

ELEMENTÆR KØTEORI¹

ERNST LYKKE JENSEN

Problemstilling. Køteorien, der har sin oprindelse i studier over telefontrafik af den danske matematiker A. K. Erlang, er i dag inde i en rivende udvikling, idet den indtager en central plads inden for det videnskabelige område, der har afgrænset sig under navnet Operationsanalyse.

Der er efterhånden udarbejdet et ret omfattende sæt af køteoretiske modeller. Udgangspunktet for opstillingen af enhver sådan model er en nøje sandsynlighedsteoretisk beskrivelse af den proces, der er tale om. På grundlag af de opstillede forudsætninger uddrages rent deduktivt en række konklusioner af statistisk karakter om processen, f. eks. angående kølængder og ventetider.

Det er klart, at hvis man i de foreliggende konkrete tilfælde har held til at vælge modeller med realitetsbetonede forudsætninger, er de køteoretiske modeller et vigtigt værktøj for anvendelserne ved dimensionering, rationalisering og drift af processer af forskelligartet karakter.

De af køteoriens resultater, der fremlægges i nærværende artikel, er baseret på forudsætninger, som set fra en køteoretisk synsvinkel er simple.

I fig. 1 er der givet en skematisk afbildning af det problemkompleks, der skal gøres til genstand for analyse i det følgende. I en stadig strøm ankommer emner til et sted, der på figuren er mærket med et »B«, for på dette sted at blive behandlet eller betjent.

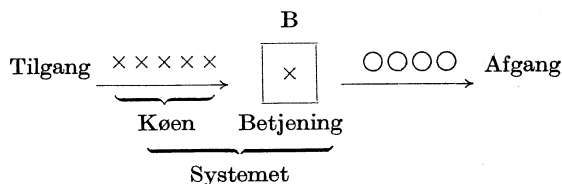


Fig. 1

Det kan f. eks. dreje sig om produktenheder, der på et samlebånd ankommer til et arbejdssted; biler, der kører ind til en servicestation;

¹ Velvilligt overladt fra Nordisk Tidsskrift for Industriel Statistik, bind 3, 1958 (let omarbejdet).

flyvemaskiners ankomst til en lufthavn; skibe, der lægger til kaj for losning af gods; patienter, der venter i lægens venteværelse; opkald til et telefonomstillingsbord; ekspedition af kunder i en forretning; maskiner i en maskinpark, der er gået i stå og venter på igangsættelse.

Mange andre eksempler kunne nævnes; men disse få er tilstrækkeligt til at vise problemstillingens rækkevidde.

For nu at kunne løse en række problemer, der melder sig ved planlægning og drift af processer af den omtalte art, er det nødvendigt at opstille en teori, der beskriver kødannelsen ved arbejdsstedet på grundlag af tilgangs- og afgangsf forholdene.

Statistisk beskrivelse af tilgang og afgang. Da det er hensigten at give en fremstilling af den elementære køteori, opstilles meget simple forudsætninger for emnernes ankomst til (og afgang fra) arbejdsstedet.

Vi søger at udlede sandsynlighedsfordelingen for antal emner, der i løbet af et tidsrum af given længde ankommer til arbejdsstedet. I almindelighed vil udseendet af denne sandsynlighedsfordeling være afhængig af det givne tidsintervalls placering og af systemets virkemåde i de foregående tidsperioder. Vi indskrænker os imidlertid til at betragte en situation, hvor de forhold, der er afgørende for tilgangen af emner, er så stabile, at den søgte sandsynlighed, $P_x(t)$, for tilgang af x emner kan antages at være den samme i ethvert tidsinterval af længden t og uafhængig af systemets forhistorie.

Der opstilles følgende forudsætninger:

FORUDSÆTNING 1. Sandsynligheden for ankomst af et emne i et tidsinterval af længden Δt er for små Δt tilnærmelsesvis proportional med Δt , d. v. s. $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, hvor $o(\Delta t)$ er uendelig lille af højere orden end Δt , således at $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$ for $\Delta t \rightarrow 0$. Sandsynligheden for ankomst af to eller flere emner i Δt er $o(\Delta t)$.

FORUDSÆTNING 2. Sandsynligheden for ankomst af et emne i intervallet Δt er uafhængig af Δt 's placering på tidsaksen; d. v. s. λ er uafhængig af ankomsttidspunktet.

FORUDSÆTNING 3. Sandsynligheden for ankomst af et emne i Δt er uafhængig af det i forvejen ankomne antal emner; d. v. s. λ er uafhængig af x .

Konstanten λ kaldes *ankomst- eller tilgangssintensiteten* og måles i antal ankomne emner pr. tidsenhed.

Det skal nu vises, at de opstillede forudsætninger medfører, at tilgangen af emner statistisk set kan beskrives ved Poissonfordelingen.

Vi betragter tidsrummet $(0, t)$ og i forlængelse heraf et lille tidsinterval Δt , se fig. 2. Den hændelse, at der ankommer x emner i tidsintervallet

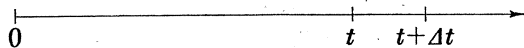


Fig. 2

$(0, t + \Delta t)$, kan realiseres på følgende måder, der gensidigt udelukker hinanden:

1. Tilgang af x emner i $(0, t)$ og 0 emner i $(t, t + \Delta t)$. Sandsynligheden herfor er $P_x(t)(1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t))$.

2. Tilgang af $x - 1$ emner i $(0, t)$ og 1 emne i $(t, t + \Delta t)$. Sandsynligheden herfor er $P_{x-1}(t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t))$.

3. Tilgang af $x - \nu$ emner i $(0, t)$ og ν emner i $(t, t + \Delta t)$, hvor $\nu \geq 2$. Sandsynligheden herfor er $o(\Delta t)$.

Sandsynligheden for tilgang af x emner i tidsintervallet $(0, t + \Delta t)$ er summen af de under 1-3 nævnte sandsynligheder, d. v. s.

$$(1) \quad P_x(t + \Delta t) = P_x(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_{x-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) \quad \text{for } x \geq 1.$$

I tilfældet $x = 0$ opstår mulighederne 2 og 3 ovenfor ikke, således at man i dette tilfælde får

$$(2) \quad P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + o(\Delta t).$$

Af (1) og (2) kan dannes differenskvotienterne

$$\frac{P_x(t + \Delta t) - P_x(t)}{\Delta t} = -\lambda P_x(t) + \lambda P_{x-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

og

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

der for $\Delta t \rightarrow 0$ fører til differentialligningerne

$$P'_x(t) = -\lambda P_x(t) + \lambda P_{x-1}(t) \quad \text{for } x \geq 1, \quad P'_0(t) = -\lambda P_0(t).$$

Opstiller man som begyndelsesværdier

$$P_x(0) = 0 \quad \text{for } x \geq 1, \quad P_0(0) = 1,$$

har differentialligningerne løsningen

$$(3) \quad P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Fordelingen (3) er for ethvert givet t en *Poissonfordeling* og angiver sandsynligheden for ankomst af x emner i et tidsinterval af længden t . Middelværdien og spredningen i fordelingen er henholdsvis λt og $\sqrt{\lambda t}$.

Det er bemærkelsesværdigt, at det gennemsnitlige antal emner, der ankommer, er proportionalt med tidsperiodens længde. Endvidere bemærkes, at ankomstintensiteten λ angiver det gennemsnitlige antal emner, der ankommer pr. tidsenhed. Benytter man f. eks. 10 minutter som tidsenhed, er λ gennemsnittet pr. 10 minutter, hvoraf følger, at gennemsnittet f. eks. pr. time er 6λ .

Hvad angår afgangsf forholdene, vil disse være betinget af omstændigheder, der er af forskellig karakter for forskellige typer af processer. En central størrelse i så henseende er betjeningstiden. For nogle processer, f. eks. simple arbejdsoperationer af rent rutinemæssig karakter, vil det ofte være rimeligt at gøre en antagelse om konstant betjeningstid pr. emne. Andre typer af processer er af en karakter, der kan nødvendiggøre en forudsætning om tilfældigt varierende betjeningstider; i så tilfælde rejser sig spørgsmålet om valg af en sandsynlighedsfordeling til beskrivelse af betjeningstidernes variation. I det følgende opstilles de samme forudsætninger for afgangsf forholdene, som foran er opstillet for tilgangsf forholdene, således at afgang af emner ved fuld beskæftigelse på arbejdsstedet statistisk set beskrives ved Poissonfordelingen. Kaldes *afgangssintensiteten* for μ , er

$$(4) \quad P_x(t) = \frac{(\mu t)^x}{x!} e^{-\mu t}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

sandsynligheden for betjening af x emner i et tidsrum af længden t .

Man kan også studere ankomst- og afgangsp processen ved som statistisk variabel at betragte *tidsafstanden* mellem de successivt ankomende emner og tidsafstanden mellem de afgående emner ved fuld beskæftigelse på arbejdsstedet (betjeningstiden). Medens i beskrivelsen foran størrelsen t var parameter, er t nu en stokastisk variabel.

Betingelsen for, at tidsafstanden mellem ankomsten af to på hinanden følgende emner er mindst t og højst $t + \Delta t$ tidsenheder, er, jfr. fig. 2,

1. at der ingen emner ankommer i intervallet fra 0 til t ; sandsynligheden herfor fås af Poissonformlen for $x=0$ og er altså $e^{-\mu t}$, og

2. at der dernæst i det lille tidsinterval fra t til $t + \Delta t$ ankommer et emne; sandsynligheden herfor er ifølge forudsætning 1 lig med $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

Den søgte sandsynlighed er produktet af de under 1 og 2 nævnte sandsynligheder, d. v. s. lig med $\lambda e^{-\mu t} \Delta t + o(\Delta t)$. Sandsynlighedsfordelingen for tidsafstanden t mellem to ankomende emner er altså en *eksponentialfordeling*

$$(5) \quad p_t = \lambda e^{-\mu t}, \quad 0 < t < \infty,$$

hvor p_t betegner sandsynlighedstætheden.

På tilsvarende måde er betjeningstiderne eksponentielt fordelt:

$$(6) \quad p_t = \mu e^{-\mu t}, \quad 0 < t < \infty.$$

Ekspontialfordelingen har den simple egenskab, at middelværdi og spredning er lige store, for de nævnte to fordelinger henholdsvis $1/\lambda$ og $1/\mu$. At middelværdien er som anført, er intuitivt klart; ankommer der gennemsnitligt λ emner pr. tidsenhed, må nødvendigvis den gennemsnitlige tidsafstand mellem emnerne være brøkdelen $1/\lambda$ af denne tidsenhed.

Statistisk beskrivelse af systemet. Idet vi nu tænker os, at processen kan karakteriseres ved Poissontilgang af emner og eksponentielt fordelte betjeningstider, vil vi give en statistisk beskrivelse af det, der i fig. 1 er kaldt systemet, d. v. s. køen (de ventende emner) plus de emner, der bliver betjent.

Det er klart, at forholdene på arbejdsstedet, specielt organiseringen af køen, spiller en rolle for nogle af de forhold, der påkalder interesse, f. eks. for fordelingen af ventetiderne. Vi vil gøre følgende forudsætninger:

FORUDSÆTNING 4. Emnerne bliver betjent i den rækkefølge, hvori de ankommer til arbejdsstedet.

FORUDSÆTNING 5. Der kan på arbejdsstedet kun betjenes eet emne ad gangen.

Herefter rejses spørgsmålet: Hvad er sandsynligheden $P_x(t)$ for, at der på et vist tidspunkt t befinder sig x emner i systemet, $x = 0, 1, 2, \dots$?

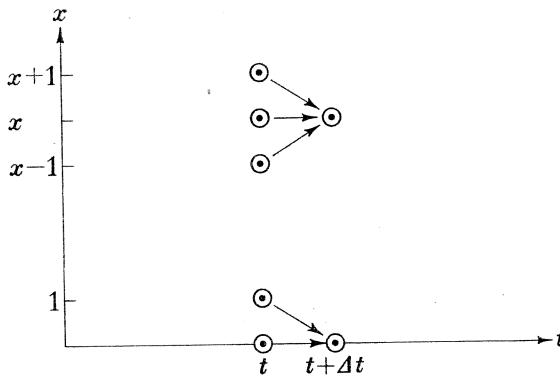


Fig. 3

Den hændelse, at der til tidspunktet $t + \Delta t$ befinder sig $x \geq 1$ emner i systemet, kan realiseres på følgende måder, der gensidigt udelukker hinanden (jfr. fig. 3):

1. Antallet er x til tidspunkt t , og der hverken ankommer eller afgår et emne i tidsintervallet Δt . Sandsynligheden herfor er

$$P_x(t)(1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t - o(\Delta t)).$$

2. Antallet er $x-1$ til tidspunkt t , og der ankommer, men afgår ikke et emne i tidsintervallet Δt . Sandsynligheden herfor er

$$P_{x-1}(t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t - o(\Delta t)).$$

3. Antallet er $x+1$ til tidspunkt t , og der ankommer ikke, men afgår et emne i tidsintervallet Δt . Sandsynligheden herfor er

$$P_{x+1}(t)(1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t))(\mu\Delta t + o(\Delta t)).$$

4. Antallet ændres to eller flere gange i tidsintervallet Δt . Sandsynligheden herfor er $o(\Delta t)$.

Sandsynligheden for x emner til tidspunkt $t + \Delta t$ er summen af de under 1, 2, 3 og 4 anførte sandsynligheder:

$$\begin{aligned} P_x(t + \Delta t) &= P_x(t)(1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t - o(\Delta t)) \\ (7) \quad &+ P_{x-1}(t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t - o(\Delta t)) \\ &+ P_{x+1}(t)(1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t))(\mu\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \quad \text{for } x \geq 1. \end{aligned}$$

På tilsvarende måde fås sandsynligheden for $x=0$ emner i systemet til tidspunktet $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} (8) \quad P_0(t + \Delta t) &= P_0(t)(1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)) \\ &+ P_1(t)(1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t))(\mu\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Af (7) og (8) fås differenskvotienterne

$$\begin{aligned} \frac{P_x(t + \Delta t) - P_x(t)}{\Delta t} &= -(\lambda + \mu - \lambda\mu\Delta t)P_x(t) + \lambda(1 - \mu\Delta t)P_{x-1}(t) \\ &+ \mu(1 - \lambda\Delta t)P_{x+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad \text{for } x \geq 1 \end{aligned}$$

og

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu(1 - \lambda\Delta t)P_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Heraf fås for $\Delta t \rightarrow 0$ differentialkvotienterne

$$(9) \quad P'_x(t) = -(\lambda + \mu)P_x(t) + \lambda P_{x-1}(t) + \mu P_{x+1}(t) \quad \text{for } x \geq 1$$

og

$$(10) \quad P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t).$$

Formlerne (9) og (10) angiver den på tidspunkt t eksisterende tendens til ændring i sandsynligheden for tilstedeværelsen af x emner i systemet.

Størrelsen af sandsynligheden for x emner i systemet afhænger af observationstidspunktet, se fig. 4; f. eks. vil det ofte være sådan, at sand-

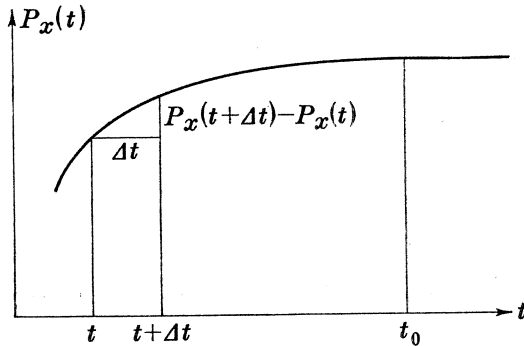


Fig. 4

synligheden er voksende i observationsperiodens begyndelse. I mange situationer vil man imidlertid se, at systemet efter nogen tids forløb, på fig. 4 efter tidspunkt t_0 , statistisk set næsten har nået et ligevægtsleje, der er karakteristisk derved, at sandsynligheden $P_x(t)$ er konstant, d. v. s. uafhængig af t . Man siger om denne tilstand, hvor altså sandsynlighedsfordelingen for antal emner i systemet har samme udseende på ethvert tidspunkt ($\lim_{t \rightarrow \infty} P_x(t) = P_x$), at systemet er i *statistisk ligevægt*. I det følgende betragtes kun systemet i den statistiske ligevægtssituation.

Statistisk ligevægt er ensbetydende med, at differentialkvotienterne (9) og (10) er lig med 0. Idet tidsangivelsen på sandsynlighederne nu er overflødige, har man

$$(11) \quad -(\lambda + \mu)P_x + \lambda P_{x-1} + \mu P_{x+1} = 0 \quad \text{for } x \geq 1$$

og

$$(12) \quad -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0.$$

Med henvisning til fig. 5 og relationen (11) kan statistisk ligevægt karakteriseres som en situation, hvor de kræfter (udtrykt ved $\lambda P_x + \mu P_x$), der trækker i retning af ændring af tilstanden » x emner i systemet«, neutraliseres af de kræfter (udtrykt ved $\lambda P_{x-1} + \mu P_{x+1}$), der trækker i retning af opretholdelse af denne tilstand. Da $\lambda P_0 = \mu P_1$ i henhold til (12), kan den statistiske ligevægtssituation karakteriseres endnu simplere derved, at den gennemsnitlige strømning »fra x til $x+1$ « (λP_x) skal være

lig med den gennemsnitlige strømning »fra $x+1$ til x » (μP_{x+1}), jfr. formel (14) nedenfor.

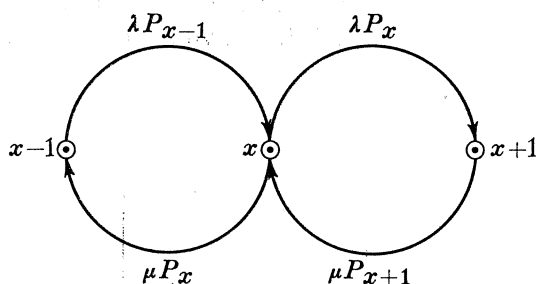


Fig. 5

Indføres forholdet mellem ankomst- og afgangintensiteten

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu},$$

der ofte kaldes *trafikintensiteten*, fås af (11)

$$P_{x+1} - P_x = \varrho(P_x - P_{x-1}),$$

der ved summation giver

$$(13) \quad P_{x+1} - P_1 = \varrho(P_x - P_0).$$

Da (12) er ensbetydende med $P_1 = \varrho P_0$, kan (13) reduceres til

$$(14) \quad P_{x+1} = \varrho P_x$$

med løsningen

$$(15) \quad P_x = \varrho^x P_0.$$

Da det er en sikker hændelse, at $x=0$ eller $x=1$ eller $x=2$ o. s. v., skal summen af sandsynlighederne i formel (15) være lig med 1, d. v. s.

$$(16) \quad \sum_{x=0}^{\infty} P_x = P_0 \sum_{x=0}^{\infty} \varrho^x = 1.$$

For at der skal kunne eksistere statistisk ligevægt, må den her forekommende række konvergere; dette antages derfor:

FORUDSÆTNING 6. Trafikintensiteten ϱ er mindre end 1, d. v. s. tilgangsintensiteten er mindre end afgangintensiteten.

Med denne forudsætning giver formel (16)

$$P_0 = 1 - \varrho,$$

der indsat i formel (15) giver

$$(17) \quad P_x = \varrho^x(1-\varrho), \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \varrho < 1.$$

Dette er altså sandsynlighedsfordelingen (den såkaldte geometriske fordeling) for antal emner i systemet, når dette er i statistisk ligevægt. Lad os kalde den for systemets *ligevægtsfordeling*.

Da den stokastiske variabel er et antal, er fordelingen diskontinuert. Endvidere er det en stadig aftagende fordeling, idet voksende x medfører aftagende P_x . Hvor kraftigt fordelingen aftager, beror på størrelsen af trafikintensiteten; jo mindre ϱ er, des hurtigere formindskes sandsynlighederne i størrelse.

Sandsynligheden for x mindre end eller lig en given værdi a er

$$(18) \quad P_{x \leq a} = (1-\varrho) \sum_{x=0}^a \varrho^x = (1-\varrho) \frac{1-\varrho^{a+1}}{1-\varrho} = 1-\varrho^{a+1},$$

og tilsvarende bliver

$$(19) \quad P_{x \geq a} = \varrho^a.$$

Af formel (19) fås specielt

$$(20) \quad \varrho = P_{x \geq 1}.$$

Trafikintensiteten er altså lig med sandsynligheden for, at der befinder sig eet eller flere emner i systemet. Da der kun kan betjenes eet emne ad gangen, kan man også sige, at trafikintensiteten er lig med sandsynligheden for fuld kapacitetsudnyttelse på arbejdsstedet (i telefonisproget: Der er optaget), eller endelig lig med det gennemsnitlige antal (altså et tal mellem 0 og 1) emner, der befinder sig på arbejdsstedet (den gennemsnitlige kapacitetsudnyttelse af arbejdsstedet).

Endelig vil vi finde middelværdien i fordelingen, d. v. s. udtrykket for det gennemsnitlige antal emner i systemet. Ifølge definitionen på en middelværdi fås

$$(21) \quad M_s = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \varrho^x(1-\varrho) = \sum_{x=0}^{\infty} (x\varrho^x - x\varrho^{x+1}) \\ = \sum_{x=0}^{\infty} (x\varrho^x - (x+1)\varrho^{x+1} + \varrho^{x+1}) = \sum_{x=0}^{\infty} \varrho^{x+1} = \frac{\varrho}{1-\varrho}.$$

Da $\varrho = \lambda/\mu$ og $\varrho = P_{x \geq 1}$, d. v. s. $1-\varrho = P_0$, kan gennemsnitsudtrykket skrives på følgende former:

$$(22) \quad M_s = \frac{\varrho}{1-\varrho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{P_{x \geq 1}}{P_0} = \frac{1-P_0}{P_0}.$$

Udtrykt ved den sidste relation er det gennemsnitlige antal i systemet lig med sandsynligheden for fuld kapacitetsudnyttelse divideret med sandsynligheden for tomgang på arbejdsstedet.

Statistisk beskrivelse af køen. Af de foregående resultater kan man umiddelbart udlede en formel for den tid, som emnerne gennemsnitligt må vente i køen, før de når frem til betjening på arbejdsstedet; thi den gennemsnitlige ventetid er produktet af den gennemsnitlige betjenings-tid $1/\mu$ og det gennemsnitlige antal emner i systemet $\varrho/(1-\varrho)$,

$$(23) \quad W_1 = \frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Det bemærkes, at denne formel kun vedrører ventetiden i køen; den inkluderer ikke betjeningstiden på arbejdsstedet. Den samlede ventetid, d. v. s. ventetiden i systemet, er gennemsnitligt

$$(24) \quad W_2 = W_1 + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

Af de emner, der ankommer, vil nogle kunne betjenes øjeblikkeligt, d. v. s. have en ventetid i køen lig med 0; dette er tilfældet, når der ingen emner befinder sig i systemet ved det pågældende emnes ankomst; sandsynligheden herfor er ifølge formel (17) lig med $P_0 = 1 - \varrho$. Ser man kun på de emner, der forsinkes, er den gennemsnitlige ventetid i køen for disse emner

$$(25) \quad W_3 = \frac{W_1}{P_{x \geq 1}} = \frac{W_1}{\varrho} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{1}{\mu-\lambda},$$

idet $P_{x \geq 1} = \varrho$ er sandsynligheden for forsinkelse i køen. Den gennemsnitlige ventetid i køen for de forsinkede emner (W_3) er altså lig med den gennemsnitlige ventetid i systemet for samtlige emner (W_2). Endelig er den gennemsnitlige ventetid i systemet for de forsinkede emner

$$(26) \quad W_4 = W_3 + \frac{1}{\mu} = \frac{2-\varrho}{\mu(1-\varrho)} = \frac{2\mu-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Når man kender systemets ligevægtsfordeling, kan man straks opskrive udtrykket for sandsynlighedsfordelingen for antal emner i køen under statistisk ligevægt. Denne fordeling kaldes kølængdens ligevægtsfordeling.

En kø på 0 emner svarer til, at antal emner i systemet er 0 eller 1. Sandsynligheden herfor er ifølge formel (18) lig med $1 - \varrho^2$. Iøvrigt er sandsynligheden for en kølængde på y lig med sandsynligheden for $y+1$ emner i systemet. Kølængdens ligevægtsfordeling har derfor i henhold til formel (17) følgende udseende:

$$(27) \quad P_y = \varrho^{y+1}(1-\varrho) \quad \text{for } y \geq 1, \quad P_0 = 1 - \varrho^2.$$

Til beregning af sandsynligheden for en kø under eller over en given længde kan følgende formler benyttes, jfr. formel (27):

$$(28) \quad P_{y \leq a} = (1 - \varrho^2) + \sum_{y=1}^a \varrho^{y+1}(1 - \varrho) = 1 - \varrho^{a+2}, \quad P_{y > a} = \varrho^{a+2}.$$

Den gennemsnitlige kølængde M_K fås som forskellen mellem det gennemsnitlige antal emner i systemet, der ifølge formel (21) er lig med $\varrho/(1 - \varrho)$, og det gennemsnitlige antal emner, der befinder sig på arbejdsstedet; dette sidste gennemsnit er lig med trafikintensiteten ϱ , jfr. s. 145. Man har derfor

$$(29) \quad M_K = \frac{\varrho}{1 - \varrho} - \varrho = \frac{\varrho^2}{1 - \varrho}.$$

Eksempel. Ved etablering af arbejdsstedet eller ved en omorganisering af betjeningsforholdene på et allerede eksisterende arbejdssted må man skaffe sig et skøn over den normale, eller fastlægge den ønskværdige værdi af trafikintensiteten ϱ . Man kan i så henseende gå frem på forskellig måde.

1. Man kan ved hjælp af kontrolkort- og histogramteknik foretage en registrering af ankomst- og afgangsførholdene og derved bestemme skøn over λ og μ .

2. Vi har set, at $\varrho = P_{x \geq 1}$. Trafikintensiteten er altså lig med sandsynligheden for, at der befinder sig mindst eet emne i systemet, eller, hvad der er det samme, sandsynligheden for, at der finder betjening sted på arbejdsstedet. Observerer man dette forhold på tilfældigt valgte tids-

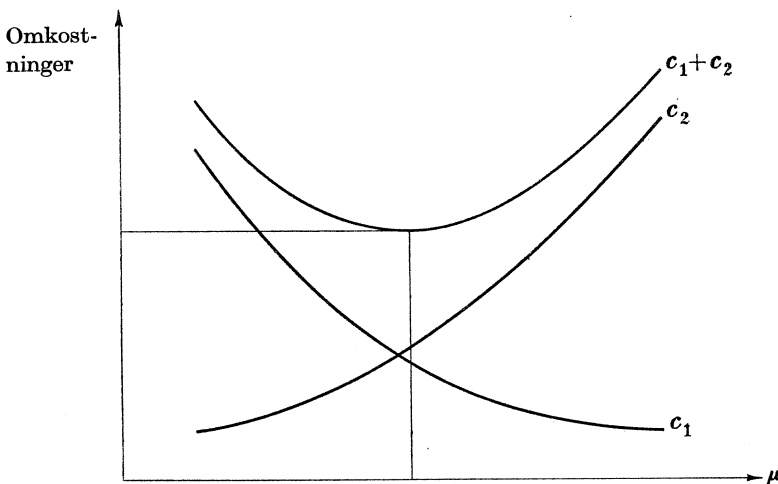


Fig. 6

punkter, er den relative hyppighed af tilfælde, i hvilke betjening finder sted, et skøn over ϱ .

3. I mange tilfælde er man ikke herre over ankomstforholdene, således at man må tage til efterretning den værdi af λ , som iagttagelserne giver anvisning på. Derimod har man, f. eks. ved rationaliseringsforanstaltninger på arbejdsstedet, til en vis grad herredømme over μ . Det drejer sig da om bestemmelse af en i økonomisk henseende optimal værdi af μ , og dermed af ϱ . Der er naturligvis visse omkostningselementer, der trækker de samlede omkostninger i opadgående retning, når tempoet forøges på arbejdsstedet (kurven c_2 på fig. 6); til gengæld trækker andre omkostningselementer (herunder ikke at forglemme tab, der er en følge af, at emner forlader køen på grund af utålmodighed) i modsat retning, kurven c_1 på fig. 6. Hvor de samlede omkostninger $c_1 + c_2$ har minimum, findes den optimale værdi af μ .

Når ϱ er fastsat, kan den foregående teori benyttes til forudsigelse af de kølængder og ventetider, som den pågældende værdi af ϱ tilsiger.

Lad f. eks. ϱ være lig med 0.8. Den gennemsnitlige kølængde er da ifølge formel (29)

$$M_K = \frac{0.8^2}{1 - 0.8} = 3.2 \text{ emner.}$$

Det er ikke tilrådeligt at fæstne opmærksomheden alene ved middellkølængden; der kan nemlig af og til ophobe sig temmelig lange køer. Til belysning heraf er i nedenstående tabel ved hjælp af den første formel (28) beregnet nogle kumulerede sandsynligheder i kølængdens sandsynlighedsfordeling.

Kølængde a	$P_{y \leq a}$ i %
0	36.0
5	79.0
10	93.1
20	99.3
30	99.9

Med en trafikintensitet på 0.8 risikerer man således en gang imellem kølængder helt op til 20–30 emner. På den anden side er der ingen kø i godt en trediedel af tilfældene, og sandsynligheden for tomgang på arbejdsstedet er ifølge formel (17) $P_0 = 20\%$.

Lad os antage, at den gennemsnitlige betjeningstid $1/\mu = 10$ minutter,

hvoraf følger, at afgangssintensiteten $\mu = 0.1$ emne pr. minut. I nedenstående tabel er for forskellige værdier af a beregnet

$$p_{t < a} = \mu \int_0^a e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu a},$$

d. v. s. de kumulerede sandsynligheder i betjeningstidernes fordeling, jfr. formel (6).

Betjeningstid a i minutter	$p_{t < a}$ i %
0	0
1	10.5
2	18.1
5	39.3
10	63.2
15	77.7
20	86.5
30	95.0
40	98.2
50	99.3

Det gennemsnitlige antal emner i systemet er ifølge formel (21)

$$M_s = \frac{0.8}{0.2} = 4 \text{ emner}.$$

Heraf følger, at den gennemsnitlige ventetid i køen er

$$W_1 = M_s \cdot \frac{1}{\mu} = 40 \text{ minutter},$$

jfr. formel (23) for $\mu = 0.1$ og $\lambda = \rho \cdot \mu = 0.08$. Lægges hertil den gennemsnitlige betjeningstid på 10 minutter, ses det, at emnernes gennemsnitlige opholdstid i systemet er $W_2 = 50$ minutter.

LITTERATUR

- E. BROCKMEYER—H. L. HALSTRØM—A. JENSEN: *The life and works of A. K. Erlang*. Trans. Dan. Acad. Techn. Sci. No. 2, 1948.
 C. W. CHURCHMAN—R. L. ACKOFF—E. L. ARNOFF: *Introduction to operations research*. John Wiley & Sons, New York 1957.
 W. FELLER: *Probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, New York 1957.

- A. HALD: *Statistiske Metoder*. Det private Ingeniørfond, København 1948, eller den amerikanske udgave:
- A. HALD: *Statistical theory with engineering applications*. John Wiley & Sons, New York 1952.
- A. JENSEN: *Trafikteoriens Hjælpemidler ved Planlægning og Drift af Vejnet*. »Ingeniøren« nr. 17 og 19, B-udgaven, 1957.
- P. M. MORSE: *Queues, inventories and maintenance*. Publications in Operations Research No. 1. John Wiley & Sons, New York 1958.
- T. L. SAATY: *Résumé of useful formulas in queuing theory*. Operations Research 5, No. 2 (1957).
- W. R. VAN VOORHIS: *Waiting-line theory as a management tool*. Operations Research 4, No. 2 (1956).

Tabelværker:

- E. C. MOLINA: *Poisson's exponential binomial limit*. van Nostrand Co., New York 1942.
- C. E. VAN ORSTRAND: *Tables of the exponential function*. Memoirs of the National Academy of Sciences, Vol. XIV, Fifth Memoir, 1921.

LITT MER OM VALGMETODER

OLAV ÅSE

Til Carl-Erik Fröbergs og Folke Erikssons meget interessante utredninger om proporsjonale valgmetoder i NMT 5 (1957) vil jeg gjerne gjøre noen merknader.

Etter min mening må en skille mellom valg hvor en bare har en enkelt valgkrets, f. eks. et kommunevalg, og valg hvor en har mange kretser, som ved et valg til en nasjonalforsamling.

Som et eksempel på det første tar jeg et sekundærvalg, et norsk formannskapsvalg i en mindre kommune. Jeg bør kanskje nevne at formannskapet utgjør et utvalg innen kommunestyret. Jeg forutsetter følgende partifordeling i kommunestyret: parti A 13, B 6, C 3 og D 3 representanter. Det skal velges 7 formannskapsmedlemmer. Hver stemmeseddel har 7 listestemmer og partiene får følgende listestemmetall: 91, 42, 21, 21. De forskjellige oppgjørsmetoder gir følgende resultat: Sainte Laguës metode og største brøks metode (valkvotsmetoden) begge 3, 2, 1, 1. Droopske metode: 4, 1, 1, 1. Den d'Hondtske metode: 4, 2, 1, 0. Ved den siste metode får parti B ved annen deling samme kvotient som C's og D's listestemmetall. Jeg følger da regelen i den norske kommunevalgloven at mandatet går til det største parti. Det forutsettes at parti C vinner loddtrekningen mellom C og D om det siste mandat.

Eksemplet viser at både Laguës og den største brøks metode gir det åpenbart urimelige resultat at parti A som har flertall i kommunestyret kommer i mindretall i formannskapet. Det kommer her tydelig fram at disse to metodene favoriserer en oppdeling i småpartier. Det samme forhold vil også kunne inntreffe ved et primærvalg, når det største parti har vel 50% av stemmene. De vanlige sperreregler fører her ikke fram, og jeg mener at disse to utregningsmåter må forkastes.

Regner vi i ovenstående eksempel ut antall listestemmer pr. mandat for hvert parti får vi ved den d'Hondtske metode: A $22\frac{1}{2}$, B 21 og C 21. Parti D har også 21 listestemmer, men dette er mindre enn A's listestemmetall pr. mandat. Å benytte antall stemmer pr. mandat for hvert parti

som grunnlag for fordelingen mener jeg må gi det riktigste resultat. Jeg anser derfor den d'Hondtske metode som den beste for en enkelt valgkrets.

Jeg kan nevne at denne metode brukes ved norske kommunevalg med en noe forenklet utregning, slik at først fordeles de heltallige mandater etter den Droopske metode, og deretter eventuelt resterende mandater ved hjelp av den d'Hondtske metode. For å unngå loddtrekning ved valg av ordfører m. v., det såkalte vippestyre, er det ved siste lovrevisjon bestemt at antall representanter skal være et oddetall.

Ved et valg i mange kretser blir forholdet annerledes. Som vist av Fröberg faller ved den d'Hondtske metode alle avvik fra en prosentvis fordeling ut til fordel for det største parti og summerer seg derfor opp. Laguës metode og den største brøks metode virker utjevne, når en forutsetter at partistillingen varierer tilstrekkelig fra krets til krets, og en velger en passende sperring. Denne sperringen mener jeg må velges på erfaringsmessig grunnlag, da forholdene kan variere fra sted til sted og fra tid til tid.

Replik:

Om man skall fordra att ett parti, som fått majoritet vid primärval skall ha majoritet även vid sekundärval, är en politisk och inte matematisk fråga, som inte skall behandlas här. Man måste dock ha klart för sig att en sådan fordran med nödvändighet innebär ett systematiskt fel. Då både uddatalsmetoden och valkvotsmetoden i stort sett är fria från systematiska fel, måste de självfallet emellanåt ge utslag till nackdel för majoritetspartiet. Man kan dock inte härav draga den slutsatsen, att de nämnda metoderna favoriserar en uppdelning i småpartier, och det är lätt att ge exempel, som pekar i rakt motsatt riktning. Att konstruera en valmetod, som garanterar ett parti med 50% av rösterna minst hälften av mandaten och som dessutom är fri från systematiska fel är inte möjligt. You can't eat the cake and have it!

Carl-Erik Fröberg

ETT PÅPEKANDE TILL ETT PROBLEM OM KVADRATRÖTTER

LARS INGELSTAM

Ett problem givet i American Mathematical Monthly (Vol. 58 (1951), p. 566) lyder: Visa att man för varje naturligt tal p kan skriva

$$(\sqrt{2}-1)^p = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}.$$

Om man i stället för $\sqrt{2}-1$ har $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, där n är ett naturligt tal, finner man en motsvarande relation; så är t. ex.

$$(\sqrt{7}-\sqrt{6})^4 = \sqrt{113569} - \sqrt{113568}.$$

Denna generalisering är given och löst i Mathematics Magazine, Vol. 31, No. 3, p. 165. Nedanstående är ett nytt bevis för detta.

SATS: Låt n vara ett naturligt tal och G_n den oändliga cykliska grupp, som talet $a = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ genererar med kompositionsregeln multiplikation. Då gäller, att varje element i G_n har formen $g = \sqrt{m+1} \pm \sqrt{m}$ (m naturligt tal).

BEVIS: a har en invers $a^{-1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, ty $aa^{-1} = a^{-1}a = n+1-n=1$.

Sätt $c = a^p$ där p är ett naturligt tal. p kan skrivas på formen $p = 2^q \cdot p_1$ där p_1 är udda och $q \geq 0$. Emedan

$$a^2 = n+1+n+2\sqrt{n(n+1)} = \sqrt{4n^2+4n+1} + \sqrt{4n^2+4n},$$

har alltså a^2 formen g . Genom upprepade användning av detta resultat inses att alla a^{2^q} har formen g .

För en udda positiv exponent p_1 gäller

$$(1) \quad a^{p_1} = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^{p_1} = M\sqrt{n+1} + N\sqrt{n}.$$

M erhålles ur term nr. 1, 3, 5 osv. i binomialutvecklingen, N ur term nr. 2, 4, 6 osv.; M och N är naturliga tal.

Om man byter tecken på $\sqrt{n}$ byter endast termerna med nr. 2, 4, 6 osv. tecken, och man får

$$(2) \quad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{p_1} = M\sqrt{n+1} - N\sqrt{n}.$$

Ekvationerna (1) och (2) multipliceras ledvis, vilket ger

$$1 = M^2(n+1) - N^2n.$$

Sättes $N^2n = m$ så är alltså $M^2(n+1) = m+1$ och $a^{p_1} = \sqrt{m+1} + \sqrt{m}$, dvs. a^{p_1} har formen g .

För $p = 2^q \cdot p_1$ fås då:

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p = [(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^{2^q}]^{p_1} = (\sqrt{m_1+1} + \sqrt{m_1})^{p_1} = \sqrt{m+1} + \sqrt{m},$$

för vissa naturliga tal m_1 och m , d. v. s. $c = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p$ är av formen g .

Om $d = a^{-p}$ framgår direkt ur räkningarna att $d = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$, som är av formen g .

Resultatet kan sammanfattas sålunda: Till varje par n, p av naturliga tal hör ett naturligt tal m , sådant att

$$\begin{aligned} (\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n})^p &= \sqrt{m+1} \pm \sqrt{m} \\ (\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n})^{-p} &= \sqrt{m+1} \mp \sqrt{m}. \end{aligned}$$

POTENSSSUMMER AV DE NATURLIGE TALL

JOHS. LOHNE

Vi betrakter først summer av formen

$$S_r = S_r(m) = \sum_{n=1}^m n^{2r+1}.$$

Uttrykkene for $\sum n^p$ blir nemlig enklest når p er et oddetall. Da gjelder formlene

$$S_0 = \frac{1}{2} \frac{(m+1)!}{(m-1)!}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \frac{(m+1)!}{(m-1)!} + \frac{1}{4} \frac{(m+2)!}{(m-2)!}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{(m+1)!}{(m-1)!} + \frac{5}{4} \frac{(m+2)!}{(m-2)!} + \frac{1}{6} \frac{(m+3)!}{(m-3)!},$$

og alment

$$(1) \quad S_r(m) = \sum_{s=1}^{r+1} \frac{K_{rs}}{2s} \frac{(m+s)!}{(m-s)!},$$

der $K_{r1}=1, K_{r2}, \dots, K_{rr}, K_{r, r+1}=1$ er heltallige koeffisienter. Noen av disse koeffisienter er gitt i tabellen nedenfor:

$2r+1$	K_{r1}	K_{r2}	K_{r3}	K_{r4}	K_{r5}	K_{r6}	K_{r7}	K_{r8}
1	1							
3	1	1						
5	1	5	1					
7	1	21	14	1				
9	1	85	147	30	1			
11	1	341	1408	627	55	1		
13	1	1365	13013	11440	2002	91	1	
15	1	5461	118482	196053	61490	5278	140	1

Tabellen kan fortsettes på liknende måte som Pascals talltrekant, idet en har rekursjonsformelen

$$(2) \quad K_{r+1, s} = K_{r, s-1} + s^2 K_{rs}.$$

For summene

$$T_r = T_r(m) = \sum_{n=1}^m n^{2r+2}$$

får vi

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{2m+1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{(m+1)!}{(m-1)!} \\ T_1 &= \frac{2m+1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \frac{(m+1)!}{(m-1)!} + \frac{1}{5} \frac{(m+2)!}{(m-2)!} \right\} \\ T_2 &= \frac{2m+1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \frac{(m+1)!}{(m-1)!} + \frac{5}{5} \frac{(m+2)!}{(m-2)!} + \frac{1}{7} \frac{(m+3)!}{(m-3)!} \right\}, \end{aligned}$$

og alment

$$(3) \quad T_r(m) = \frac{2m+1}{2} \sum_{s=1}^{r+1} \frac{K_{rs}}{2s+1} \frac{(m+s)!}{(m-s)!},$$

der koeffisientene K_{rs} er de samme som i formel (1).

For å komme fram til formel (1) vil vi først vise at en kan finne slike tall K_{rs} , uavhengige av n , at

$$(4) \quad n^{2r+1} = K_{r1} \frac{n!}{(n-1)!} + K_{r2} \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dots + K_{rr} \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!} + \frac{(n+r)!}{(n-r-1)!}.$$

Skal dette gjelde for $n=1$, følger nemlig først $K_{r1}=1$; tenker en seg da $K_{r1}, K_{r2}, \dots, K_{rs}$ bestemt, får en av (4) for $n=s+1$ at

$$(s+1)^{2r+1} = K_{r1} \frac{(s+1)!}{s!} + \dots + K_{rs} \frac{(2s)!}{1!} + K_{r, s+1} \frac{(2s+1)!}{0!},$$

som da bestemmer $K_{r, s+1}$.

Setter en da i (4) etter hvert $n=2, 3, \dots, s$, kan en skrive likningssettet

$$2^{2r+1} - 2 = 3! \binom{3}{0} K_{r2}$$

$$3^{2r+1} - 3 = 3! \binom{4}{1} K_{r2} + 5! \binom{5}{0} K_{r3}$$

.....

$$s^{2r+1} - s = 3! \binom{s+1}{s-2} K_{r2} + 5! \binom{s+2}{s-3} K_{r3} + \dots + (2s-1)! \binom{2s-1}{0} K_{rs}.$$

Determinanten for dette likningssystemet er $3!5! \dots (2s-1)!$, og vi får derfor

$$(5) \quad K_{rs} = \frac{1}{(2s-1)!} \begin{vmatrix} \binom{3}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 2^{2r+1}-2 \\ \binom{4}{1} & \binom{5}{0} & 0 & \dots & 0 & 3^{2r+1}-3 \\ \binom{5}{2} & \binom{6}{1} & \binom{7}{0} & \dots & 0 & 4^{2r+1}-4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{s+1}{s-2} & \binom{s+2}{s-3} & \binom{s+3}{s-4} & \dots & \binom{2s-2}{1} & s^{2r+1}-s \end{vmatrix}.$$

Setter vi nå i formel (4) $n=1, 2, \dots, m$ og summerer, får vi

$$\begin{aligned} S_r(m) &= \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{n!}{(n-1)!} + K_{r2} \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dots + K_{rr} \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!} + \frac{(n+r)!}{(n-r-1)!} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^m n + K_{r2} \sum_{n=2}^m \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dots + K_{rr} \sum_{n=r}^m \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!} + \sum_{n=r+1}^m \frac{(n+r)!}{(n-r-1)!}, \end{aligned}$$

som gir formel (1) når vi gjør bruk av summeformelen

$$\sum_{n=s}^m \frac{(n+s-1)!}{(n-s)!} = \frac{1}{2s} \frac{(m+s)!}{(m-s)!},$$

en formel en lett verifiserer, f. eks. ved å danne differensen til høyre side:

$$\frac{1}{2s} \frac{(m+s)!}{(m-s)!} - \frac{1}{2s} \frac{(m-1+s)!}{(m-1-s)!} = \frac{(m+s-1)!}{(m-s)!}.$$

Multipliserer en formel (4) med n , får en formel (3) på samme måte ved hjelp av

$$\sum_{n=s}^m n \frac{(n+s-1)!}{(n-s)!} = \frac{2m+1}{2(2s+1)} \frac{(m+s)!}{(m-s)!},$$

som også lett verifiseres om en danner differensen til høyre side.

Av rekursjonsformelen¹ (2) framgår også at alle K_{rs} er hele positive tall for $s=1, 2, \dots, r+1$, og av (5) og Fermats sats følger at $K_{r2}, \dots, K_{rr}$ alle er delelige med p dersom $p=2r+1$ er primtall.

Som eksempel anføres til slutt formelen

¹ Et bevis for denne rekursjonsformel er gitt i den etterfølgende artikkel av R. Tambs Lyche.

$$S_5 = \sum_{n=1}^m n^{11} = \frac{1}{2} \frac{(m+1)!}{(m-1)!} + \frac{341}{4} \frac{(m+2)!}{(m-2)!} + \frac{1408}{6} \frac{(m+3)!}{(m-3)!} \\ + \frac{627}{8} \frac{(m+4)!}{(m-4)!} + \frac{55}{10} \frac{(m+5)!}{(m-5)!} + \frac{1}{12} \frac{(m+6)!}{(m-6)!}.$$

Bruker en den vanlige formelen ved hjelp av Bernoullis tall, får en

$$S_5 = \frac{1}{12} m^{12} + \frac{1}{2} m^{11} + \frac{B_2}{2} \binom{11}{1} m^{10} + \frac{B_4}{4} \binom{11}{3} m^8 \\ + \frac{B_6}{6} \binom{11}{5} m^6 + \frac{B_8}{8} \binom{11}{7} m^4 + \frac{B_{10}}{10} \binom{11}{9} m^2,$$

med $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$. Her kan en notere seg at denne siste formelen alltid krever utregning av alle formelens ledd, mens formel (1) vil forenkles dersom m er et lite tall, derved at en rekke ledd forsvinner; således er jo

$$S_r(2) = 1^{2r+1} + 2^{2r+1} = \frac{1}{2} \frac{3!}{1!} + \frac{K_{r2}}{4} \frac{4!}{0!}.$$

TILLEGG TIL FORANSTÅENDE ARTIKKEL

R. TAMBS LYCHE

De formelene Johs. Lohne har funnet for potenssummene $\sum_{n=1}^m n^p$ er interessante av flere grunner. For det første er hans koeffisienter K_{rs} positive, uavhengige av m , og felles for de to formler han gir etter som p er et oddetall eller et partall. For det andre viser hans determinantformel (5), som bare inneholder r i siste spalte, at en kan skrive K_{rs} på formen

$$(1) \quad K_{rs} = \frac{1}{(2s-1)!} \sum_{t=2} A_{st}(t^{2r+1}-t),$$

der igjen A_{st} er uavhengige av r , slik at disse tallene A_{st} er felles for alle potenssummer.

Det viser seg videre at disse koeffisientene har en meget enkel oppbygning, idet en har formelen

$$(2) \quad A_{st} = (-1)^{s+t} \frac{t}{s} \binom{2s}{s-t}.$$

Av Lohnes formel (5) får en $A_{ss}=1$, samt for $2 \leq t \leq s-1$:

$$(3) \quad A_{st} = (-1)^{s+t} \begin{vmatrix} \binom{2t}{1} & \binom{2t+1}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2t+1}{2} & \binom{2t+2}{1} & \binom{2t+3}{0} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{s+t-1}{s-t} & \binom{s+t}{s-t-1} & \binom{s+t+1}{s-t-2} & \dots & \binom{2s-2}{1} \end{vmatrix}.$$

En kan nok utlede (2) direkte av (3), men dette synes å kreve en brysom regning. Derimot er det lett av (3), ved oppløsning etter første spalte, å utlede rekursjonsformelen

$$(4) \quad A_{st} + \binom{2t}{1} A_{s,t+1} + \binom{2t+1}{2} A_{s,t+2} + \dots + \binom{s+t-1}{s-t} A_{ss} = 0$$

for $t < s$, og så vise at denne likningen er oppfylt om en setter inn A_{st} etter (2). Vi setter da, for $t < s$,

$$Q_{st} = \sum_{i=t}^s \binom{t+i-1}{i-t} A_{si} = \frac{(-1)^s}{s} \sum_{i=t}^s (-1)^i i \binom{t+i-1}{i-t} \binom{2s}{s-i}.$$

Av binomialformelen

$$(1+x)^{2s} = \sum_{i=-s}^s \binom{2s}{s-i} x^{s-i}$$

finner en

$$(5) \quad x^{s+1} \frac{d}{dx} \left[\frac{(1+x)^{2s}}{x^s} \right] = -s(1-x)(1+x)^{2s-1} = - \sum_{i=-s}^s i \binom{2s}{s-i} x^{s-i}.$$

Videre er

$$(6) \quad (1+x)^{-2t} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-2t}{i} x^i = \sum_{j=t}^{\infty} (-1)^{j+t} \binom{j+t-1}{j-t} x^{j-t}.$$

Av (5) og (6) får en da

$$(-1)^t s(1-x)(1+x)^{2s-2t-1} = \sum_{i=-s}^s \sum_{j=t}^{\infty} (-1)^j i \binom{j+t-1}{j-t} \binom{2s}{s-i} x^{s-t+(j-i)}.$$

Lar vi $K_m[f(x)]$ bety koeffisienten for x^m i maclaurinrekken for $f(x)$, gir dette

$$K_{s-t}[(-1)^t s(1-x^2)(1+x)^{2s-2t-2}] = \sum_{i=t}^s (-1)^i i \binom{t+i-1}{i-t} \binom{2s}{s-i}$$

og da

$$= (-1)^s s Q_{st},$$

$$K_{s-t}[(1-x^2)(1+x)^{2s-2t-2}] = \binom{2s-2t-2}{s-t} - \binom{2s-2t-2}{s-t-2} = 0,$$

blir som påstått $Q_{st}=0$.

For koeffisientene K_{rs} i Lohnes formel gir dette

$$(7) \quad K_{rs} = \sum_{t=2}^s (-1)^{s+t} \frac{2t^2(t^{2r}-1)}{(s-t)!(s+t)!}, \quad s \geq 2,$$

idet $K_{r1}=1$.

Koeffisientene K_{rs} er alle hele tall, noe som slett ikke synes innlysende etter formel (7). En får f. eks.

$$K_{r4} = \frac{2^{2r}-1}{180} - \frac{3^{2r}-1}{280} + \frac{4^{2r}-1}{1260}.$$

Lohnes rekursjonsformel (2) utledes lett av (7) ved

$$\begin{aligned}
 K_{r+1,s} - s^2 K_{rs} &= \sum_{t=2}^s (-1)^{s+t} \frac{2t^2}{(s-t)!(s+t)!} (t^{2r}(t^2 - s^2) + (s^2 - 1)) \\
 &= \sum_{t=2}^{s-1} (-1)^{s-1+t} \frac{2t^2(t^{2r} - 1)}{(s-1-t)!(s-1+t)!} \\
 &\quad + \sum_{t=2}^s (-1)^{s+t} \frac{2t^2(t^2 - 1)}{(s-t)!(s+t)!} \\
 &= \begin{cases} K_{r,s-1} + K_{1s} = K_{r,s-1} & (s \geq 3) \\ 0 + K_{1,2} = 1 = K_{r1} & (s = 2). \end{cases}
 \end{aligned}$$

BOKMELDINGER

E. ARTIN: *Geometric algebra*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 3.) Interscience Publ., New York, 1957. 10+214 pp. \$ 6.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 5 (1957), s. 149–150.)

Da vi skrev til forlaget for å få tilsendt denne boken av Artin, ble forespørselen møtt med en viss forundring — tydeligvis fordi en anså at boken måtte være for vanskelig for leserne av et elementært tidsskrift som NMT. Vi kan ikke være helt enig i dette. Store deler av boken er såpass lettleste og kunnskapsmessig lite krevende at det snarere vil være manglende interesse enn manglende evner og kunnskaper som vil stoppe en i lesningen. På den annen side er det sikkert at en leser som kommer til denne boken uten noen som helst algebraisk erfaring vil få en hard jobb. Men han vil i sannhet få lønn for strevet. I virkeligheten ligger minst 99% av vanskelighetene i boken på det rent algebraiske plan. Og det er ikke uten en viss tilfredsstillelse at en algebraiker vil konstatere at han kan tilegne seg kunnskaper om tilsynelatende fjerntliggende områder av matematikken praktisk talt gratis ved hjelp av relativt gode algebra-kunnskaper.

Vi skal i det følgende nøye oss med å gi en relativt grundig omtale av de to første kapitlene av boken, idet det utvilsomt er denne delen som har størst interesse for leserne av dette tidsskriftet. Annen halvpart er mer teknisk og ikke så lettlest.

En kan karakterisere første halvdel av boken som en behandling av affin og projektiv geometri i lys av den abstrakte algebra. I overensstemmelse med dette kommer i første kapitel en oversikt over de nødvendige algebraiske hjelpemidler. Her får en først en moderne og elegant behandling av vektorrom og deres dualitet. Selv om hovedanvendelsen av dette først kommer i siste halvpart av boken, må en anbefale leseren ikke å hoppe over noe. I virkeligheten er dualiteten av vektorrom en av den moderne matematikks mest fundamentale ideer, som ingen kan slippe forbi hvis han vil oppnå en dypere og allsidig innsikt i matematikk. Artin gjør da også alt han kan for å overbevise leseren om dette. I forbindelse med avsnittet »Duality and pairings« sier han: »The content of

this paragraph is of such a fundamental importance for most of modern mathematics that every effort should be devoted to its mastery.« Og senere — siden han nok har en mistanke om at dette avsnittet vil falle enkelte tungt for brystet: »The unexperienced reader is urged not to give up but to go over all definitions and mappings again and again until he sees everything in full clarity.« Som en elegant anvendelse av avsnittet »Duality and pairings« gis så en behandling av teorien for lineære liknings-systemer. Etter dette følger en introduksjon av gruppeteoretiske begreper som normalisator, sentralisator, kommutator, ordnet gruppe etc., samt grunnbegrepene i kroppsteorien. Her gis det et delikat bevis (som skyldes Witt) for Wedderburns sats om at enhver endelig kropp er kommutativ, samt et bevis for en mindre kjent, men interessant sats av Hua. Første kapitel avsluttes med en innføring av ordnede kroppar samt valuasjonsbegrepet. Alle disse algebraiske begreper og satser er tatt med fordi de har geometriske anvendelser som blir behandlet i senere kapitler i boken. Allerede i annet kapitel vil leseren få se høyst interessante geometriske anvendelser av flere av disse satsene på affin og projektiv geometri.

Annet kapitel begynner med en rent geometrisk-aksiomatisk innføring av to-dimensjonal affin geometri. De aksiomene som her innføres fastlegger hva en skal forstå med et affint plan. Det som er gitt er to mengder (mengden av »punkter« og mengden av »rette linjer« i et »plan«). En kan på en naturlig måte definere en parallellitetsrelasjon, og ved hjelp av denne relasjonen samt relasjonen at et punkt ligger på en rett linje kan en innføre de tre hovedaksiomene som karakteriserer forholdet mellom de to gitte mengdene av punkter og rette linjer. Løst sagt er aksiomene disse: (1) Gjennom to forskjellige punkter går det én og kun én rett linje. (2) Euklids parallell-aksiom. (3) Det eksisterer tre punkter som ikke ligger på en rett linje. Sett med Kleins Erlanger-øyne er den gruppe av avbildninger som vi i dette tilfellet er interessert i, de affine avbildninger eller dilatasjoner som Artin kaller dem. Og for å få en interessant geometri må en postulere to ytterligere aksiomer som sikrer at det er tilstrekkelig mange dilatasjoner. Et av dem sier kort og godt at om P og Q er to punkter så finnes det en dilatasjon som fører P over i Q . En viser nå lett (avsnitt 5 i kapitel 2) at disse fem aksiomene er tilfredsstillende for den vanlige to-dimensjonale analytiske geometri, hvor punktene er ordnede reelle tallpar eller mer generelt ordnede par (ξ, η) , hvor ξ og η hører til en gitt kropp K , og hvor linjer er punktmengder av formen $P+tQ$, hvor P og Q er punkter (vektorer) med $Q \neq O$ og t varierer over K . Det interessante er imidlertid at en omvendt ut fra de fem rent geometriske aksiomene kan konstruere en kropp K slik at vårt to-dimensjonale affine plan får den ovenfor antydende analytiske representasjon.

Etter dette utleder Artin straks høyst overraskende relasjoner mellom kroppen K og det gitte affine plan. La oss først nevne at de to siste aksiomene som angår dilatasjonene er ekvivalente med hver sin form av Desargues' sats, slik at den geometrien vi betrakter ofte kalles Desargues' geometri. (Generelt skulle vi da allerede kalle en geometri som oppfyller de tre første aksiomene for en affin geometri.) Artin viser nå at den konstruerte kroppen K er kommutativ hvis og bare hvis den rent geometriske såkalte Pappus' setning gjelder. På grunnlag av den ovenfor nevnte Wedderburns sats om endelige kroppar kan en derfor slutte at i ethvert Desargues' plan med et endelig antall punkter gjelder Pappus' setning. Dette siste resultatet er spesielt interessant fordi en inntil nå ikke har vært i stand til å gi noe rent geometrisk bevis for dette. (Av Segre's foredrag på kongressen i Edinburgh syntes det imidlertid å fremgå at han nylig hadde kunnet gi et slikt geometrisk bevis.)

Det algebraiske grunnlaget om ordnede kroppar anvendes så på ordnede Desargues' plan, og en får f. eks. at Pappus' setning gjelder i et arkimediske ordnet Desargues' plan, ut fra satsen om at en arkimediske ordnet kropp er isomorf med en underkropp av kroppen av de reelle tall og dermed spesielt er kommutativ. Så følger en behandling av harmoniske punkter og også her får leseren innblikk i høyst interessante sammenhenger mellom algebra og geometri. For en-entydige avbildninger av en linje på seg selv som fører harmoniske punktpar over i harmoniske punktpar, blir den algebraiske satsen til Hua anvendt til å oppnå en generalisering av en rent geometrisk setning av von Staudt. Annet kapittel avsluttes så med en moderne behandling av hovedsatsen i den projektive geometri. Her gjør Artin til og med bruk av begrepet «exact sequence» («suite exacte»), som er så berømt fra moderne algebraisk topologi.

Det denne boken først og fremst slår fast er at det er prinsipielt umulig å oppnå en dypere forståelse selv av elementær affin og projektiv geometri uten den abstrakte algebras hjelpemidler. Dette følger allerede av den ting at kroppen av de reelle (eller komplekse) tall er inadekvat til en analytisk representasjon av en generell ikke-arkimediske affin geometri. En slik representasjon kan bare oppnås når en tar generelle kroppar i bruk. Dernest viser resultatene i denne boken at klassisk affin geometri basert på de reelle tall nødvendigvis må skjule vesentlige geometriske egenskaper, fordi det i det klassiske tilfellet ikke kan komme klart frem at disse geometriske egenskapene er intimt knyttet til den spesielle strukturen av kroppen av de reelle tall. (Smlgn. Pappus' setning.) Endelig viser boken at relativt dyptliggende algebraiske satser (som Wedderburns sats om endelige kroppar) også leder til dyptliggende rent geometriske satser — så dyptliggende at en inntil nå ikke har vært i stand til å gi

rene geometriske bevis for dem. Dette må vel kunne overbevise de aller fleste om verdien av de algebraiske metodene i Artins bok.

Artin sier i forordet at boken er oppstått ut fra forelesninger han har holdt for »beginning graduate students or advanced undergraduates». Det er neppe tvil om at de to første kapitlene i boken f. eks. kunne foreleses i Norge for flinkere studenter på bifagsnivå. Studentene ville gjennom denne boken få en meget god innføring i moderne algebra, som på en overbevisende måte viser dem nytten av de innførte abstrakte begreper. Å gi en innføring i abstrakt-algebraiske begrepsdannelser hvor en ikke beviser noe av interesse i seg selv, eller som ikke fører noe sted hen i retning av anvendelser, er utvilsomt uheldig på dette trin. Det er sannsynligvis bare egnet til å gjøre den abstrakte algebra upopulær blant studentene, og skape motvilje mot aksiomatisk oppbygget matematikk i sin alminnelighet. En eldre universitetslærer som er lite trenet i begrepsmessig og ren aksiomatisk tankegang vil kanskje finne at en bok som Artins vil være vanskelig for ham — men det betyr ikke på noen måte at det samme er tilfellet med en ung og interessert student som fremdeles har hele sitt pågangsmot i behold. Foruten å anbefale denne sjeldne boken på det varmeste til leserne av dette tidsskriftet, vil vi derfor også anbefale at den blir prøvd i universitetsundervisningen.

K. E. Aubert

WERNER GRAEUB: *Lineare Algebra*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 97.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 11+219 S., 7 Fig. DM 35.70, Ganzl. DM 39.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 123.)

Fordi lineær algebra er viktig som hjelpemiddel i så mange forskjellige grener av matematikken og dens anvendelser, er det grodd frem et helt spektrum av lærebøker i emnet; slik at hver bok søker å tilfredsstille noen av de mange ulike kravene som kan stilles til emnevalg og vanskelighetsgrad. På den ene ytterkanten har vi bøker som skal dressere leseren til å jonglere lett og uanstrengt med matriser og ligningssystemer, og så finner vi alle overganger til abstrakte verker med så generelle begreper at en matrise blir noe så spesielt at det bare nevnes i et underkapitel. Stort sett vil denne inndelingen etter emnevalg også gi en gradering av lærebøkene i lineær algebra etter vanskelighetsgrad, slik at de førstnevnte bøkene stiller minst krav til leserens forkunnskaper og modenhet.

Skal vi prøve å plasere denne læreboken i spektret, bør vi se etter i forordet hva forfatteren sier om planleggingen av boken: »Seit meiner Studienjahren in Heidelberg hat mir stets eine Darstellung der linearen Algebra vorgeschwebt, die auf dem Begriff des linearen Raumes beruht

und nicht, wie es in den meisten Vorlesungen über analytische Geometrie aus pädagogischen Gründen geschieht, den n -dimensionalen Zahlenraum als Ausgangspunkt verwendet.»

Forfatteren har altså ikke lagt så stor vekt på pedagogiske hensyn ved disponeringen av stoffet; men betrakter man måten stoffet blir lagt frem på, er det tydelig at han har gått inn for å gi en klar og enkel fremstilling, som ikke stiller for store krav til leseren. Oppgavene som finnes i slutten av hver paragraf skulle også være vel egnet til å lette tilegnelsen av stoffet.

Fremstillingen er hele tiden gjort aksiomatisk og mest mulig koordinat-uavhengig. Dette gjør at en leser som ikke har et visst kjennskap til vektorregning før han gir seg i kast med boken, vil kunne arbeide seg gjennom en god del av den og forstå alle detaljene, uten å begripe hva det hele skal tjene til. Men man skal ikke ha svært store forhåndskunnskaper før man ser hvor mye mer oversiktlig en slik aksiomatisk fremstilling blir.

Boken behandler kun vektorrom av endelig dimensjon, og tar med lineære avbildninger med anvendelse på lineære ligningssett, determinanter, en del multilineær algebra og det vesentligste av teorien for euklidiske og unitære rom, med et lite (og ikke helt vellykket) kapittel om annengradsflater. Dualitetsbegrepet innføres meget tidlig og benyttes flittig hele veien, mens identifiseringen av et rom med sitt duale (ved skalarproduktet) først innføres i 6. kapittel. Formen er overalt temmelig kortfattet, særlig viser det seg ved en fullstendig mangel på kommentarer som kan gi en interessert leser et blick ut over bokens 216 sider. Et uheldig eksempel i så måte finnes ved innføringen av skalarproduktet (s. 113): »Die Möglichkeit, ein skalares Produkt einzuführen, hängt von dem Koeffizientenkörper A ab. Sie ist insbesondere gegeben, wenn A der Körper der reellen Zahlen ist, d. h. wenn es sich um einen reellen linearen Raum handelt.« Og så kommer teorien for euklidiske rom uten videre kommentarer. Selv om boken skal gjøres kortfattet, burde det være mulig å få presset inn en henvisning til den forøvrig meget gode litteraturlisten bak i boken.

Boken gir en litt tørr, men solid og grei innføring i de grunnleggende delene av den lineære algebra, og kan leses med godt utbytte av studenter som har vært litt i kontakt med vektorer og lineære ligninger tidligere.

Håndverksmessig er denne boken, som de andre i Springer-Verlags gule serie, riktig tiltalende, med bra bind, godt papir og pen trykk (men enkelte trykkfeil).

Bent Birkeland

GEORGE GREEN: *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham 1828. Faksimile-upplaga, utgiven i 1000 ex. av professor Stig Ekelöf, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg 1958. 7+72 pp. \$ 5.00.

(Innehållsförteckning i NMT, denne årgang, s. 123.)

Detta arbete innehåller för första gången många begrepp och satser, som nu betraktas som grundläggande. Här möter man sålunda termen potentialfunktion och begreppet Greensk funktion, som ju spelar en fundamental roll i teorien för differentialekvationer. Vidare finner man också Greens sats, som anger hur volymintegraler kan transformeras till ytintegraler och vice versa. Det förefaller inte överraskande, att verket betecknats som inledningen till den matematiska fysiken i England.

Då man läser i arbetet, frapperas man av den klara stilen, som nämnt kontrasterar mot vad man i våra dagar i många fall kan råka ut för. Trots att mer än ett sekels damm fallit över boken, har den på ett förvånande sätt bevarat sin friskhet.

Reproduktionen är förstklassig, och utgivaren är att gratulera till sitt initiativ, speciellt som originalupplagan, omfattande mindre än 100 exemplar, är ytterligt sällsynt.

Carl-Erik Fröberg

KARL PETER GROTEMEYER: *Analytische Geometrie*. (Sammlung Götschen 65/65a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 202 S., 73 Fig. DM 4.80.

(Innehållsförteckning i NMT, denne årgang, s. 123.)

Etter et kapitel om vektoralgebra innføres koordinatsystemer, hvoretter rette linjer, plan og kuler behandles på vanlig måte ved hjelp av vektorregningen. Så følger et kapitel om matriser og noen kapitler om forskjellige avbildninger såsom affine avbildninger, bevegelser, ekviforme avbildninger etc. Klassifikasjon av disse avbildningene basert på gruppeteori er tatt med. Videre behandles annengradsflatene generelt og til slutt finnes to kapitler om projektiv geometri. Selv om denne gis i analytisk fremstilling ved hjelp av homogene koordinater, omfatter den bare det *reelle* rom. Fra systematisk synspunkt kan en kanskje si at dette representerer en viss svakhet ved boka. Hadde imaginære elementer med kulesirkelen vært innført, kunne en gitt de metriske egenskapene ved figurene en projektiv fremstilling, og den siste delen av boka ville ha stått som en projektivgeometrisk parallell til den første vektorielle delen. Slik det nå er, virker den projektive delen noe formålsløs.

Fremstillingen er noe knapp selv til en »Götschen« å være. Figurene — som det nok kunne ha vært flere av — er bra, tildels meget gode. Boka

er forsynt med sakregister og en kort litteraturliste. Spredte historiske opplysninger er flettet inn i teksten her og der.

John Olav Stubban

FRITZ REHBOCK: *Darstellende Geometrie*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 92.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 15+232 S., 110 Fig. DM 23.00, Ganzl. DM 26.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 42-43.)

Dette er en håndbok i deskriptiv geometri og behandler aksonometri, horisontal- og vertikalprojeksjon og perspektivtegning.

Stoffet er gitt i en sammentrengt form, og framstillingen er så knapp at boka ikke er egnet som lærebok. Første delen omhandler parallellprojeksjoner, og det gis mange praktiske vink om utføring av de forskjellige konstruksjoner. Når det gjelder opptegning av ellipser er det gitt mange metoder som mest bygger på tangentegenskaper, mens jeg savner metoder til å tegne ellipsen punkt for punkt.

Boka er illustrert med fortreffelige figurer. Disse er blitt svært klare, fordi de ikke er overlesset med hjelpelinjer. Av og til er kanskje vel mange av hjelpelinjene utelatt, men alt i alt foretrekker jeg det, framfor de detaljerte figurer det har vært vanlig å bruke.

I et stoff som dette, hvor figurene er så vesentlige, stilles det ekstra krav med oppsettingen av tekst og figur. Her er det funnet en meget god løsning. Når boka ligger oppslått har en figurer på høyre halvdel, og en finner alltid teksten umiddelbart i tilknytning til figuren.

Dette er gjennomført helt konsekvent og letter lesingen vesentlig, selv om jeg har inntrykk av at kravet om en slik oppsetting har ført til at teksten enkelte steder er blitt ekstra sammentrengt.

I slutten av del II som omhandler sentralprojeksjoner er tatt med en historisk oversikt. Der får vi også, i tilknytning til artikler om Leo Battista Alberti, Piero della Francesca, Albrecht Dürer, Guido Ubaldo del Monte, Estienne Migon og Johann Heinrich Lambert, illustrasjoner med gjengivelse av titelblader og figurer fra deres arbeider.

Boka utmerker seg ved kortfattet og klar framstilling. Den har meget gode figurer, og er lagt praktisk an. Et godt sakregister gjør den vel egnet som oppslagsbok.

Johs. Østvold

KARL STRUBECKER: *Differentialgeometrie, II*. Theorie der Flächenmetrik. (Sammlung Götschen 1179/1179a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 195 S., 14 Fig. DM 4.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 126.)

Ved å bla litt bakerst i boka støtte jeg fort vekk på Christoffels 3-indekssymboler, og jeg dro da straks den slutningen at her hadde en for seg en flateteori basert på tensorregning. Jeg var interessert i å se hvordan forfatteren hadde innført tensorbegrepet, og slo opp i sakregisteret. Da ordet manglet, så jeg etter i bd. I. Det viser seg nå at tensorer overhodet ikke forekommer. Forfatteren har slått inn på en slags gyllen (?) middelveg. Til å begynne med brukes de klassiske betegnelsene E , F , G osv. som er så velkjente fra Gauss' flateteori. Senere innføres 3-indekssymbolene rett og slett ved at de uttrykkes ved E , F , G osv., og de brukes til å forenkle formelverket. Så fremstillingen er i virkeligheten basert på rent klassisk grunn.

Ellers legges det vesentlig vekt på en flates »indre« egenskaper. Slike »ytre« egenskaper som kommer til uttrykk gjennom asymptotiske kurver, Eulers formel, Meusniers setning etc. behandles overhodet ikke. Avbildninger av flater på hverandre er viet utførlig omtale, og flere kartprosjeksjoner er tatt med som eksempler.

John Olav Stubban

MOTTATTE BØKER

Ludwig Baumgartner: *Gruppentheorie*. Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage. (Sammlung Götschen 837.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 110 S. DM 2.40.

Einführung in den Gruppenbegriff 5–15 * Gruppentheoretische Grundbegriffe und -methoden 15–29 * Über endliche Gruppen 29–38 * Vertauschbarkeit von Elementen und Untergruppen 38–57 * Die Faktorgruppe 58–63 * Die Homomorphie 64–69 * Die Automorphie 69–78 * Die Endomorphie; charakteristische und vollinvariante Untergruppen 78–85 * Freie Gruppen und Gruppen mit Beziehungen zwischen den Elementen 85–91 * Reihen von Gruppen 91–98 * Genauerer über die Gruppenpostulate 98–100 * Lösung der Aufgaben 100–107 * Sach- und Namenverzeichnis 108–110.

Arnold Baur — Hans Lode — Arno Albrecht: *Anschauliche Mathematik*. I. Teil: Geometrie. Ferdinand Hirt in Kiel, 1958. 256 S., 178 Fig. DM 14.80.

Geleitwort 3 * Vorwort des Herausgebers 5–8 * I. Arnold Baur: *Die affinen Verwandtschaften*: Die Methode der geometrischen Verwandtschaften 15–18 * Die kongruenten Verwandtschaften in der Ebene 18–38 * Die kongruenten Verwandtschaften im Raum 38–67 * Die Ähnlichkeitstransformationen 67–76 * Die affine Verwandtschaft zweier Ebenen 76–114 * Affine Verwandtschaft zwischen zwei Räumen 114–132 * Die entartete affine Raumverwandtschaft 132–156 * II. Hans Lode: *Differentialgeometrie*: Ebene Kurven 159–186 * Kinematik ebener Kurven 186–191 * Raumkurven 192–205 * Formelanhang 206 * Nachtrag 206 * III. Arno Albrecht: *Apollonische Aufgabe und Einführung in die nichteuklidischen Geometrien*: Der Sekanten-Sehnensatz für zwei Kreise 209–214 * Abbildung durch hyperbolische und elliptische Inversion 215–222 * Kreisbüschel 223–230 * Lösung der Apollonischen Aufgabe mittels Kreisbüschel 231–242 * Die Wellsteinschen Modelle der parabolischen, hyperbolischen und elliptischen Geometrie 242–248 * Lösung der Apollonischen Aufgabe durch nichteuklidische Geometrien 248–250 * Betrachtungen über die verschiedenen Geometrien 250–256.

N. G. de Bruijn: *Asymptotic methods in analysis*. (Bibliotheca Mathematica 4.) North-Holland Publishing Co., Amsterdam; P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1958. 12+200 pp. Guilders 20.00.

Introduction 1–20 * Implicit functions 21–33 * Summation 34–59 * The Laplace method for integrals 60–76 * The saddle point method 77–101 * Applications of the saddle point method 102–133 * Indirect asymptotics 134–147 * Iterated functions 148–175 * Differential equations 176–198 * Index 199–200.

L. Holzer: *Zahlentheorie*. Teil I. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 13.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1958. 6+202 S. DM 9.75.

Grundbegriffe 1–65 * Das quadratische Reziprozitätsgesetz 66–95 * Theorie der algebraischen Körper 96–200 * Sachverzeichnis 201–202.

Serge Lang: *Introduction to algebraic geometry*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 5.) Interscience Publ., New York, London, 1958. 11+260 pp. \$ 7.25.

General theory of places 1–20 * Algebraic varieties 21–46 * Absolute theory of varieties 47–84 * Products, projections, and correspondences 85–117 * Normal varieties 119–149 * Divisors and linear systems 151–182 * Differential forms 183–193 * Theory of simple points 195–219 * Algebraic groups 221–230 * Riemann–Roch theorem 231–258 * Index 259–260.

Paul Lorenzen: *Formale Logik*. (Sammlung Göschel 1176/1176a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 165 S. DM 4.80.

Einleitung 4–7 * Syllogistik 7–30 * Klassische Logik der Junktoren 30–56 * Kalküle der Junktorenlogik 57–67 * Effektive Logik der Junktoren 67–100 * Logik der Quantoren 101–136 * Logik der Gleichheit 137–159 * Literaturverzeichnis 160–161 * Namenverzeichnis 162 * Sachverzeichnis 162–164 * Symbolverzeichnis 165.

Almar Næss: *Lærebok i høyere matematikk*. Grøndahl & Søn, Oslo, 1958. 455 s. Kr. 70.00.

Analytisk geometri og setninger fra algebraen 15–101 * Innføring i differensialregning 105–150 * Innføring i integralregning 153–220 * Transcendente funksjoner. Ubestemte former 223–288 * Integrasjonsmetoder 291–332 * Rekker. Komplekse tall 335–366 * Integrasjon av spesielle uttrykk. Mere om kurver. Tilnærmet integrasjon 369–404 * Integraler av formen $\int x^m(a + bx^n)^{r/s} dx$ 407–424 * Omformning av arcus-uttrykk 427–442 * Sakregister 443–455.

Robert Sauer: *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen*. Zweite Auflage. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 62.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 16+284 S., 68 Fig. DM 38.00, Ganzl. DM 44.00.

Gegenüberstellung von Anfangswert- und Randwertproblemen 3–36 * Differentialgleichungen erster Ordnung 36–68 * Systeme quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung und die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung bei zwei unabhängigen Veränderlichen 69–155 * Systeme quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung und die quasilineare Differentialgleichung zweiter Ordnung bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen 156–232 * Behandlung von Anfangswertproblemen mit Hilfe des Distributionskalküls 233–280 * Namenverzeichnis 281 * Sachverzeichnis 282–284.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 155–161 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 10. februar 1959.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

155. Der er givet en oval (lukket konveks kurve) k og en variabel trekant PQR , hvis sider har faste retninger, og for hvilken vinkelspidserne P og Q ligger på ovalen k . Idet P (og dermed Q) gjennomløber k , vil vinkelspidsen R frembringe en lukket kurve k' .

Vis, at dersom k' er en ellipse, vil den givne oval k selv være en ellipse.

Fr. Fabricius-Bjerre

156. Lad $a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ være Fibonacci's talfølge:

$$a_{-1} = a_0 = 1 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{for} \quad n \geq 0.$$

Bevis for $n \geq 0$, at

$$(*) \quad a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \sum_{m=\left[\frac{n}{2}\right]}^n \binom{m}{n-m}.$$

Lad derefter p være et naturligt tal. Vi definerer talfølgen $b_{-p}, \dots, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ ved

$$b_n = 1 \quad \text{for} \quad n \leq 0 \quad \text{og} \quad b_n = b_{n-p-1} + b_{n-p} \quad \text{for} \quad n > 0.$$

Generaliser da formelen (*), således at man får $b_{n+1} - b_n$, $n \geq 0$, udtrykt som en sum af højst $\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p+1}\right] + 1$ binomialkoefficienter.

Ove J. Munch

157. Lad B_α være en bue med længden 2α på enhedscirklen. Vi sætter $P(z) \in H_n$, hvis $P(z)$ er et n -tegradspolynomium med hovedkoefficient 1. Idet

$$E_{n,\alpha} = \min_{P \in H_n} \max_{z \in B_\alpha} |P(z)|,$$

skal man bevise

$$E_{n,\alpha} \leq 2 \sin^n \frac{\alpha}{2}.$$

Det formodes, at der endvidere gælder

$$E_{n,\alpha} \geq \sin^n \frac{\alpha}{2}$$

for alle n . Dette ønskes om muligt bekræftet.

Ove J. Munch

158. Bevisa identiteten

$$\sum_{\nu=0}^n \frac{(a+\nu)^\nu (b-\nu)^{n-\nu}}{\nu! (n-\nu)!} = \sum_{\nu=0}^n \frac{(a+b)^\nu}{\nu!}.$$

Gerhard Arfwedson

159. $F(x)$ och $G(x)$ äro konkava, icke negativa funktioner, definierade för $-1 \leq x \leq 1$. Vidare är

$$\int_{-1}^{+1} F(x) dx = \int_{-1}^{+1} G(x) dx = 1.$$

Bestäm bästa möjliga övre gräns för integralen

$$\int_{-1}^{+1} F(x) G(x) dx.$$

Bengt Andersson

160. Tallene $1, 2, \dots, 2n$ skal opstilles i to rækker med n i hver:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n,$$

således at

1) rækken af a 'er er voksende,

2) rækken af b 'er er voksende,

3) hvert b er større end det lige over stående a . Vis, at antallet af

sådanne opstillinger er $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Holger Busk-Jensen

161. En danner seg en talltrekant i analogi med Pascals:

$$\begin{array}{cccc}
 & & c_{01} & \\
 & & c_{11} & c_{12} \\
 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\
 & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

med $c_{r1} = c_{r,r+1} = 1$, og slik at c_{rs} dannes av de to ovenfor stående tall etter formelen $c_{r+1,s} = c_{r,s-1} + s^q c_{rs}$.

Utleid følgende formel for c_{rs} :

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^s i^{r_q} \prod_{j=1}^s (i^q - j^q)^{-1},$$

der merket etter produkttegnet betyr at $j \neq i$. (Jfr. Johs. Lohnes artikkel i dette hefte.)

Undersøk om en får binomialkoeffisientene som grensetilfelle når $q \rightarrow 0$.

R. Tambs Lyche

162. På en kuleflate kan man tenke seg en kurve, analog med en ellipse i et plan, som det geometriske sted for de punkter hvis sum av sfæriske avstander fra to faste »brennpunkter« er konstant. Vis at en alltid får en sirkel som spesialtilfelle dersom den nevnte sum velges passende stor.

Th. Godal

163. Bevis, at der for vilkaarlige, naturlige Tal n og s findes n paa hinanden følgende hele Tal, hvert deleligt med s (eller flere) forskjellige Primtal.

H. Tvermoes

164. Bevisa, att ekvationen

$$x^3 = 9y^2 + 6y + 2$$

icke har heltalsrötter.

A. V. Peljo

165. Den reella funktionen $f(x)$ är definierad för $x \geq 1$ och har egenskaperna $0 < f(x) < 1$ och $f(xy) \leq f(x)f(y)$. Visa att serien $\sum f(n) \sin nx$ konvergerar för alla reella x .

Tore Herlestam

LÖSNINGER

148. La n være et naturlig tall. Vis at *Bernoullis ulikhet*

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

gjelder for $x \geq -2$. (Smlgn. Fenchels artikkel i denne årgang, s. 109–113.)

Ernst S. Selmer

Løsning: Det er tilstrækkeligt her at betragte $-2 \leq x \leq -1$. For $n \geq 1$ er da

$$(1+x)^n \geq -|1+x|^n \geq -|1+x| = 1+x \geq 1+nx.$$

Ove J. Munch

Også løst av Gerhard Arfwedson, Lars Ingelstam, J. Kanestrøm, H. Killingbergtrø, Henrik Meyer, Ulf Ottoson og K. V. Rask.

149. Bevisa, att hela tal (utom de triviella fallen $x = \pm 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = -1$) ej satisfiera ekvationen

$$x^4 - y^3 = 1.$$

A. V. Peljo

Løsning: Med $u = x - 1$ kan likningen skrives

$$(1) \quad y^3 = u(u+2)(u(u+2)+2).$$

Er u odde, har ikke to og to av tallene u , $u+2$ og $u(u+2)+2$ noen felles faktor. De må da være tre kubikktall, hvorav u og $u+2$ bare kan være -1 og 1 , dvs. $x = 0$.

Er u jamt, kan (1) kortes med 2^3 , og en får

$$z^3 = v(v+1)(2v(v+1)+1).$$

Da har to og to av tallene v , $v+1$ og $2v(v+1)+1$ ikke noen faktor felles, og må være tre kubikktall, hvorav v og $v+1$ bare kan være -1 og 0 , eller 0 og 1 , dvs. $x = \pm 1$.

H. Killingbergtrø

Også løst av Lars Ingelstam, Chr. U. Jensen, Ove J. Munch, Ulf Ottoson, K. V. Rask og Leif Thorsen.

150. Rækken

$$6, 10, 15, 20, 21, 28, 35, \dots$$

består af samtlige tal m , for hvilke der findes positive tal a og b , med $a < m$, således at $m = \binom{a}{b}$.

Lad $\varphi(x)$ være antallet af tal $\leq x$ i den anførte række. Bevis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2x}} = 1.$$

Ove J. Munch

Lösning: Om $a < m$ måste $b \geq 2$ och $a - b \geq 2$. Talparen (a, b') med $b' = b$ eller $a - b$ ger samma m . A priori är antingen $a \geq 2b$ eller $a > 2(a - b)$. Således uppfyller det ena talparet villkoren $b' \geq 2$, $a \geq 2b'$ och m tillhör en av talföljderna

$$\binom{2b}{b}, \binom{2b+1}{b}, \binom{2b+2}{b}, \dots,$$

med $b \geq 2$. Alla dessa tal är av typen $m > a$. Man visar också lätt följande olikheter för $b \geq 2$, $n \geq 0$:

$$\frac{(4+n)^2}{2} > \binom{4+n}{2}, \quad \binom{2b+n}{b} > \frac{(b+n)^b}{b!}, \quad \binom{2b}{b} > 2^b.$$

Av den första följer att antalet tal $\leq x$ i talföljden med $b=2$ är $\geq [\sqrt{2x}] - 3$. Av den andra följer att antalet tal $\leq x$ i en talföljd är $< \sqrt[b]{b!}x$, vilket är $< b\sqrt[3]{x}$, då $b \geq 3$, $x \geq 1$. Av den tredje följer att om $b > \log_2 x$ har motsvarande talföljd inte något tal $\leq x$. Alltså gäller

$$[\sqrt{2x}] - 3 \leq \varphi(x) < \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}(\log_2 x)^2$$

och

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2x}} = 1.$$

Bernt Lindström

Også löst av H. Killingbergtrø og Ulf Ottoson.

151. Vis at

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 x^r = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \binom{2n-s}{n} (x-1)^s.$$

O. Kolberg

Lösning: Högra ledet kan omformas på följande sätt:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \binom{2n-s}{n} (x-1)^s &= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (x-1)^s \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \binom{n-s}{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \binom{n-s}{n-r} (x-1)^s = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{s=0}^n \binom{n}{r} \binom{r}{s} (x-1)^s \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 \sum_{s=0}^n \binom{r}{s} (x-1)^s = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 x^r. \end{aligned}$$

S. Eriksson

Også löst av Gerhard Arfwedson, H. Killingbergtrø, Åke Kjellström, Ulf Ottoson og Arne Pleijel.

PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier udskriver herved nedenstående prisopgaver for danske gymnasieelever og kursuselever til studentereksamen. Opgaverne ønskes behandlet så fuldstændigt som muligt, og der lægges vægt på en omhyggelig og overskuelig fremstilling. For at komme i betragtning ved præmieuddelingen skal man have løst mindst fire af opgaverne.

Der udsættes en første præmie på 150 kr. og en anden præmie på 100 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstrapræmier.

Besvareelserne indsendes senest 31. marts 1959 til lektor Henrik Meyer, Bakkedraget 15, Birkerød. Besvareelserne skal ledsages af en erklæring om, at løsningerne er selvstændigt arbejde. (Benyttelse af litteratur dog tilladt.)

1. Lad ABC være en trekant. Bevis, at hvis $c < \frac{1}{2}(a + b)$, er $C < \frac{1}{2}(A + B)$.
Er den omvendte sætning også rigtig?

2. Lad F og F_1 være brændpunkter for en ellipse, og lad c_1 betegne den cirkel, der har F_1 til centrum og storaksen som radius. Lad endvidere P_0 og P betegne to punkter på ellipsen, og lad c_0 og c betegne to cirkler, der begge går gennem F , og hvis centre ligger henholdsvis i P_0 og P .

Idet R er radikalcentret for cirklerne c_1 , c_0 og c , og idet S er spejlbilledet af F i ellipsesekanten P_0P , skal man bevise, at R konvergerer imod et fast punkt for $P \rightarrow P_0$ og ved hjælp heraf, at S konvergerer imod et fast punkt for $P \rightarrow P_0$, samt at ellipsens tangent i P_0 halverer nabovinklen til vinkel F_1P_0F .

Fremsæt tilsvarende sætninger om hyperblen og parablen og skitser beviserne for disse sætninger.

(Opgaven ønskes løst uden anvendelse af koordinatsystem.)

3. Lad a betegne et positivt tal, og lad $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ betegne en talfølge, hvor $R_1 = \sqrt[3]{a}$, $R_n = \sqrt[3]{a + R_{n-1}}$ for $n = 2, 3, \dots$. Bevis, at $R_n < 1 + \sqrt[3]{a}$ for alle n .

Bevis, at talfølgen er konvergent.

Idet a nu forudsættes ikke blot positiv, men også hel, skal man bevise: Nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at talfølgens grænseværdi R er rational, er, at a kan skrives som produktet af tre på hinanden følgende hele tal.

4. Hvis det om x og y , hvor $y=f(x)$, er givet, at y er ligefrem proportional med x , gjelder det som bekendt, at

$$(1) \quad f(2x) = 2 \cdot f(x).$$

Gælder det omvendt om enhver funktion $y=f(x)$, som er definert og kontinuert for $x > 0$, og som tilfredsstiller relationen (1), at y er ligefrem proportional med x ?

5. M er en mængde af seks punkter, af hvilke ikke tre ligger på ret linie. Hvor mange liniestykker findes der, hvis endepunkter begge tilhører M ?

Af nævnte liniestykker er nogle fuldt optrukne og resten stiplede. Bevis, at man uanset fordelingen af fuldt optrukne og stiplede liniestykker altid kan udtage tre punkter i M , hvis forbindende liniestykker enten alle tre er fuldt optrukne eller alle tre er stiplede.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

Oppgavekonkurranse for 1959, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Den beste samling besvarelser vil bli tildelt H. K. H. Kronprins Haralds premie på 200 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med. Oppgavene faller inn under reallinjens pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som råd er. Det er ikke nødvendig å ha svart på alle 6 oppgavene. Ingen kan vinne hovedpremien mer enn én gang.

En sender løsninger til rektor Kay Piene, Skjerstadvn. 2 A, Smestad, Oslo, innen 1. 5. 1959, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

1. En elev har forkortet denne brøken slik:

$$\frac{65}{26} = \frac{5}{2}.$$

Denne framgangsmåten er selvsagt gal, men svaret er riktig. Finn alle de brøker der teller og nevner er tosifrete tall, og som gir riktig svar etter denne »forkortningsmetoden«. (Tierne i telleren strykes mot enerne i nevneren.)

2. Finn x av ligningen

$$\log_a \frac{x}{8a-5} + \log_x a = 0$$

når $a=3$.

For hvilke hele positive verdier av a har ligningen to forskjellige røtter?

3. En tallfølge $a_1, a_2, a_3, \dots$ er bygd opp på denne måten: Hvert ledd i tallfølgen er framkommet ved å multiplisere det foregående med et fast tall k uavhengig av leddets nummer, og til dette adderes 1. Utled formelen for ledd nummer n uttrykt ved a_1 og k .

Velg så $a_1=1$ og $k=2$. Finn summene

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad S_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

begge uttrykt ved a_{n+1} .

Vis at $a_n^2 + 2a_n = a_{2n}$.

Videre skal det vises at

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots$$

er en uendelig konvergent rekke og at A (rekkenes sum) tilfredsstiller ulikheten $1 < A < 2$. Prøv å gjøre ulikheten bedre!

4. Gitt en reell tallfølge $t_1, t_2, t_3, \dots$. Summen av de n første leddene kaller vi s_n . Det er gitt at $t_1 \neq t_2$ og at

$$s_n = \frac{t_1^2 - t_2 t_n}{t_1 - t_2}$$

for $n=3, 4, 5$ osv.

Gå ut fra at formelen for s_n også er riktig for $n=2$ og bevis at

a) t_1 da må være forskjellig fra 0, og at

b) tallene $t_1, t_2, t_3, \dots$ danner en geometrisk rekke med alle ledd forskjellige fra 0 dersom $t_2 \neq 0$.

5. I en pyramide $ABCD$ er toppunktet S og høyden $SA=a$. Grunnflaten $ABCD$ er en halv regulær sekskant innskrevet i halvsirkelen med diameter $AD=2a$, altså $AB=BC=CD=a$.

Bevis at BD er normal på SAB , SC er normal på CD og at de fem punktene S, A, B, C og D ligger på en og samme kule. Finn sentrum og radius i denne kulen.

Gjennom et punkt M på linjestykket AB legger man et plan parallelt med SAD . Det skjærer SB i N , SC i P og CD i Q . Hva slags figur blir $MNPQ$?

La AM være lik x . Finn $MN^2 + NP^2 + PQ^2$ uttrykt ved a og x og drøft det fremkomne uttrykket. Undersøk også hvordan det går med punktet M når uttrykket varierer.

6. I et gitt plan betrakter vi den variable ellipsen E som har et fast punkt F' til brennpunkt, som går gjennom et fast punkt C og som har en stor akse med gitt lengde $2a$.

La $F'C = \lambda a$, $0 < \lambda < 2$.

Hva er det geometriske sted for det andre brennpunktet F ?

På sirkelen S med sentrum i C og med radius $(2 - \lambda)a$ betrakter vi et punkt U slik at $F'U = 2a$. La D være styrelinjen til E m. h. t. F . Vis at polen til UF m. h. t. S ligger på D .

PRISTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Liksom föregående år anordnar Nordisk Matematisk Tidskrift en pristävling för svenska gymnasister. Var och en av de tre utgivande svenska föreningarna har ställt 50 kr. till disposition, varigenom ett första pris om 100 kr. och ett andra pris om 50 kr. kan utdelas.

För deltagande i tävlingen fordras, att lösningar insändas till minst fyra av nedanstående uppgifter. Gymnasister från övriga nordiska länder kunna deltaga utom tävlan.

Lösningar, åtföljda av en försäkran att de äro självständigt utarbetade, insändas senast den 1 mars 1959 till: Nordisk Matematisk Tidskrift, Matematiska Institutionen, Lund. Bifoga uppgift om namn, klass och läroverk.

1. I en triangel ABC drages en rät linje från hörnet C till motstående sida. I de uppkommande deltriangelarna kan två cirklar med samma radie inskrivas. Visa, att om den dragna linjens längd betecknas med x , så gäller med vanliga beteckningar $x^2 = r_a r_b$.

2. Ett reellt polynom $P(x)$ av godtycklig grad n divideras med $(x-a)(x-b)$ där a och b är reella konstanter. Visa att man som rest erhåller förstagradspolynomet

$$P(a) \cdot \frac{x-b}{a-b} + P(b) \cdot \frac{x-a}{b-a}.$$

Härled härav genom direkt gränsövergång den rest som erhålles då $P(x)$ divideras med $(x-a)^2$.

3. Genom $x = \cos t$; $y = \cos nt$ är y definierad som funktion av x och n . Då n är heltal kan beroendet av n markeras med index: $y = T_n(x)$. Visa, att

a) $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

b) $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$.

4. Visa, att då $x \neq 0$ gäller: $\frac{3 \sin x}{x} < 2 + \cos x$.

5. $x_0, x_1, \dots, x_n$ är alla olika reella tal. $x_1, x_2, \dots, x_n$ är rötter till ekvationen $x^n + x_0 x^{n-1} + 2x_0^2 x^{n-2} + 4x_0^3 x^{n-3} + \dots + 2^{n-1} x_0^n = 0$. Vidare är $f(x)$ ett n :e-gradspolynom i x sådant att $f(x_0) = -1$; $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 1$. Visa, att $f(0) = 0$.

6. I en tetraeder med sidoytorna S_1, S_2, S_3 och S_4 drages genom en inre punkt plan parallella med sidoytorna. Snittytorna inom tetraedern betecknas med s_1, s_2, s_3 och s_4 . Visa, att

$$\frac{s_1}{S_1} + \frac{s_2}{S_2} + \frac{s_3}{S_3} + \frac{s_4}{S_4} \geq \frac{9}{4}$$

och ange de punkter, för vilka likhet gäller.

RESULTAT AF PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

(Opgaverne i NMT 6 (1958), s. 48-49.)

Præmien på kr. 100 blev uddelt til Bernt Hansen, III G mn, Vestre Borgerdydskole, København.

RESULTAT AV PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

(Oppgavene i NMT 5 (1957), s. 211-212.)

I konkurransen var det 8 deltakere. H. K. H. Kronprinsens premie kr. 200 for beste besvarelse ble tildelt Arne Strøm, elev av 3. gym., Holtet h. skole. En ekstrapremie kr. 100 ble tildelt Jan-Bjørn Osnes, elev av 5. gym., Nordstrand h. skole.

SUMMARY IN ENGLISH

ERNST LYKKE JENSEN: *Elementary queuing-theory*. (Danish.)

The article deals with the now classical model of queuing-theory which is based on the assumptions of Poisson-arrival and exponential holding time. The probability distribution of the queue-length is deduced assuming the system to be in statistical equilibrium. A formula for the average length of the queue is also derived, together with some formulas for the average waiting time. Finally, a numerical example is worked out to illustrate the theoretical sections.

OLAV ÅSE: *Still more about representation systems*. (Norwegian.)

In an earlier paper in NMT (vol. 5, pp. 91-98), Carl-Erik Fröberg concluded that the classical methods of "odd divisors" (Sainte Laguë) and of "greatest excess" are superior to all other proportional election systems. The author of the present paper shows by a numerical example from a secondary election how these two methods may lead to the result that a party with more than 50% of the votes does not get an absolute majority among the representatives.

A short reply by Fröberg is included.

LARS INGELSTAM: *On a problem regarding square roots*. (Swedish.)

It is shown that to every given pair n, p of positive integers, there exists a positive integer m such that

$$(\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n})^p = \sqrt{m+1} \pm \sqrt{m}, \quad (\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n})^{-p} = \sqrt{m+1} \mp \sqrt{m}.$$

JOHS. LOHNE: *Sums of powers of natural numbers*. (Norwegian.)

It is shown that

$$\sum_{n=1}^m n^{2r+1} = \sum_{s=1}^{r+1} \frac{K_{rs}}{2s} \frac{(m+s)!}{(m-s)!}, \quad \sum_{n=1}^m n^{2r+2} = \frac{2m+1}{2} \sum_{s=1}^{r+1} \frac{K_{rs}}{2s+1} \frac{(m+s)!}{(m-s)!},$$

where the coefficients K_{rs} are independent of m . It is further stated that these coefficients satisfy the recurrence relation

$$K_{r1} = K_{r,r+1} = 1; \quad K_{r+1,s} = K_{r,s-1} + s^2 K_{rs} \quad (s \geq 2),$$

and are consequently positive integers. A table of K_{rs} for $r \leq 7$ is given. If $p = 2r+1$ is a prime, then $K_{r2}, \dots, K_{rr}$ are all divisible by p .

R. TAMBS LYCHE: *Supplement to the preceding paper*. (Norwegian.)

With the notation of the preceding summary, it is shown that

$$K_{rs} = \sum_{t=2}^s (-1)^{s+t} \frac{2t^2(t^{2r}-1)}{(s-t)!(s+t)!} \quad (s \geq 2),$$

which renders a simple proof of Lohne's recurrence formula.

INNHALDSFORTEGNELSE

BENGT JOEL ANDERSSON: An inequality for convex functions.....	25- 26
KURT-R. BIERMANN—VIGGO BRUN: Eine Notiz N. H. Abels für A. L. Crelle auf einem Manuskript Otto Auberts.....	84- 86
ARNE BROMAN: A mechanical problem by H. Whitney.....	78- 82
VIGGO BRUN—BØRGE JESSEN: Et ungdomsbrev fra Niels Henrik Abel.	21- 24
VEIKKO ENNOLA: Two elementary proofs concerning simple quadratic fields.....	114-117
W. FENCHEL: Om indførelsen af eksponentialfunktionen.....	109-113
DAVID FOG: En bemærkning om to rækker.....	83
H. GASK—J.-E. ROOS: En enkel potentialteoretisk modell.....	5- 20
LARS INGELSTAM: Ett påpekande till ett problem om kvadratrötter....	153-154
ERNST LYKKE JENSEN: Elementær køteori.....	137-150
JOHS. LOHNE: Potenssummer av de naturlige tall.....	155-158
R. TAMBS LYCHE: Tillegg til foranstående artikkel.....	159-161
GÖTE NORDLANDER: Ett övertäckningsproblem.....	29- 31
PEDER PEDERSEN: On the expansion of π in a regular continued fraction	57- 68
OLLE PERSSON: Om lösningen av ett överbestämt ekvationssystem en- ligt minsta kvadratmetoden.....	69- 77
ERNST S. SELMER: Numerical integration by non-equidistant ordinates	97-108
M. TIDEMAN: Kommentar till en gammal olikhet.....	27- 28
OLAV ÅSE: Litt mer om valgmetoder.....	151-152

Bokmeldinger

E. ARTIN: Geometric algebra (K. E. AUBERT).....	162
R. A. BUCKINGHAM: Numerical methods (OLLE KARLQVIST).....	32
E. B. DYNKIN—W. A. USPENSKI: Mathematische Unterhaltungen, II. Aufgaben aus der Zahlentheorie (THØGER BANG).....	33
E. B. DYNKIN—W. A. USPENSKI: Mathematische Unterhaltungen, III. Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung (KAI RANDER BUCH)	34
Enzyklopädie der Elementarmathematik, I, II (ULF HELLSTEN).....	118
C. F. GAUSS Gedenkband (N. E. NØRLUND).....	119
WERNER GRAEUB: Lineare Algebra (BENT BIRKELAND).....	165
GEORGE GREEN: An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism (CARL-ERIK FRÖBERG).	167
G. GROSCHE: Projektive Geometrie, I, II (ARNE BROMAN).....	35
KARL PETER GROTEMEYER: Analytische Geometrie (JOHN OLAV STUB- BAN).....	167
MAX HIEKE: Vektoralgebra (ODDVAR BJØRGUM).....	87

JOSEPH E. HOFMANN: Geschichte der Mathematik, II (VIGGO BRUN)...	36
C. HYLTÉN-CAVALLIUS—L. SANDGREN: Matematisk analys (OLOF HAN- NER).....	37
I. M. JAGLOM—W. G. BOLTJANSKI: Konvexe Figuren (W. FENCHEL)...	38
HARRY LASS: Elements of pure and applied mathematics (GUNNAR BER- GENDAL).....	40
FRITZ REHBOCK: Darstellende Geometrie (JOHS. ØSTVOLD).....	168
GEORGE R. STIBITZ—JULES A. LARRIVEE: Mathematics and computers (ERNST S. SELMER).....	88
KARL STRUBECKER: Differentialgeometrie, II (JOHN OLAV STUBBAN)...	168
M. V. WILKES: Automatic digital computers (ERNST S. SELMER).....	88
Mottatte bøker	41, 121, 170
Opgaver	
Oppgaver til løsning.....	44, 91, 127, 172
Løsninger.....	45, 92, 128, 174
Eksamensoppgaver.....	130
Nasjonale prisoppgaver for gymnasiaster.....	48, 177
Kronikk.....	50
Summary in English	55, 95, 136, 182
Supplement til Bind 6:	
The teaching of mathematics for pupils up to the age of 16 in the Scandina- vian countries Denmark, Finland, Iceland, Norway, Sweden. 40 sider.	