

NUMERICAL INTEGRATION

BY NON-EQUIDISTANT ORDINATES¹

ERNST S. SELMER

1. Equidistant ordinates. An approximate formula for the area under the curve $y=f(x)$ from $x=x_0$ to $x=x_n > x_0$ is usually obtained in the following manner: The $n+1$ points (x_i, y_i) , given by

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n, \quad y_i = f(x_i),$$

determine uniquely a curve $y=\varphi(x)$, where $\varphi(x)$ is a *polynomial* of degree n , which is easily integrated:

$$(1.1) \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx = (x_n - x_0)(K_0 y_0 + K_1 y_1 + \dots + K_n y_n).$$

The coefficients K_i depend only on the *ratios* $(x_i - x_0)/(x_n - x_0)$, and become particularly simple if the ordinates are *equidistant*. For $n=2$, we then get the well known formula of Simpson:

$$(1.2) \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

For $n=3$, we get the so-called “*three-eighths rule*”:

$$(1.3) \quad \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{x_3 - x_0}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

For $n=4$, we get a formula which is sometimes named after Cotes:

$$(1.4) \quad \int_{x_0}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{x_4 - x_0}{90} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4).$$

In connection with the error terms, the relative merits of these formulae will be discussed in the next section. Further details can be found in

¹ Presented at the International Congress of Mathematicians, Edinburgh 1958.

any text-book on numerical analysis, see for instance Milne [3] or Scarborough [4].

2. Error terms. A different and useful approach to the numerical integration problem is given by an *expansion in series*. We shall illustrate this for Simpson's formula (1.2). For later use, however, we shall state the problem more generally in terms of non-equidistant ordinates. Without loss of generality, we may assume $x_0=0$, and introduce the notation $x_1=a$, $x_2=a+b=c$. We want to find the "best possible" approximation

$$(2.1) \quad \int_0^c f(x) dx \approx A \cdot f(0) + B \cdot f(a) + C \cdot f(c) = S,$$

with indeterminate coefficients A , B and C .

This can be obtained by a Taylor expansion of both sides. The number of terms used will be found convenient later on:

$$f(c) = f(0) + \frac{c}{1!} f'(0) + \frac{c^2}{2!} f''(0) + \frac{c^3}{3!} f'''(0) + \int_0^c \frac{(c-t)^3}{3!} f^{(4)}(t) dt,$$

and similarly for $f(a)$. Integrating once, we get

$$\int_0^c f(x) dx = \frac{c}{1!} f(0) + \frac{c^2}{2!} f'(0) + \frac{c^3}{3!} f''(0) + \frac{c^4}{4!} f'''(0) + \int_0^c \frac{(c-t)^4}{4!} f^{(4)}(t) dt.$$

Substituting this, we find an expression for the *error* committed by the approximation (2.1):

$$(2.2) \quad \Delta = \int_0^c f(x) dx - S \\ = r_0 f(0) + \frac{r_1}{1!} f'(0) + \frac{r_2}{2!} f''(0) + \frac{r_3}{3!} f'''(0) + \int_0^c p(t) f^{(4)}(t) dt,$$

where $p(t)$ consists of two polynomial arcs joined together continuously at $t=a$, and where

$$(2.3) \quad \begin{cases} r_0 = c - (A + B + C), & r_1 = \frac{1}{2}c^2 - (Ba + Cc) \\ r_2 = \frac{1}{3}c^3 - (Ba^2 + Cc^2), & r_3 = \frac{1}{4}c^4 - (Ba^3 + Cc^3). \end{cases}$$

If a and c are *small* intervals, we should clearly try to make as many of these coefficients as possible vanish, beginning with r_0 .

Let us only consider the *equidistant* case $c=2a$. The equations

$r_0=r_1=r_2=0$ then give $A=\frac{1}{3}a$, $B=\frac{4}{3}a$, $C=\frac{1}{3}a$, or in other words Simpson's formula (1.2) with $x_2-x_0=2a$. But we also get $r_3=0$, and the error (2.2) therefore reduces to the integral

$$\Delta = \int_0^{2a} p(t) f^{(4)}(t) dt.$$

With the above values of B and C , it is easily seen that the function $p(t)$ will keep a constant sign (<0) in the open interval $\langle 0, 2a \rangle$. Assuming that $f^{(4)}(t)$ is continuous in the corresponding closed interval, the *mean value theorem* gives

$$(2.4) \quad \Delta = \Delta_S = f^{(4)}(\xi) \cdot \int_0^{2a} p(t) dt = -\frac{a^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad 0 < \xi < 2a,$$

since the last integral is easily calculated. This is the usual form of the error term in Simpson's formula.

It should be noted that the expansions in series become simpler if the interval for x is chosen to be *symmetric* about the origin, from $-a$ to $+a$ (assuming equidistant ordinates). Even more elegant is a method described by Milne ([3], p. 115), whereby the coefficient of $f^{(4)}(\xi)$ in (2.4) can be obtained directly from the error committed by applying Simpson's formula to $f(x)=x^4$.

The error terms for higher order integration formulae can be found similarly (cf. Milne, p. 123). We quote the results only for the $\frac{3}{8}$ -rule (1.3) and Cotes' formula (1.4):

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Delta_{\frac{3}{8}} &= -\frac{3a^5}{80} f^{(4)}(\xi) & (x_3-x_0=3a) \\ \Delta_C &= -\frac{8a^7}{945} f^{(6)}(\xi) & (x_4-x_0=4a). \end{aligned}$$

The expression for Δ_C shows that Cotes' formula is more accurate than Simpson's, with the same length of the intervals. On the other hand, the coefficients of Simpson's formula are simpler, and it is consequently easier to use.

The error $\Delta_{\frac{3}{8}}$ has in fact a *larger* absolute value than Δ_S (although of the same order of magnitude), and formula (1.3) is therefore seldom used. Scarborough ([4], p. 155) even "relegates it to the category of useless things", but Milne (p. 124) remarks that it may be useful, applied once only, if there is an *odd, given* number of intervals.

3. Non-equidistant ordinates. With $n = 2$, $x_1 = x_0 + a$, $x_2 = x_0 + a + b$, the formula (1.1) takes the form

$$(3.1) \quad \int_{x_0}^{x_0+a+b} f(x) dx \approx \frac{a+b}{6} \left(\frac{2a-b}{a} y_0 + \frac{(a+b)^2}{ab} y_1 + \frac{2b-a}{b} y_2 \right).$$

Because of a and b in the *denominators*, this formula is less useful in practical applications. To overcome this difficulty, a modified formula was suggested by Viggo Brun [1] in the first volume of this journal:

$$(3.2) \quad \int_{x_0}^{x_0+a+b} f(x) dx \approx \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b-a}{3} (y_2 - y_0).$$

For $a = b$, the last term vanishes, and we are left with Simpson's formula (1.2).

Brun's deduction of (3.2) is purely geometrical, and of an "Archimedean" nature. He also gives (p. 14) an error term¹, but of a rather complicated form. In particular, it bears very little resemblance to the error term (2.4) in the case $a = b$.

The purpose of the present paper is to give two different, more analytical, deductions of Brun's formula, and to find an error term which reduces to (2.4) when $a = b$. Both deductions are also capable of *generalizations* to higher order integration formulae, like (1.3-4).

It should perhaps be stressed that throughout this paper, the intervals between the non-equidistant ordinates are supposed to be *given in advance*. Hence, no attempt is made to increase the accuracy by varying the intervals suitably, as is done in integration formulae of the Gaussian type.

4. Deduction by series. We can use the formulae (2.3), which were deduced for non-equidistant ordinates. The coefficients A , B and C are uniquely determined by the three linear equations $r_0 = r_1 = r_2 = 0$, but this only leads to the formula (3.1), with a and b in the denominator. We therefore omit the equation $r_2 = 0$, and demand instead that the coefficients shall satisfy the following three conditions:

$$(4.1) \quad \begin{cases} 1^\circ \text{ The equations } r_0 = r_1 = 0 \text{ hold.} \\ 2^\circ A, B \text{ and } C \text{ be linear combinations of } a \text{ and } b. \\ 3^\circ \text{ For } a = b, \text{ we get Simpson's formula.} \end{cases}$$

¹ In the last line of this term, the first coefficient should be $3n-3$, not $3n-6$.

A numerical error in Brun's example 2 is pointed out by Heidam ([2], p. 110).

We consequently substitute

$$B = ax_1 + bx_2, \quad C = ay_1 + by_2$$

in the equation $r_1 = 0$, with $c = a + b$:

$$a(ax_1 + bx_2) + (a + b)(ay_1 + by_2) = \frac{1}{2}(a + b)^2.$$

This is an identity in a and b only if

$$x_1 + y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 + y_1 + y_2 = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Further, the formulae (2.1) and (1.2) should coincide for $a = b$, that is

$$x_1 + x_2 = \frac{4}{3}, \quad y_1 + y_2 = \frac{1}{3}.$$

These five equations have the unique solution

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad y_1 = -\frac{1}{6}, \quad y_2 = \frac{1}{2},$$

which determines B and C , and finally A from $r_0 = 0$. It is immediately seen that this just gives Brun's formula (3.2).

However, this method does not seem to yield a proper *error term*. We have already mentioned that Brun's own form (deduced by a Taylor expansion in two variables) is unsatisfactory, and it seems impossible or at least very difficult to find a suitable error term in Brun's formula by the series method. (The conditions for applying the mean value theorem, as in (2.4), can not be satisfied by all the integrals which occur.)

5. Deduction by substitution. The case of three non-equidistant ordinates can be reduced to the equidistant case by a simple *quadratic substitution* $x = g(z)$, where $g(z)$ is a polynomial of degree 2, determined by

$$(5.1) \quad g(0) = x_0, \quad g(1) = x_1 = x_0 + a, \quad g(2) = x_2 = x_0 + a + b.$$

This gives

$$(5.2) \quad g(z) = \frac{1}{2}(b - a)z^2 + \frac{1}{2}(3a - b)z + x_0,$$

which should be substituted in the given integral:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_0^2 f(g(z)) g'(z) dz = \int_0^2 F(z) dz \approx \frac{2-0}{6} \{F(0) + 4F(1) + F(2)\}.$$

We now have *equidistant ordinates* for $F(z)$, and can consequently get an approximation by Simpson's formula (1.2). Here

$$\begin{aligned} F(0) &= f(x_0)g'(0) = \frac{1}{2}y_0(3a-b) \\ F(1) &= f(x_1)g'(1) = \frac{1}{2}y_1(a+b) \\ F(2) &= f(x_2)g'(2) = \frac{1}{2}y_2(3b-a), \end{aligned}$$

which immediately gives Brun's formula (3.2).

The derivative $g'(z)$ will keep a *constant sign* from $z=0$ to $z=2$ only if

$$(5.3) \quad \frac{1}{3}b \leq a \leq 3b,$$

that is if none of the intervals exceeds three times the other one. If this condition is not satisfied, the integral in z will, at least formally, also refer to values of $f(x)$ *outside* the given interval $[x_0, x_2]$. The substitution will still yield a correct result, but the argument shows that Brun's formula should be used with care when the intervals differ too much. This fact is also observed by Brun himself.

The application of Simpson's formula means that $F(z)=f(g(z))g'(z)$ is approximated by a quadratic polynomial $\varphi(z)$. The given function $y=f(x)=f(g(z))$ is consequently replaced by the rational function $\varphi(z)/g'(z)$. Together with $x=g(z)$, this will usually determine a *unicursal cubic curve*.

We will, however, get the *same* result if we approximate $y=f(x)=f(g(z))$ itself by a quadratic polynomial $\psi(z)$, and then integrate (exactly) the cubic polynomial $F_1(z)=\psi(z)g'(z)$, which passes through the same three points as $F(z)$:

$$F_1(0) = F(0), \quad F_1(1) = F(1), \quad F_1(2) = F(2).$$

We must get the same result, since it is known that the approximating quadratic polynomial of Simpson's method can be replaced by an arbitrary cubic polynomial through the given points. This, in turn, follows from the fact that Simpson's rule gives an *exact* result for any such cubic polynomial (the error term (2.4) contains the *fourth* derivative).

The choice of the values $z=0, 1, 2$ was convenient but arbitrary. They can be replaced by any other *equidistant* set by a linear transformation, which does not influence the above reasoning. We have consequently found the following result:

The approximation formula of Brun can be obtained by replacing the given curve $y=f(x)$ by a parabola

$$x = a_1z^2 + b_1z + c_1, \quad y = a_2z^2 + b_2z + c_2,$$

such that the given points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) and (x_2, y_2) correspond to equidistant values of z .

A closer examination shows that the axis of this parabola has the slope

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{x_0 - 2x_1 + x_2}.$$

In particular, we get the ordinary parabola of Simpson's method (vertical axis) if the ordinates are equidistant, that is if $x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$.

It should be noted that Brun's own method is built on a completely different approximation, replacing $y=f(x)$ by one parabola between the points (x_0, y_0) and (x_1, y_1) , and a *different* parabola between (x_1, y_1) and (x_2, y_2) , both parabolas having vertical axes.

6. Error term in Brun's formula. Since the quadratic substitution $x=g(z)$ permitted the use of Simpson's formula, we can obtain an error term by the methods of Section 2:

$$\Delta_B = \int_0^2 p(t) F^{(4)}(t) dt.$$

The function $p(t)$ is the same as in (2.4) (with $a=1$), and $F(t)=f(g(t))g'(t)$, where $g(t)$ is given by (5.2). Differentiating four times, and using $g'''(t)=0$, we find

$$(6.1) \quad F^{(4)}(t) = 15f''(g)g'g''^2 + 10f'''(g)g'^3g'' + f^{(4)}(g)g'^5.$$

From the general theory, we know the form of $p(t)$, and also that $p(t)$ will keep a *constant sign* in the interval $\langle 0, 2 \rangle$. Under the assumption (5.3), the factor $g'(t)$ will have the same property (while $g''(t)$ is a constant), and the mean value theorem can be applied to each summand of $F^{(4)}(t)$ separately, for instance

$$\int_0^2 p(t) f''(g) g' g''^2 dt = f''(g(\tau)) \int_0^2 p(t) g' g''^2 dt = -\frac{(a+b)(b-a)^2}{180} f''(\xi).$$

Here $0 < \tau < 2$, and $\xi=g(\tau)$ will therefore belong to the given interval $\langle x_0, x_2 \rangle$ for x if (5.3) is satisfied.

The remaining terms of (6.1) can be treated similarly (but with rather laborious integrations). As a result, we find the following sharpened version of Brun's formula (3.2):

$$\int_{x_0}^{x_0+a+b} f(x) dx = \frac{c}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{d}{3} (y_2 - y_0) + \Delta_B,$$

where

$$(6.2) \quad \Delta_B = -\frac{c}{72} \left\{ 6d^2 f''(\xi_1) + d \left(c^2 + \frac{8d^2}{7} \right) f'''(\xi_2) + \left(\frac{c^4}{40} + \frac{2c^2 d^2 + d^4}{21} \right) f^{(4)}(\xi_3) \right\}.$$

Here

$$c = a + b, \quad d = b - a; \quad x_0 < \xi_i < x_0 + a + b, \quad i = 1, 2, 3,$$

and it is assumed that

$$\frac{1}{3}b \leq a \leq 3b.$$

When d is small, so that the ordinates are approximately equidistant, the terms with $f'''(\xi_2)$, and particularly $f''(\xi_1)$, will nearly vanish. In the equidistant case $a = b$, $d = 0$, $c = 2a$, the above expression for Δ_B will coincide with the error term (2.4) of Simpson's formula.

The coefficient of $f''(\xi_1)$,

$$(6.3) \quad -\frac{1}{12}cd^2 = -\frac{1}{12}(a+b)(b-a)^2,$$

is the same as the coefficient of $f''(0)$ in Brun's error term ([1], p. 14). However, the coefficients of $f'''(\xi_2)$ and $f'''(0)$ do not coincide.

One might conceivably modify and perhaps simplify the above remainder term (6.2) by *partial integration*. We could, for instance, try to get rid of the middle term by the following process (cf. (6.1), where g'' is a constant):

$$\int \underbrace{p(t)g'^2}_{u} \cdot \underbrace{f'''(g)g'}_{dv} dt = p(t)g'^2 \cdot f''(g) - \int f''(g) \{p'(t)g'^2 + 2p(t)g'g''\} dt.$$

It does, however, turn out that any such transfer between the terms (completely or only in parts) is *impossible*. An elementary but complicated analysis shows that the mean value theorem no longer applies to the integrals resulting from such a transfer.

7. Generalization to the three-eighths rule. If a number of intervals, say four, of varying length is given, it will hardly pay to modify Cotes' formula (1.4) along similar lines. (But see Section 8 below.) It is much simpler, and probably just as accurate, to use Brun's formula twice. However, when the given number of varying intervals is *odd*, it will be necessary to apply (once only) a modified form of the "three-eighths rule" (1.3), cf. the concluding remarks of Section 2.

We shall first generalize the series method of Sections 2 and 4, and introduce

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a, \quad x_2 = a + b, \quad x_3 = a + b + c.$$

We want to find the "best possible" approximation

$$\int_0^{a+b+c} f(x) dx \approx A \cdot f(0) + B \cdot f(a) + C \cdot f(a+b) + D \cdot f(a+b+c) = S.$$

As before, we expand in a Taylor series:

$$(7.1) \quad \Delta = \int_0^{a+b+c} f(x) dx - S = s_0 f(0) + s_1 f'(0) + s_2 f''(0) + s_3 f'''(0) + \dots,$$

where the coefficients s_i are easily calculated. In analogy with (4.1), we demand that

1° The equations $s_0 = s_1 = 0$ hold.

2° A, B, C and D be linear combinations of a, b and c .

3° For $a=b=c$, we get the formula (1.3).

As in Section 4, we substitute

$$B = ax_1 + bx_2 + cx_3, \quad C = ay_1 + by_2 + cy_3, \quad D = az_1 + bz_2 + cz_3$$

in the equation $s_1 = 0$, and also in the condition 3°. It turns out that we then get only 8 independent equations between the 9 unknown coefficients; the complete solution therefore contains one *parameter* u . A convenient form of the parametric solution is given by

$$\begin{aligned} 8A &= 4a + (4-u)b + (u-5)c \\ 8B &= ua + ub + (9-2u)c \\ 8C &= (9-2u)a + ub + uc \\ 8D &= (u-5)a + (4-u)b + 4c. \end{aligned}$$

Among the possible values for u , two choices seem to be of particular interest:

In analogy with Brun's formula (3.2), we may want a *correction term involving only the first and the last ordinate*. This means that we must have

$$B = C = \frac{3}{8}(x_3 - x_0) = \frac{3}{8}(a + b + c),$$

and so $u=3$. The modified form of (1.3) then becomes

$$(7.2) \quad \int_{x_0}^{x_0+a+b+c} f(x) dx \approx \frac{a+b+c}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3(c-a)}{8} (y_3 - y_0).$$

Probably the *most accurate* formula, however, results from the following consideration: We have seen that the first coefficient (6.3) of the error term in Brun's formula, and so the coefficient r_2 of (2.2), is divisible by the *square* of the difference $b-a$, and hence becomes very small when the ordinates are nearly equidistant. In the case $n=3$, we can similarly demand that the coefficient s_2 of (7.1) shall be *of the second degree in the differences* $b-a$, $c-a$ and $c-b$. A closer examination shows that we must then choose $u = \frac{9}{2}$, which gives the approximation

$$(7.3) \int_{x_0}^{x_0+a+b+c} f(x) dx \approx \frac{1}{16} \{ (8a-b-c)y_0 + 9(a+b)y_1 + 9(b+c)y_2 + (-a-b+8c)y_3 \}.$$

In analogy with (7.2), we could also have used the original formula (1.3) with a correction term, but this term would be just as complicated as the whole of the above expression.

For the formula (7.3), the coefficient s_2 of (7.1) takes the form

$$\begin{aligned} s_2 &= -\frac{1}{12} \{ (a+b+\frac{1}{4}c)(b-a)^2 + (b+c+\frac{1}{4}a)(c-b)^2 + (c+a+\frac{1}{4}b)(a-c)^2 \} \\ &= -\frac{1}{48} \{ 9(a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)^3 \}. \end{aligned}$$

Since (2.5) contains the fourth derivative, the corresponding coefficient s_3 will also vanish for $a=b=c$. It is, however, not of the second degree in the differences.

8. Generalization to higher order formulae. As already mentioned, a generalization to cases with $n \geq 4$ in (1.1) is hardly practical. It turns out, however, that Brun's formula (3.2) and the modified three-eighths rule (7.2) are both special cases of a general formula, which may be worth while mentioning. In fact, we can always get second degree accuracy from a "correction term" with the factor $y_n - y_0 = f(x_n) - f(x_0)$.

Let (1.1) be the formula for equidistant ordinates, so that in particular

$$(8.1) \quad K_0 + K_1 + \dots + K_n = 1,$$

$$(8.2) \quad K_0 = K_n, \quad K_1 = K_{n-1}, \quad K_2 = K_{n-2}, \quad \dots$$

We introduce

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a_1, \quad x_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

and want to find the "best possible" approximation

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1+a_2+\dots+a_n} f(x) dx &\approx (a_1+a_2+\dots+a_n) [K_0 f(0) + K_1 f(a_1) + K_2 f(a_1+a_2) + \dots \\ &+ K_n f(a_1+a_2+\dots+a_n)] + (A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n) [f(a_1+a_2+\dots+a_n) - f(0)], \end{aligned}$$

with indeterminate coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$. We expand all terms in Taylor series, and can then *divide out* by $a_1 + a_2 + \dots + a_n = x_n - x_0$. In what remains, the terms with $f(0)$ on both sides will coincide, because of (8.1). To make also the terms with $f'(0)$ coincide, we must have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) &= K_1 a_1 + K_2 (a_1 + a_2) + \dots \\ &+ K_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n, \end{aligned}$$

which should be an identity in $a_1, a_2, \dots, a_n$. This determines uniquely the coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$. Utilizing (8.1-2), we find

$$(8.3) \quad \begin{cases} A_1 = -A_n = K_0 - \frac{1}{2} \\ A_2 = -A_{n-1} = K_0 + K_1 - \frac{1}{2} \\ A_3 = -A_{n-2} = K_0 + K_1 + K_2 - \frac{1}{2} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

If in particular $n = 2m + 1$ is odd, then the middle coefficient $A_{m+1} = 0$.

Since $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0$, the correction term vanishes in the equidistant case $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

The formulae (3.2) and (7.2) are immediate consequences of (8.3) with $n = 2$ and $n = 3$ respectively. For $n = 4$, we get the following modification of Cotes' formula (1.4):

$$\int_{x_0}^{x_0+a+b+c+d} f(x) dx \approx \frac{a+b+c+d}{90} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) + \frac{19(d-a) + 3(c-b)}{45} (y_4 - y_0).$$

As was the case with Brun's formula (cf. the concluding remarks of Section 4), the series method does not lead to a suitable error term. We could get such a term from the *substitution* method of Section 5, but we shall see that this method leads to an unsatisfactory approximation formula for $n > 2$.

The substitution (5.1) is immediately generalized to arbitrary order n . We put $x = g(z)$, where $g(z)$ is a polynomial of degree n , determined by

$$g(i) = x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

If then (1.1) is the formula for equidistant ordinates (so that in particular the coefficients K_i depend on n only), then the formula for non-equidistant ordinates is given by

$$(8.4) \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx n(k_0 K_0 y_0 + k_1 K_1 y_1 + \dots + k_n K_n y_n).$$

The factors $k_i = g'(i)$ are easily determined by the interpolation formula of Lagrange:

$$(8.5) \quad k_i = x_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{i-j} + \binom{n}{i}^{-1} \sum_{j \neq i} (-1)^{i-j} \binom{n}{j} \frac{x_j}{i-j}.$$

However, it can be shown that, in the series expansion corresponding to (2.2) or (7.1), the coefficient of $f'(0)$ will not vanish for the approxima-

tion (8.4-5) when $n > 2$. The substitution method, although valuable in the case $n = 2$, must therefore be considered inferior to the series method by higher order integration formulae.

Addendum. Dr. C. B. Haselgrove has informed me that Brun's formula (3.2) is a consequence of the "Simpson-Stieltjes" integration formula

$$\int_{-h}^h f(t) dg(t) \approx \frac{1}{6}(f(-h) + 4f(0) + f(h))(g(h) - g(-h)) \\ + \frac{1}{3}(f(h) - f(-h))(g(h) - 2g(0) + g(-h)),$$

which was obtained by his wife in her thesis for a Ph. D. at Cambridge, England. To get non-equidistant ordinates, we let the intervals $-h \leq t \leq 0$ and $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ correspond by one linear transformation, and the intervals $0 \leq t \leq h$ and $x_0 + a \leq x \leq x_0 + a + b$ by another. This "stretching" of the abscissae can be accomplished by putting $g(t) = \frac{a}{h}t$ in the former interval and $g(t) = \frac{b}{h}t$ in the latter. It is immediately seen that this leads to Brun's formula.

REFERENCES

- [1] V. BRUN: *A generalization of the formula of Simpson for non-equidistant ordinates.* NMT 1 (1953), pp. 10-15.
- [2] K. Z. HEIDAM: *An approximation formula for the determination of areas.* NMT 3 (1955), pp. 107-110.
- [3] W. E. MILNE: *Numerical calculus.* Princeton, 1949.
- [4] J. B. SCARBOROUGH: *Numerical mathematical analysis.* Baltimore and London, 1930.

OM INDFØRELSEN AF EKSPONENTIALFUNKTIONEN

W. FENCHEL

Ud fra ønsket om at finde frem til en behandling af eksponential- og logaritmefunktionerne, der er egnet for den elementære undervisning, især i gymnasiet, har man fra tid til anden taget forskellige definitions- måder for disse funktioner op til nærmere diskussion (jfr. de i litteratur- fortegnelsen nævnte artikler af A. F. Andersen, B. Jessen, H. Bohr, V. Jørgensen og H. Gask). Herved er den klassiske fremgangsmåde med Eulers relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

som udgangspunkt trådt noget i baggrunden, formentlig fordi dens fuld- stændige gennemførelse syntes formelt for indviklet for begyndere. For- målet med den foreliggende lille note er at vise i alle enkeltheder, at den lader sig forme ganske elementært og således, at der kræves et mindstemål af forkundskaber (som er angivet nedenfor). Der udnyttes noget kraf- tigere, end det sædvanligvis sker, Bernoullis ulighed samt den omstændig- hed, at man jo også har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = e^x.$$

Man har vel også indvendt mod dette udgangspunkt, at det må fore- komme artificielt. Fra et rent matematisk synspunkt kan man jo nok være enig heri. Tages imidlertid eksponentialfunktionens mangfoldige anvendelser i fysik, biologi og socialvidenskab til beskrivelse af størrel- sers voksen og aftagen i betragtning, må udtrykket $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ anses for et endog særdeles nærliggende udgangspunkt. Man behøver blot at tænke på dette udtryks interpretation som den slutkapital, som en kapital af stør- relsen 1 vokser til i løbet af n år, når den forrentes med $100x\%$ p.a. og renten tilskrives hvert n -tedel år.

1. Forudsætninger. I de følgende afsnit 2 og 3 benyttes: begrebet grænseværdi for en talfølge, de simple regneregler for sådanne grænseværdier, sætningen om, at en opad begrænset, aldrig aftagende talfølge har en grænseværdi, og at denne er større end eller lig med hvert af følgenes elementer, samt den tilsvarende sætning for aldrig voksende følger.

Endvidere benyttes reglerne for potenser med heltallige eksponenter og endelig Bernoullis ulighed:

For ethvert positivt helt tal n og ethvert reelt tal $z \geq -1$ gælder

$$(1+z)^n \geq 1+nz.$$

Som bekendt vises dette sidste let ved induktion. For $n=1$ er uligheden nemlig rigtig, og forudsættes den gyldig for et positivt helt tal n , fås ved multiplikation med $1+z \geq 0$:

$$(1+z)^{n+1} \geq (1+nz)(1+z) = 1+(n+1)z+nz^2 \geq 1+(n+1)z,$$

altså uligheden for $n+1$.

2. Eksponentialfunktionens definition. Lad x være et vilkårligt, men foreløbig fast reelt tal. Med N betegnes et fast helt tal større end $|x|$, og n gennemløber værdierne $N, N+1, N+2, \dots$. Da er $1+\frac{x}{n} > 0$, og talfølgen

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

har positive elementer. For at vise, at den er aldrig aftagende, betragtes

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Grundtallet i potensen på højre side er positivt, da det er forholdet mellem to positive tal. Bernoullis ulighed kan derfor anvendes, hvilket giver

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \geq \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1,$$

altså $a_n(x) \leq a_{n+1}(x)$, som påstået¹. Anvendes dette med $-x$ i stedet for x , fås, at følgen

¹) Det bemærkes, at dette skridt kan forenkles yderligere ved, at man kun lader n gennemløbe værdierne $N, 2N, 2^2N, \dots$, hvilket kan ske uden ændring af de følgende beviser. Man har da kun brug for $a_{2n}(x) \geq a_n(x)$, hvilket fremgår af

$$a_{2n}(x) = \left(1 + \frac{x}{2n}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{4n^2}\right)^{2n} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{2n} = a_n(x).$$

$$b_n(x) = \frac{1}{a_n(-x)} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

er aldrig voksende.

For at sammenligne $a_n(x)$ og $b_n(x)$ betragtes

$$\frac{a_n(x)}{b_n(x)} = a_n(x)a_n(-x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Da $x^2 < N^2 \leq n^2$, er højre side ≤ 1 . Man får altså med benyttelse af de foregående resultater

$$a_N(x) \leq a_n(x) \leq b_n(x) \leq b_N(x),$$

hvoraf ses, at følgen $a_n(x)$ er opad og følgen $b_n(x)$ nedad begrænset. Begge følger er altså konvergente.

Anvendes Bernoullis ulighed på ovenstående udtryk for $a_n(x)/b_n(x)$, fås

$$\frac{a_n(x)}{b_n(x)} \geq 1 - \frac{x^2}{n},$$

altså

$$0 \leq b_n(x) - a_n(x) \leq b_n(x) \frac{x^2}{n} \leq b_N(x) \frac{x^2}{n}.$$

Heraf sluttes, at $b_n(x) - a_n(x) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, og dette medfører, at følgerne $a_n(x)$ og $b_n(x)$ har samme grænseværdi, som betegnes med $E(x)$.

Som grænseværdi for en aldrig aftagende følge med positive elementer er $E(x) > 0$ for ethvert x . Specielt haves $E(0) = 1$.

3. Funktionalligningen. Lad r og s være vilkårlige, men i det følgende faste reelle tal. Med N betegnes nu et fast helt tal, for hvilket $N > |r| + |s|$, altså specielt $N > |r|$ og $N > |s|$, og n skal igen gennemløbe værdierne

$N, N+1, N+2, \dots$. Da er $1 + \frac{r}{n}$ og $1 + \frac{s}{n}$ begge positive.

Man betragter produktet

$$a_n(r)a_n(s) = \left(1 + \frac{r+s}{n} + \frac{rs}{n^2}\right)^n.$$

For de benyttede værdier af n er grundtallet i potensen på højre side positivt.

Antages nu først, at $rs \geq 0$, fås

$$a_n(r)a_n(s) \geq \left(1 + \frac{r+s}{n}\right)^n = a_n(r+s).$$

Erstattes heri r og s med $-r$ og $-s$, fås $a_n(-r)a_n(-s) \geq a_n(-r-s)$, og ved at gå over til de reciprokke tal $b_n(r)b_n(s) \leq b_n(r+s)$, altså i alt

$$a_n(r+s) \leq a_n(r)a_n(s) \leq b_n(r)b_n(s) \leq b_n(r+s).$$

For $n \rightarrow \infty$ konvergerer de to yderste følger mod $E(r+s)$ og de to midterste mod $E(r)E(s)$. Følgelig har man

$$E(r)E(s) = E(r+s).$$

Er derimod $rs < 0$, fås

$$a_n(r)a_n(s) \leq \left(1 + \frac{r+s}{n}\right)^n = a_n(r+s)$$

og $b_n(r)b_n(s) \geq b_n(r+s)$, altså

$$a_n(r)a_n(s) \leq a_n(r+s) \leq b_n(r+s) \leq b_n(r)b_n(s),$$

hvoraf man som før slutter, at $E(r)E(s) = E(r+s)$.

Indføres betegnelsen $e = E(1)$, giver gentagen anvendelse af den fundne funktionalligning, at $E(p) = e^p$ for ethvert helt tal $p \geq 0$ og, da $E(p)E(-p) = E(0) = 1$, at $E(-p) = e^{-p}$. Dette retfærdiggør indførelsen af betegnelsen e^x for $E(x)$.

4. Differentiabilitet. For hvert reelt tal x og $N > |x|$ er

$$e^x \geq \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \geq 1 + x$$

ifølge Bernoullis ulighed. Heraf slutes, at $e^x \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$, og ved hjælp af $e^x = 1/e^{-x}$, at $e^x \rightarrow 0$ for $x \rightarrow -\infty$. Erstattes i uligheden x med $-x$, fås $e^{-x} \geq 1 - x$, altså for $x < 1$:

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

For hvert reelt tal $h < 1$ har man følgelig

$$1 + h \leq e^h \leq \frac{1}{1-h} = 1 + \frac{h}{1-h},$$

altså for $h > 0$ resp. $h < 0$

$$1 \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq \frac{1}{1-h} \quad \text{og} \quad 1 \geq \frac{e^h - 1}{h} \geq \frac{1}{1-h}.$$

Heraf fås $(e^h - 1)/h \rightarrow 1$ for $h \rightarrow 0$ og derfor

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow e^x \quad \text{for } h \rightarrow 0,$$

hvormed differentiability af funktionen e^x og formelen $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ er bevist.

Hermed har man de egenskaber ved funktionen e^x , som tillader at definere og undersøge den naturlige logaritme som dens omvendte funktion og derefter at indføre de andre eksponential- og logaritmefunktioner på velkendt måde.

LITTERATUR

- A. F. ANDERSEN: *Ekspontional- og Logaritmefunktioner*. Mat. Tidsskr. A 1934, s. 38–64.
 B. JESSEN: *Hvorledes behandler man simplest Potenslæren?* Mat. Tidsskr. A 1938, s. 25–34.
 H. BOHR: *Om Logaritme- og Ekspontionalfunktion*. Mat. Tidsskr. A 1939, s. 46–81.
 V. JØRGENSEN: *Om indførelsen af logaritme og ekspontionalfunktion*. Mat. Tidsskr. A 1948, s. 41–46.
 H. GASK: *Exponential- och logaritmefunktionen på gymnasiet*. Nord. Mat. Tidskr. 1 (1953), s. 156–160.

TWO ELEMENTARY PROOFS CONCERNING SIMPLE QUADRATIC FIELDS

VEIKKO ENNOLA

1. In this paper we consider a quadratic algebraic field $k(\sqrt{m})$, where m is in absolute value a square-free natural number greater than 1. (We disregard the simple field $k(\sqrt{-1})$.) We shall give two proofs of the following well-known

THEOREM. *The field $k(\sqrt{m})$ can be simple¹ only if $|m|$ is a prime or a product of two unequal primes neither of which is congruent to 1 (mod 4).*

Our first proof shows, moreover, that for $m < 0$ $|m|$ must be a prime not congruent to 1 (mod 4).

For $m < 0$ all the simple fields have been enumerated, except possibly one. For $m > 0$ one can derive the theorem in many ways by considering the classes of ideals of the field $k(\sqrt{m})$ (cf. [2], footnote on p. 3). It is of importance in the study of the existence of Euclid's algorithm in real quadratic fields. Since, namely, the existence of Euclid's algorithm implies the uniqueness of the factorization in $k(\sqrt{m})$, the field can be Euclidean only if m is of the form given in the theorem (as indicated first by Behrbohm and Rédei [1]).

For $m > 0$ Inkeri [2] has given a proof which is based on the elementary theory of ideals. Our first proof is an improvement of this and shows that the theory of ideals is not needed. Our second proof is a very short one based on Dirichlet's theorem concerning primes in an arithmetic progression.

2. Let $m = pm_1$, where p is an odd prime and m_1 a rational integer. Suppose that the field $k(\sqrt{m})$ is simple. Let $\alpha = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{m})$ be the highest

¹ The term "simple algebraic field" means that the fundamental theorem of arithmetic is true in the field, i.e. the expression of an integer of the field (not zero or unit) as a product of primes is unique, apart from the order of primes, the presence of units, and ambiguities between associated primes.

common divisor of the numbers p and $\sqrt{m}$. Then it follows from the uniqueness of the factorization in $k(\sqrt{m})$ that we can write

$$\alpha = \xi_1 p + \xi_2 \sqrt{m},$$

where ξ_1 and ξ_2 are algebraic integers of the field $k(\sqrt{m})$. Writing $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1 \sqrt{m})$ and $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_2 + y_2 \sqrt{m})$, we can establish that $p|a$, which implies $p|n(\alpha)$. On the other hand, $n(\alpha)|p^2$ and $n(\alpha)|m$, so that $n(\alpha) = \pm p$, i.e.

$$(1) \quad a^2 - mb^2 = \pm 4p.$$

Suppose for a while that $m \equiv 3 \pmod{4}$. Denoting the highest common divisor of the numbers 2 and $1 + \sqrt{m}$ by $\beta = c + d\sqrt{m}$, we have also

$$\beta = \eta_1 \cdot 2 + \eta_2 (1 + \sqrt{m}),$$

where η_1 and η_2 are algebraic integers of the field $k(\sqrt{m})$. Writing $\eta_1 = u_1 + v_1 \sqrt{m}$ and $\eta_2 = u_2 + v_2 \sqrt{m}$, we see that $c \equiv d \pmod{2}$, whence $2|n(\beta)$. Since $n(\beta)|4$ and $n(\beta)|(1-m)$, we find that $n(\beta) = \pm 2$, i.e.

$$(2) \quad c^2 - md^2 = \pm 2.$$

For each m we consider the quotient $\gamma = \alpha/\alpha'$, where α' denotes the algebraic conjugate of α . Since $p|a$, we can write $a = pa_1$. Then (1) implies

$$\gamma = \pm \frac{pa_1^2 \mp 2 + a_1 b \sqrt{m}}{2}.$$

Now $a \equiv b \pmod{2}$ and, especially, $a \equiv b \equiv 0 \pmod{2}$ if $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$, because α is an integer. But then the same conditions are also satisfied by $pa_1^2 \mp 2$ and $a_1 b$. Thus γ is an integer, and, having the norm 1, it is a unit of the field $k(\sqrt{m})$.

In the case $m \equiv 3 \pmod{4}$ we take, in addition, the quotient $\delta = \beta/\beta'$. By (2), we have

$$\delta = \pm \frac{c^2 + md^2 + 2cd\sqrt{m}}{2}.$$

Since $c^2 + md^2$ is even, δ is an integer and hence also a unit of the field $k(\sqrt{m})$.

Let first $m < 0$. If $|m|$ is a composite number or a prime congruent to 1 $\pmod{4}$, then $|m| \geq 5$ so that the only units of the field are ± 1 . In the former case the number α corresponding to some odd rational prime divisor p of m satisfies $\alpha = \pm \alpha'$, and thus a or b is zero. This is impossible,

by (1). In the latter case $\beta = \pm \beta'$ similarly, so that c or d is zero, which contradicts (2).

Suppose next that $m = pm_1 > 0$ and $m_1 > 1$. Let ε be the fundamental unit of $k(\sqrt{m})$. Then $\gamma = \pm \varepsilon^h$, say. If now h is even, say $2k$, we have

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{\varepsilon^k} = \pm \frac{\alpha'}{\varepsilon'^k} = \pm \alpha_0',$$

since $\varepsilon' = \pm \varepsilon^{-1}$. Write $\alpha_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0\sqrt{m})$, whence either a_0 or b_0 is zero. But then the equality

$$a_0^2 - mb_0^2 = 4n(\alpha_0) = \pm 4n(\alpha) = \pm 4p$$

is impossible. Thus h is odd and hence $n(\varepsilon) = 1$.

If, in particular, $m \equiv 3 \pmod{4}$, we conclude, in the same way, that $\delta = \pm \varepsilon^l$, where l is odd. Now, however, $n(\alpha\beta) = \pm 2p$ and $\alpha\beta/\alpha'\beta' = \pm \varepsilon^{h+l}$, which is also impossible, since $h+l$ is even. Hence for $m \equiv 3 \pmod{4}$ $m_1 = 1$ so that our theorem holds.

Suppose therefore that $m \equiv 1, 2 \pmod{4}$. Let $m = p_1 p_2 m_2$, where p_1, p_2 are odd primes and $m_2 > 1$. Then there exist integers α_1 and α_2 such that

$$\begin{aligned} n(\alpha_1) &= \pm p_1, & \alpha_1 &= \pm \varepsilon^{h_1} \alpha_1', \\ n(\alpha_2) &= \pm p_2, & \alpha_2 &= \pm \varepsilon^{h_2} \alpha_2', \end{aligned}$$

where h_1 and h_2 are odd. This implies that

$$n(\alpha_1 \alpha_2) = \pm p_1 p_2, \quad \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1' \alpha_2'} = \pm \varepsilon^{h_1 + h_2},$$

which is a contradiction, since $h_1 + h_2$ is even. Thus the number m can have at most two distinct rational prime divisors. If we can show, furthermore, that $n(\varepsilon) = -1$ when $k(\sqrt{m})$ is simple and all odd rational prime divisors of m are congruent to 1 (mod 4), our theorem will be proved.

For such m we can write

$$m = x^2 + y^2,$$

i.e.

$$(3) \quad x^2 = -(y^2 - m),$$

where x and y are rational integers, not both even. Suppose, for example, that x is odd. Let q be some rational prime divisor of x . If q were prime in $k(\sqrt{m})$, it follows from the uniqueness of the factorization that $q|(y + \sqrt{m})$ or $q|(y - \sqrt{m})$, which is impossible. Hence q or $-q$ can be divided

into two conjugate prime factors in $k(\sqrt{m})$. For x we thus obtain a factorization of the form

$$x = \pm \pi_1 \pi_1' \pi_2 \pi_2' \dots \pi_r \pi_r'.$$

Since the factorization of $y - \sqrt{m}$ can be derived from that of $y + \sqrt{m}$ by replacing each factor by its conjugate, it follows that (3) can be valid, i.e. x^2 and $y^2 - m$ can differ in sign, only if there exists a unit in $k(\sqrt{m})$ which has the norm -1 . Hence also $n(\varepsilon) = -1$.

3. For the second proof, suppose that $k(\sqrt{m})$ is simple and that, contrary to the assertion, m could be written in the form $m = m_1 m_2$, where m_1 and $|m_2|$ are natural numbers greater than 1 and $m_1 \equiv 1 \pmod{4}$. It follows immediately from Dirichlet's theorem concerning primes in an arithmetic progression that there exists a rational prime p congruent to 5 (mod 8) such that Kronecker's symbols

$$\left(\frac{p}{m_1}\right) = \left(\frac{p}{|m_2|}\right) = -1.$$

Then

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{m_1}{p}\right) \left(\frac{|m_2|}{p}\right) = \left(\frac{p}{m_1}\right) \left(\frac{p}{|m_2|}\right) = 1,$$

and there exists a rational integer t such that $p|(t^2 - m)$. If p were prime in $k(\sqrt{m})$, $p|(t + \sqrt{m})$ or $p|(t - \sqrt{m})$, which is impossible. Consequently p is divisible, i.e.

$$p = \pm \frac{a + b\sqrt{m}}{2} \cdot \frac{a - b\sqrt{m}}{2},$$

whence

$$a^2 - mb^2 = \pm 4p.$$

Since

$$\left(\frac{\pm 4p}{m_1}\right) = \left(\frac{p}{m_1}\right) = -1,$$

this is a contradiction.

REFERENCES

- [1] H. BEHRBOHM — L. RÉDEI: *Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern*. J. reine angew. Math. 174 (1936), S. 192–205.
- [2] K. INKERI: *Neue Beweise für einige Sätze zum Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern*. Ann. Univ. Turkuensis A IX, 1 (1948).

BOKMELDINGER

Enzyklopädie der Elementarmathematik, I, II. Redaktion: P. S. Alexandroff — A. I. Markuschewitsch — A. J. Chintschin. Übersetzung aus dem Russischen. (Hochschulbücher für Mathematik 7, 8.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954, 1956.

Band I: *Arithmetik*. 11+403 S. DM 26.70.

Band II: *Algebra*. 9+405 S., 33 Fig. DM 27.30.

(Innholdsfortegnelse i NMT 5 (1957), s. 151.)

I förordet anges syftet med verket: »Den av Ryska akademien för pedagogiska vetenskaper utgivna encyklopedin över elementarmatematik är ämnad att vara en handbok för matematiklärare vid högre skolor och för studenter i fysikalisk-matematiska fakulteter vid pedagogiska institut Den skall ge en systematisk framställning av de vetenskapliga grundvalarna för skolmatematiken ...«. Verket är planerat på sju band.

Första bandet är ägnat åt aritmetiken. Det inleds med en historik av Baschmakowa och Juschkewitsch om uppkomsten av beteckningssystemen för talen. I nästa avsnitt, författat av Proskurjakow, göres läsaren bekant med de grundläggande begreppen mängder, grupper, ringar och kroppar, varefter följer en noggrann introduktion av de reella och komplexa talen. Därpå följer en uppsats av Chintschin om elementen i talteorin såsom delbarhet, diofantiska approximationer, algebraiska och transcendent tal. Bandet avslutas med ett avsnitt om siffreräkning av Bradis. Författaren beklagar, att detta område behandlas styvmoderligt i de ryska skolorna.

Andra bandet behandlar algebra. Dess första avsnitt, skrivet av Uskow, är ägnat åt linjär algebra: determinanter, linjära ekvationssystem, linjära vektorrum och linjära transformationer i planet och rymden. Tyvärr behandlas ej kvadratiske former. Sedan följer ett långt avsnitt om polynomringar och algebraiska ekvationer av Okunjew. Algebrans fundamental-sats bevisas med minimum-principen, vilket ej passar riktigt bra in i ramen för denna bok. Vidare behandlas frågan om lösning av algebraiska ekvationer med radikaler, varvid ges en kort framställning av grunderna i Galois'ska teorin. I det sista avsnittet, som är skrivet av Domorjad,

behandlas numeriska metoder för ekvationslösning. Man finner där t. ex. Sturms kedja, Horners metod, Lagranges kedjebåksmetod och Graeffes metod, den sista under benämningen Lobatschewskis metod.

Verket är skrivet med temperament och utgör i stora delar en medryckande läsning. Framställningen är klar och anlagd på lättbegriplighet. Mycket arbete måste ha nedlagts på samordningen av de olika avsnitten. Dock finns det enstaka brister. Så t. ex. saknar man i Chintschins trevliga artikel om talteori anknytning till föregående avsnitt, där analoga frågor behandlas. Okunjews artikel om polynomringar och algebraiska ekvationer är ej lyckad. Den är långrandig och delvis tungläst. Förekomsten av illustrerande exempel i texten är ojämn. Det finns inte ett enda genomräknat exempel i kapitlet om determinanter och linjära ekvationssystem, medan avsnittet om numerisk ekvationslösning är välförsett.

Man märker överallt en strävan att framhäva ryska matematikers insatser. Det är intressant att ta del av vad som sägs om matematikens väsen från den dialektiska materialismens ståndpunkt (Bd. I, s. 63):

»Motsatt uppfattning framföres av den borgerlig-idealistiska sidan. Enligt denna uppfattning är matematiken en produkt av den fritt skapande människoanden och dess grundläggande begrepp är à priori säregna för vårt förstånd, d.v.s. före varje erfarenhet givna åt människan redan vid födseln. Felaktigheten i dylika åsikter beträffande matematiken bevisas millioner gånger genom vår samlade praktiska verksamhet, då i tillämpningarna matematiken alltid ger vad vi förväntade. Men detta är blott därför fallet, emedan de matematiska sanningarna är en återspeglning av naturens egen objektiva lagbundenhet.«

Ulf Hellsten

C. F. Gauss Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955. Herausgegeben von Hans Reichardt. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 251 S. Leinen DM 25.80.

(Innehållsfortegnelse i NMT 5 (1957), s. 198.)

Den foreliggende bog indeholder bidrag fra elleve forskellige forfattere til belysning af C. F. Gauss' videnskabelige arbejder, og den giver et levende indtryk af, hvor dybtgående hans indflydelse har været. Det er betagende at følge gangen i hans undersøgelser, der omfatter både matematik, astronomi, geodæsi og fysik.

Gauss betegner talteorien som matematikens dronning, og han har viet denne sine bedste kræfter. Hans berømte ungdomsarbejde »Disquisitiones arithmeticae« og alle hans senere talteoretiske afhandlinger omtales indgående. Bemærkelsesværdigt er særlig afsnittet om de såkaldte Gauss'ske summer.

I sin 1799 ved universitetet i Helmstedt forsvarede doktorafhandling har Gauss givet det første af ialt fire beviser for algebraens fundamental-sætning, men først i det 50 år senere fremkomne fjerde bevis opererer han uden betænkning med de komplekse tal, idet han henviser til, at disse nu er blevet hver mands eje.

Ved hjælp af det aritmetisk-geometriske middeltal var Gauss i stand til at beregne de elliptiske integraler, og studiet af lemniskatfunktionen førte ham til at opbygge en teori for de dobbeltperiodiske funktioner. Det er interessant at følge, hvor langt han her var nået et kvart århundrede før Abel og Jacobi. Men Gauss' undersøgelser desangående blev ikke tilendeført, og de blev først publiceret mange år efter hans død. Det var derfor Abel og Jacobi, som høstede æren for at have grundlagt de elliptiske funktioners teori. Blandt Gauss' bidrag til funktionsteoriens udvikling må endvidere nævnes hans klassiske undersøgelser over de hypergeometriske funktioner, der tillige indeholder en videreførelse af Eulers teori for gammafunktionen.

Hvor omfattende Gauss' matematiske undersøgelser end var, så har han dog ofret mest tid på sine astronomiske og geodætiske arbejder. Som direktør for observatoriet i Göttingen og leder af den hannoveranske gradmåling har han med en aldrig svigtende tålmodighed målt koordinater for stjerner og kirketårne. Den 1. januar 1801 fandt den italienske astronom Piazzi den lille planet Ceres, som han observerede i 41 dage, hvor den bevægede sig over en bue på 9° . Man var nu stillet over for den opgave at bestemme banen. Dette problem løste Gauss, og hans navn blev derved med ét slag kendt i vide kredse. I det i 1809 udgivne værk »Theoria motus corporum coelestium« har Gauss givet en elegant fremstilling af de dengang aktuelle problemer vedrørende banebestemmelser samt en begrundelse for de mindste kvadraters metode.

Da H. Chr. Schumacher i 1815 var blevet professor i astronomi ved Københavns universitet og det følgende år direktør for Den Danske Gradmåling, fik han det hverv at måle en meridianbue langs Jyllands østkyst ned til Altona. Den af Gauss ledede hannoveranske gradmåling er en direkte fortsættelse af den danske, og det nære venskab mellem Gauss og Schumacher førte til et intimt samarbejde, hvorom den udgivne brevsveksling bærer vidnesbyrd. I en halv snes år drog Gauss sommer efter sommer ud i marken for at foretage geodætiske målinger. Han konstruerede et nyt instrument, heliotropen, der har vist sig meget nyttigt, men endnu større betydning fik hans undersøgelser vedrørende den teoretiske geodæsi, der førte denne videnskab ind på nye baner, og som tillige virkede befrugtende på hans geometriske arbejder. Den hannoveranske gradmåling gav som resultat en liste over koordinater for omtrent 3000 punk-

ter. Det har været et krævende arbejde at udregne disse ved mindste kvadraters metode, og Gauss anslår selv, at hans geodætiske beregninger har omfattet mere end en million tal. Bessel har bebrejdet ham, at han ikke lod sig aflaste for en del af dette arbejde, som dog kunne være udført af ringere kræfter. Men Gauss afviser skarpt denne tanke, og det er nok rigtigt, at hans dybe indtrængen i vidt forskellige områder af de eksakte videnskaber har været en væsentlig forudsætning for hans personligheds udvikling.

N. E. Nørlund

MOTTATTE BØKER

Ralph P. Boas, Jr. — R. Creighton Buck: *Polynomial expansions of analytic functions*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 19.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 8+77 S., 16 Fig. DM 18.60.

Introduction: Generalities. Representation formulas with a kernel. The method of kernel expansion. Lidstone series. A set of Laguerre polynomials. Generalized Appell polynomials 1–21 * *Representation of entire functions*: General theory. Multiple expansions. Appell polynomials. Sheffer polynomials. More general polynomials. Polynomials not in generalized Appell form 21–47 * *Representation of functions that are regular at the origin*: Integral representations. Brenke polynomials. More general polynomials. Polynomials generated by $A(w)(1-zg(w))^{-\lambda}$. Special hypergeometric polynomials. Polynomials not in generalized Appell form 47–66 * *Applications*: Uniqueness theorems. Functional equations 66–71 * *Bibliography* 71–74 * *Index* 75–77.

I. N. Bronstein — K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*. (Aus dem Russischen übersetzt.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1958. 12+548 S., 427 Fig. In Plastikfolie DM 22.50.

Tabellen und Kurven: Tabellen: Tabellen der elementaren Funktionen 2–58 * Tabellen spezieller Funktionen 59–66 * Graphische Darstellungen: Elementare Funktionen 67–83 * Die wichtigsten Kurven 83–95 * *Elementarmathematik*: Näherungsrechnung 96–106 * Algebra: Identische Umformungen 107–114 * Gleichungen 114–133 * Ergänzende Kapitel der Algebra 133–140 * Geometrie: Planimetrie 141–145 * Stereometrie 146–152 * Trigonometrie: Ebene Trigonometrie 153–163 * Sphärische Trigonometrie 163–165 * Hyperbolische Trigonometrie 165–168 * *Analytische Geometrie und Differentialgeometrie*: Analytische Geometrie: Analytische Geometrie der Ebene 169–184 * Analytische Geometrie des Raumes 184–199 * Differentialgeometrie: Ebene Kurven 200–214 * Raumkurven 214–218 * Flächen 218–225 * *Grundzüge der Analysis*: Einführung in die Analysis 226–258 * Differentialrechnung 259–282 * Integralrechnung: Unbestimmte Integrale 283–330 * Be-

stimmte Integrale 330–354 * Kurvenintegrale, mehrfache Integrale und Oberflächenintegrale 354–374 * Differentialgleichungen: Gewöhnliche Differentialgleichungen 375–404 * Partielle Differentialgleichungen 405–423 * *Ergänzende Kapitel der Analysis*: Komplexe Zahlen und Funktionen einer komplexen Veränderlichen 424–446 * Vektorrechnung: Vektoralgebra; die Vektorfunktion eines Skalars 447–455 * Feldtheorie 455–472 * Fourierreihen (harmonische Analyse) 473–482 * Variationsrechnung 483–506 * *Auswertung von Beobachtungsergebnissen*: Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler 507–514 * Empirische Formeln und Interpolation 515–527 * Literatur 528–531 * Sachregister 532–548.

Richard Hubert Bruck: *A survey of binary systems*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 20.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 8+185 S. DM 36.00.

Note on the bibliography 8 * Note on symbols 8 * Systems and their generation 1–23 * The associative law 23–55 * Isotopy 56–60 * Homomorphism theory of loops 60–92 * Lagrange's theorem for loops 92–94 * Nilpotency of loops 94–110 * Moufang loops 110–130 * Commutative Moufang loops 130–163 * Bibliography: A. Books 163–164 * B. Selected papers 164 * C. The main bibliography 164–178 * D. Supplement 178–181 * Index 182–185.

Calculus of variations and its applications. Volume VIII: Proceedings of the eighth symposium in applied mathematics of the American Mathematical Society. Edited by Lawrence M. Graves. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1958. 5+153 pp. sh. 58/–.

Editor's preface 5 * Eric Reissner: On variational principles in elasticity 1–6 * D. C. Drucker: Variational principles in the mathematical theory of plasticity 7–22 * P. G. Hodge, Jr.: Discussion of D. C. Drucker's paper "Variational principles in the mathematical theory of plasticity" 23–26 * Joseph B. Keller: A geometrical theory of diffraction 27–52 * J. B. Diaz: Upper and lower bounds for eigenvalues 53–78 * J. L. Synge: Stationary principles for forced vibrations in elasticity and electromagnetism 79–88 * H. F. Weinberger: A variational computation method for forced-vibration problems 89–91 * M. M. Schiffer: Applications of variational methods in the theory of conformal mapping 93–113 * Richard Bellman: Dynamic programming and its application to variational problems in mathematical economics 115–138 * S. Chandrasekhar: Variational methods in hydrodynamics 139–141 * E. H. Rothe: Some applications of functional analysis to the calculus of variations 143–151 * Index 153.

Mahlon M. Day: *Normed linear spaces*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 21. Reihe Reelle Funktionen.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 139 S. DM 28.00.

Linear spaces 1–23 * Normed linear spaces 24–44 * Completeness, compactness, and reflexivity 44–58 * Unconditional convergence and bases 58–77 * Compact convex sets and continuous function spaces 77–96 * Norm and order 96–110 *

Metric geometry in normed spaces 110–121 * Reader's guide 121–124 * Bibliography 124–131 * Index of symbols 132–134 * Index 135–139.

Paul B. Fischer: *Arithmetik*. Dritte Auflage. (Sammlung Göschel 47.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 152 S., 19 Fig. DM 2.40.

Zählen und Zahlen 5–17 * Der Bereich der natürlichen Zahlen 18–55 * Der Bereich der ganzen Zahlen 55–67 * Der Bereich der rationalen Zahlen 68–90 * Der Bereich der reellen Zahlen 90–129 * Der Bereich der komplexen Zahlen 129–137 * Arithmetische und geometrische Reihen 138–141 * Zinseszins- und Rentenrechnung 141–143 * Kombinatorik 143–147 * Der binomische Lehrsatz 147–149 * Literatur 150 * Namenverzeichnis 150 * Sachverzeichnis 151–152.

Werner Graeb: *Lineare Algebra*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 97.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 11+219 S., 7 Fig. DM 35.70, Ganzl. DM 39.00.

Lineare Räume 1–19 * Lineare Abbildungen und Gleichungssysteme 19–42 * Determinanten 42–64 * Orientierte lineare Räume 65–72 * Multilineare Algebra 73–113 * Der Euklidische Raum 113–132 * Lineare Abbildungen Euklidischer Räume 133–150 * Symmetrische Bilinearfunktionen 150–168 * Flächen zweiter Ordnung 168–183 * Unitäre Räume 183–191 * Invariante Unterräume 192–216 * Literaturverzeichnis 216 * Sachverzeichnis 217–219.

George Green: *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. 7+72 pp. 4to. Nottingham 1828.

A facsimile edition of 1000 copies, printed in 1958 by Wezäta-Melins AB, Göteborg, Sweden for Stig Ekelöf, Chalmers University of Technology. Half cloth binding. Price: U.S. \$ 5.00.

The book will be sent postage paid to any country on remittance of U.S. \$ 5.00 or the equivalent in Swedish kronor to Institute for Theoretical Electricity, Chalmers University of Technology, Göteborg S, Sweden.

Introductory observations 1–22 * Application of the preceding results to the theory of electricity 22–50 * Application of the preliminary results to the theory of magnetism 50–72.

Karl Peter Grotemeyer: *Analytische Geometrie*. (Sammlung Göschel 65/65a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 202 S., 73 Fig. DM 4.80.

Literaturverzeichnis 6 * Einleitung 7 * Die Vektoralgebra 7–26 * Das Koordinatensystem 26–31 * Geraden und Ebenen 32–52 * Kugeln 52–60 * Der Matrizenkalkül 60–74 * Abbildungen 74–85 * Bewegungen 85–98 * Ähnliche (äquiforme) Abbildungen 98–99 * Die Flächen 2. Ordnung 100–155 * Einführung in die projektive Geometrie des Raumes 155–176 * Behandlung der Quadriken im Rahmen der projektiven Geometrie 177–199 * Namen- und Sachverzeichnis 200–202.

Wolfgang Haack: *Darstellende Geometrie, I.* Die wichtigsten Darstellungsmethoden, Grund und Aufriss ebenflächiger Körper. Zweite Auflage. (Sammlung Götschen 142.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 113 S., 120 Fig. DM 2.40.

Die wichtigsten Darstellungsmethoden 10–30 * Punkte, Geraden, Ebenen 30–61 * Schnittkonstruktionen von Ebenen und Geraden 61–78 * Ebenflächige Körper 78–95 * Affinität 96–113.

G. H. Hardy — E. M. Wright: *Einführung in die Zahlentheorie.* Nach der 3. Auflage des englischen Originalwerks übersetzt von H. Ruoff. Verlag R. Oldenbourg, München, 1958. 16+480 S., 11 Fig. DM 74.00.

Die Folge der Primzahlen (1) 1–12 * Die Folge der Primzahlen (2) 13–24 * FAREYreihen und ein Satz von MINKOWSKI 25–40 * Irrationalzahlen 41–51 * Kongruenzen und Reste 52–69 * Der FERMATSche Satz und Folgerungen 70–91 * Allgemeine Eigenschaften von Kongruenzen 92–105 * Kongruenzen nach zusammengesetzten Moduln 106–120 * Die Darstellung von Zahlen durch Dezimalbrüche 121–146 * Kettenbrüche 147–174 * Approximation von Irrationalzahlen durch Rationalzahlen 175–201 * Der Fundamentalsatz der Arithmetik in $k(1)$, $k(i)$ und $k(q)$ 202–215 * Einige Diophantische Gleichungen 216–231 * Quadratische Zahlkörper (1) 232–248 * Quadratische Zahlkörper (2) 249–265 * Die zahlentheoretischen Funktionen $\varphi(n)$, $\mu(n)$, $d(n)$, $\sigma(n)$, $r(n)$ 266–277 * Erzeugende Funktionen von zahlentheoretischen Funktionen 278–295 * Die Größenordnung zahlentheoretischer Funktionen 296–309 * Zerfällungen 310–336 * Die Darstellung einer Zahl durch zwei oder vier Quadrate 337–360 * Darstellung durch Kuben und höhere Potenzen 361–386 * Die Folge der Primzahlen (3) 387–421 * Der Satz von KRONECKER 422–442 * Geometrie der Zahlen 443–465 * Anhang. Über Primzahlpaare 466–468 * Literatur 469–471 * Bemerkungen zu den verwendeten Bezeichnungen 472 * Verzeichnis besonderer Symbole 473–474 * Namenverzeichnis 475–477 * Sachverzeichnis 478–480.

Lothar Heffter: *Grundlagen und analytischer Aufbau der projektiven, Euklidischen, nichteuklidischen Geometrie.* Dritte, überarbeitete Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1958. 192 S., 66 Fig. DM 16.80.

A. Grundlagen der Geometrie 9–50 * B. Projektive Geometrie: Projektive Geometrie in den Grundgebilden I. Stufe (Reelle Punktreihe) 51–58 * Projektive Geometrie in den Grundgebilden II. Stufe (Reelle Ebene) 59–74 * Projektive Geometrie im Raum 74–88 * C. Parallelgeometrie: Elemente der Parallelgeometrie 89–99 * Parallelgeometrie der Gebilde II. Grades 99–106 * D. Orthogonalgeometrie: Elemente der Orthogonalgeometrie 107–131 * Orthogonalgeometrie der Gebilde II. Grades 131–134 * E. Nichteuklidische (Cayley–Kleinsche) Geometrie: Absolutes Gebilde. Parallelitäten und Orthogonalitäten. Bewegungen 135–153 * Cayley–Kleinsche Größenlehre 153–177 * Abgeänderte Darstellungsgebiete der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie 177–189 * Sachregister 190–192.

Guido Hoheisel: *Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen*. Dritte, verbesserte Auflage. (Sammlung Göschen 1059.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 124 S. DM 2.40.

Differentialgleichungen erster Ordnung 5–50 * Differentialgleichungen höherer Ordnung 50–112 * Aufgaben zu den partiellen Differentialgleichungen 113–124.

James A. Jenkins: *Univalent functions and conformal mapping*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 18.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 8+169 S., 6 Fig. DM 34.00.

Introduction 1–13 * Modules and extremal lengths 13–27 * Quadratic differentials 27–48 * The general coefficient theorem 48–71 * Canonical conformal mappings 71–85 * Applications of the general coefficient theorem. Univalent functions 85–122 * Applications of the general coefficient theorem. Families of univalent functions 122–130 * Symmetrization. Multivalent functions 130–160 * Bibliography 160–167 * Author index 168 * Subject index 169.

Bengt Lohmander and Stig Rittsten: *Table of the function $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$* . (Lund University, Dept. of Numerical Analysis. Table No. 4.) CWK Gleerup, Lund, 1958. 8 s.

Ph. Lötzbeyer: *Vierstellige Tafeln zum praktischen Rechnen in Unterricht und Beruf*. 17. Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 44 S. DM 3.00.

Zahlentafeln 2–20 * Logarithmentafeln 21–28 * Beurteilung der Genauigkeit 29–32 * Graphisches Rechnen 33–34 * Zusammenstellung wichtiger Formeln 35–44 * Umrechnungstafeln 3. Umschlagseite.

Oystein Ore: *Niels Henrik Abel, mathematician extraordinary*. University of Minnesota Press, Minneapolis, 1957. 277 pp. \$ 5.75.

Family and childhood 5–46 * At the university 49–79 * Journey to the Continent 83–163 * The return 167–225 * Epilogue 229–270 * Bibliography 273 * Index of names 274–277.

Herbert E. Salzer — Charles H. Richard — Isabelle Arsham: *Table for the solution of cubic equations*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1958. 15+161 pp. sh. 58/–.

F. Severi: *Il teorema di Riemann-Roch per curve-superficie e varietà questioni collegate*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 17.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 8+131 S. DM 23.60.

Introduzione. Sistemi lineari di ipersuperficie sopra una varietà 1–16 * II

teorema di Riemann-Roch sopra una curva 16–21 * Il teorema sopra una superficie 21–44 * Richiami sulle nozioni generali di equivalenza algebrica sopra una varietà. Il teorema di Riemann-Roch pei sistemi d'equivalenza sopra una superficie 44–57 * Il teorema di Riemann-Roch (di specie $r-1$) sopra una varietà algebrica V_r 57–95 * Il teorema di Riemann-Roch nei riguardi dell'equivalenza algebrica e razionale 95–117 * Bibliografia 117–125 * Indice dei nomi 126–127 * Indice analitico 128–131.

Karl Strubecker: *Differentialgeometrie, II. Theorie der Flächenmetrik.* (Sammlung Götschen 1179/1179a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 195 S., 14 Fig. DM 4.80.

Literaturverzeichnis 5–6 * Flächenmetrik 7–86 * Vektoranalysis auf Flächen 87–113 * Theorie der Abbildung von Flächen 114–150 * Geodätische Krümmung. Geodätische Linien. Absoluter Parallelismus 151–187 * Namen- und Sachverzeichnis 188–195.

Siegfried Valentiner: *Vektoren und Matrizen.* (Sammlung Götschen 354/354a.) Achte, erweiterte Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958. 202 S., 35 Fig. DM 4.80.

Rechnungsregeln der Vektoranalysis 11–75 * Anwendung in einigen physikalischen Gebieten 75–77 * Einige Sätze der Potentialtheorie 77–86 * Einige Sätze der Hydrodynamik 86–99 * Einiges aus der Theorie der Elektrizität 99–103 * Lineare Vektorfunktionen, Matrizen, Dyaden 103–161 * Aufgaben zur Vektorrechnung 162–198 * Zusammenstellung einiger wichtiger Formeln 199–202.

Rudolf Zurmühl: *Matrizen.* Eine Darstellung für Ingenieure. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 15+467 S. Ganzl. DM 33.00.

Der Matrizenkalkül: Grundbegriffe und einfache Rechenregeln 1–15 * Das Matrizenprodukt 15–31 * Die Kehrmatrix 32–39 * Komplexe Matrizen 39–47 * Lineare Abbildungen und Koordinatentransformationen 47–61 * *Lineare Gleichungen:* Der Gauss'sche Algorithmus 62–83 * Lineare Abhängigkeit und Rang 83–96 * Allgemeine lineare Gleichungssysteme 97–105 * Orthogonalsysteme 105–119 * Polynommatrizen und ganzzahlige Matrizen 119–128 * *Quadratische Formen nebst Anwendungen:* Quadratische Formen 129–140 * Einige Anwendungen des Matrizenkalküls 141–149 * *Das Eigenwertproblem:* Eigenwerte und Eigenvektoren 150–164 * Diagonalähnliche Matrizen 165–181 * Symmetrische Matrizen 182–194 * Normale Matrizen. Die Matrix $\mathfrak{N}$. Abschätzungen 194–210 * Eigenwerte spezieller Matrizen 210–228 * *Struktur der Matrix:* Minimumgleichung, Charakteristik und Klassifikation 228–239 * Die Normalform. Hauptvektoren und Hauptvektorketten 239–256 * Matrizenfunktionen und Matrizengleichungen 256–272 * *Numerische Verfahren:* Eigenwertaufgabe: Iterative Verfahren 273–303 * Eigenwertaufgabe: Direkte Verfahren 303–320 * Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme 320–343 * *Anwendungen:* Matrizen in der Elektrotechnik 344–364 * Anwendungen in der Statik 364–382 * Übertragungsmatrizen zur Behandlung elastomechanischer Aufgaben 382–423 * Matrizen in der Schwingungstechnik 424–441 * Systeme linearer Differentialgleichungen 441–461 * Sachverzeichnis 462–467.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 148–151 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. november 1958.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger af dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

148. La n være et naturlig tall. Vis at *Bernoullis ulikhet*

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

gjelder for $x \geq -2$. (Smlgn. Fenchels artikkel i dette hefte av NMT.)

Ernst S. Selmer

149. Bevisa, att hela tal (utom de triviella fallen $x = \pm 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = -1$) ej satisfiera ekvationen

$$x^4 - y^3 = 1.$$

A. V. Peljo

150. Rækken

$$6, 10, 15, 20, 21, 28, 35, \dots$$

består af samtlige tal m , for hvilke der findes positive tal a og b , med $a < m$, således at $m = \binom{a}{b}$.

Lad $\varphi(x)$ være antallet af tal $\leq x$ i den anførte række. Bevis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2x}} = 1.$$

Ove J. Munch

151. Vis at

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 x^r = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \binom{2n-s}{n} (x-1)^s.$$

O. Kolberg

152. Reducer hver af summerne

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{i} \binom{m+i}{n+i} \quad \text{og} \quad \sum_{i=0}^{p-q} (-1)^i \binom{p}{q+i} \binom{m+i}{i}$$

til een binomialkoefficient.

Ove J. Munch

153. En godtycklig polyeder är omskriven kring en sfär. Bevisa, att förhållanden mellan kropparnas arealer och volymer är lika stora.

A. V. Peljo

154. I en ligebenet trekant ABC med toppunkt i A er højden $h_b = m$ og halveringslinien $v_B = 2m$, hvor m er et givet liniestykke.

Vis, at trekanten er entydig bestemt ved de opgivne liniestykker, og at den *ikke* kan konstrueres med passer og lineal.

Fr. Fabricius-Bjerre

LØSNINGER

141. La n være et naturligt tall og $P_{2n+1}(x)$ Legendres polynom av orden $2n+1$. Beregn integralet

$$\int_0^1 \frac{P_{2n+1}(x)}{x(1+x)^{2n+2}} dx.$$

W. Ljunggren

Løsning: $P_n(x)$ definieras genom

$$(1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum P_n(x) r^n \quad (= \sigma(x)).$$

Bilda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\sigma(x) - \sigma(-x)] &= \frac{1}{2}[(1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} - (1 + 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}}] \\ &= \frac{1}{2}[\sum P_n(x) r^n - \sum P_n(x)(-r)^n] = \sum P_{2n+1}(x) r^{2n+1}. \end{aligned}$$

Vi sätter

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum \frac{P_{2n+1}(x)}{x(1+x)^{2n+2}} r^{2n+1} = \frac{1}{x(1+x)} \sum P_{2n+1}(x) \left(\frac{r}{1+x}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x(1+x))^{-1} \left\{ \left[1 - \frac{2rx}{1+x} + \left(\frac{r}{1+x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1 + \frac{2rx}{1+x} + \left(\frac{r}{1+x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Härav, med transformationen $x = t^{-1}$:

$$\int_0^1 s(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \{ [(1+r^2)x^2 + 2(1-r)x + 1 - 2r]^{-\frac{1}{2}} - [(1+r^2)x^2 + 2(1+r)x + 1 + 2r]^{-\frac{1}{2}} \} dx,$$

vilket med vanliga evalueringsmetoder ger

$$\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}} \ln \frac{2+r+r^2+\sqrt{1+r^2}(2+r)}{2-r+r^2+\sqrt{1+r^2}(2-r)} = \frac{\ln(r+\sqrt{1+r^2})}{2\sqrt{1+r^2}} \\ = f(r) = \sum a_{2n+1} r^{2n+1}.$$

Man ser att $f(r)$ uppfyller $\frac{d}{dr} f(r) = \frac{1}{2} - r \frac{d}{dr} [rf(r)]$, eller

$$\sum (1+i)a_{i+1}x^i = \frac{1}{2} - \sum i a_{i-1}x^i.$$

Identifiering ger

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{i+2} = -\frac{i+1}{i+2} a_i,$$

alltså den givna integralen

$$I_{2n+1} = a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

M. J. Ottoson

143. Lad $\varphi(x)$ betegne antallet af naturlige tal $\leq x$ med given tværsum t . Bevis at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{(\log_{10} x)^t} = (t!)^{-1}.$$

Ove J. Munch

Lösning: Antalet siffror i x är $[\log_{10} x] + 1 = N + 1$. Då blir

$$\binom{N}{t} \leq \varphi(x) \leq \binom{N+t}{t}.$$

Övre gränsen är antalet lösningar i naturliga tal till

$$y_0 + y_1 + \dots + y_N = t.$$

$\varphi(x)$ är antalet lösningar för vilka alla $y_i < 10$ och

$$y_0 + y_1 \cdot 10 + \dots + y_N \cdot 10^N \leq x.$$

Undre gränsen är antalet lösningar med $y_N = 0$ och övriga $y_i = 0$ eller 1.

Dividera med $(\log_{10} x)^t$ och låt $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{(\log_{10} x)^t} = (t!)^{-1}.$$

Bernt Lindström

Også löst av S. Eriksson og Helge Tverberg.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1958 på de matematiske gymnasielinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. Løs ligningssystemet

$$3x + 3y - 5xy = 1 + 2x^2 + 2y^2$$

$$xy + x^2 + y^2 = 2 - 5x - 5y.$$

2. En omdrejningskegle, hvis toppunktsvinkel er ret, og hvis højde er k , står på en vandret plan. På denne plan hviler også en kugle med diameter k , og begge legemer er omgivet af vand op til højden x over planen ($x < k$). Rumfanget af den del af kuglen, der er under vand, er $\frac{3}{7}$ af rumfanget af den del af keglen, der er under vand.

Beregn x , og udregn dernæst forholdet mellem den tørre del af kuglens overflade og den tørre del af keglens overflade.

3. Der er givet en vinkel v og tre linjestykker l , p og q .

Konstruer en trekant ABC af siden $AC = l$ og vinkel $AMB = v$, hvor M er midtpunktet af siden BC , når det tillige forlanges, at $BC:AB = p:q$. Diskussion kræves.

Beregn vinklerne og de ubekendte sider i trekanten, når $v = 30^\circ$, $l = 6,032$, $p = 8$ og $q = 5$.

Matematik II.

1. I et retvinklet koordinatsystem er givet punkterne $A(-5, -1)$ og $D(2, 0)$. Gennem A tegnes to rette linjer med hældningskoefficienterne (retningskoefficienterne) α og $\alpha + \beta$ ($\beta \neq 0$) og gennem D en ret linje med hældningskoefficienten $\alpha - \beta$. Den sidste linje skærer de to første i henholdsvis B og C .

Find koordinaterne til B og C udtrykt ved α og β .

Find β udtrykt ved α , når det forlanges, at punktet C skal ligge på y -aksen, og bestem derefter det geometriske sted for punktet B , når α varierer.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{1}{\sin x} - 2 \cos x$$

i intervallet $0 < x < \pi$.

Den lukkede figur, der begrænses af kurven, x -aksen og linjen $x = \frac{1}{2}\pi$, drejes 360° om x -aksen.

Beregn rumfanget af det herved fremkomne omdrejningslegeme.

3. Der er givet et kvadrat $ABCD$, hvori diagonalen $AC = 8$. I punktet C oprejses normalen til kvadratets plan; P er et punkt på denne normal således beliggende, at $CP = 8$.

Gennem et punkt på diagonalen AC lægges en plan α vinkelret på AC ; α skærer kvadratets sider i punkterne M og N samt linjen AP i punktet T .

Idet afstanden mellem planen α og punktet C kaldes x , skal man finde arealet af trekant MNT udtrykt ved x og bestemme dette areals størsteværdi.

FINLAND

Längre kursen.

1. Ett tåg använder på resan från A till B till uppehåll på mellanstationerna $p\%$ av resetiden, d. ä. tiden mellan avgången från A och ankomsten till B. Denna resetid önskar man förkorta med $q\%$. Med hur många procent bör tågets hastighet ökas, då uppehållstiderna inte kunna förkortas?

2. Kvoten i en oändlig geometrisk serie är $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Hur många termer böra medtagas från början av serien, för att deras summa skall bli lika stor som $\frac{3}{4}$ av hela seriens summa?

3. Bestäm a så, att maximivärdet av funktionen $y = \frac{2x+a}{x^2+2a^2}$ blir $= 1$. Upprita den mot det större värdet på a svarande kurvan.

4. Bestäm m så, att arean av den triangel, som begränsas av linjerna $y = mx$, $x + 1 = 0$ och $4x - 3y - 4 = 0$ blir 3 ytenheter. Rita figur.

5. Visa, att lutningsvinkeln mellan en rät linje och ett plan är den minsta av alla vinklar, som linjen bildar med räta linjer i planet, dragna genom skärningspunkten.

6. På sidorna AC och BC i triangeln ABC som hypotenusor uppritas de likbenta rätvinkliga triangelarna ACM och CBN , båda utåt. Triangeln MNO uppritas, där O är AB :s mittpunkt. Visa att triangeln MNO är likbent och rätvinklig.

7. En cirkel skär det ena benet av en 60° vinkel, vars spets S faller utanför cirkeln, i punkterna A och B , det andra i punkterna C och D . Beräkna cirkelns radie, då $SA = 4$ cm, $SB = 6$ cm och $SC = 3$ cm.

8. I en sfär med radien r är inskriven en reguljär tetraeder, i denna en sfär, i den igen en reguljär tetraeder o. s. v. i oändlighet. Beräkna summan av sfärernas volymer, likaså av tetraedrarnas samt förhållandet mellan dessa summor. (Exakt värde och närmevärde med 3 decimaler.)

9. Basen i en triangel är 4.687 km och basvinklarna $34^\circ 16' 50''$ och $103^\circ 25' 15''$. Beräkna triangelns höjd.

10. Härled ekvationerna för de från punkten $(-1, -2)$ till parabeln $y = x^2 + 1$ dragna tangenterna. Rita figur.

ÍSLAND

I.

1. Til ellipsen $x^2 + 3y^2 = 2$ trækkes en tangent, der rører ellipsen i et punkt i første kvadrant og danner en vinkel på 150° med x -aksen. Bestem vinklen mellem brændstrålerne til røringspunktet. Bestem også arealet af den trekant, der begrænses af tangenten og koordinataksene.

Påvis, at ingen anden trekant, der begrænses af akserne og en tangent til ellipsen, har mindre areal.

2. Givet ligningen

$$\frac{a}{\cos x + \sin x} + \frac{b}{\cos x - \sin x} = \frac{c}{\cos 2x}.$$

Hvilken betingelse må koefficienterne a , b og c være underkastet, for at denne ligning kan have en løsning?

Bestem den fuldstændige løsning til ligningen, når $a = 0,4235$, $b = 0,3456$ og $c = 0,5678$.

3. For hvilke værdier af x er udtrykket

$$\frac{5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}-2}$$

defineret?

For hvilke værdier af x er uligheden

$$\frac{5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}-2} > \sqrt{x-3} + 2$$

opfyldt?

II.

1. Undersøg kurven $y^2 = \frac{4}{x-1}$ og tegn den i hovedtræk.

Gør rede for definitionsområde, asymptoter, symmetri samt maxima og minima, om sådanne findes.

Beregn arealet af det område, der begrænses af kurven og linierne $x = 2$ og $x = 5$. Beregn endvidere volumenet af det omdrejningslegeme, som fremkommer, når dette areal drejes om x -aksen.

Bestem den mindste afstand fra begyndelsespunktet til et punkt på kurven.

Opskriv ligningen for kurvetangenten i $(5, 1)$, og beregn koordinaterne for det punkt, hvor den skærer kurven igen.

2. a) I Brailles skrift for blinde består hvert lydtegn af seks felter, som billedet viser:



I et eller flere af felterne er der anbragt et enkelt rundt ophævet punkt. Hvor mange forskellige lydtegn kan der dannes på denne måde?

b) Find n af ligningen

$$30K_{3n, n+3} \cdot P_{2n, n+1} = K_{2n, n+1} \cdot P_{3n, n+3}.$$

3. En retstående sirkulær kegle med 60° topvinkel skæres af en plan, som går igennem højdens midtpunkt og er vinkelret på en frembringer på keglen. Hvor stor del af keglens volumen udgør den øverste af de to dele, hvori planen deler keglen?

NORGE

Reallinjen.

1. a) Hva mener vi med en geometrisk rekke?

I tallrekken $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ er hvert tall 10 prosent større enn det foregående tall. Vis at rekken er geometrisk, og finn a_n uttrykt ved a_1 og n .

b) I en familie vil foreldrene sikre barna sine økonomisk hjelp til utdanning på den måten at de vil sette en pengesum i bank. De vil gjøre summen så stor at det siden kan tas ut kr. 2 000 hvert år i 15 år. Regn ut hvor stor sum de må sette i banken, når første uttaket skal gjøres 1 år etter innskuddet, og de andre uttak kommer med 1 års mellomrom. Rente blir regnet etter 3 % p. a. Sett opp og før inn den rekken du bruker.

Foreldrene runder av summen og setter kr. 24 000 i banken. Men de fastsetter nå en annen uttaksordning, som de mener vil passe bedre. Etter den nye ordningen skal det hvert år med 1 års mellomrom tas ut et beløp som er 10 prosent større enn det beløp som ble tatt ut ett år før. Første uttak skal gjøres 1 år etter innskuddet, og siste uttak 10 år etter innskuddet. Regn ut hvor stort beløp det kan bli tatt ut første gangen. Du skal da føre inn den rekken du har brukt i utregningen, og vise særskilt at denne rekken er geometrisk. Rente blir regnet etter 3 % p. a.

2. Det er gitt en halvkule med radius r . Gjennom et punkt P i periferien på den storsirkelen som avgrenser halvkula, er det lagt en tangent til sirkelen. Gjennom tangenten er det lagt et plan som danner vinkelen x med storsirkelplanet, og som skjærer halvkula i en mindre sirkel (en småsirkel). Finn radien i denne småsirkelen uttrykt ved r og x . Finn også, uttrykt ved r og x , arealet av den del av kuleflaten som ligger mellom de to plan.

Vinkelrett på småsirkelplanet, parallelt med tangenten, er det lagt et tredje plan. Dette planet skjærer storsirkelen i A og B , småsirkelen i C og D . La avstanden fra P til AB være $\frac{3}{2}r$. Vis at arealet av trapeset $ABDC$ da er

$$F = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3} \sin x (1 + \cos x).$$

Arealet er en funksjon av x når r er konstant. Finn den deriverte av denne funksjonen uttrykt ved $\cos x$. Gjør så greie for hvordan arealet varierer når x varierer mellom 0° og 90° . Gjør særlig greie for hvordan det går med selve trapeset når x nærmer seg 90° som grense.

3. En ellipse har likningen $4x^2 - 16x + y^2 = 0$. Finn akser, sentrum og brennpunkter i ellipsen. Tegn ellipsen på millimeterpapiret med 1 cm til enhet.

En diameter i ellipsen har vinkelkoeffisient k . Hva blir likningen for diameteren og likningen for den konjugerte diameteren?

Diameteren med vinkelkoeffisient k skjærer linjen $x = 4$ i et punkt som vi kaller P . Finn likningen for normalen fra P på den konjugerte diameteren. Vis at denne normalen skjærer x -aksen i et fast punkt A uten hensyn til hvor P ligger på linjen $x = 4$.

Kall skjæringspunktet mellom normalen og den konjugerte diameter for S . Finn ved regning likningen for den kurven S følger når k varierer. Hvordan kan

vi rent geometrisk se hva for en kurve det må bli? Hvorfor må sentrum i ellipsen være et punkt på kurven?

Projeksjonstegning. Horisontal- og vertikaltrasen (horisontal- og vertikalsporet) til et plan danner begge en vinkel på 45° med grunnlinjen. Begge vinkelåpningene er mot høyre.

Et regulært, trekantet prisme står med grunnflaten ABC på dette planet. Hjørnet A ligger i horisontaltrasen til planet, 7 cm fra skjæringspunktet mellom trasene. Hjørnet C ligger i vertikaltrasen, 8 cm fra skjæringspunktet mellom trasene. Prismet har sidekanter Aa , Bb og Cc som er 7 cm lange.

Prismet skjæres av et plan som går gjennom a og midtpunktet av AB . Horisontaltrasen til planet danner en vinkel på 45° med grunnlinjen; vinkelåpning mot venstre.

Tegn horisontal- og vertikalprojeksjonen av prismet med snitt, trasene til de to nevnte plan og skjæringslinjen mellom disse plan. Begge plan er tenkt ugjennomsiktige. (Legg grunnlinjen parallell med langsiden på tegnearket, 12 cm fra øvre kant, og la det skråplanet som er nevnt først i oppgaven, skjære grunnlinjen 20 cm fra venstre kanten på tegnearket.)

SVERIGE

Matematiska grenen.

1. Beräkna ytan av det slutna område, som begränsas av parablerna $y^2 = 4x$ och $x^2 = 4y$.

2. Funktionerna »sinus hyperbolicus för x » ($\sinh x$) och »cosinus hyperbolicus för x » ($\cosh x$) definieras på följande sätt:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Bevisa formlerna

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x;$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

3. O är medelpunkten i en cirkel, och P är en punkt, belägen på ett avstånd från O , som är $1\frac{1}{2}$ gånger cirkelns radie. Från P är en sekant dragen, som skär cirkeln i punkterna A och B . Vinkeln OPA är tredjedelen av vinkeln AOB . Beräkna vinkeln OPA .

4. En kropp begränsas av två koncentrisk sfäriska ytor, den yttre med den konstanta radien R , den inre med den variabla radien x . Ett tangentplan till den inre sfären delar den nämnda kroppen i två delar. Bestäm x , så att volymen av den större av delarna blir så stor som möjligt.

5. Bestäm konstanten a , så att funktionen $\frac{ax^2}{x-1}$ får ett maximum $= -4$.

6. En hyperbel är liksidig, dvs. transversalaxeln är lika med konjugataxeln. Den ena grenen tangerar i vertex y -axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Samma gren går genom punkten $(-3; 0)$. Sök och konstruera orten för vertex på hyper-

belns andra gren. Därvid skall undersökas, om orten består av hela den mot den erhållna ekvationen svarande kurvan.

7. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} y$ och $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}$ för funktionen $y = \frac{x^2}{\sin 2x}$. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att utseendet av den mot funktionen svarande kurvan skisseras för $-\pi \leq x \leq \pi$.

8. Två punkter, P_0 och P_1 , på parabeln $x^2 = 4ay$ har x -koordinaterna x_0 respektive x_1 . Bestäm koordinaterna för skärningspunkten R_1 mellan kurvans normaler i P_0 och P_1 . När punkten P_1 obegränsat närmar sig punkten P_0 , dvs. när $x_1 \rightarrow x_0$, närmar sig R_1 obegränsat en punkt R_0 . Ange dennas koordinater som funktioner av x_0 . Bestäm därefter ekvationen för orten för R_0 , när P_0 genomlöper parabeln. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att ortkurvan konstrueras i stora drag.

SUMMARY IN ENGLISH

ERNST S. SELMER: *Numerical integration by non-equidistant ordinates.* (English.)

In the first volume of this journal, Viggo Brun suggested the following modification of Simpson's formula when the points (x_0, y_0) , $(x_0 + a, y_1)$ and $(x_0 + a + b, y_2)$ are given:

$$\int_{x_0}^{x_0+a+b} f(x) dx \approx \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b-a}{3} (y_2 - y_0).$$

Brun's own deduction was purely geometrical. In the present paper, two analytical deductions are given, one by a Taylor expansion and the other by a quadratic substitution on the independent variable and using the equidistant case. The latter method also gives an error term ((6.2) p. 103) in Brun's formula. The former method is generalized to the "three-eighths rule". Two alternative formulae are given, one ((7.2) p. 105) very simple, another ((7.3) p. 106) more accurate.

W. FENCHEL: *On the introduction of the exponential function.* (Danish.)

In the classical introduction of e^x by $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ the binomial theorem is usually applied, which leads to rather complicated expressions. The author shows how this can be avoided, using instead the Bernoulli inequality $(1+z)^n \geq 1+nz$ for $z \geq -1$ and a positive integral exponent n . The functional equation and the differentiability of the function e^x are easily obtained on the basis of this way of introducing it.

VEIKKO ENNOLA: *Two elementary proofs concerning simple quadratic fields.* (English.)

Two elementary proofs are given of the well-known fact that the quadratic field $k(\sqrt{m})$ can be simple only if $|m|$ is a prime or a product of two unequal primes neither of which is congruent to 1 (mod 4). The first proof also shows that for $m < 0$ $|m|$ must be a prime not congruent to 1 (mod 4). The second, very short proof is based on Dirichlet's theorem concerning primes in an arithmetic progression.