 45–46 kan rettes av en nybegynner, på side 109, linje 12 står en eksistenskvantor i stedet for en allkvantor, og på side 129 er referensene G3 og G4 byttet om.

Som innføring er boken å anbefale, den viser bl. a. at matematisk logikk er noe mer enn akkurat det å konstruere sannhetsverditabeller!

Jens Erik Fenstad

MOTTATTE BØKER

Ewald Burger: *Einführung in die Theorie der Spiele*. (Mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftslehre und Soziologie.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1959. 169 S. Ganzl. DM 28.00.

Vorwort 5–6 * Der allgemeine Spielbegriff 9–28 * Nicht-kooperative Theorie allgemeiner Spiele 29–57 * Zweipersonen-Nullsummen-Spiele 58–128 * Kooperative Theorie allgemeiner Spiele 129–161 * Anhang 162–165 * Literaturverzeichnis 166–167 * Sachverzeichnis 168–169.

E. U. Condon — Hugh Odishaw: *Handbook of physics*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1958. 26 + 1469 pp. sh. 194/–.

Part 1. *Mathematics*: Franz L. Alt: Arithmetic 4–9 * Olga Taussky: Algebra 10–21 * John Todd: Analysis 22–58 * Olga Taussky: Ordinary differential equations 59–65 * Fritz John: Partial differential equations 66–89 * M. Abramowitz: Integral equations 90–94 * Olga Taussky: Operators 95–96 * A. J. Hoffman: Geometry 97–102 * E. I. Condon: Vector analysis 103–110 * C. Lanczos: Tensor calculus 111–122 * C. B. Tompkins: Calculus of variations 123–133 * Churchill Eisenhart — Marvin Zelen: Elements of probability 134–164 * W. J. Youden: Statistical design of experiments 165–168 * Part 2. *Mechanics of particles and rigid bodies* 69 pp. * Part 3. *Mechanics of deformable bodies* 112 pp. * Part 4. *Electricity and magnetism* 159 pp. * Part 5. *Heat and thermodynamics* 159 pp. * Part 6. *Optics* 150 pp. * Part 7. *Atomic physics* 143 pp. * Part 8. *The solid state* 108 pp. * Part 9. *Nuclear physics* 245 pp.

Paul H. Daus — William M. Whyburn: *Introduction to mathematical analysis*. With applications to problems of economics. Addison-Wesley Publ. Co., Reading (Mass.), 1958. 8 + 244 pp., 114 fig. \$ 6.50.

Applications of graphical analysis 1-34 * Introduction to differential calculus 35-78 * Applications of differential calculus 79-105 * Introduction to integration 106-123 * Introduction to partial differentiation 124-147 * Maxima and minima problems 148-177 * Introduction to curve fitting 178-201 * Answers to problems 203-217 * Tables 223-238 * Index 239-244.

Nelson Dunford — Jacob T. Schwartz: *Linear operators*. Part I: General theory. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 7.) Interscience Publ., New York, London, 1958. 14 + 858 pp. \$ 23.00.

Set-theoretic preliminaries 1-9 * Topological preliminaries 10-33 * Algebraic preliminaries 34-48 * Three basic principles of linear analysis 49-94 * Integration and set functions 95-235 * Special spaces 237-407 * Convex sets and weak topologies 409-474 * Operators and their adjoints 475-554 * General spectral theory 555-612 * Applications 613-730 * References 731-826 * Notation index 827-828 * Author index 829-835 * Subject index 837-858.

Fr. Fabricius-Bjerre: *Lærebog i geometri, I*. 3. ændrede udgave. Jul. Gjellerups forlag, København, 1958. 255 s., 64 fig. D. kr. 40.00.

Determinanter 1-18 * Lineære ligninger 19-43 * Vektorregning 44-73 * Ret linie og plan 74-99 * Vektorer i det n -dimensionale rum 100-116 * Matrixregning 117-143 * Geometriske anvendelser af lineære vektorfunktioner 144-179 * Keglesnit 180-200 * Keglesnitsflader 201-238 * Indledning til analytisk geometri i det n -dimensionale rum 239-250 * Litteraturfortegnelse 251 * Register 253-255.

D. Ter Haar: *Introduction to the physics of many-body systems*. (Interscience tracts on physics and mathematics 5.) Interscience Publ., New York, London, 1958. 8 + 127 pp. Paper bound \$ 1.95, hard bound \$ 3.85.

Introduction 1-8 * The Hartree-Fock approximation 11-15 * The statistical model of the atom 16-22 * The nuclear many-body problem 23-27 * Quasi-particles in solids 28-45 * General methods 49-80 * Sound waves 81-87 * Plasma oscillations 88-95 * Collective behaviour of nuclei 96-102 * Liquid helium 103-109 * Appendices 110-119 * References 120-125 * Index 127.

D. Hilbert — W. Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Vierte Auflage. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 27.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. 8 + 188 S. DM 33.00, Ganzl. DM 36.60.

Der Aussagenkalkül 3-42 * Der Klassenkalkül 43-64 * Der engere Prädikatenkalkül 65-140 * Der erweiterte Prädikatenkalkül 141-182 * Literaturverzeichnis 183-186 * Namen- und Sachverzeichnis 186-188.

Wenceslas S. Jardetzky: *Theories of figures of celestial bodies*. Inter-science Publ., New York, London, 1958. 11 + 186 pp. \$ 6.50.

Introduction 4–26 * Figures of equilibrium; inverse method 27–40 * Method of Poincaré 41–63 * Method of Liapounov 65–86 * Lichtenstein's investigations 87–98 * Method of Wavre 99–106 * Zonal rotation 109–135 * Varying figures 137–141 * Systems composed of fluid and rigid parts 143–152 * Fluid mass and centers of attraction 153–158 * Figures of compressible masses 159–171 * Bibliography 173–182 * Index 183–186.

Henri Lebesgue: *Notices d'histoire des mathématiques*. (Monographies de l'Enseignement Mathématique, No. 4.) Institut de Mathématiques, Université, Genève, 1958. 116 pp. Fr. suisses 16.00.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 37.)

Introduction, de Mlle L. Félix 7–9 * Commentaires sur l'œuvre de F. Viète 10–17 * L'œuvre mathématique de Vandermonde 18–39 * Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan 40–65 * Notice sur René-Louis Baire 66–68 * Un travail mathématique de André-Marie Ampère 69–72 * Les professeurs de mathématiques du Collège de France: Humbert et Jordan, Roberval et Ramus 73–101 * Extraits de la correspondance de H. Lebesgue: Souvenir, de Th. Leconte 102–103 * Lettres à Mlle Budon — à M. Itard — à Mlle Félix 104–116.

Herbert Lugowski — Hanns Joachim Weinert: *Grundzüge der Algebra, II*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 10.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1958. 250 S. Gebunden DM 11.00.

Grundbegriffe der Ring- und Körpertheorie 6–44 * Ringkonstruktionen, homomorphe Abbildungen 45–91 * Algebraische Strukturen mit Operatorenbereichen 92–125 * Teilbarkeitslehre 126–211 * Lösungen der Aufgaben 212–248 * Sachverzeichnis 249–250.

May Hickey Maria: *The structure of arithmetic and algebra*. John Wiley & Sons, New York, London, 1958. 14 + 294 pp. \$ 5.90.

Mathematics and the axiomatic method 1–15 * Addition and multiplication of real numbers 16–24 * The inverse operation subtraction 25–36 * The inverse operation division 37–55 * Indirect problem of computation 56–62 * The order relation 63–73 * Formation of integers and rational numbers 74–87 * The natural numbers 88–102 * Generalized sums and products 103–129 * Generalizing the distributive law 130–147 * Properties of integers 148–178 * The continuity property and irrational numbers 179–197 * The quadratic equation 198–215 * Representation of real numbers 216–245 * Number notation 246–280 * Glossary of alphabetical references 281–284 * Bibliography 285 * Index 287–294.

I. I. Priwalow: *Einführung in die Funktionentheorie, I*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 21.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1958. 4 + 163 S., 71 Fig. DM 7.30.

Einführung 1–6 * *Komplexe Zahlen*: Komplexe Zahlen und Operationen mit diesen 7–11 * Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen. Sätze über Betrag und Argument 11–16 * Grenzwerte 16–24 * Die Riemannsche Zahlenkugel. Der unendlich ferne Punkt 24–29 * Reihen 29–38 * Übungen 39–40 * *Die komplexe Veränderliche und Funktionen einer komplexen Veränderlichen*: Funktionen einer komplexen Veränderlichen 40–52 * Funktionenreihen 52–57 * Potenzreihen 57–71 * Differentiation der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Elementare Funktionen 71–104 * Konforme Abbildung 104–114 * Übungen 114–117 * *Lineare und andere einfachste Transformationen*: Die lineare Funktion 118–140 * Der Zusammenhang zwischen den linearen Transformationen und der Lobatschewskischen Geometrie 140–154 * Einige elementare Funktionen und die durch diese vermittelten Abbildungen 154–158 * Übungen 158–159 * Sachverzeichnis 160–163.

Structures algébriques et structures topologiques. (Monographies de l'Enseignement Mathématique, No. 7.) Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, et Institut de Mathématiques, Université, Genève, 1958. 198 pp. Fr. suisses 20.00.

H. Cartan: Structures algébriques 5–15 * P. Dubreil: Anneaux, congruences, idéaux 17–27 * G. Choquet: Espaces vectoriels, formes et équations linéaires 29–41 * A. Lichnerowicz: Applications linéaires et matrices 43–63 * P. Lelong: Formes quadratiques et hermitiennes 65–79 * L. Lesieur: Groupes classiques 81–91 * A. Revuz: Espaces projectifs 93–99 * G. Choquet: La droite numérique 101–115 * A. Revuz: Espaces euclidiens et espaces métriques 117–125 * G. Choquet: Notions liées à la structure d'espace métrique 127–136 * J. Dixmier: Espaces de fonctions et modes de convergence 137–143 * Ch. Pisot: Notions de topologie générale 145–149 * Ch. Pisot: Espaces compacts et localement compacts 149–154 * R. Godement: Groupes et espaces vectoriels topologiques 155–161 * H. Cartan: Sur la notion de dimension 163–174 * J.-P. Serre: Revêtements, groupe fondamental 175–186 * L. Schwartz: Éléments d'homologie 187–195 * Index alphabétique 196–198.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 166–171 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 15. mai 1959.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

166. Fibonaccifølgen $a_0, a_1, a_2, \dots$ defineres ved

$$a_0 = 1, a_1 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n = 2, 3, \dots$$

Vis, at

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{Arctg} \frac{1}{a_{2n}} + \operatorname{Arctg} \frac{1}{a_{2N+1}} = \frac{\pi}{4}, N = 1, 2, 3, \dots,$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{a_{2n}} = \frac{\pi}{4}.$$

(Sml. V. Bruns artikkel i NMT 5 (1957), s. 170–71.)

Asmus L. Schmidt

167. Visa, att talen c_{rs} i uppgift 161 för $q=1$ satisfiera formeln

$$\sum_{s=1}^n (n-1) \dots (n-s+1) c_{rs} = n^r,$$

där n är godtyckligt. Härav följer, att $c_{r2}, \dots, c_{rr}$ är delbara med $r+1$, om detta är primtal.

Gerhard Arfwedson

168. Talen c_{rs} i uppgift 161 ha för konstant r ett maximum c_{rm} . För $q=0$ gäller att

$$\log c_{rm} \sim r \log 2,$$

varmed menas att kvoten går mot 1. Bevisa i fallet $q>0$ att

$$\log c_{rm} \sim qr \log r.$$

Gerhard Arfwedson

169. Når m er et naturlig tall, skal $\nu(m)$ være eksponenten for den høyeste potens av 2 som går opp i m . Vis at rekken

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu(m)+1}{m} \sin(m \cdot 2\pi x)$$

konvergerer for alle reelle x .

R. Tambs Lyche

170. Låt z vara ett komplext tal och x dess reella del. Visa, att

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| \leq \frac{e^x - 1}{x}.$$

Gerhard Arfwedson

171. Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-2n} \prod_{r=1}^n (x + 2^r)^{1/2^{n-r}} = \frac{1}{4},$$

uavhengig av x .

R. Tambs Lyche

LØSNINGER

155. Der er givet en oval (lukket konveks kurve) k og en variabel trekant PQR , hvis sider har faste retninger, og for hvilken vinkelspidserne P og Q ligger på ovalen k . Idet P (og dermed Q) gjennomløber k , vil vinkelspidsen R frembringe en lukket kurve k' .

Vis, at dersom k' er en ellipse, vil den givne oval k selv være en ellipse.

Fr. Fabricius-Bjerre

Løsning: Er S det punktet på k' som R ville befinne seg i om P og Q byttet plass, blir $PRQS$ et parallellogram av bestemt form og retning. Er k' en ellipse, faller det felles midtpunktet av PQ og RS på en diameter i k' , altså på en rett linje. Dermed blir mengden av korder PQ i k en affin avbildning av mengden av korder RS i k' , og av dette følger at k er en ellipse.

H. Killingbergtrø

Også løst av Gerhard Arfwedson, Johs. Lohne og K. V. Rask.

156. Lad $a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ være Fibonacci's talfølge:

$$a_{-1} = a_0 = 1 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{for} \quad n \geq 0.$$

Bevis for $n \geq 0$, at

$$(*) \quad a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \sum_{m=\left[\frac{n}{2}\right]}^n \binom{m}{n-m}.$$

Lad derefter p være et naturligt tal. Vi definerer talfølgen $b_{-p}, \dots, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ ved

$$b_n = 1 \quad \text{for } n \leq 0 \quad \text{og} \quad b_n = b_{n-p-1} + b_{n-p} \quad \text{for } n > 0.$$

Generaliser da formelen (*), således at man får $b_{n+1} - b_n$, $n \geq 0$, udtrykt som en sum af højst $\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p+1}\right] + 1$ binomialkoefficienter.

Ove J. Munch

Løsning: Sätt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} z^n,$$

$$\text{varav } f - zf - z^2 f = a_{-1} + a_0 z - a_{-1} z = 1,$$

$$f(z) = \frac{1}{1 - z(1+z)} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} z^{r+s},$$

d. v. s.

$$a_{n-1} = \sum_{r+s=n} \binom{r}{s} = \sum_{m=\left[\frac{n}{2}\right]}^n \binom{m}{n-m}.$$

I allmänna fallet sättes $c_n = b_{n+1} - b_n$,

$$c_n = c_{n-p-1} + c_{n-p}, \quad n > 0;$$

$$c_n = 0 \quad \text{om } n < 0; \quad c_0 = 1.$$

Sätt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-p} z^n,$$

varav

$$f - z^p f - z^{p+1} f = c_{-p} + c_{-p+1} z + \dots + c_{-1} z^{p-1} + c_0 z^p - c_{-p} z^p = z^p,$$

$$f(z) = \frac{z^p}{1 - z^p(1+z)} = z^p \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} z^{rp+s},$$

d. v. s.

$$c_n = \sum_{\substack{rp+s=n \\ s \leq r}} \binom{r}{s},$$

vilken summa innehåller högst $\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p+1}\right] + 1$ termer.

S. Eriksson

Også löst av H. Killingbergtrø og Johs. Lohne.

157. Lad B_α være en bue med længden 2α på enhedscirklen. Vi sætter $P(z) \in H_n$, hvis $P(z)$ er et n -tegradspolynomium med hovedkoefficient 1. Idet

$$E_{n,\alpha} = \min_{P \in H_n} \max_{z \in B_\alpha} |P(z)|,$$

skal man bevise

$$E_{n,\alpha} \leq 2 \sin^n \frac{\alpha}{2}.$$

Det formodes, at der endvidere gælder

$$E_{n,\alpha} \geq \sin^n \frac{\alpha}{2}$$

for alle n . Dette ønskes om muligt bekræftet.

Ove J. Munch

Løsning: For $n+1-k'=k=1, 2, \dots, n$ og $r = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$ settes

$$\theta_k = \frac{2k-1}{n} \pi, \quad \cos \varphi_k = \cos \alpha + r(1 - \cos \theta_k),$$

$$z_k = \cos \varphi_k + i \sin \varphi_k, \quad z_{k'} = \cos \varphi_k - i \sin \varphi_k,$$

$$P_e(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad F(\theta) = \prod_{k=1}^n 2r |\cos \theta - \cos \theta_k|.$$

Er $\cos \varphi = \cos \alpha + r(1 - \cos \theta)$ og $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, blir

$$|z - z_k| |z - z_{k'}| = 4 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_k}{2} \cdot \sin \frac{\varphi + \varphi_k}{2} \right| = 2 |\cos \varphi - \cos \varphi_k| \\ = 2r |\cos \theta - \cos \theta_k|,$$

eller, idet z gjennomløper B_α når θ gjennomløper tallinjen,

$$\max_{z \in B_\alpha} |P_e(z)| = \max \sqrt{F(\theta)}.$$

Setter en $\theta = \frac{2j\pi}{n} + \Delta$, $|\Delta| \leq \frac{\pi}{n}$, og omordner faktorene i $F(\theta)$, får en

$$F(\theta) = \prod_{k=1}^n 4r \left| \sin \frac{\Delta - \theta_k}{2} \cdot \sin \frac{\Delta + \theta_k}{2} \right| = \prod_{k=1}^n 2r (\cos \Delta - \cos \theta_k).$$

Dette viser at alle maksimalverdiene av $F(\theta)$ er like store og fås for $\Delta = 0$, slik at

$$\max F(\theta) = \prod_{k=1}^n 4r \sin^2 \frac{\theta_k}{2} = 4r^n = 4 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^n.$$

Da $E_{n,\alpha} \leq \max_{z \in B_\alpha} |P(z)|$ for ethvert polynom $P(z) \in H_n$, er også

$$E_{n,\alpha} \leq \max_{z \in B_\alpha} |P_e(z)| = 2 \sin^n \frac{\alpha}{2}.$$

H. Killingsbergtrø

Oppgaven er også løst av Magnus Tideman, som også beviser oppgavens antakelse om nedre skranke. Løsningen er så vidt lang at den vanskelig får plass på dette sted.

158. Bevisa identiteten

$$\sum_{v=0}^n \frac{(a+v)^v (b-v)^{n-v}}{v!(n-v)!} = \sum_{v=0}^n \frac{(a+b)^v}{v!}.$$

Gerhard Arfwedson

Løsning:

$$P_n(a, b) = \sum_{v=0}^n \frac{(a+v)^v (b-v)^{n-v}}{v!(n-v)!} - \sum_{v=0}^n \frac{(a+b)^v}{v!}$$

är ett polynom i a och b av n :te graden i var och en av dessa variabler. För att visa, att detta polynom är identiskt $= 0$, visar jag, att polynomet och dess samtliga derivator av ordningarna 1 t. o. m. $2n$ är $= 0$ för $a = b = 0$. Jag har

$$\frac{\partial P_n}{\partial a} = \frac{\partial P_n}{\partial b} = P_{n-1}(a, b).$$

P_n och samtliga derivator är för $a = b = 0$ av formen

$$P_m(0, 0) = \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v} v^m}{v!(m-v)!} - 1.$$

Nu är

$$\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v} v^m}{v!(m-v)!} = \left[\frac{d^m}{dx^m} \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v} e^{vx}}{v!(m-v)!} \right]_{x=0} = \frac{(-1)^m}{m!} \left[\frac{d^m}{dx^m} (1 - e^x)^m \right]_{x=0} = 1,$$

varmed påståendet är bevisat.

Arne Pleijel

159. $F(x)$ och $G(x)$ äro konkava, icke negativa funktioner, definierade för $-1 \leq x \leq 1$. Vidare är

$$\int_{-1}^{+1} F(x) dx = \int_{-1}^{+1} G(x) dx = 1.$$

Bestäm bästa möjliga övre gräns för integralen

$$\int_{-1}^{+1} F(x) G(x) dx.$$

Bengt Andersson

Lösning: Då

$$\int_{-1}^{+1} FG dx \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} G^2 dx,$$

räcker det att ge en övre gräns för $\int_{-1}^{+1} F^2 dx$. Låt S vara området $-1 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$, $y \leq F(x)$ med ytan 1. Enligt Guldins regel för rotationsvolym gäller det således att söka en övre gräns för tyngdpunktens i S y -koordinat I . Om $l(t)$ är längden av den del av linjen $y=t$ som ligger i S , ges I av $\int_0^\infty t l(t) dt$. De $l(t)$ som kommer i fråga är konkava och monotont avtagande när $l(t) \neq 0$, har $l(0) = 2$ och $\int_0^\infty l(t) dt = 1$.

Kräves icke strikt konkavitet existerar maximum I^* av I och ges av $l^*(t) = 1 - t + |1 - t|$, vilket svarar mot $F = \frac{1}{2}(x + 1)$ (t. ex.), med

$$\int_{-1}^{+1} F^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Låt $l(t)$ vara en konkurrensfunktion till $l^*(t)$. För $t = 0$, t_0 och 1, där $0 < t_0 < 1$, är $g(t) \equiv l^* - l = 0$ liksom för $t > 1$. Om $0 < t < t_0$ är $g \leq 0$ och om $t_0 < t < 1$ är $g \geq 0$ samt $\int_0^\infty g(t) dt = 0$. Man har

$$I^* - I = \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^1 t g(t) dt = t' \int_0^{t_0} g dt + t'' \int_{t_0}^1 g dt \leq t_0 \int_0^1 g dt = 0,$$

ty

$$t' < t_0 < t''.$$

Magnus Tideman

Også löst av H. Killingbergtrø og Göran Kjellberg.

160. Tallene 1, 2, ..., $2n$ skal opstilles i to rækker med n i hver:

$$\begin{array}{c} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n, \end{array}$$

således at

- 1) rækken af a 'er er voksende,
- 2) rækken af b 'er er voksende,
- 3) hvert b er større end det lige over stående a . Vis, at antallet af

sådanne opstillinger er $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Holger Busk-Jensen

Lösning: Betrakta sträckor av längd $\sqrt{2}$, numrerade 1, 2, ..., $2n$. Med start i origo lägger vi ut dem i nummerordning till ett polygondrag. Sidorna skall ha vinkelkoefficient 1 eller -1 och mittpunkternas y -koordinater skall vara växande (strikt). De nummer, som svarar mot vinkel-

koeffisient 1 hänför vi till a -serien i tur och ordning, de övriga till b -serien. För att vardera följderna skall ha n element måste polygondraget sluta i $(0, 2n)$. För att $b_v > a_v$ skall gälla måste förloppet ske helt i 1:a kvadranten, dock tillåtas hörn på y -axeln. Man inser att det finns en en-tydig korrespondens mellan uppgiftens följder och vägar enligt ovan.

Vrider vi på figuren får vi följande realisering i ett $\nu\mu$ -plan: Från $(0, 0)$ läggs monotont växande trappor med trappstegets storlek $= 1$ till (n, n) förlöpande helt i $\mu \geq \nu$. Låt $P_{\nu\mu}$ vara antalet trappor som leder till (ν, μ) med heltalskoordinater. Man finner rekursionsformeln

$$P_{\nu\mu} = P_{\nu-1, \mu} + P_{\nu, \mu-1}$$

med randvillkoren $P_{0\mu} = 1$, $P_{\nu+1, \nu} = 0$. Egenskapen $\binom{a}{b} + \binom{a}{b-1} = \binom{a+1}{b}$ hos binomialkoefficienter visar att

$$(1) \quad P_{\nu\mu} = \binom{\nu+\mu}{\nu} - \binom{\nu+\mu}{\nu-1} = \frac{\nu-\mu+1}{\nu+1} \binom{\nu+\mu}{\nu}$$

är en lösning och man inser att ingen annan finns, dvs. (1) löser problemet om $\nu = \mu = n$ insättes.

Magnus Tideman

Også löst av Allan Christiansen og F. P. Dalkild.

161. En danner seg en talltrekant i analogi med Pascals:

$$\begin{array}{cccc} & & c_{01} & \\ & c_{11} & c_{12} & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \\ \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

med $c_{r1} = c_{r, r+1} = 1$, og slik at c_{rs} dannes av de to ovenfor stående tall etter formelen $c_{r+1, s} = c_{r, s-1} + s^q c_{rs}$.

Utlede følgende formel for c_{rs} :

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^s i^{r^q} \prod_{j=1}^s (i^q - j^q)^{-1},$$

der merket etter produkttegnet betyr at $j \neq i$. (Jfr. Johs. Lohnes artikkel i bind 6, hefte 4.)

Undersøk om en får binomialkoeffisientene som grensetilfelle når $q \rightarrow 0$.

R. Tambs Lyche

Løsning: Vi setter

$$f_s(x) = \sum_{r=s-1}^{\infty} c_{rs} x^r, \quad f_1(x) = (1-x)^{-1}.$$

Serien konvergerar för fixt s och små x , ty om c_{rm} är maximum av c_{ri} för $i \leq s$, så ger rekursionsformeln

$$c_{rs} \leq c_{r-1,m}(1+s^q) < \dots < (1+s^q)^r.$$

Med hjälp av rekursionsformeln finner man för $s \geq 2$:

$$(x^{-1} - s^q)f_s(x) = f_{s-1}(x),$$

varav

$$f_s(x) = x^{s-1} \prod_{j=1}^s (1 - j^q x)^{-1}.$$

Uppdelning i partialbråk ger

$$f_s(x) = \sum_{i=1}^s (1 - i^q x)^{-1} \prod_{j=1}^s (i^q - j^q)^{-1},$$

varav c_{rs} framgår som koefficient för x^r .

Då $q \rightarrow 0$ får man binomialkoefficienterna, ty c_{rs} framkommer genom att tillämpa rekursionsformeln ett ändligt antal gånger och man har då rätt att i denna sätta $q = 0$.

Gerhard Arfwedson

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1958 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 3.2 J. Nielsen: *Topologisk og geometrisk isomorfi for ikke-euklidiske flytningsgrupper.*
- 7.3 N. Aronszajn, Kansas: *On the theory of potentials.*
- 25.4 P. R. Garabedian, Stanford: *Bieberbach's conjecture for the fourth coefficient.*
- 19.5 A. G. Walker, Liverpool: *Axioms for cosmologi.*
- 4.9 T. Motzkin, Los Angeles: *Nonequivalence of unisolvent families (a chapter in nonlinear approximation and generalized convexity).*
- 6.10 W. Fenchel: *Om en speciel klasse af partielle differentiaalligninger af Monge-Ampère's type.*
- 20.10 L. Fejes-Tóth, Budapest: *Einige »schöne« Extremalfiguren.*
- 17.11 V. L. Klee, Seattle: *Extremal structure of convex sets.*
- 24.11 E. B. Hansen: *Om den matematiske behandling af diffraktionsproblemer.*
- 8.12 Fr. Fabricius-Bjerre: *Om lineært-monotone kurver.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

Forelæsningsrække for matematiklærere (forårssemestret):

B. Jessen: *Udvalgte matematiske emner.*

Møder 21. og 22.10:

O. Rindung: *Realskolens matematikundervisning* (forhandling).

I. Schaufuss: *Gymnasiets matematikundervisning* (forhandling).

P. O. Neerup: *Lidt flytningsgeometri.*

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 29.1 R. Lehti: *Multivektorialgebran perusteista* [Grunderna av en multivektor-algebra].
- 19.2 P. J. Myrberg: *Eräs aritmeettis-geometrisen keskiarvon yleistys* [En generalisering av det aritmetiskt-geometriskas medelvärde].
- 26.3 R. Nevanlinna: *Cauchyn murtoviivamenetelmästä* [Om Cauchys polygonmetod].
- 14.4 P. R. Garabedian, Stanford: *Application to supersonic flow of Cauchy's problem for an elliptic equation.*
- 7.5 K. Jörgens, Göttingen: *Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte und Eigenfunktionen Beltramischer Operatoren.*

- 1.10 L. Fejes-Tóth, Budapest: *Ungelöste Probleme der anschaulichen Geometrie*.
 15.10 K. Vala: *Hilbertin avaruuden tensorituloista* [Om tensorprodukter i Hilbertska rummer].
 29.10 P. J. Myrberg: *Neliöjuurilausekkeiden iteroimisesta* [Om iteration av kvadratrotsexpressioner].
 3.12 O. Lehto: *Analyttiset funktiot isoloidun erikoispisteen ympäristössä* [Analytiska funktioner i omgivningen av en isolerad singularitet].

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND.

- 2.2 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 6, s. 52.
 6–9.8 Föreläsnings- och exkursionsdagar i Pori/Björneborg. Föredrag av matematiskt intresse:
 H. Veijola: *De matematisk-naturvetenskapliga ämnenas ställning i våra läroverk*.
 T. Vahervuo: *Statistikens roll inom matematikundervisningen i gymnasiet*.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

- 5.3 Gunnar Böðvarsson: *Sandsynlighedsregningens anvendelse i epidemiologi*.
 9.4 Þorbjörn Sigurgeirsson: *Om operatorregning*.
 29.10 K. Piene, Oslo: *Om undervisningen i høyere matematikk i Norge*.
 26.11 Þorsteinn Sæmundsson: *Afstandsmålinger i verdensrummet*.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 4.2 I. Johansson: *Bemerkninger i tilknytning til firefarge-problemet*.
 18.3 E. Alfsen: *Ikke-lineær integrasjon*.
 5.5 L. Redei, Szeged: *Theorie der merkwürdigen Punkte des Dreiecks*.
 21.10 Th. Skolem: *Litt om Steiners trippelsystemer*.

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

- 27.4 J. O. Stubban: *Er skolegeometrien riktig?* (Trondheim.)
 29.4 P. Gotaas: *Demonstrasjon av regnemaskinen »Nusse«*. (Oslo.)
 10–15.8 Sommerkurs på Dombås:
 O. Bastiansen: *Matematikken og forskningen*.
 O. P. Arvesen: *Uendelighetsbegrepet i matematikken*.
 O. P. Arvesen: *Reallinjens matematikk, særlig med tanke på projeksjonstegningen*.
 I. Johansson: *Reallinjematematikken som grunnlag for studium ved universitetet og om den faglige utdannelse av vordende matematikklærere*.
 K. Friis: *Matematikken på engelsklinjen*.
 S. Hilding, Stockholm: *Matematiken på enhetsskolans högstadium*.
 E. Einarsen: *Realskolens matematikk som grunnlag for yrkesskolene for håndverk og industri*.
 P. Rand: *Spørsmålet om studiet av matematikk fremmer generell tenkeevne*.
 A. Gjelsvik: *Nemningsverket i matematikk*.
 A. Kullerud: *Realskolens matematikk*.
 J. Vaage: *Eksamensoppgaver i matematikk*.
 B. Rudberg: *Har studentene tilstrekkelig grunnlag i matematikk?*

- 14.10 M. K. Roszkopf, New York: *Reforms in American mathematics teaching*. (Oslo.)

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

22.3 Möte i Stockholm:

- J. Peetre: *Några tillämpningar av en sats av Mihlin*.
 M. Essén: *Om självortogonala funktioner*.
 S. R. Nordqvist: *Vägars och gators kapacitet*.
 L. Hörmander: *Division av distributioner med polynom*.
 N. Nilsson: *Väsentligt självadjungerade Hamilton-operatorer*.
 H. O. Kreiss: *Om existensen av stabila differensapproximationer till partiella differentialekvationer och konsekvenser därav*.

7.6 Möte i Djursholm:

- G. Kjellberg: *Om konvergensen hos några iterativa metoder för lösning av linjära ekvationssystem*.
 L. E. Zachrisson: *Asymptotiska felet vid digital beräkning av den itererade integralen av en stokastisk tidsfunktion*.
 L. Hulthén: *Bidrag till teorin för observans*.
 B. Kjellberg: *Forskningsrådets kommitté för trafiksäkerhetsforskning, problem och resultat. Visning av bilder*.

29-30.11 Möte i Göteborg:

- Y. Domar: *Om slutna primära ideal i en algebra av Fouriertransformer*.
 S. Lyttkens: *En generalisering av Wiensers Taubersats*.
 T. Ganelius: *Om Fouriermetoder vid Tauberska resttermssatser*.
 L. Hörmander: *Några Taubersatser av Levitan*.
 G. Hössjer: *En anmärkning om Laurentseriens randvärden*.
 E. Akutowicz, Boston: *On the extrapolation of positive definite functions from a finite interval*.
 G. Wahde: *Ett elementärt bevis för huvudsatsen inom teorin för kvasianalytiska funktioner*.
 T. Herlestam: *Några med Borels exponentialmetod besläktade summationsmetoder*.
 H. Bergström: *Om konvergens av oändliga produkter i abstrakta halvgrupper*.
 J. Odhnoff: *Om generaliserade egenfunktionsutvecklingar*.
 G. Bergendal: *Om egenfunktionsutvecklingar vid elliptiska differentialoperatorer*.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I LUND.

- 20.4 Årsmöte med fysikaliska demonstrationer samt föredrag av U. Dahllöf: *Yrkeslivets krav på skolans matematikundervisning. Diskussion*.
 15-16.11 Fysikaliska demonstrationer. Föredrag:
 C.-E. Sjöstedt: *Några aktuella frågor rörande matematikundervisningen i skolan. Diskussion*.
Stringenskravet vid skolans matematikundervisning. Inledningsföredrag av C.-E. Sjöstedt, Å. Pleijel och F. Ehrnst. Diskussion.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM.

7-8.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 6, s. 53.

FORENINGSNYTT

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND.

Förbundets lokala klubbar har arbetat såsom hittills. Förbundets styrelse har bedrivit en rätt livlig upplysningsverksamhet angående de matematisk-naturvetenskapliga ämnenas alltför svaga ställning inom våra läroverk, med presskonferens för Helsingforstidningarna mars 1958. Anvisningar om linjealet i gymnasiet — en ströskrift som utdelats till eleverna i mellanskolans högsta klass.

Mag. Jarmo Nyström, Puistokaari 1, Helsinki, sköter numera ensam sekreterarens åligganden.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM

höll årsmöte den 7-8 januari 1959. Till ordförande resp. vice ordförande omvaldes lektorerna Ernst Knave och Fredrik Ehrnst samt till sekreterare resp. skattmästare omvaldes fil. mag. Jan O. Unenge och Jacob Isander.

Under årsmötet hölls följande föredrag och demonstrationer:

M. Helde: *Strålrisker och strålskydd.*

S. Lindholm: *Demonstration av strålningsförsök.*

O. Jonsson: *Plast — stor materialgrupp under expansion.*

C.-E. Sjöstedt: *Aktuella frågor inom matematikundervisningen.* Diskussion.

P. Häggmark, E. Knave, B. Englund: *Matematiken, fysiken och kemien på den allmänna linjen.* Diskussion.

Utflykt anordnades till Nynäshamn, där Nynäs-Petroleums och Teverkets anläggningar demonstrerades.

UTNEVNELSER

Til professor i matematik ved Københavns Universitet: Professor ved Danmarks tekniske Højskole, dr. phil. H. Tornehave.

Til professor i matematik ved Danmarks Lærerhøjskole: Amanuensis P. O. Neerup.

Til docent i matematik ved Københavns Universitet: Dr. phil. O. Schmidt.

Til biträdande professor i matematik vid Helsingfors Universitet: Fil. dr. P. Kustaanheimo.

Til laborator i matematik vid Uppsala Universitet: Fil. dr. E. Y. Domar.

Til rektor ved Næstved Gymnasium, Danmark: Lektor E. Gjede.

Til rektor ved Sorø Akademi, Danmark: Rektor ved Nykøbing Katedralskole Arne Østergaard.

ETT NORDISKT SYMPOSIUM

över användningen av matematikmaskiner (operationsanalys, databehandling, tekniska problem) med huvudvikt på siffermaskiner anordnas i Karlskrona av Matematikmaskinnämnden och Kungl. Örlogsmannasällskapet den 14–15 maj 1959. Ett antal föreläsare har inbjudits att hålla föredrag av översiktskaraktär. Symposiet omfattar även en avdelning föredrag inriktade på speciella problem.

I samband med symposiet arrangeras en utställning av utrustning på matematikmaskinområdet. Utfärder samt särskilt damprogram kommer också att anordnas. Program med anmälningsblankett utsändes omkring den 10 mars. Närmare informationer lämnas av byråchef G. Hävermark, Matematikmaskinnämnden, Box 6131, Stockholm 6, tel. 23 55 90, eller kommandörkapten Y. Rollof, Örlogsvarvet, Karlskrona, tel. 19440.

INTERNATIONELLA MATEMATIKERKONGRESSEN 1962

Svenska Nationalkommitten för matematik och Svenska Matematikersamfundet har utsänt detta upprop:

To mathematicians of all countries.

The Swedish National Committee of Mathematics and the Swedish Mathematical Society have the honour of inviting you to the next international congress of mathematicians, to be held in Stockholm during the summer of 1962.

We will do our best to make the congress scientifically successful and enjoyable, hoping that it will stimulate the interaction between mathematicians in different fields and countries.

SUMMARY IN ENGLISH

OVE J. MUNCH: *Sums of products of powers*. (Danish.)

The author considers sums of the form

$$A(n; q) = \sum_K^n k_1^{p_1} k_2^{p_2} \dots k_q^{p_q}, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_q = p,$$

where always $1 \leq k_i \leq n$, and where K denotes a rule of summation of the type $k_1 (\leq) k_2 (\leq) \dots (\leq) k_q$, including m pure inequalities. It is shown that $A(n; q)$ is a polynomial in n of degree $p + q$, with zeros $m, m - 1, \dots, m - q$ (and only these integer zeros), and with the leading coefficient

$$\prod_{i=1}^q \left(p + \sum_{i=1}^p p_i \right)^{-1}.$$

If K^* denotes the rule of summation resulting from K by interchanging the signs $<$ and $\leq$, and if $A^*(n; q)$ is the corresponding sum, then

$$A(n - 1; q) = (-1)^{p+q} A^*(-n; q).$$

The two sums can be represented in terms of binomial coefficients:

$$A(n; q) = \sum_{i=q-m}^{p+q-m-1} \lambda_i \binom{n+i}{p+q}, \quad A^*(n; q) = \sum_{i=m+1}^{p+m} \lambda_{p+q-i} \binom{n+i}{p+q},$$

where each sum contains p terms.

As applications of the general theory, the author gives new proofs of some results of Worpitzky concerning the sums

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = \sum_{i=1}^p k_i^p \binom{n+i}{p+1}, \quad L_p(n) = \sum_K^n k_1 k_2 \dots k_q = \sum_{i=1}^q h_i^q \binom{n+i}{2q},$$

where K contains only pure inequalities. The coefficients satisfy the following relations:

$$k_i^p = k_{p+1-i}^p; \quad k_1^p = k_p^p = 1; \quad k_i^p = (p+1-i)k_{i-1}^{p-1} + ik_{i-1}^{p-1}, \quad 2 \leq i \leq p-1$$

$$h_1^q = 1, \quad h_q^q = q!; \quad h_{q-i}^q = (q+i)h_{q-i-1}^{q-1} + (q-i)h_{q-i-1}^{q-1}, \quad 2 \leq i \leq q-1.$$

The recurrence formulas give rise to a simple calculation of the coefficients, in analogy with Pascal's triangle.

It is finally shown that the Bernoulli numbers B_ν can be expressed as

$$B_\nu = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^i (-1)^j j^{\nu} \frac{\binom{\nu+1}{i-j}}{\binom{\nu}{i}}.$$

VIGGO BRUN: *An application of a "carpenter's curve" to Simpson formulas.* (English.)

A "carpenter's curve" is defined by cutting off corners of a polygon in a suitable manner, cf. figs. 1-2 p. 21. A simple formula for the area enclosed in such a curve is derived. The result is used for approximate integration by three and four *non-equidistant* ordinates, leading to new proofs of formulas given earlier by the author and by Selmer.—A "carpenter's surface" resulting from a polyhedron is also defined.

ERNST S. SELMER: *A note on the preceding paper by V. Brun.* (English.)

It is shown that two of Brun's approximate integration formulas are immediate consequences of another method which has earlier been used by the author.

FR. FABRICIUS-BJERRE: *On linearly-monotone elementary curves.* (Danish.)

Given an oriented plane curve AB and a line l , which have the points $P_1, P_2, \dots, P_m$ in common. The curve AB is called linearly-monotone if, for every line l , the points $P_1, P_2, \dots, P_m$ are placed in the same order on the curve as on the line. A linearly-monotone curve has no double point but there may be inflectional and cuspidal points. No part of the curve may be a spiral.

M. Barner has called a curve strongly-convex at a point P if there exists a line through P , different from the tangent, which has no other point than P in common with the curve.

The main theorem of the article says that a curve which is composed of a finite number of convex arcs (an elementary curve), is linearly-monotone if and only if the curve is strongly-convex at every ordinary point.