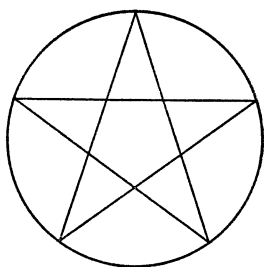


**NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT**

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 6



OSLO 1958

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Suomen matematiikan ja fysiikan opettajien liitto – Finlands matematik- och fysiklärarförbund.

Íslenska stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

REDAKSJON:

Karl Dagerholm, David Fog, Carl-Erik Fröberg,
Bo Kjellberg, Regnar Norgil, E. J. Nyström, Kay Piene,
Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.
Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSER:

Redaksjon: Matematisk Institutt, Nygårdsgt. 114, Bergen.

Ekspedisjon: Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

EN ENKEL POTENTIALTEORETISK MODELL

H. GASK och J.-E. ROOS

Inledning. Potentialteorien skapades i början av 1800-talet av Laplace, Gauss och Green i arbeten, som behandlar den matematiska teorien för gravitation och elektricitet. Den har senare blivit en självständig gren av matematiken, som alltjämt utvecklas. Karakteristiskt för de senaste årens bidrag är, att de förenar geometriska och analytiska metoder.

Mass- eller elektricitetsfördelningarna beskrivs matematiskt av mängdfunktioner eller distributioner och uppfattas som element i en flerdimensionell rymd (Hilbertrymd), där fysikens variationsprinciper kan ges en geometrisk form. Vi skall i denna artikel ge exempel på dessa metoder genom att använda dem på problemet att bestämma och undersöka den elektrostatiske jämviktsfördelningen på ett system av elektriskt laddade ledare. Den fullständiga behandlingen av detta problem fordrar en teori för allmänna mängdfunktioner i tre dimensioner och en teori för Hilbertrum av oändlig dimension och ligger utom ramen för en elementär framställning. Med förenklade antaganden kan man emellertid få en god illustration till den allmänna teorien. Vi börjar framställningen med några potentialteoretiska begrepp.

Kraft, potential, laddningsfördelning, stöd. Betrakta två punktformiga, positiva eller negativa laddningar på avståndet r från varandra. Enligt Coulombs lag påverkar de varandra med kraften

$$K = -\frac{ef}{r^2},$$

där e och f är laddningarnas storlek tagna med tecken. Kraften är attraktiv om $K > 0$ och repulsiv om $K < 0$.

Vi skall i fortsättningen arbeta med en enkel potentialteoretisk modell och antar därför, att vår »värld« endast består av gitterpunkter på reella axeln, d. v. s. punkter $x = n\delta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, där δ är ett fixt posi-

tivt tal. Detta antagande är rimligt, ty de flesta metalliska ledare har gitterstruktur. I naturen är δ mycket litet.

Vi vill studera kraftverkan mellan laddningar i vår modell och inför följande motsvarighet till Coulombs lag:

$$K = -ef\psi(r).$$

Här är ψ en lämplig icke-negativ funktion och r avståndet mellan laddningarna. Det är naturligt att fordra, att ψ ej är identiskt noll, och att $\psi(r)$ avtar monotont mot noll, då r går mot oändligheten.

Strängt taget är $\psi(r)$ endast definierad, då r är en heltalsmultipel av δ , men vi ritar för enkelhetens skull ψ som i fig. 1. Detta gäller även om potentialfunktionen, som vi nu skall införa.

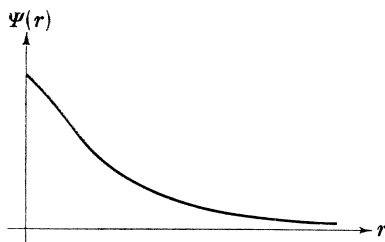


Fig. 1

Låt oss betrakta en positiv enhetsladdning E_0 i origo och en annan positiv enhetsladdning E i punkten x . De repellerar varandra med kraften

$$\psi(|x|).$$

Eftersom denna kraft inte är definierad för alla $|x|$, kan vi inte som i teorien för den Newtonska potentialen beräkna det arbete, som åtgår att föra E från en punkt till en annan, i form av en integral. Vi inför i stället följande postulat, varvid vi underförstår att ψ är definierad också i origo: *Det arbete, som åtgår att flytta E från punkten $x + \delta$ till x eller från $-x - \delta$ till $-x$ ($x \geq 0$), är $\delta\psi(|x|)$.* Ju mindre δ är, desto närmare ansluter sig detta postulat till de förhållanden, som råder i den Newtonska potentialteorien. Låt oss betrakta det arbete $\varphi(x)$, som åtgår att föra E från $+\infty$ till x , då $x \geq 0$ resp. från $-\infty$ till x då $x < 0$. Man får tydligen i båda fallen

$$(1) \quad \varphi(x) = \sum_{y \geq |x|} \delta\psi(y) = \delta\psi(|x|) + \delta\psi(|x| + \delta) + \delta\psi(|x| + 2\delta) + \dots,$$

och vi antar att serien är konvergent. Funktionen φ kallas den av E_0 alstrade potentialen. Man övertygar sig lätt om att φ är icke-negativ, icke-växande för $x \geq 0$ och jämn, d. v. s. $\varphi(x) = \varphi(-x)$, och att

$$\varphi(x) - \varphi(y)$$

är det arbete, som åtgår att föra laddningen E från y till x . Om skillnaden är negativ, t. ex. om $x > 0$ och $y = 0$, skall detta tolkas så att negativt arbete åtgår, d. v. s. arbete utvinnes, då E föres från y till x .

Av definitionen av φ följer att

$$\varphi(x) - \varphi(x + \delta) = \delta \psi(x)$$

då $x \geq 0$. Om $x > 0$ (d. v. s. $x \geq \delta$) har vi alltså även

$$\varphi(x - \delta) - \varphi(x) = \delta \psi(x - \delta).$$

Eftersom vi har antagit att $\psi(x) \leq \psi(x - \delta)$ följer av dessa två likheter att för $x > 0$ är

$$(2) \quad \varphi(x) \leq \frac{1}{2}(\varphi(x + \delta) + \varphi(x - \delta)).$$

Eftersom φ är jämn, följer samma olikhet också då $x < 0$. Vi har med andra ord visat, att *potentialen φ är konvex utanför origo*. Den har det utseende som framgår av fig. 2. Observera att $\varphi(x) < \varphi(0)$ då $|x| > 0$. I annat fall skulle nämligen konvexiteten ge $\varphi(x) = \varphi(0) > 0$ för alla x . Detta är omöjligt, ty serien (1) är konvergent, och detta medför att $\varphi(x) \rightarrow 0$, då $|x| \rightarrow \infty$.

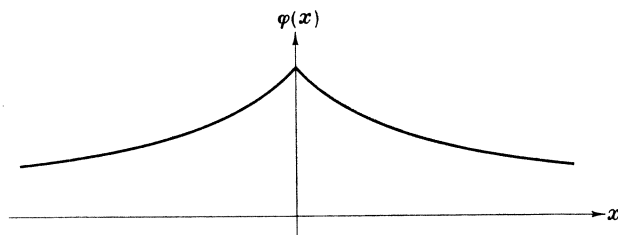


Fig. 2

Ett exempel på de potentialfunktioner, som definierats ovan, är den s. k. takfunktionen, vars utseende framgår av fig. 3. Den kommer att visa sig vara vår motsvarighet till den »naturliga« potentialfunktionen $1/r$. (Se sats 9.)

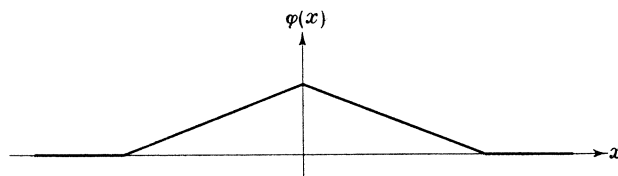


Fig. 3

Om enhetsladdningen E_0 placeras i en punkt x_0 utanför origo, blir potentialen av E_0 tydligen

$$\varphi_1(x) = \varphi(x - x_0).$$

Motsvarande kurva får man av kurvan i fig. 2 genom att förskjuta den så, att toppen kommer över punkten x_0 . Om vi i stället för en enhets-

laddning har laddningen e i punkten x_0 , blir dess potential tydligen $e\varphi(x-x_0)$.

Hittills har vi bara betraktat potentialer av laddningsfördelningar bestående av en enda punktladdning. Våra allmänna laddningsfördelningar skall bestå av ett *ändligt antal* punktladdningar. En sådan laddningsfördelning kan alltså beskrivas som en funktion e med värden e_x , som anger laddningens storlek i punkten x och sådan att endast ändligt många e_x är skilda från noll. Med laddningsfördelningens *stöd* menas de punkter, där det finns laddning. Motsvarande arbete vid förflyttning av en enhetsladdning E från oändligheten till x antages vara

$$P(x) = \sum_y \varphi(x-y)e_y.$$

Funktionen P kallas för laddningsfördelningens potential, och P är tydligen summan av de enskilda laddningarnas potentialer.

Antag att $e > 0$, d. v. s. att alla $e_x \geq 0$ och minst ett $e_x > 0$. Av olikheten (2) ovan följer att $P(x)$ är konvex utanför stödet till e . (Se fig. 4.) Att detta ej behöver vara fallet för andra laddningsfördelningar framgår av fig. 5.

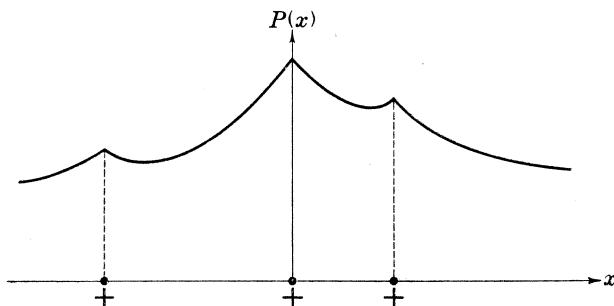


Fig. 4. Potentialen av en positiv laddningsfördelning.

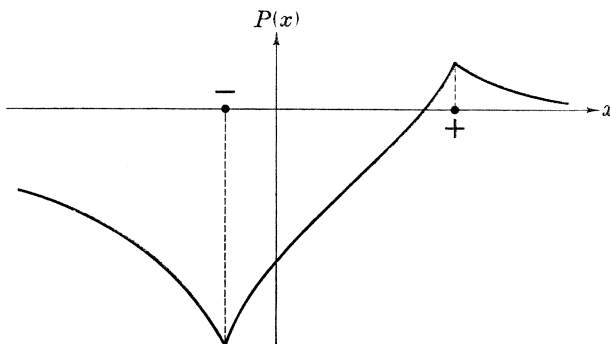


Fig. 5. Potentialen av en positiv och en negativ laddning.

Energi. Betrakta en laddning e i en godtycklig punkt P . Vi definierar dess egenenergi, som det arbete, som fordras för att samla ihop laddningen av oändligt små delar, som förs in till P från oändligheten. Vi skall visa, att denna energi är

$$(3) \quad \frac{1}{2}\varphi(0)e^2.$$

Låt N vara ett stort naturligt tal, placera en laddning e/N i P och för sedan $N-1$ laddningar av storleken e/N från oändligheten till P , en efter en. För den första av dessa åtgår arbetet

$$\varphi(0) \cdot \frac{e}{N} \cdot \frac{e}{N};$$

för den andra, som repelleras av laddningen $2e/N$ arbetet $\varphi(0) \cdot 2e^2/N^2$; för den tredje, som repelleras av laddningen $3e/N$ arbetet $\varphi(0) \cdot 3e^2/N^2$ och så vidare. Det sammanlagda arbetet blir

$$\varphi(0)e^2 \frac{1+2+\dots+(N-1)}{N^2} = \varphi(0)e^2 \frac{N-1}{2N}.$$

Låter vi här N gå mot oändligheten får vi (3).

Betrakta nu två laddningar e_x och e_y placerade i punkterna x och y med egenenergierna $\frac{1}{2}\varphi(0)e_x^2$ och $\frac{1}{2}\varphi(0)e_y^2$ respektive. För att föra en av dem in mot den andra från oändligheten till avståndet $|x-y|$ åtgår arbetet $\varphi(x-y)e_x e_y$, och systemets totala energi blir alltså

$$\frac{1}{2}[\varphi(0)e_x^2 + \varphi(0)e_y^2 + 2\varphi(x-y)e_x e_y].$$

Man inser på samma sätt, att den totala energien hos en samling laddningar e_x i punkterna x blir

$$(4) \quad I(e) = I(e, e) = \frac{1}{2} \sum \varphi(x-y)e_x e_y = \frac{1}{2} \sum P(x)e_x,$$

där P är potentialen av e , och den första summationen utsträcker sig över alla x och y . Om alla laddningarna e_x har samma tecken är det klart, att energien är positiv, men om en del är positiva och andra negativa, uppträder både positiva och negativa termer i tredje ledet av (4), och det är tänkbart att energien kan bli negativ eller noll, d. v. s. att systemet kan samlas ihop utan energiåtgång eller med energivinst. Vi skall se att detta är omöjligt. Vi säger att en laddningsfördelning e är skild från noll om något e_x är skilt från noll. Då gäller

SATS 1. *Energien av en godtycklig laddningsfördelning skild från noll är positiv¹.*

¹ I integralform har denna sats bevisats av A. Beurling i ett opublicerat arbete.

BEVIS: Vi har $I(e, e) = \frac{1}{2} \sum \varphi(x-y)e_x e_y$. Inför $\sigma_t = \sum_{x \leq t} e_x$. Abels partiella summation ger

$$\sum_{x=-M\delta}^{N\delta} \varphi(x-y)e_x = \sum_{x=-M\delta}^{N\delta} [\varphi(x-y) - \varphi(x-y+\delta)]\sigma_x + \varphi((N+1)\delta-y)\sigma_{N\delta} - \varphi(-M\delta-y)\sigma_{-(M+1)\delta}.$$

Låt nu N och M gå mot oändligheten! Vänstra ledet konvergerar, ty det finns endast laddning i ett ändligt antal punkter. Högra ledet konvergerar då också och eftersom $\varphi(x) \rightarrow 0$ då $|x| \rightarrow \infty$ får vi

$$P(y) = \sum_x \varphi(x-y)e_x = \sum_x [\varphi(x-y) - \varphi(x-y+\delta)]\sigma_x,$$

där det i sista formeln är väsentligt, att summationen utsträcker över alla x . Nu är

$$I(e, e) = \frac{1}{2} \sum_y \left(\sum_x \varphi(x-y)e_x \right) e_y = \frac{1}{2} \sum_y P(y)e_y,$$

och $P(y)$ går mot noll, då y går mot oändligheten. Vi kan därför ännu en gång använda partiell summation kombinerad med en gränsövergång och får

$$I(e, e) = \frac{1}{2} \sum [P(y) - P(y+\delta)]\sigma_y$$

eller

$$(5) \quad I(e, e) = -2 \sum_y \sum_x \Delta(x-y)\sigma_x \sigma_y,$$

där

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{4} [\varphi(x-y+\delta) + \varphi(x-y-\delta) - 2\varphi(x-y)].$$

Likheten (5) skall vi komplettera med ett par identiteter. Eftersom $\sum_y [\varphi(x-y) - \varphi(x-y+\delta)] = 0$ för alla x blir

$$\sum_{x=-M\delta}^{N\delta} \sum_y [\varphi(x-y) - \varphi(x-y+\delta)] [\sigma_x^2 - \sigma_{x+\delta}^2] = 0,$$

vilket vi skriver

$$\sum_y \sum_{x=-M\delta}^{N\delta} [\varphi(x-y) - \varphi(x-y+\delta)] [\sigma_x^2 - \sigma_{x+\delta}^2] = 0$$

för alla N och M . Om N och M är tillräckligt stora så är $\sigma_x = \sigma_{x+\delta}$ för $x \geq N\delta$ och $x \leq -M\delta$. Vi finner därför:

$$\sum_y \sum_x [\varphi(x-y) - \varphi(x-y+\delta)] [\sigma_x^2 - \sigma_{x+\delta}^2] = 0.$$

En partiell summation visar att

$$\begin{aligned} \sum_x [\varphi(x-y) - \varphi(x-y+\delta)] [\sigma_x^2 - \sigma_{x+\delta}^2] \\ = \sum_x [2\varphi(x-y) - \varphi(x-y+\delta) - \varphi(x-y-\delta)] \sigma_x^2, \end{aligned}$$

och vi får

$$\sum_y \sum_x \Delta(x-y) \sigma_x^2 = 0.$$

Att

$$\sum_y \sum_x \Delta(x-y) \sigma_y^2 = 0$$

är trivialt. Alltså är

$$(6) \quad I(e, e) = \sum \sum \Delta(x-y) (\sigma_x - \sigma_y)^2.$$

Men villkoret att φ är konvex utanför origo kan skrivas

$$\Delta(x-y) \geq 0 \quad \text{för} \quad x \neq y,$$

och härav följer $I(e, e) \geq 0$. Fallet $I(e, e) = 0$ kan endast inträffa om varje term i (6) är 0. Emellertid måste det finnas ett $x^* \neq 0$ så att $\Delta(x^*) > 0$, ty om $\Delta(x) = 0$ för alla $x \neq 0$ så blir

$$\varphi(x) - \varphi(x-\delta) = \varphi(x+\delta) - \varphi(x) \quad \text{för alla} \quad x \neq 0.$$

Men detta innebär att φ är rätlinjig utanför origo, vilket är omöjligt eftersom $\varphi(x) \rightarrow 0$ då $|x| \rightarrow \infty$. Alltså finns det ett x^* med de önskade egenskaperna och då medför $I(e, e) = 0$ att $\sigma_{x+x^*} = \sigma_x$ för alla x . Alltså är även $\sigma_x = \sigma_{x \pm x^*} = \sigma_{x \pm 2x^*} = \dots$ för alla x . Eftersom $\sigma_t = 0$ för alla tillräckligt stora negativa t följer att $\sigma_x = 0$ för alla x , så att $e_x = \sigma_x - \sigma_{x-\delta} = 0$ för alla x , vilket motsäger förutsättningen. Härmed är satsen bevisad.

Vi kommer i nästa avsnitt att behöva följande tillägg till sats 1:

SATS 2. *Betrakta en följd av laddningsfördelningar $e^1, e^2, \dots$, som alla har sitt stöd i ett fixt intervall. Om $I(e^k) \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$ så gäller också att $e_x^k \rightarrow 0$ för varje x och omvänt¹.*

BEVIS: Satsens första del i annan formulering säger, att alla e_x är små, bara $I(e)$ är tillräckligt litet. För att bevisa detta anknyter vi till sista delen av beviset för sats 1. Vi får tydligen olikheten

$$(\sigma_{x+x^*} - \sigma_x)^2 \leq I(e) / \Delta(x^*),$$

för alla x . Beteckna för korthetens skull högra sidan med c^2 , $c \geq 0$. Olikheten kan då skrivas

$$|\sigma_{x+x^*} - \sigma_x| \leq c.$$

Härav får man t. ex.

$$|\sigma_{x \pm 2x^*} - \sigma_x| \leq |\sigma_{x \pm 2x^*} - \sigma_{x \pm x^*}| + |\sigma_{x \pm x^*} - \sigma_x| \leq 2c,$$

och allmänt

$$|\sigma_{x \pm kx^*} - \sigma_x| \leq kc$$

¹ Denna sats är en omedelbar följd av sats 1 och bekanta satser om kontinuerliga funktioner av flera variabler, men vi föredrar att ge ett elementärt bevis.

för alla x och alla naturliga tal k . Enligt förutsättningen är $e_t = 0$ då $|t|$ är tillräckligt stort, $|t| \geq N$. Detta innebär att σ_t är noll då $t \leq -N$ och konstant då $t \geq N$. Väljer vi $k = K_0$ så stort att $K_0 \delta \geq 2N$, så blir ett av talen $x \pm K_0 x^* \leq -N$, förutsatt att $x \leq N$, och för detta x får vi alltså $|\sigma_x| \leq K_0 c$. Men eftersom σ_x är konstant då $x \geq N$, gäller olikheten för alla x , och vi får $|e_x| = |\sigma_x - \sigma_{x-\delta}| \leq 2K_0 c$. Eftersom c går mot noll med $I(e)$, är första hälften av satsen bevisad. Den andra hälften är trivial, eftersom $I(e)$ är ett polynom i variablerna e_x , om e_x är noll utanför ett fixt intervall.

Energien som avståndskvadrat. En laddningsfördelning e karakteriseras av de ändligt många talen e_x . Dessa kan uppfattas som koordinater för e och laddningsfördelningen själv kan betraktas som en punkt i ett rum R . Observera att varje punkt i R endast har ändligt många koordinater. Summan $e+f$ av två laddningsfördelningar e och f får man genom att addera koordinaterna, och produkten ae av en laddningsfördelning och ett tal a får man genom att multiplicera koordinaterna med a , så att

$$(e+f)_x = e_x + f_x, \quad (ae)_x = ae_x.$$

Med dessa definitioner blir R en linjär rymd. Enligt sats 1 är $I(e) \geq 0$ för alla e . Vi kan således införa

$$\varrho(e-f) = \sqrt{I(e-f)}.$$

Detta ϱ är tydligen ett slags avstånd mellan e och f i den meningen att $\varrho > 0$ då $e \neq f$ och $\varrho = 0$ då $e = f$. Vi skall se att funktionen ϱ också har egenskaperna

$$(7) \quad \varrho(ae) = |a|\varrho(e) \quad (a \text{ ett tal}),$$

$$(8) \quad \varrho(e+f) \leq \varrho(e) + \varrho(f) \quad (\text{triangelolikheten}),$$

som den delar med t. ex. det euklidiska avståndet

$$\tau(e-f) = \sqrt{\sum (e_x - f_x)^2}.$$

Egenskapen (7) följer omedelbart av att $I(ae) = a^2 I(e)$. För att bevisa (8) observerar vi att

$$(9) \quad I(ae + bf) = a^2 I(e) + b^2 I(f) + 2ab I(e, f),$$

där

$$(10) \quad I(e, f) = \frac{1}{2} \sum \varphi(x-y) e_x f_y = I(f, e).$$

Men $I(ae + bf) \geq 0$ för alla a och b , och detta medför som bekant att

$$I(e, f)^2 \leq I(e) I(f).$$

Vi får alltså

$$(\varrho(e+f))^2 = I(e+f) \leq I(e) + I(f) + 2\sqrt{I(e)I(f)} = (\varrho(e) + \varrho(f))^2,$$

vilket är (8) i en annan form.

Liksom för de reella talen kan vi definiera begreppet *Cauchyföljd* i R . Härmed menas en följd av punkter (laddningsfördelningar) $\{e^k\}_1^\infty$, sådan att

$$(11) \quad \varrho(e^j - e^k) \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad j, k \rightarrow \infty.$$

En Cauchyföljd av reella tal har alltid ett gränsvärde. Förhåller det sig likadant i R , d. v. s. finns det ett e i R sådant att

$$(12) \quad \varrho(e^j - e) \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad j \rightarrow \infty?$$

Svaret är nej. Det är lätt att se att t. ex. den följd som definieras av

$$e_x^j = (1+x^2)^{-1} \quad \text{då} \quad |x| \leq j, \quad e_x^j = 0 \quad \text{då} \quad |x| > j$$

är en Cauchyföljd. Följden har däremot inget gränsvärde i R . Antag nämligen motsatsen och kalla gränselementet för e . Då skulle e ha sitt stöd i ett begränsat intervall. Välj nu x^* som i beviset för sats 2, så att vi har

$$(\sigma_{x+x^*}^j - \sigma_x^j)^2 \leq I(e^j - e) / \Delta(x^*) \quad \text{där} \quad \sigma_x^j = \sum_{t \leq x} (e_t^j - e_t).$$

Om vi här väljer x så stort att båda punkterna x och $x+x^*$ ligger till höger om stödet av e och väljer $j > \max(|x|, |x+x^*|)$ utgör vänstra ledet ett av j oberoende positivt tal, medan högra ledet går mot noll då $j \rightarrow \infty$. Ur denna motsägelse följer påståendet. Det är intuitivt klart att e^j bör ha till gränsvärde fördelningen $e_x = (1+x^2)^{-1}$. Denna fördelning ligger inte i R , men den har ändlig energi¹.

Vi skall nu visa, att en Cauchyföljd $\{e^k\}_1^\infty$ har ett gränsvärde om alla e^k har sina stöd i ett fixt intervall. I detta fall medför sats 2 att (11) är ekvivalent med att

$$e_x^j - e_x^k \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad j, k \rightarrow \infty$$

för varje x . Alltså existerar för varje x ett e_x sådant att

$$e_x^j - e_x \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad j \rightarrow \infty,$$

vilket i sin tur, återigen enligt sats 2, medför (12).

Efter dessa förberedelser skall vi bevisa en geometrisk sats, som kommer att göra oss stora tjänster i fortsättningen. Låt K vara en delmängd av R . Delmängden K förutsättes vara konvex i den meningen att om e

¹ Det är lätt att ta med också sådana laddningsfördelningar, men teorin blir då mindre elementär.

och f ligger i K , så ligger mittpunkten av förbindelselinjen mellan e och f , d. v. s. $\frac{1}{2}(e+f)$, också i K . Antag vidare att alla element i K har sitt stöd i ett fixt intervall och att K är sluten, d. v. s. att om $\{e^k\}_1^\infty$ är en Cauchyföljd av element i K , så ligger gränselementet också i K .

SATS 3. *Det finns ett entydigt bestämt element e i K , som ligger närmast origo.*

BEVIS: Att e ligger närmast origo (se fig. 6) kan också uttryckas så att

$$I(e) = \inf I(f) \text{ då } f \text{ tillhör } K.$$

Beviset av satsen beror på identiteten

$$(13) \quad I(e+f) + I(e-f) = 2I(e) + 2I(f),$$

som följer av att (se (9)–(10))

$$I(e \pm f) = I(e) + I(f) \pm 2I(e, f).$$

Identiteten säger att summan av sidornas kvadrater i den parallelogram, som har

hörnen $0, e, f$ och $e+f$ är lika med summan av diagonalernas kvadrater.

Inför nu $d^2 = \inf I(f)$ då f tillhör K . Detta betyder, att det finns en följd $\{f^k\}_1^\infty$ av element i K sådan att

$$(14) \quad I(f^k) \rightarrow d^2 \quad \text{då} \quad k \rightarrow \infty.$$

Av (13) följer att

$$I(f^j - f^k) = 2I(f^j) + 2I(f^k) - 4I\left(\frac{1}{2}(f^j + f^k)\right).$$

Här är $I\left(\frac{1}{2}(f^j + f^k)\right) \geq d^2$ eftersom K är konvex. Alltså får vi

$$I(f^j - f^k) \leq 2I(f^j) + 2I(f^k) - 4d^2.$$

Enligt (14) går högra sidan mot noll då $j, k \rightarrow \infty$. Alltså är $\{f^k\}_1^\infty$ en Cauchyföljd. Enligt förutsättningen ligger gränselementet e i K . Det är klart att $I(e) = d^2$. Det återstår att visa att e är entydigt bestämt. Men om också e' tillhör K och $I(e') = d^2$, så får vi av (13) att

$$0 \leq I(e - e') = 2d^2 + 2d^2 - 4I\left(\frac{1}{2}(e + e')\right).$$

Här är $I\left(\frac{1}{2}(e + e')\right) \geq d^2$ och alltså $I(e - e') = 0$, så att $e = e'$. Alltså är satsen bevisad.

Det allmänna jämviktsproblemet. Låt oss betrakta ett ändligt antal ledare i den tredimensionella rymden, vilka vid en viss tidpunkt laddas med positiv eller negativ elektricitet. Efter en mycket kort tid fördelas

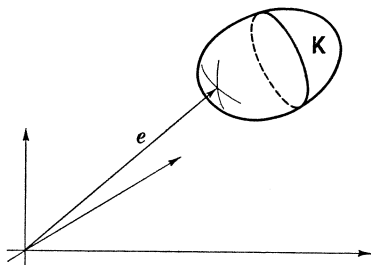


Fig. 6.

elektriciteten så att den befinner sig i ett jämviktstillstånd, som karakteriseras av att den totala energin är minimal. Vi skall beräkna motsvarigheten till detta tillstånd i vår modell. Som ledare tar vi begränsade delmängder $L_1, L_2, \dots, L_t$ av gittret $x = n\delta$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) utan gemensamma punkter¹.

Vi skall visa att det bland alla laddningsfördelningar på ledarna med totala laddningen l_1 på L_1 , l_2 på L_2 o. s. v. finns en och endast en, för vilken den totala energin är minimal. Detta är en omedelbar följd av sats 3. Låt K vara mängden av alla sådana laddningsfördelningar. Varje fördelning i K har tydligen sitt stöd i ett fixt intervall. Att totala laddningen är l_k på ledaren L_k uttrycks genom ekvationen

$$(15) \quad \sum_x e_x = l_k \quad (x \text{ i } L_k),$$

vars geometriska betydelse är ett plan i R . Mängden K är genomsnittet av dessa plan, och man konstaterar omedelbart, att K är konvex. Vidare är K sluten, ty om $\{e^j\}_1^\infty$ är en Cauchyföljd i K med gränselementet e , så visar sats 2, att om

$$\sum_x e_x^j = l_k \quad (x \text{ i } L_k)$$

för alla j , så gäller (15) för e .

Vi formulerar vårt resultat i

SATS 4. *Bland alla laddningsfördelningar på ledarna med totala laddningen l_k på L_k , $k = 1, \dots, t$, finns en entydigt bestämd fördelning e med minimal energi (jämviktsfördelningen).*

Jämviktsfördelningen e har nu andra intressanta egenskaper:

SATS 5. *Jämviktsfördelningens potential är konstant på varje ledare.*

BEVIS: Låt x och y vara två godtyckliga punkter i en godtycklig ledare L_1 och låt g vara laddningen -1 i x och $+1$ i y . För varje $\varepsilon \neq 0$ har då $e + \varepsilon g$, som fås av e genom att man flyttar laddningen ε från x till y , samma totalladdning som e på varje ledare L men större energi enligt föregående sats. Man har alltså

$$I(e + \varepsilon g) > I(e).$$

Om P är potentialen av e blir vänstra ledet med hjälp av (9) och (10)

$$I(e) + \varepsilon(P(y) - P(x)) + \varepsilon^2 I(g),$$

så att

$$\varepsilon(P(y) - P(x)) + \varepsilon^2 I(g) > 0$$

¹ Vi kan tänka oss att man förbundit de olika punkterna inom varje L_k inbördes med tunna metalltrådar, medan det däremot inte finns någon förbindelse mellan två punkter tillhörande olika L_k .

för varje ε . Detta är möjligt bara då $P(y) = P(x)$, och satsen är bevisad.

Satserna 4 och 5 gäller speciellt för en ledare L . Om totalladdningen på L är m , motsvarande jämviktsfördelning e och potentialen av e är P^* så är tydligen $P^* = 2I(e)/m$ enligt (4), eftersom P^* är konstant på stödet för e .

Vi skall nu i viss mening omvända sats 5 och visa

SATS 6. Om e har konstant potential på varje ledare, så måste e överensstämma med den jämviktsfördelning e^* , som har samma totalladdning som e på varje ledare.

BEVIS: Låt P^* vara jämviktsfördelningens potential. Då är

$$I(e - e^*) = \frac{1}{2} \sum_x [P(x) - P^*(x)] [e_x - e_x^*] = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \alpha_s \sum_{x \in L_s} (e_x - e_x^*),$$

där α_s är värdet av $P(x) - P^*(x)$ på L_s . Detta ger $I(e - e^*) = 0$ och alltså $e = e^*$.

Som en illustration till de satser vi har bevisat, skall vi nu explicit beräkna ett par jämviktsfördelningar.

EXEMPEL 1. Låt oss betrakta en enda ledare L bestående av punkterna $-a$, 0 och $a > 0$ och antag att totala laddningen är 1. Vi har då

$$e_{-a} + e_0 + e_a = 1$$

och potentialen blir

$$(16) \quad P(x) = \varphi(x+a)e_{-a} + \varphi(x)e_0 + \varphi(x-a)e_a.$$

Jämviktsfördelningen karakteriseras av att potentialen är konstant på L , d. v. s. att $P(-a) = P(0) = P(a)$. Av detta får man eftersom $\varphi(a) < \varphi(0)$:

$$e_a = e_{-a}, \quad e_0 = \frac{\varphi(0) + \varphi(2a) - 2\varphi(a)}{\varphi(0) - \varphi(a)} e_a.$$

Observera att e är ≥ 0 .

EXEMPEL 2. Låt oss betrakta två ledare L_1 och L_2 , som består av punkterna $-a$ och 0 och punkten a respektive (se fig. 7), och antag att

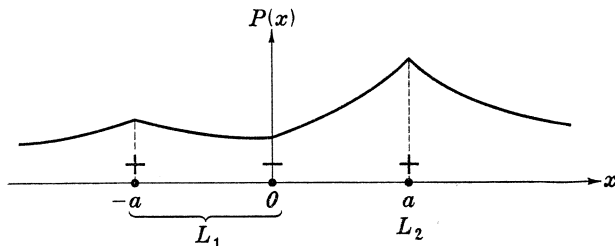


Fig. 7

totala laddningen är 0 på L_1 och 1 på L_2 . Man får $e_{-a} + e_0 = 0$ och $e_a = 1$ och villkoret att potentialen (16) skall vara konstant på L_1 ger

$$e_0 = -e_{-a} = \frac{1}{2} \frac{\varphi(2a) - \varphi(a)}{\varphi(0) - \varphi(a)}.$$

Observera att $e_0 \leq 0$ och $e_{-a} \geq 0$ och att vi får sträng olikhet då φ är strängt avtagande. (Jämför influensfenomenet i elektricitetsläran.)

Jämviktsfördelningen av en positiv laddning. Som bekant är jämviktsfördelningen av en positiv laddning på *en* ledare alltid ≥ 0 i det Newtonska fallet. Denna sats gäller också i vår modell (jämför exempel 1), och vi skall bevisa den nedan. Vi undersöker först potentialfunktioner av positiva laddningsfördelningar närmare. Om $e > 0$ så är $P(x)$ en ändlig lineärkombination av icke-negativa funktioner, som $\rightarrow 0$ då $|x| \rightarrow \infty$. Det finns alltså minst en punkt, där P antar sitt maximivärde. Vi vill undersöka var denna punkt ligger.

SATS 7. »Maximisatsen». Om $e > 0$ så finns det minst en punkt i stödet för e , där P antar sitt maximivärde.

BEVIS: Låt x vara en punkt, där P antar sitt maximivärde. Antag, att x ligger utanför e :s stöd. Då är P konvex i x d. v. s.

$$P(x) \leq \frac{1}{2}[P(x-\delta) + P(x+\delta)].$$

Men å andra sidan är

$$P(x-\delta) \leq P(x) \quad \text{och} \quad P(x+\delta) \leq P(x)$$

så att $P(x) = P(x-\delta) = P(x+\delta)$. Om någon av punkterna $x-\delta$ eller $x+\delta$ ligger i e :s stöd, så är satsen bevisad. Om detta ej inträffar, kan vi utföra upprepade translationer med beloppet δ tills vi kommer till en punkt y i e :s stöd för vilken gäller $P(y) = P(x)$, varmed satsen är bevisad. (Se fig. 8.)

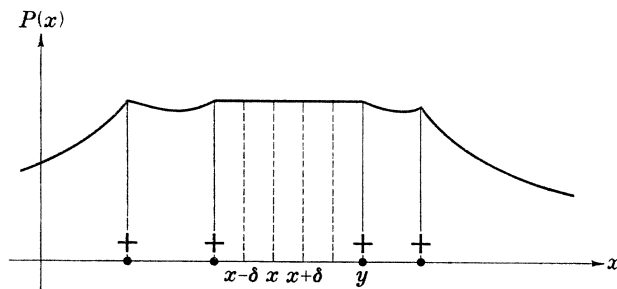


Fig. 8. Plustecknen anger stödet för e .

Vi kan nu visa

SATS 8. *Jämviktsfördelningen av en positiv laddning på en ledare L är positiv.*

BEVIS: Låt K vara mängden av alla laddningar f på L med given positiv totalladdning m , så att då f tillhör K gäller

$$\sum_x f_x = m \quad (x \text{ tillhör } L),$$

och låt K^+ vara mängden av alla laddningar f i K , som är ≥ 0 , d. v. s. alla f i K så att

$$f_x \geq 0 \text{ då } x \text{ tillhör } L.$$

Man konstaterar omedelbart med hjälp av sats 2, att K^+ är en sluten, konvex mängd i R . Alltså finns det enligt sats 3 ett entydigt bestämt element e^+ i K^+ , sådant att

$$I(e^+) = \inf I(f) \text{ då } f \text{ tillhör } K^+.$$

Det är klart att satsen är bevisad, om vi kan visa att e^+ är identisk med jämviktsfördelningen e , som karakteriseras av

$$I(e) = \inf I(f) \text{ då } f \text{ tillhör } K.$$

Enligt sats 6 räcker det att visa, att potentialen P^+ av e^+ är konstant på L . Enligt maximisatsen finns det en punkt x , där P^+ uppnår sitt maximum och där $e_x^+ > 0$. Låt y vara en annan punkt i L , och låt g bestå av laddningarna -1 och 1 placerade i x och y respektive. Om $0 < \varepsilon < e_x^+$ är det klart att $e^+ + \varepsilon g$ fortfarande tillhör K^+ , och sålunda har man

$$I(e^+ + \varepsilon g) > I(e^+).$$

Nu är vänstra ledet lika med

$$I(e^+) + \varepsilon(P^+(y) - P^+(x)) + \varepsilon^2 I(g),$$

så att olikheten övergår i

$$\varepsilon(P^+(y) - P^+(x)) + \varepsilon^2 I(g) > 0.$$

Dividerar man här med $\varepsilon > 0$ och låter $\varepsilon \rightarrow 0$ följer att $P^+(y) \geq P^+(x)$. Men enligt förutsättningen har man också den motsatta olikheten. Alltså är P^+ konstant på L , och satsen är bevisad.

När ligger jämviktsfördelningen på randen? I det Newtonska fallet ligger jämviktsfördelningen till en samling ledare alltid på randen (ytan) av ledarna. Vi skall se att det i vår modell finns potentialfunktioner, som

i detta avseende är analoga med den Newtonska potentialen. Man ser av exempel 1 att jämviktsfördelningen är noll i origo då och endast då

$$\varphi(2a) + \varphi(0) = 2\varphi(a),$$

vilket, eftersom φ är konvex, innebär att φ är rätlinjig i intervallen $0 \leq |x| \leq a$. Vi skall se, att detta förhållande är allmänt.

SATS 9. Om jämviktsfördelningen av en ledare L av längden l , som innehåller minst tre punkter, ligger på randen (d. v. s. ändpunkterna) av L , så är potentialfunktionen φ rätlinjig i intervallen $0 \leq |x| \leq l$. Å andra sidan, om φ har denna egenskap, så ligger varje jämviktsfördelning på varje system av ledare, som är innehållna i ett intervall av längden l , på randen av ledarna, förutsatt att de inte är inflettade i varandra.

BEVIS: Låt L vara en ledare av längden l med ändpunkterna y och z och antag att jämviktsfördelningen e av enhetsladdningen på L ligger på randen. Om

$$P(x) = e_y \varphi(x-y) + e_z \varphi(x-z)$$

är potentialen av e , är speciellt

$$P(y) = e_y \varphi(0) + e_z \varphi(y-z) = e_y \varphi(z-y) + e_z \varphi(0) = P(z).$$

Eftersom $\varphi(y-z) < \varphi(0)$ får man $e_y = e_z = \frac{1}{2}$, och

$$P(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x-y) + \varphi(x-z))$$

är konvex utanför y och z . Om nu v är en tredje punkt i L mellan y och z så är $P(y) = P(z) = P(v)$, vilket medför att P är konstant $= C$ mellan y och z . Nu är $\varphi(x-y)$ för fixt y konvex utanför y och $\varphi(x-z)$ för fixt z konvex utanför z så att

$$\varphi(x-y) = 2C - \varphi(x-z)$$

är både konvex och konkav, d. v. s. rätlinjig mellan y och z . Men detta

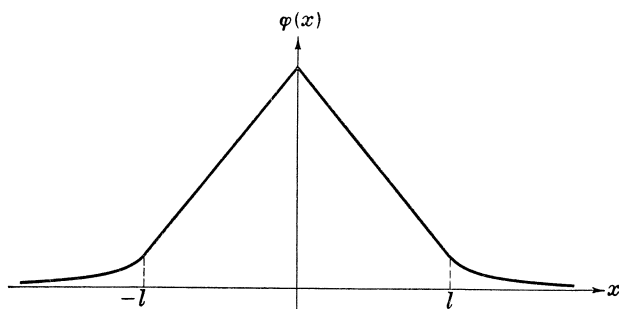


Fig. 9

innebär att $\varphi(t)$ är rätlinjig i intervallen $0 \leq |t| \leq l$, så att första delen av satsen är bevisad. Potentialfunktionens utseende framgår av fig. 9.

Antag omvänt, att φ har denna egenskap och låt e vara jämviktsfördelningen på ett system av ledare innehållna i ett intervall av längd $\leq l$. Det räcker att visa följande: Låt y, v och z vara tre punkter på samma ledare och antag att v ligger mellan y och z och att e är noll mellan y och v och mellan v och z . Då är $e_v = 0$. Potentialen P av e är nämligen summan av potentialen P_1 av alla laddningarna utom e_v och potentialen $P_2(x) = e_v \varphi(x-v)$ av e_v . Mellan y och z är enligt förutsättningen P_1 rätlinjig och eftersom $P(y) = P(v) = P(z)$ innebär detta, att de tre punkterna på kurvan för P_2 som svarar mot y, v och z ligger i rät linje. Men detta är möjligt bara då $e_v = 0$ och satsen är bevisad.

Anm. Om ledarna är inflätade i varandra, kan man uppdelade dem i ledare, som ej är inflätade i varandra och jämviktsfördelningen ligger då på randen av dessa.

Den allmänna potentialteorin. Den allmänna potentialteorin har utvecklats av bl. a. Brelot, Cartan, Deny och Frostman. För en utförlig framställning av denna hänvisas läsaren till nedanstående arbeten.

REFERENSER

- H. CARTAN: *Sur les fondements de la théorie du potentiel*. Bull. Soc. Math. France 69 (1941), pp. 71–96.
H. CARTAN: *Théorie du potentiel Newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels*. Bull. Soc. Math. France 73 (1945), pp. 74–106.
H. CARTAN: *Théorie générale du balayage en potentiel Newtonien*. Ann. Univ. Grenoble, N. S. 22 (1946), pp. 221–280.
O. FROSTMAN: *Doktorsavhandling*. Lund 1935.

ET UNGDOMSBREV FRA NIELS HENRIK ABEL

VIGGO BRUN og BØRGE JESSEN

1. I august 1955 brakte de danske dagblad meddelelse om et oppsiktsvekkende funn av brev fra det 19. århundres gullaldertid. Det dreiet seg om den i sin tid bekjente pedagog og publisist, professor F. C. Olsens arkiv. Arkivet, som nå befinner seg i Det kgl. Bibliotek i København, viste seg å inneholde tallrike brev fra Oehlenschläger, Carsten Hauch, H. C. Ørsted, B. S. Ingemann, J. L. Heiberg, Madvig og atskillige andre.¹ Blant brevene var også det ungdomsbrevet fra Abel, som vi her offentliggjør.

Brevets mottager, *Frederik Christian Olsen*, som nå især huskes som utgiveren av en rekke brev til belysning av Johannes Ewalds liv og som forfatteren av den første biografi over Poul Martin Møller, til hvis nærmeste krets han hørte, var født i 1802 og var således jevnaldrende med Abel. Han ble student i 1819 og studerte filologi ved Københavns universitet. Han deltok med iver i studenterlivet. Fra 1819 bodde han på Regensen. Etter i 1827 å ha tatt embedseksamen virket han en årrekke som lærer ved forskjellige skoler. Fra 1844 til 1866 var han rektor for Viborg katedralskole. Han døde i 1874.

Det her offentliggjorte brev er skrevet etter Abels hjemkomst til Christiania fra besøket i København sommeren 1823, hans første utenlandsreise. Fra denne reise er bevart to brev til Holmboe, datert henholdsvis den 15. juni 1823 og »Aar $\sqrt[3]{6.064.321.219}$ (Tag Decimalbrøken med)«. Brevene er trykt i »Festskrift ved Hundredaarsjubilæet for Niels Henrik Abels Fødsel«, Christiania 1902, i hvilket også finnes en faksimile av det annet brevets første side. Datoen for det første brev var en søndag, og ifølge brevet var Abel ankommet den foregående fredag, altså den 13. juni. I en påtegning på det annet brev har Holmboe angitt kubikkrotens verdi til 1823.567, hva han omsetter til 24. juni 1823. I stedet for juni kan dog muligens også leses juli, hvilket forekommer rimelig; dog svarer desimalbrøken ikke til 24., men til 26. juli. For øvrig er kubikkrotens verdi 1823.5908 På grunnlag av dette setter festskriftets utgivere datoen til 4. august 1823. I slutten av dette brev skriver Abel:

»Den 1ste Julii høitideligholdtes Regentsens Jubilæum. Jeg var med. Der blev drukket tappert 800 Flasker Viin. Her har været to Gange Comødie. Jeg var der begge Gange. Den sidste Gang blev et Stykke udpebet. —

Jeg kommer hjem i Slutningen af August, og skal da meddele Dig min Høst som er ganske god. —«

Festen i anledning af Regensens 200-års jubileum den 1. juli 1823 omtales som en av de mest stemningsfulle i dens historie. Der deltok omkring 400 studenter. F. C. Olsen var blant arrangørene.²

Lederen av Theaterhistorisk Museum i København, Robert Neiiendam, har i brev meddelt at Abel ikke har kunnet være i teatret i juni 1823, da det var lukket; men i juli oppførtes: den 15. »*Peter og Paul*« og »*De borgerlige Støvnemøder*«, den 22. »*Saragossas Belejring*« og »*Den Forsigtige*«, den 29. »*Det stille Vand har den dybe Grund*« og »*Postmesteren*«. (Kursiv skrift betyr nye stykker.) Piping var den gang temmelig alminnelig. Bare hvis demonstrasjonen tok overhånd, så politiet måtte tilkalles, ble den notert i journalen. Den pipingen Abel skriver om må henføres til Kotzebues lystspill »*Saragossas Belejring*«; om dette skrives i Thortsens »*Thalia*« 1823, at det var »lydeligt Mishag efter Forestillingens Slutning«. Da en tilsvarende bemerkning ikke gjøres ved de andre forestillinger, kan man fastslå at Abel var i teatret den kvelden, den 22. juli. Spetakkelet har vel gjort særlig inntrykk på ham, da han kom fra en by hvor ennå intet offentlig teater fantes. Christiania fikk først sitt skuespillhus 1827.

2. Det nå funne brev inneholder intet av matematisk interesse, men det føyer litt til vår viden om Abels Københavnsreise.

Utenpåskriften lyder:

S T

Hr Studiosus magist: Olsen

Regentsen

i København

og innholdet er følgende:

Christiania d: 13de August 1823

Gode Ven!

Du er nok bleven forundret over ikke at have seet mig før min Afreise, og jeg maa bede dig holde mig undskyldt; thi jeg kom saa pludselig afsted saa at jeg netop fik Tid til at faae mit Pas. Min Reise var just ikke af de heldigste; Jeg var 10 Dage underveis, og havde Modvind hele Veien. Imidlertid kom vi dog frem saaledes som det var. — Jeg har en Ting at bede Dig om som Du ikke maa

nægte mig; det er at gaae hen til Decanus for det philosophiske Facultet og erholde Attest for Studiosus Theol: Glatveds specielle Caractherer til Examen philo: Han var oppe til Examen i Foraaret 1813. Det er ham meget magtpaaliggende at faae denne Attest [Jeg] maa derfor bede Dig at faae den og sende mig den med Trepka næstkommende Leilighed. —

Forresten lever jeg meget vel og beder dig hilse Henningsen Krarup og hvem flere Du veed jeg kjender. Skjelderup lever vel og hilser iligemaade. —

Din Ven
N: Abel

S T
Hr Stud: Olsen.

3. Øystein Ore har i brev meddelt, at han har undersøkt Abels ankomst til og avreise fra København 1823. I dagbladet »Dagen« for 18. juni 1823 finner man i rubrikken »Reisende til Kjøbenhavn«: »Ankommet den 14de, 15de og 16de juni . . . Student Abel fra Christiania . . .«. Abels navn kommer nesten sist på listen. Avreisedagen sto ikke i avisene, men av politiets protokoller fremgikk det, at 30. august 1823 var avreisepass til Christiania utstedt til Student N. H. Abel. Hans kausjonist var onkelen Tuxen og avgiften var 1 daler 24 sk.

Ore mener derfor, at Abel på brevet til Olsen må ha kommet til å skrive 13de August istedenfor 13de September.

Om de i brevet nevnte personer kan følgende opplyses:

Jens Glatved var født 1792 på Norderhov, hvor hans far var prest. Han reiste 1809 til København, hvor han tok examen artium i oktober 1812 og den philologiske prøve i april 1813. I 1820 ble han innskrevet ved universitetet i Christiania. I 1825 tok han der eksamen i teologi, ble samme år sogneprest til Gildeskaal og 1835 til Vestby, hvor han døde 1837.

Emil Trepka, norsk skipskaptein, senere reder, førte jakten »Apollo«, som gjorde 6–8 turer årlig mellom Christiania og København før dampskipenes tid. Den var opprinnelig dansk og var på 19 commercelæster.

Henningsen og *Krarup* kan ikke med sikkerhet identifiseres. Det var i de nærmest foregående år ved Københavns universitet immatrikulert flere studerende av disse navn. Det ligger nær å anta, at den første er *Henrik G. Henningsen*, en av arrangørene av Regensens 200-års jubileumsfest. Han ble innskrevet ved universitetet i 1817, 20 år gammel, og tok teologisk eksamen i 1824. Han ble sogneprest i Lysabild på Als. Død 1866. Den annen er antagelig *Otto Christian Krarup*, født 1802, student 1820. Han var bror til F. C. Olsens lærer, den senere rektor ved Borger-

dydskolen, Niels Bygom Krarup, og Olsen hadde hatt ham boende hos seg på Regensen innen han i mai 1823 ble alumne. Han tok teologisk eksamen i 1826 og døde 1827.³

Skjelderup. Professor Michael Skjelderup, født i Jarlsberg 1769, professor i København 1805–1814, professor i Christiania 1814–1848, død 1852, hadde to sønner. Etter all sannsynlighet er det hans eldste sønn, *Jacob Worm Skjelderup*, som er nevnt i brevet. Han var født i København 1804, kom 1814 med sine foreldre til Christiania og var Abels klassekamerat på katedralskolen. Høyesterettsadvokat fra 1837. Han var som Abel meget teaterinteressert og var flere ganger direktør for Christiania Theater. Død 1863.⁴

4. Etterskrift. Når det gjelder brev fra og om Abel kan det være av interesse å nevne, at Magnus Olsen har klarlagt det hittil gåtefulle uttrykk av Hansteen i brev fra 1826 til Boeck: »Men hvad den Thor i Ura vil svinge til Leipzig og Rhinegnene for ved jeg ikke».⁵

Et sagn, som nettopp var omtalt i Hansteens »Magazin for Naturvidenskabene», sier at Tor mistet sin hammer i uren ved Urebø nær Totak i Telemark, mens han i sinne slo ned de stenene fra fjellet, som danner uren. For å finne igjen hammeren veltet Tor sten snart tilvenstre, snart tilhøyre, så det ble en slags vei gjennom uren. (Ur eller urd, norsk ord for en stor stensamling, som er rast ned fra fjellene.)

NOTER

¹ For en nærmere omtale av arkivet, se Morten Borup: F. C. Olsens brevarkiv på Det kgl. Bibliotek, Fund og Forskning i Det kongelige Biblioteks Samlinger III, 1956, s. 103–116. Se også Morten Borup: Mellem klassiske Filologer, København 1957.

² Jfr. C. E. F. Reinhardt: Kommunitetet og Regentsen fra deres Stiftelse indtil vore Dage, Historisk Tidsskrift 3. r. III, 1862, s. 377–380, og Knud Fabricius: Regensen gennem Hundrede Aar, København 1923–1925, s. 40–43 og 345.

³ Jfr. Morten Borup: Mellem klassiske Filologer, København 1957.

⁴ Han omtales i Johanne Luise Heiberg: Et Liv gjenoplevet i Erindringen I, København 1891, s. 144 og 159–160. Se også Slægthistoriske Meddelelser ved Arthur Skjelderup, Christiania 1915.

⁵ Se Magnus Olsen: »Tor i Ura», Maal og Minne 1955, s. 121–123, og Øystein Ore: Niels Henrik Abel. Et geni og hans samtid, Oslo 1954, s. 134.

AN INEQUALITY FOR CONVEX FUNCTIONS

BENGT JOEL ANDERSSON

THEOREM: *Let $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ be convex functions, defined in $0 \leq x \leq 1$, and for which*

$$F_p(x) \geq 0, \quad F_p(0) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

If

$$\int_0^1 F_p(x) dx = \alpha_p,$$

then

$$\int_0^1 F_1(x) F_2(x) \dots F_n(x) dx \geq \frac{2^n}{n+1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

PROOF: Put $F_p^*(x) = 2\alpha_p x$ and

$$\Phi_p(x) = \int_0^x (F_p^*(y) - F_p(y)) dy.$$

Then $\Phi_p(0) = \Phi_p(1) = 0$, and it follows from the convexity of $F_p(x)$ that

$$\Phi_p(x) \geq 0 \quad \text{in} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Let K denote the class of convex functions of the theorem. If $G(x) \in K$, then

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x) F_p(x) dx &= \int_0^1 G(x) F_p^*(x) dx - \int_0^1 G(x) d\Phi_p(x) \\ &= \int_0^1 G(x) F_p^*(x) dx + \int_0^1 \Phi_p(x) dG(x) \geq \int_0^1 G(x) F_p^*(x) dx. \end{aligned}$$

An arbitrary finite product of functions in K belongs to K . Further $F^*(x) \in K$ if $F(x) \in K$, and the above inequality gives

$$\int_0^1 F_1 F_2 \dots F_n dx \geq \int_0^1 F_1 F_2 \dots F_{n-1} F_n^* dx ,$$

since $F_1 F_2 \dots F_{n-1} \in K$. But $F_1 F_2 \dots F_{n-2} F_n^* \in K$, and so

$$\int_0^1 F_1 F_2 \dots F_{n-1} F_n^* dx \geq \int_0^1 F_1 F_2 \dots F_{n-2} F_{n-1}^* F_n^* dx .$$

Repeating the argument, we find

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_1 F_2 \dots F_n dx &\geq \int_0^1 F_1^* F_2^* \dots F_n^* dx \\ &= 2^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \int_0^1 x^n dx = \frac{2^n}{n+1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n , \end{aligned}$$

and the theorem is proved. We obtain equality if $F_p(x) = 2\alpha_p x$, $p=1, 2, \dots, n$.

KOMMENTAR TILL EN GAMMAL OLIKHET

M. TIDEMAN

E. Mathieu angav 1890 utan bevis följande olikhet:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+x^2)^{-2} < \frac{1}{2x^2} \quad \text{för alla } x \neq 0.$$

Olikheten dök åter upp 1949 och bevisades första gången 1952. Den har senare blivit föremål för ytterligare behandling, se referenserna. Här skall ges ett bevis med standardmetoder, varvid som biprodukt erhållas en följd olikheter av samma slag.

Enligt välkända uppskattningar gäller följande olikhet: Om $f(y)$ är en kontinuerlig, positiv funktion av y , då $y > 0$, med $f(0) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = 0$ och med endast ett extremvärde A , så är

$$(2) \quad \int_1^{\infty} f(y) dy - A \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(y) dy + A.$$

Vi skall tillämpa detta på

$$f_k(y, t) = kty^{2k-1}(y^2+t)^{-k-1}, \quad S_k = S_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k(n, t),$$

$$I_k = I_k(t) = \int_1^{\infty} f_k(y, t) dy, \quad k = 1, 2, \dots,$$

med avsikten att visa att

$$(3) \quad S_k < \frac{1}{2} \quad \text{för alla } t \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Med $k=1$, $t=x^2$ erhålles som specialfall olikheten (1).

En partiell integration ger att

$$\begin{aligned} I_k &= -\frac{1}{2}t \int_1^{\infty} u^{k-1} d(u+t)^{-k} = \frac{1}{2}t(1+t)^{-k} + I_{k-1} \\ &= \frac{1}{2}t[(1+t)^{-k} + \dots + (1+t)^{-1}] \leq \frac{1}{2}t \sum_{v=1}^{\infty} (1+t)^{-v} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Låter vi $A_k = A_k(t)$ vara maximivärdet av $f_k(y, t)$ som funktion av y för positiva y , så ger (2):

$$\frac{1}{2}t(1+t)^{-1} - A_k \leq S_k \leq \frac{1}{2} + A_k.$$

Eftersom A_k går mot noll, då t växer över alla gränser, så konvergerar S_k mot $\frac{1}{2}$. Vidare är $S_k < \frac{1}{2}$ för $0 \leq t \leq (4k)^{-1}$, ty $S_k < kt \sum n^{-3} < 2kt$.

Som slutlig förberedelse konstateras att för $S_k' = \frac{dS_k}{dt}$ gäller

$$(4) \quad tS_k' = -k(S_k - S_{k+1}).$$

LEMMA: För $0 \leq t < \infty$ är $S_k \leq \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, \dots$

BEVIS: Antag att det i ett intervall $(4k_0)^{-1} \leq t \leq B$ finns punkter, där $S_{k_0} > \frac{1}{2} + d$ för ett konstant positivt d . Då S_{k_0}' måste vara positiv för något av de t -värden, där $S_{k_0} > \frac{1}{2} + d$, måste det enligt (4) finnas punkter i intervallet, där $S_{k_0+1} > \frac{1}{2} + d$. Vi kan gå vidare till S_{k_0+2} etc. och får således en motsägelse, om det gäller att A_k konvergerar likformigt mot noll i varje ändligt intervall $(4k_0)^{-1} \leq t \leq B$. Direkta räkningar visar att så är fallet.

SATS: Olikheterna (3) är uppfyllda.

BEVIS: Antag att det finns ett T så att $S_1 = \frac{1}{2}$ för $t = T$. Av beviset för lemmat framgår att alla $S_k = \frac{1}{2}$ för $t = T$. Låter vi a vara ett tal i intervallet $-1 < a < 1$ och inför förkortningen $u = n^2 a(n^2 + T)^{-1}$ så finner vi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= (1-a)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a^2 + \dots\right) = (1-a) \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} S_k \\ &= (1-a) \sum_n nT(n^2 + T)^{-2} \left(\frac{d}{du} \sum_k u^k \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nT}{1-a} \left(n^2 + \frac{T}{1-a} \right)^{-2} = S_1 \left(\frac{T}{1-a} \right), \end{aligned}$$

vilket medför att $S_1 \equiv \frac{1}{2}$ för $t > \frac{1}{2}T$. Vi få således en orimlighet. Beviset sker på samma sätt för $k = 2, 3, \dots$

REFERENSER

- L. BERG: *Über eine Abschätzung von Mathieu*. Math. Nachr. 7 (1952), S. 257–259.
 O. EMERSLEBEN: *Über die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + c^2)^2}$. Math Ann. 125 (1952), S. 165–171.
 J. G. VAN DER CORPUT — L. O. HEFLINGER: *On the inequality of Mathieu*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. (A) 59 = Indag. Math. 18 (1956), pp. 15–20. (Math. Rev. 1956, p. 949.)

ETT ÖVERTÄCKNINGSPROBLEM

GÖTE NORDLANDER

Vi skall i det följande betrakta mängder, vars element i sin tur är punktmängder, t. ex. mängder av intervall på en linje eller kvadrater i ett plan. För enkelhets skull inför vi följande benämningar:

Två punktmängder är *disjunkta*, om de saknar gemensamma punkter.

En mängd av punktmängder är *distinkt*, om de ingående punktmängderna är parvis disjunkta.

Det problem vi skall behandla härstammar från Tibor Radó. Låt oss börja med det endimensionella fallet.

M är en mängd, bestående av ett ändligt antal intervall på en rät linje, som vi kan antaga vara den reella talaxeln. Dessa intervall får ha gemensamma punkter. Med $l(M)$ betecknar vi totala längden av de delar av linjen, som är täckta av intervall i M . Vi vill visa, att man alltid kan utvälja en distinkt delmängd M' av M , sådan att

$$l(M') \geq \frac{1}{2}l(M).$$

BEVIS: Låt $I_1, I_2, \dots, I_k$ beteckna de i M ingående intervallen. Vi kan antaga, att det i varje I_v , $v=1, \dots, k$, finns en punkt x_v , som inte ligger i något annat intervall i M . Ty eljest kan vi ta bort ifrågavarande intervall utan att förändra $l(M)$. Numreringen kan väljas så att $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

Vi indelar nu intervallmängden i två klasser; den ena får innehålla de intervall, som har udda index och den andra intervallen med jämna index. Två intervall i samma klass måste vara disjunkta, ty mellan dem finns ju minst en punkt x_v , som endast tillhör ett intervall ur den andra klassen. Vardera klassen är alltså distinkt. Någon av dem måste tydligen ha en total längd, som är större än eller lika med $\frac{1}{2}l(M)$, och är därför av den sökta typen v. s. b.

Exemplet med två lika långa intervall med en gemensam ändpunkt visar att konstanten $\frac{1}{2}$ icke kan förbättras.

Vi undersöker nu motsvarande problem i planet, i vilket vi antar ett

rätvinkligt koordinatsystem givet. Intervallen I_ν låter vi motsvaras av kvadrater K_ν med sidorna parallella med koordinataxlarna. I stället för $l(M)$ betraktar vi $y(M)$, dvs. totala ytan av de delar av planet, som är övertäckta av kvadrater i M . *Det finns då en konstant κ_2 , så att vi alltid kan utvälja en distinkt delmängd M' av M , sådan att*

$$y(M') \geq \kappa_2 \cdot y(M).$$

Vi kan nämligen välja $\kappa_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$. Detta framgår av följande konstruktionsmetod för delmängden M' :

Låt c_1 vara den största kvadraten i M (eller en av de största).

- c_2 - - - - -, sådan att mängden $\{c_1, c_2\}$ är distinkt.

- c_3 - - - - -, sådan att mängden $\{c_1, c_2, c_3\}$ är distinkt,

etc.

Denna process måste upphöra efter, låt oss säga, N steg. Mängden $M' = \{c_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, har den önskade egenskapen. Ty konstruera en kvadrat C_ν med axelparallella sidor, tre gånger så långa som c_ν :s, och med samma medelpunkt som c_ν . Mängden $\{C_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, kallar vi H . På grund av konstruktionen kommer hela den del av planet, som övertäcks av kvadrater i M , också att övertäckas av kvadrater i H . Härav fås

$$9y(M') \geq y(H) \geq y(M) \quad \text{v. s. b.}$$

Det bästa värdet på konstanten κ_2 är okänt. En naturlig gissning är $\kappa_2 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. För det speciella fall, då alla kvadraterna i M förutsätts lika stora, har Richard Rado¹ visat att detta är det rätta värdet. Vi skall här ge ett nytt bevis för detta resultat.

Först en omformulering. Vi kan tydligen antaga att kvadraternas sida är $= 1$. Vi skall då visa följande

SATS: *Antag att den största distinkta delmängden M' , som kan utväljas ur M , består av p kvadrater. Då gäller*

$$y(M) \leq 4p.$$

BEVIS: Om linjen $x=a$ skär någon eller några av kvadraterna i M , så kommer skärningarna att bilda en intervallmängd på linjen, varvid varje intervall är utskuret av en viss kvadrat i M . Liksom tidigare betecknas med $l(a)$ totala längden av de delar av linjen, som är täckta av dessa intervall. Sätt $d = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, och

¹ R. Rado: *Some covering theorems, I*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 51 (1950), pp. 232–264.

$$L(a) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} l(a+vd) \\ = \dots + l(a-2d) + l(a-d) + l(a) + l(a+d) + l(a+2d) + \dots,$$

där summan givetvis existerar, eftersom endast ett ändligt antal termer är skilda från noll.

Om funktionen $L(a)$ gäller

$$(1) \quad L(a) \leq 2p \quad \text{för alla } a.$$

Ty om $L(a) > 2p$ för något a , så kan vi ur mängden I av de intervall, som utskärs av linjerna $x = a + vd$, $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, utvälja en distinkt delmängd I' bestående av mer än p intervall, enligt vad vi nyss visat. Intervallen i I' är utskurna av vissa kvadrater i M . Men dessa kvadrater måste vara parvis disjunkta, ty om två kvadrater är associerade med intervall på samma parallell till y -axeln, så är de disjunkta, eftersom intervallen är det, och om de är associerade med intervall på olika paralleller, så kan de inte nå varandra, eftersom avståndet mellan parallellerna är större än 2. Vi skulle alltså ha en distinkt delmängd av M , bestående av mer än p kvadrater, mot förutsättningen.

Det återstår bara att konstatera, att

$$y(M) = \int_0^{2+\varepsilon} L(a) da,$$

eftersom hela planet översveps, när vi förskjuter skaran av paralleller $2 + \varepsilon$ i x -axelns riktning. Uppskattning av integralen medelst (1) ger

$$y(M) \leq (2 + \varepsilon) \cdot 2p.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ ger

$$y(M) \leq 4p \quad \text{v. s. b.}$$

Att konstanten ej kan förbättras framgår denna gång av exemplet med fyra lika stora kvadrater med ett gemensamt hörn.

Det är tydligt att problemet och bevisförfarandet kan generaliseras till den n -dimensionella euklidiska rymden. Vi finner då att $\kappa_n = 3^{-n}$ duger som konstant i det allmänna fallet, medan $\kappa_n = 2^{-n}$ är det rätta värdet, om kuberna i M är lika stora.

BOKMELDINGER

R. A. BUCKINGHAM: *Numerical methods*. Sir Isaac Pitman & Sons, London, 1957. 12+597 pp. sh. 70/-.

(Innehållsfortegnelse i NMT 5 (1957), s. 197.)

Boken avses vara en handbok i numeriska metoder för personer som sysslar med olika slags beräkningar, där räknescnurror kommer till användning. Man skulle kunna tro att detta är ett passerat stadium i räknekunstens historia, när man dagligen hör talas om de elektroniska räknesmaskinernas prestationer. Så är emellertid inte fallet, och denna bok är mycket värdefull även för den som använder elektroniska maskiner för lösning av problemen, eftersom man alltid måste göra några handräkningar för testning av räkneprogrammet.

Boken innehåller de flesta av de metoder som kommer till användning vid numeriska beräkningar. Genomräknade exempel på varje metod ökar bokens värde.

I inledningskapitlet lämnas allmänna synpunkter på handräkning, hur olika slags räkningar utföres på olika maskiner och hur räknesceman utarbetas. I några följande kapitel behandlas interpolation, där författaren även medtagit ett kapitel om symboliska metoder, som är effektiva när man vill härleda samband mellan olika interpolationsformler. Detta kapitel innehåller även Euler-MacLaurins summationsformler med tillämpningar. Varje kapitel avslutas med övningsuppgifter som nästan alltid är av typen »visa att ...«, vilket medför att svaren är givna. I regel härledes de olika formlerna, men vissa generaliseringar lämnas utan bevis, men hänvisningar görs i sådana fall till olika läroböcker. I många fall anges även metodernas begränsningar. Det klassiska exemplet på Lagranges interpolationsformel är medtaget, men man saknar en mera uttömmande diskussion om Newton-Raphsons metod. Ingenting nämns om den periodicitet, som lätt kan uppstå vid tillämpningar av metoden och ingenting om användningen av metoder vid funktioner med komplext argument.

I kapitlet om lösning av ordinära differentialekvationer saknas givetvis Runge-Kuttas metod, eftersom den inte kan konkurrera med andra

handmetoder, men som i regel är den enda tänkbara vid lösning av differentialekvationer på automatiska räknemaskiner.

Minsta kvadratmetoden genomgås före kapitlet om matrissräkning, vilket medför att författaren ej använder matrissymbolik vid uppställning av normalekvationer och beräkning av medelfel. Framställningen är därför en djungel av index, vilket är skada, eftersom minsta kvadratmetoden har stort användningsområde. I detta kapitel behandlas även ortogonala funktioner och deras användning. Lösning av linjära ekvations-system behandlas utförligt, både direkta och indirekta metoder genomgås. Egenvärdesproblem behandlas rätt utförligt, dock utan att Jacobis metod omnämnas. Numerisk lösning av randvärdesproblem vid ordinära och partiella differentialekvationer formuleras med matrisalgebra, vilket gör framställningen klar och överskådlig. Paraboliska och hyperboliska ekvationer behandlas mycket flyktigt.

Boken kan rekommenderas till alla dem som sysslar med numeriska räkningar. Ett stort antal referenser (huvudsakligen till engelskspråkig litteratur) ges för mera ingående studium i olika delar av ämnet.

Olle Karlqvist

E. B. DYNKIN — W. A. USPENSKI: *Mathematische Unterhaltungen, II. Aufgaben aus der Zahlentheorie*. Übersetzung aus dem Russischen. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik, 14.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. 9+134 S., 32 Fig. DM 6.10.

(Innehållsförteckning i NMT 5 (1957), s. 150.)

Den foreliggende lille bog er et veludført eksempel på anvendelse af den sokratiske metode. Indholdet består af 129 opgaver, fordelt i en ret bred tekst, som leder læseren ind i de tankebaner der skal følges. Bogen vil være værdifuld for den læser, som gennemregner opgaverne; men det er ikke en bog han bagefter vil benytte som opslagsbog, dertil er det for besværligt at blade frem og tilbage mellem opgaver og løsninger, som begge kun forstås ved at læse en længere sammenhæng. Bogens aktive-rende formål fremgår også af, at sætninger og resultater ikke presses til stor almindelighed, i stedet bibringer den læseren en fornemmelse af, at der må ligge endnu mere bagved, som det kunne være interessant at få opklaret.

Man må ikke af titlen lade sig forlede til at tro, at det er en alsidig talteoretisk bog; den behandler kun visse specielle emner, som det vil fremgå af følgende indholdsoversigt:

Første kapitel benytter som udgangspunkt, at regning med restklasser modulo 10 kendes som erfaringsresultater for slutfifrene i de hele tal som

indgår i et regnestykke. Det generaliseres til regning med restklasser med vilkårlig modul, og Fermats og Wilsons sætninger fås let og ubesværet.

Kapitel II omhandler m -adiske tal og p -adiske tal. Disse indføres og anskueliggøres ved følgende betragtning: ved subtraktionsstykker bestemmer man cifrene i facit successivt, begyndende fra højre side, og ved divisionsstykker, hvor man ved, at divisionen går op, kan man benytte den samme metode, såfremt divisors sidste ciffer er 1, 3, 7 eller 9. Hvis man anvender denne metode i tilfælde, hvor regnestykket ikke på forhånd er muligt, fremkommer en uendelig cifferfølge, et dekadisk (10-adisk) tal. Samlingen af disse tal udgør et regneområde, f. eks. kan man (både for endelige og uendelige cifferfølger) også ved multiplikation og kvadratrodsuddragning bestemme facits cifre successivt, begyndende fra højre side. Tallene minder altså om uendelige decimalbrøker, blot er de uendelige på venstre side af decimalkommaet og ikke på højre side. Betragter man p -adiske tal, hvor p er et primtal, undgår man forbehold af den ovennævnte art med hensyn til divisors sluteiffer, og regneområdet bliver helt velafgrænset.

I bogens to afsluttende kapitler anvendes disse begreber så ved mere indgående betragtninger over binomialkoefficienter (disse indført uden kombinatorik, blot som de tal der fremkommer i en Pascal'sk trekant) og over Fibonacci's talfølge 1, 1, 2, 3, 5, ... (hvori hvert tal er summen af de to foregående).

Bogen er udmærket anvendelig for skoleelever, som blot har mellem-skoleeksamen. Den er indbydende at gå i gang med, dels på grund af den omtalte nære tilknytning til regneteknik, og dels på grund af de mange grafiske fremstillinger af restklassecykler og af Pascals trekant med indlagte skrålinier og småtrekanter o. s. v.

Thøger Bang

E. B. DYNKIN — W. A. USPENSKI: *Mathematische Unterhaltungen, III. Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Übersetzung aus dem Russischen. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik, 15.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. 7+84 S., 32 Fig. DM 4.10.

(Innholdsfortegnelse i NMT 5 (1957), s. 151.)

Efter en kort indførelse i den klassiske definition af begrebet sandsynlighed efterfulgt af en opstilling af sandsynlighedsregningens additions- og multiplikationssætninger for et endeligt antal hændelser beskæftiger bogen sig udelukkende med problemer inden for teorien om diskrete Markoff-kæder, hvorved, måske lidt pretentiøst udtrykt, forstås problemer om tilstandsfordelingen af en samling partikler, hvis bevægelser er under-

kastet tilfældighedens love (random walk), således at forstå, at fordelingen i udgangøjeblikket er kendt, ligesom overgangssandsynlighederne fra en tilstand til en anden (inden for en vis tid) er kendte. Man søger heraf oplysninger om fordelingen til et senere tidspunkt (eller måske endog fordelingen i den såkaldte statistiske ligevægt). Da selve de teoretiske dele af fremstillingen er ganske korte, medens hovedvægten er lagt på indførelse i den nødvendige teori gennem opgaveløsning, må man påskønne, at det, trods det begrænsede emne, er lykkedes forfatterne at finde så mange (på visse punkter dog lidt ensartede) opgaver.

Bogen er fremkommet på grundlag af et kursus, der skulle inspirere gymnasieelever til aktiv medleven inden for et mere beskedent matematisk område uden for det egentlige obligatoriske stof. Det skal tilføjes, at interesserede elever i vore nordiske gymnasier også vil kunne få glæde af denne lille bog til selvstudium.

Kai Rander Buch

G. GROSCHE: *Projektive Geometrie, I, II.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 7, 8.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. Bd. I: 6+204 S., 45 Fig. Geb. DM 10.20. Bd. II: 196 S., 46 Fig. Geb. DM 9.10.

(Innehållsförteckning i NMT 5 (1957), s. 110, 152.)

Den projektiva geometrien är ett ur flera synpunkter trevligt område av matematiken: den innehåller många vackra satser, den har sina rötter i sammanhang som livligt vädjar till åskådningen, den fordrar åtskilligt av förmåga till abstraktion och abstrakt tänkande.

Föreliggande lärobok i ämnet har åtskilliga förtjänster. Den är ambitiöst och rejält skriven. Den för läsaren i varlig takt från de första enkla grunderna till teoriens mera avancerade delar. De analytiska motsvarigheterna till de rent geometriska resonemangen ägnas tillbörlig uppmärksamhet. Figurerna är på ett skickligt sätt enkelt gjorda. Korrekturläsningen är bra.

Recensenten vill också komma med ett par kritiska påpekanden. Slarv eller förbiseenden förekommer på några ställen. Större skärpa vid formulerandet av definitioner hade här och var varit önskvärd; nu får läsaren en del onödigt besvär med att komma underfund med vad författaren avser. Ett typiskt exempel härpå är författarens användningar av sträckors riktning och vinklars tecken. Ny rad börjar alltid längst till vänster på sidan. Arbetet hade förtjänat att tryckas på bättre papper.

Erforderliga förkunskaper är små. Författaren förutsätter något matrisräkning bekant (skandinaviska läsare kan lämpligen hämta detta stoff ur Andersen-Bohr-Petersen, *Lærebog i matematisk Analyse, I*, Køben-

havn 1945). Vidare är det nyttigt men ej nödvändigt att kunna något gruppteori (se t. ex. kap. 8 i Lass, *Elements of pure and applied mathematics*, McGraw-Hill Book Co., New York 1957).

Arne Broman

JOSEPH E. HOFMANN: *Geschichte der Mathematik*. Zweiter Teil: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden. 109 S. Dritter Teil: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur Französischen Revolution. 107 S. (Sammlung Götschen 875 und 882.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1957. Je DM 2.40.

(Innholdsfortegnelse i NMT 5 (1957), s. 152.)

Da jeg anmeldte Hofmanns første bind av denne serien i NMT 2 (1954), sluttet jeg med å si: »Det kan ikke unngåes at man under lesningen ofte tenker: gid forfatteren hadde hatt større plass til sin rådighet, så han hadde kunnet gjøre fremstillingen mindre summarisk.»

Dette ønske blir om mulig ennå mere levende ved lesningen av disse to nye små bindene. Da Hofmann også medtar i sin fremstilling mindre berømte matematikere — hva i og for seg kan være interessant nok — kan det ikke unngåes at han ofte må ty til telegramstil. Som et eksempel på at en sterkt forkortet tekst kan virke uheldig anfører jeg de linjer hvor Newton introduseres: »Newton (1643–1727) ist der technisch interessierte, jedoch für die landwirtschaftliche Betätigung, zu der er ursprünglich bestimmt war, völlig ungeeignete nachgeborene Sohn eines Gutspächters aus Lincolnshire.« Men man må beundre den rikdom på interessante opplysninger som det har lyktes Hofmann å presse inn i disse to små bindene. Det krever for øvrig ganske store forkunnskaper å følge hans fremstilling. Her har Zeuthens fremstilling i hans »Mathematikens Historie« en stor fordel, da den kan leses med betydelig større utbytte også av dem som har få forkunnskaper. Men så har jo Zeuthen hatt langt større plass til sin rådighet!

Man må håpe at disse bindene, som hører til den populære Sammlung Götschen, vil øke interessen for matematikkens historie i vide kretser. Mange matematikk-interesserte har ofte forbausende liten kjennskap til fagets historie. Når det gjelder en så gammel vitenskap som matematikken må dette regnes som en meget stor mangel. Svært mange problemer som våre forfedre har behandlet må ofte oppfattes som bare halvveis løste, da de simpelthen er gått i glemmeboken, kvalt av nye moteretninger.

Viggo Brun

C. HYLTÉN-CAVALLIUS — L. SANDGREN: *Matematisk analys* (för nybörjarstadiet vid universitet och högskolor). Lunds studentkårs intressebyrå, Lund, 1956. 16+467 s. Sv. kr. 55.00, vid rekvisition direkt från Lunds studentkårs intressebyrå sv. kr. 41.50.

(Innehållsförteckning i NMT 4 (1956), s. 217.)

Denna bok är avsedd att användas som första lärobok vid svenska universitet och högskolor. Dess innehåll täcker teorin för funktioner av en variabel såsom teorin för derivator och integraler samt de enklare satserna om serier. Dessutom finns grunddragen för de komplexa talen och delbarhetsegenskaperna hos hela tal och polynom.

Boken är genomgående mycket grundligt skriven. Den innehåller ett stort antal exempel, såväl sådana som är genomräknade av författarna som sådana som lämnas som övning åt läsaren. Den är utmärkt lämpad som kursbok men torde även med fördel kunna användas av den som önskar läsa in kursen på egen hand.

Vad som skiljer denna bok från det stora flertalet av det otal böcker på olika språk som täcker analysens grunder är det moderna greppet på ämnet. Genom mycket stränga definitioner införes de olika begreppen och härigenom erhålles att grunderna blir stabilare än vad som är brukligt i böcker avsedda för detta stadium. Denna stränghet fullföljes sedan i bevisen för satserna.

Denna noggrannhet och den omsorgsfullhet med vilken boken är skriven gör den mycket intressant. Att den är verkligt värdefull för den unge matematikstuderande som har fallenhet för ämnet förefaller uppenbart. Det måste vara värdefullt vid fortsatta studier att ha grunderna ordentligt avklarade.

Vad som däremot kan diskuteras är vilken verkan en bok av denna typ kan ha på de något mindre begåvade studenterna. Om som här stor vikt lägges vid den logiska strukturen, blir gärna det rent räknemässiga och formelmässiga kunnandet lidande. Detta är givetvis från matematikerns synpunkt knappast av ondo; räknefärdigheter som ej innebär full förståelse är av tvivelaktigt värde. Men de som studera matematiken huvudsakligen för att tillämpa den är kanske av annan åsikt. För dem synes det räknemässiga vara av större betydelse. Här är åsikterna delade. Men den moderna utvecklingen av matematiken synes gå mot allt större stringens. Detta har kanske sin förklaring i att ju abstraktare matematiken blir och ju mer den avlägsnar sig från åskådningen desto större är faran för felslut om grunderna inte är ordentligt lagda. Denna abstraktion synes även vara på väg in i tillämpningarna, så det är möjligt att man från tillämpat håll mer och mer får förståelse för kravet på stringens.

Vilken åsikt man än har i denna fråga kan man med dylika argument inte kritisera själva boken utan möjligen dess användbarhet. Matematikundervisningen i Sverige har länge lidit av att någon lämplig lärobok på detta område saknats. Det är därför med stor tillfredsställelse anmälaren hälsar denna bok.

Olof Hanner

I. M. JAGLOM — W. G. BOLTJANSKI: *Konvexe Figuren*. Übersetzung aus dem Russischen. (Hochschulbücher für Mathematik 24.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. 16+257 S., 318 Fig. DM 15.00.

(Innehållsförteckning i NMT 5 (1957), s. 153.)

»Das Buch ist für Schüler der höheren Klassen an Oberschulen, für Studenten der Anfangssemester an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sowie für alle Freunde der Mathematik bestimmt« hedder det i forfatternes förord. Emnet, konvekse figurer i planen, egner sig i särlig grad til en bog med et sådant sigte, fordi man med ganske elementære hjælpemidler ret hurtigt kan nå frem til meget forskelligartede, interessante og ofte overraskende resultater vedrørende sådanne figurer. Forfatterne giver imidlertid ikke en egentlig lærebogsagtig fremstilling af området, men snarere en vejledning til at trænge ind i det ved eget arbejde. Omtrent som i Pólya's og Szegő's velkendte »Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis« er stoffet delt op i opgaver, hvis formuleringer sammen med de nødvendige definitioner, en del forklarende bemærkninger og henvisninger til generalisationer og til litteratur udgør omtrent bogens første halvdel, medens de udførligt fremstillede løsninger er samlet i anden halvdel. Hvert afsnit begynder med lette, tildels forberedende øvelser og ender som regel med ret dybt liggende sætninger, hvis beviser endda erfarne matematikere (også med den hjælp, som foregående opgaver ofte giver) vil have svært ved at hitte på. I sådanne tilfælde bliver læseren dog advaret ved dobbeltstjerner; i det hele taget lægger forfatterne ikke skjul på, at der er ret mange opgaver, der må forventes at volde vanskeligheder. Bogen indledes med en kort anvisning i dens brug, og der gives læseren bl. a. det råd ikke at læse en opgaves løsning, før den er løst selvstændigt eller der er gjort flere forgæves forsøg, således at der er opnået klarhed over de vanskeligheder, som det gælder at overvinde. Det er klart, at dette vil give det største udbytte. Det bør dog fremhæves, at bogen udmærket godt kan læses på sædvanlig vis ved efter de enkelte opgaver straks at indskyde deres løsninger.

Af de otte paragraffer handler den første om de grundlæggende begreber, relationer mellem konvexitetens forskellige definitioner, støttelinier o. l. Opgaverne er her lette, men giver allerede lejlighed til at gøre sig

fortrolig med nogle for området særegne ræsonnementer. En kendt sætning af Helly: »Hvis det for en samling af begrænsede konvekse figurer i planen gælder, at hvilke som helst tre af dem har et punkt fælles, da findes et punkt, som er indeholdt i dem alle« og en del morsomme anvendelser af den er emnet for § 2. I § 3 er samlet sætninger, som kan bevises ved hjælp af en kontinuitetsbetragtning, nærmere betegnet sætningen om, at en kontinuert funktion, der antager to forskellige værdier, også antager enhver mellemværdi. Som et simpelt eksempel kan nævnes: enhver begrænset konveks figur har et omskrevet kvadrat. § 4 handler om »addition« af konvekse figurer, et begreb der spiller en fundamental rolle i den videregående teori. Opgaverne vedrører ikke så meget anvendelserne som egenskaber ved selve begrebet, og dette afsnit vil derfor måske interessere begyndere i mindre grad end de andre. Med simple elementargeometriske ekstremumsopgaver som udgangspunkt føres læseren i § 5 frem til det isoperimetriske problem i planen. Et udvalg af de mange andre interessante ekstremumsproblemer, der knytter sig til konvekse figurer, formuleres i § 6. Kurver med konstant bredde, ikke-cirkelformede kurver, der kan drejes i en ligesidet trekant, således at alle sider stadig berøres, og beslægtede kurvefamilier behandles i de to sidste paragraffer.

Benyttelse af bogen efter forfatterens hensigt kræver som nævnt en betydelig arbejdsindsats. Men der er næppe tvivl om, at alle geometrisk interesserede, der f. eks. behersker hovedtrækkene i gymnasiets matematikpensum, altså naturligvis matematikstuderende og vel også de dygtigste gymnasieelever, på den ene eller anden måde vil kunne få et rigt udbytte af store dele af bogen. Specielt vil matematiklærere her kunne hente materiale til underholdende og inspirerende digressioner fra den foreskrevne vej. Der kommer således en meget stor kreds af læsere i betragtning, og bogen kan varmt anbefales.

Af hensyn til de, forhåbentlig, mange læsere, der ikke har forkundskaber på området, er det vist ikke overflødigt at nævne et par, omend ikke væsentlige, så dog beklagelige mangler. Det ville være fuldtud forsvareligt i en bog som denne slet ikke at berøre historiske spørgsmål og ikke at nævne de mange sætningers ophavsmænd. Dette er også sket for de fleste opgavers vedkommende; en ikke ringe del af dem er imidlertid benævnt »Satz von N. N.«. Efter anmelderens skøn drejer det sig dels om sådanne, hvor den pågældende benævnelse er traditionel, dels om nyere resultater, for hvis oprindelse der ikke er gjort rede i de videregående sammenfattende fremstillinger af de konvekse figurers teori. En med disse ikke kendt læser må da få et temmelig skævt billede af den historiske side af sagen. Eksempelvis kan nævnes, at af områdets pionerer H. Brunn og H. Minkowski er den første slet ikke nævnt og den anden kun i en lille

henvisning til en videregående sætning. Små historiske indledninger til de enkelte afsnit kunne have genoprettet balancen. — I den russiske originaludgave henvises for videregående studier naturligvis først og fremmest til den på russisk tilgængelige litteratur. I den foreliggende tyske udgave er der tilføjet en del henvisninger til tyske arbejder. Enkelte steder savner man imidlertid et sådant supplement.

W. Fenchel

HARRY LASS: *Elements of pure and applied mathematics*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 11+491 pp. sh. 58/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT 5 (1957), s. 45.)

Den här boken tycks vara avsedd i första hand att ge matematisk bakgrund till arbete i fysik och teknologi. Men den har ett brett register och är värdefull läsning också för den som arbetar inom andra områden där matematiken tillämpas och för den som undervisar i matematik på skilda universitetsstadier. Läsaren förutsättes ha ungefär ett års universitetsstudier i matematik bakom sig. Boken ger i nio kapitel om sammanlagt 370 sidor elementen av olika matematiska teorier med tillämpningar, medan det tionde kapitlet på ungefär ett hundra sidor ger en stringent bakgrund till mycket av det som behandlats tidigare. Uppläggningsen är i sammanhanget utmärkt.

Låt oss börja en mera detaljerad granskning med det sista kapitlet. Dess omfång kan närmast anges som knapp svensk tvåbetygskurs i matematisk analys. Det inledes med införandet av de reella talen och med topologi på räta linjen, allt i en charmant framställning. Naturligtvis kan inte allt behandlas med avsikt att nå fullständighet och stringens och i de följande avsnitten förekommer ibland vaga och någon gång rent olyckliga formuleringar. Boken har massor av värdefulla exempel samt övningar. I det tionde kapitlet blir t. ex. avsnittet om gränsövergångar vid integraler mycket instruktivt belyst. En stor förtjänst hos boken är, att matematikens förhållande till naturvetenskaperna diskuteras. Det sker främst i det sista kapitlet och vid behandlingen av sannolikheteori. Matematisk sanning har inte i sig med fysisk sanning att göra. Antagligen är existensen av olika integralbegrepp en god illustration till denna matematikens självständighet. Boken avslutas också med korta och träffande skisser av Riemannintegralens ofullkomligheter och införandet av Lebesgueintegralen.

De nio första kapitlen utgör förstås bokens huvuddel. Störst utrymme ägnas åt analytiska funktioner och differentialekvationer. De förra behandlas efter klassiska linjer. Av de senare behandlas nästan bara ordi-

nära ekvationer, och framställningen omfattar ekvationer med reella och med komplexa variabler. I några viktiga fall ges existenssatser. Sannolikhetsteori och statistik behandlas i ett kapitel om trettiosex sidor, där också en elementär illustration till spelteorien ges. Kapitlet är ett utmärkt exempel på författarens förmåga att med få ord säga väsentligheter, och på ett fattbart sätt. Någon gång har man en invändning att göra i någon detalj. Så är införandet av vektorer förenklat till inkorrekthet. Det gäller särskilt den abstrakta n -dimensionella vektorrymden.

I en kort anmälan som denna blir det inte plats till särskilda kommentarer till varje kapitel. Det borde kanske ha framhävts att ett kapitel om gruppteori och algebraiska ekvationer ingår. För övrigt kan jag nog hänvisa till innehållsförteckningen. Jag hoppas att av det sagda framgår att detta är en bok som man gärna vill rekommendera. Den trevliga och lagom kompakta typografien förhöjer trevnaden vid läsningen.

Gunnar Bergendal

MOTTATTE BØKER

H. G. Eggleston: *Problems in Euclidean space. Application of convexity.* (Series in pure and applied mathematics 5.) Pergamon Press, London, New York, Paris, Los Angeles, 1957. 8+165 pp., 31 fig. sh. 40/-.

Problems in which convexity is used either by analogy or in subsidiary arguments 4-76 * Problems which can be reduced to problems on convex sets 77-92 * Problems on convex sets 93-129 * Problems concerned with the structure of subclasses of the class of convex sets 130-165.

Carl-Erik Fröberg — Hans Wilhelmsson: *Table of the function $F(a, b) = \int_0^a J_1(x)(x^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} dx$.* (Lund University, Dept. of Numerical Analysis. Table No. 3.) CWK Gleerup, Lund, 1957. 18 s. Sv. kr. 1.00.

The function of the title is tabulated to 6 decimal places for

$$a, b = 0(0.1)2(0.2)10.$$

R. Kochendörffer: *Determinanten und Matrizen.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 12.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 6+144 S. DM 6.60.

Vorbereitungen 1-10 * Determinanten 10-15 * Die wichtigsten Eigenschaften der Determinanten 16-36 * Matrizen 36-47 * Vektorräume. Der Rang einer Matrix 48-70 * Lineare Gleichungen 70-87 * Hermitesche und quadratische Formen 87-102 * Weiteres über Determinanten und Matrizen 102-122 * Ähnlichkeit 123-144.

Solomon Lefschetz: *Differential equations: Geometric theory*. (Inter-science tracts in pure and applied mathematics 6.) Interscience Publ., New York, London, 1957. 10+364 pp. \$ 9.50.

Preliminary questions 1–28 * Existence theorems. General properties of the solutions 29–54 * Linear systems 55–75 * Stability 76–85 * The differential equation $\frac{dx}{dt} = Px + q(x;t)$ (P a constant matrix; $q(0;t) = 0$) 86–130 * The differential equation $\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(x;t)$ ($P(t)$ a variable matrix; $q(0;t) = 0$) 131–143 * Periodic systems and their stability 144–169 * Two dimensional systems, simple critical points. The index. Behaviour at infinity 170–197 * Two dimensional systems (continued) 198–245 * Differential equations of the second order 246–289 * Oscillations in systems of the second order. Methods of approximation 290–324 * Appendix I. Complement on matrices 325–334 * Appendix II. Some topological complements 335–347 * Problems 348–350 * Bibliography 351–359 * List of principal symbols 360 * Index 361–364.

Herbert Lugowski — Hans Joachim Weinert: *Allgemeine Gruppentheorie, I*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 9). B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 4+234 S., 15 Fig. DM 10.00.

Grundbegriffe der Gruppentheorie 5–79 * Permutations- und Transformationsgruppen 80–126 * Homomorphe Abbildungen 127–170 * Einige wichtige Struktur-aussagen über Gruppen 171–194 * Lösungen der Aufgaben 195–222 * Anhang 223–230 * Verzeichnis einiger Lehrbücher 231 * Sachverzeichnis 232–234.

Fumitomo Maeda: *Kontinuierliche Geometrien*. Übersetzung aus dem Japanischen. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 95.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 10+244 S., 12 Fig. DM 36.00, Ganzl. DM 39.00.

Grundbegriffe der Verbandstheorie 1–53 * Allgemeine Eigenschaften modularer Verbände 53–70 * Projektive Räume 70–87 * Die wesentlichsten Eigenschaften stetiger komplementärer modularer Verbände 87–104 * Die Dimensionsfunktion eines stetigen komplementären modularer Verbandes und seine Darstellung als subdirektes Produkt 104–131 * Reguläre Ringe 131–156 * Stetige reguläre Ringe 156–167 * Der normierte Rahmen eines komplementären modularer Verbandes 168–178 * Der Matrizenring 178–197 * Der Hilfsring eines komplementären modularer Verbandes 197–209 * Die Darstellung eines komplementären modularer Verbandes 209–226 * Die Darstellung eines orthokomplementären modularer Verbandes 226–235 * Anhang 235–239 * Literaturverzeichnis 240–241 * Sachverzeichnis 242–244.

Fritz Rehbock: *Darstellende Geometrie*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 92.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 15+232 S., 110 Fig. DM 23.00, Ganzl. DM 26.80.

Einleitung: Grundbegriffe 2–3 * Teil I. *Fernbilder*: Anschauliche Bilder 6–32 * Zugeordnete Risse 34–56 * Anschauliche Risse 58–82 * Einfache Flächen 84–106 * Durchdringungen 108–130 * Teil II. *Zentralbilder*: Distanzpunktperspektive 134–158 * Messpunktperspektive 162–190 * Gebundene Perspektive 192–222 * Literaturauswahl 224 * Sach- und Namenverzeichnis 225–232.

Edward S. Smith — Meyer Salkover — Howard K. Justice: *Calculus*. 2nd edition. John Wiley & Sons, New York, 1958. 13+520 pp., 257 fig. \$ 6.50.

Variables, functions, and limits 1–8 * Differentiation and applications 9–42 * Integration and applications 43–79 * Differentiation of algebraic functions 80–94 * Differentiation of transcendental functions 95–125 * Further applications of derivatives 126–165 * Plane curves; rectangular coordinates 166–181 * Integration 182–207 * Methods of integration 208–226 * Further applications of integration 227–266 * Approximate integration 267–272 * Limits; l'Hospital's rule 273–281 * Infinite series 282–307 * Expansion of functions 308–329 * Hyperbolic functions 330–348 * Solid analytic geometry 349–364 * Partial differentiation 365–397 * Multiple integrals 398–433 * Differential equations 434–460 * Table of integrals 461–468 * Formulas for reference 469–472 * Tables 473–487 * Answers to odd-numbered problems 489–509 * Index 511–520.

Karl Zeller: *Theorie der Limitierungsverfahren*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 15.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958. 8+242 S. DM 36.80.

Grundbegriffe der Limitierung 2–19 * Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis 19–37 * Struktur von Wirkfeldern 37–55 * Direkte Sätze 55–73 * Umkehrsätze 73–99 * Verfahren von Cesaro-Abel-Typ 99–125 * Verfahren funktionentheoretischer Typs 125–147 * Weitere Verfahren und Klassen 147–166 * Literaturverzeichnis 167–230 * Sachverzeichnis 231–234 * Verzeichnis der Verfahren 235–236 * Verzeichnis der Sätze 237–240 * Bezeichnungen 241–242.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 137–140 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 10. mai 1958.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

Oppgave 134 (Bind 5, hefte 4) inneholdt en feil. Istedenfor denne stilles nedenfor oppg. 137, som inneholder den korrigerte 134 som spesialtilfelle.

137. Bevis formelen

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\binom{a}{i} \binom{b}{i}}{i \binom{n}{i}} = \sigma_a + \sigma_b - \sigma_n,$$

der a , b og n er slike naturlige tall at $a + b \geq n \geq b \geq a$, og

$$\sigma_r = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r}.$$

W. Ljunggren

138. Bestem alle løsninger i hele rasjonale tall x og y av den ubestemte likning

$$6x^4 - 4x^2 + 1 = y^2.$$

W. Ljunggren

139. Låt p vara ett primtal. Bevisa kongruensen

$$\binom{m}{p^n} \equiv \left[\frac{m}{p^n} \right] \pmod{p}.$$

Bernt Lindström

140. La d_n være determinanten

$$d_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix},$$

der n er et naturlig tall. Vis at

$$d_n = 1 / \prod_{k=1}^n k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}.$$

R. Tambs Lyche

LØSNINGER

129. Lad p være et primtal af formen $4n+3$. Vis da, at

$$\prod_{x=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \prod_{y=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (x^2 + y^2) \equiv \pm 1 \pmod{p},$$

og angiv en simpel regel til bestemmelse af fortegnet på højre side.

C. V. Jensen

Løsning: Idet $1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ er innbyrdes inkongruente mod p ,

og hvert av dem tilfredsstiller $x^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$, blir

$$\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (-x - i^2) \equiv (-x)^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1 \pmod{p}.$$

Innsettes $p = 4n+3$, $x = k^2$, fås

$$- \prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (k^2 + i^2) \equiv -k^{p-1} - 1 \equiv -2 \pmod{p},$$

hvorav

$$R = \prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \prod_{k=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (k^2 + i^2) \equiv 2^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p}.$$

Da altså $R^2 \equiv 2^{p-1} \equiv 1$, må $R \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Er 2 kvadratisk rest mod p blir $R \equiv +1$, ellers $\equiv -1$. Det er velkjent at i første tilfelle er $p \equiv 1$ eller 7 , i annet $p \equiv 3$ eller $5 \pmod{8}$.

Helge Tverberg

Også løst av L. Carlitz, K. V. Rask, Rolv Rasmussen, Hans Riesel og Asmus L. Schmidt.

130. La n være et naturlig tall og $u(n)$ det største oddetall (ulike tall) som går opp i n . Rekken

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n \cdot u(n)}$$

konvergerer absolutt og uniformt for alle x . Vis at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon som ikke i noe intervall har begrenset variasjon.

R. Tambs Lyche

Løsning: Er $n = 2^r(2u + 1)$, blir $u(n) = 2u + 1$, og

$$\frac{\cos n\pi x}{n \cdot u(n)} = \frac{\cos \{2^r(2u + 1)\pi x\}}{2^r(2u + 1)^2} = \varphi_{r,u},$$

$$\varphi_r = \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_{r,u}, \quad f_n(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \varphi_r, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

En slik omordning av leddene er tillatt da jamføring med rekken $f(0)$, som konvergerer mot $\pi^2/4$, viser at rekken $f(x)$ konvergerer absolutt. Da det samme viser at den konvergerer uniformt for alle x , er $f(x)$ kontinuerlig når alle $\varphi_{r,u}$ er kontinuerlige funksjoner av x .

La $I(n)$ være et vilkårlig intervall $\langle (i-1)/2^{n-1}, i/2^{n-1} \rangle$. Da $\varphi'_r = (-1)^i \pi^2/4$ i $I(\nu+1)$, er også $f'_n(x)$ konstant i $I(n)$, og da $f(x) - f_n(x)$ er periodisk med perioden $1/2^{n-1}$, er variasjonen av $2^n + 1$ ekvidistante ordinator $f(0), \dots, f(2)$ lik variasjonen $v(f_n)$ av $f_n(x)$ i $[0, 2]$. Er $I(n, k)$

et $I(n)$ der $f'_n(x) = \frac{\pi^2}{4} (n - 2k)$, vil hvert $I(n, k-1)$ og hvert $I(n, k)$ inneholde et $I(n+1, k)$, slik at antallet av $I(n, k)$ i $[0, 2]$ er $\binom{n}{k}$ for alle n . Da blir

$$v(f_n) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n |n - 2k| \binom{n}{k},$$

eller jamført med oppg. 131,

$$v(f_{2n}) = v(f_{2n-1}) = \pi^2 \frac{n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} > \pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{n - \frac{1}{2}},$$

som viser at $f(x)$ har ubegrenset variasjon i $[0, 2]$.

Et vilkårlig intervall av lengden 2ε , der $I(r) \leq \varepsilon < I(r-1)$, må alltid inneholde minst ett $I(2r, r)$. Her er altså $f_{2r}(x)$ konstant, slik at $f(x)$ har et diagram som i dette intervallet er likedannet med diagrammet i $\langle 0, 2 \rangle$ i forholdet $1/2^{2r}$. Dermed varierer $f(x)$ ubegrenset i ethvert intervall.

H. Killingbergtrø

Også løst av C. V. Jensen, Bernt Lindström og Rolv Rasmussen.

131. Vis at

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} |n+1-2(i+j)| \binom{n-i}{j} = 2 \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \binom{n+1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} - (n+1).$$

R. Tambs Lyche

Løsning: Vi sætte $i+j=k$ og utnyttja likheterna

$$\binom{n-i}{n-k} = \binom{n+1-i}{n-k+1} - \binom{n-i}{n-k+1} \text{ och } \frac{n+1-2k}{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}.$$

Alltså

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} |n+1-2(i+j)| \binom{n-i}{j} &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k |n+1-2k| \binom{n-i}{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n |n+1-2k| \binom{n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} (n+1-2k) \binom{n+1}{k} - (n+1) \\ &= 2(n+1) \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) - (n+1) = 2 \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \binom{n+1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} - (n+1). \end{aligned}$$

Bernt Lindström

Også løst av L. Carlitz og H. Killingbergtrø.

132. Bevis formelen

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{(i+1) \binom{2n}{i}} = (2n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2}.$$

W. Ljunggren

Løsning: Sett

$$\alpha_n = (2n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2}, \quad \beta_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{(i+1) \binom{n}{i}}.$$

En ser lett at

$$(I) \quad \frac{\alpha_{n+1}}{2n+3} - \frac{\alpha_n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Videre er

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(i+1) \binom{n+1}{i}} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n+1-i}{n+1} \cdot \frac{1}{(i+1) \binom{n}{i}} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \beta_n - \frac{1}{n+1} \gamma_n + \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}, \quad \text{der} \quad \gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}}.\end{aligned}$$

Benyttes her at $\gamma_{2n+1}=1$, $\gamma_{2n}=n/(n+1)$, får en ved to gangers bruk av rekursjonsformelen for β_n :

$$\beta_{2n+2} = \frac{2n+3}{2n+1} \beta_{2n} - \frac{2n(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)^2} + \frac{2n+3}{(2n+2)(2n+1)^2} - \frac{2n+3}{(2n+2)^2},$$

eller

$$(II) \quad \frac{\beta_{2n+2}}{2n+3} - \frac{\beta_{2n}}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ved å sammenholde (I) og (II) og bemerke at $\alpha_1=\beta_2$, følger alment $\alpha_n=\beta_{2n}$.

Helge Tverberg

Også løst av L. Carlitz.

PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier i Danmark udskrev i år i lighed med tidligere år prisopgaver for danske gymnasieelever og kursuselever til studentereksamen. For den bedste besvarelse er udsat en præmie på 100 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstrapremier.

Særtryk af opgaverne blev tilsendt samtlige gymnasieskoler og kurser i Danmark. Indleveringsfristen udløb 31. marts 1958.

Opgavernes ordlyd var følgende:

1. Lad B være midtpunktet af en cirkelbue AC , som er mindre end en halvcirkel, og lad D være midtpunktet af buen AB . Bevis:

- 1) Arealet af trekant ABD er større end $\frac{1}{8}$ · arealet af trekant ABC .
- 2) Arealet af afsnittet ABC er større end $\frac{4}{3}$ · arealet af trekant ABC . (Benyt f. eks. resultatet fra 1.)

Lad tangenten i A og C skære hinanden i T , og lad tangenten i B skære AT i E og CT i F . Bevis:

- 3) Arealet af trekant ETF er større end $\frac{1}{2}$ · arealet af trekant ABC .
- 4) Arealet af afsnittet ABC er mindre end $\frac{2}{3}$ · arealet af trekant ATC . (Benyt f. eks. resultatet fra 3.)

Idet AC er en bue på 60° , skal man anvende resultaterne i 2) og 4) til beregning af tilnærmelsesværdier af π .

2. Kan man af en terning bortskære et legeme, således at der tilovers bliver et »ringformet« legeme, gennem hvilket der kan skubbes en anden terning, kongruent med den første?

3. I et punkt O , der ligger i en plan α , er oprejst en normal $OA = 1$ til α . Ved afbildningen f skal billedet $f(P)$ af et vilkårligt punkt P , der ligger i α , være skæringspunktet mellem α og vinkel OAP 's halveringslinie. Specielt er $f(O) = O$.

Beskriv den punktmængde, hvis punkter alle er billedpunkter af punkter i α .

Hvad bliver billedet af en ret linie?

Hvilke kurver afbildes i rette liniestykker eller cirkelbuer?

4. Bevis, at

$$\int_1^x \left(\frac{t^{\frac{1}{n}} - 1}{t} \right) dt \rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty, \text{ idet } x > 0.$$

Idet

$$f_n(x) = n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right), \quad x > 0,$$

skal man vise, at $f_n(x)$ har en grænseværdi for $n \rightarrow \infty$.

Idet x_1 og x_2 er positive tal, skal man endvidere bevise, at

$$f_n(x_1 \cdot x_2) - (f_n(x_1) + f_n(x_2)) \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

5. Bevis, at uligheden

$$\int_0^x f(t) dt \geq f(x),$$

hvor $f(x)$ er kontinuert og ≥ 0 , $0 \leq x \leq 1$, kun tilfredsstilles af funktionen $f(x) = 0$.

6. På hvor mange måder (bortset fra ligedannethed) kan 4 punkter anbringes i en plan, således at der kun er to værdier for afstanden mellem et vilkårligt par af dem?

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1957 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 25.2 W. W. Boone, Princeton, N. J.: *The unsolvability of the word problem.*
- 11.3 Th. Bang: *Om en klasse af følger af hele tal.*
- 1.4 V. Brun, Oslo: *En generalisasjon av Eulers kjedebrokk for tallet e .*
- 29.4 E. Følner: *Middelværdier i grupper.*
- 13.5 M. Protter, Berkeley: *The wave equation and mean value theorems.*
- 16.9 H. Tornehave: *Om dobbelt næstenperiodiske hele funktioner.*
- 30.9 E. Sparre Andersen: *Om summer af stokastiske variable og den kollektive risikoteori.*
- 18.11 L. Kalmár, Szeged: *What is the decision problem, and some results concerning it.*
- 17.12 Richard Petersen: *Demonstration af den elektroniske cifferregnemaskine DASK.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIER OG SEMINARIER I DANMARK.

- 14.10 E. Kristensen: *Lineær programmering som emne for undervisning i realklassen.*
- 15.10 S. Bundgaard: *Matematikens og matematiklærernes stilling i går, i dag og i morgen.* Indledning til forhandling.
- 16.10 K. Piene, Oslo: *En nordmann ser på matematikkundervisningen i Danmark.*

I den 3. nordiske lærerkongres LMFK (Stockholm-Uppsala, 4-8.8) deltog ca. 90 danske matematiklærere.

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 30.1 Y. Kilpi: *Puolirajoitetuista symmetrisistä transformaatioista [Om halv-begränsade symmetriska transformationer].*
- 20.2 G. Elfving: *En sats om definita matriser.*
- 20.3 K. Vala: *Viivallisen avaruuden ulkotuloista [Om yttre produkt i en linjär rymd].*
- 10.4 R. M. Redheffer, University of California: *Über ganze Funktionen und Vollständigkeit.*
- 24.4 F. Nevanlinna: *Differentioituvien kuvausten kääntäminen [Inversion av differentierbara avbildningar].*
- 2.5 E. Sperner, Hamburg: *Zur gruppentheoretischen Begründung der absoluten Geometrie.*

- 25.9 E. Pesonen: *Pääakseliprobleemista avaruudessa, jonka metriikka on indefiniitti* [Om huvudaxlarna i en rymd med indefinit metrik].
- 30.10 I. S. Louhivaara: *Erästä Dirichlet'n reuna-arvotehtävän yleistyksestä* [En generalisation av Dirichlets randvärdeproblem].
- 20.11 P. J. Myrberg: *Eräs differenssiyhtälöiden sovellutus automorfisten funktioiden teoriaan* [Användning av differensekvationer i teorin för automorfa funktioner].

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND.

- 3-4.1 Demonstrationskurs i fysik med 135 deltagare. Föreläsare fysikern Rudolf Müllner, Wien.
- 3.2 Årsmöte med val och förhandlingar. Årsmötet diskuterade och godkände ett förslag till utlåtande om matematikundervisningen i mellanskolan.
- 4-8.8 I den tredje nordiska kongressen LMFK (Stockholm-Uppsala) deltog 85 medlemmar som aktiva och dessutom 40 personer som passiva deltagare.
- 26-29.8 Demonstrationskurs i fysik av Dr. E. Bretschneider, Göttingen. 100 deltagare.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 5.2 V. Brun: *Generalisasjon av Eulers kjedebrok for tallet e*.
- 12.3 H. S. Jelstrup: *Noen moderne bestemmelser av jordens størrelse og form med en kort historikk over de eldre*.
- 9.4 E. A. Hyllerås: *Asymptotisk utvikling av nullpunkter for Bessel-funksjoner*.
- 30.9 O. Schmidt, København: *Om reciproktafler og pythagoreiske tal i babylonsk matematik*.
- 5.11 A. Lichnerowicz, Paris: *Les variétés caractéristiques de la théorie unitaire du champ*.
- 26.11 V. Brun: *Minnetale over professor Carl Størmer*.
Euklidiske algoritmer for 3 og 4 størrelser.

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

- 3.2 A. Baltzersen: *Matematikk på reallinjen*. (Drammen.)
- 7.3 I. Johansson: *Teoretiske betraktninger over regning med benevninger i matematikk og fysikk*. (Oslo.)
- 28.4 A. Gjelsvik: *Det faglige nemningsverket i matematikk og naturfag*. (Hamar.)
- 12.5 R. Dybvik: *Provesensen i matematikk og regning*. (Trondheim.)
- 28.9 K. Grødem: *Samfunnsregning i realskole og gymnas*. (Karlstad.)
- 29.10 K. Piene: *Beviset i matematikkundervisningen*. (Oslo.)

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

- 23.3 Möte i Stockholm:
- J. Odhnoff: *En konstruktion av Poissonkärnor*.
- E. B. McLeod Jr., Oregon: *Existence theorems by means of the Hahn-Banach's and Bohnenblust's extension theorems*.
- T. Dalenius: *En orientering om stickprovsundersökningar: teori och användning*.
- B. Ulin: *Om Fourierserier med luckor*.
- Ing. Fromme: *Orientierung über eine elektronische Trommelmaschine*.

8.6 Möte i Uppsala:

- V. Thomée: *Blandade problem vid hyperboliska differentialekvationer.*
 E. Asplund: *Iteration av grafer.*
 Y. Domar: *Minimalextrapolation av fullständigt monotona funktioner.*
 M. Tideman: *Om Tchebycheff-approximation.*

23.11 Möte i Stockholm:

- T. Ganelius: *Lokala egenskaper hos approximationspolynom.*
 H. Riesel: *En ny metod för autokodning.*
 B. Andersson: *Matematiska problem i samband med Sputnik.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
 I LUND.

14.4 Möte med diskussion om den nya kursen i sannolikhetsräkning och statistik.
Inledande föredrag:

- M. Pihl, København: *Nogle synspunkter vedrørende en eventuel undervisning i sandsynlighedsregning i det danske gymnasium.*
 J. Ohlsson: *Kursen i sannolikhetsräkning och statistik vid de svenska gymnasier.*

Vidare diskussion med inledande ord av

- E. Malmsjö: *Några synpunkter på realskolans provräkningar.*

17.11 Höstmöte, vilket ägnades åt fysiken.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
 I STOCKHOLM.

4-5.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 5, s. 59.

FORENINGSNYTT

DANSK MATEMATISK FORENING

holdt generalforsamling den 3.2.1958. Til bestyrelse valgtes prof. W. Fenchel (formand), prof. H. Tornehave (næstformand), lektor K. Buch (kasserer), prof. S. Bundgaard og aman. Chr. Andersen.

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND

höll sitt årsmöte 2.2.1958 i Helsingfors. Val och förhandlingar. Styrelsen oförändrad. Ordförande för år 1958 är således dr. U. Kuuskoski. Styrelsen berättigades att som sekreterare (utanför styrelsen) antaga fil. mag. Jorma Nyström (adr. Ädvägen 15, Drumsö, Helsingfors). Efter förhandlingarna tre diskussioner. Inledare:

- L. Kotkatlahti: *Aktuella frågor inom matematikundervisningen.*
 B. L. Stara: *Hur mycket bör man experimentera i fysikundervisningen?*
 I. Okkola: *Den organiska kemin och elevklubbarna.*

Diskussionen var livlig och årsmötet antog det förslag till ny matematikkurs för gymnasiets allmänna linje, vilket styrelsen uppgjort.

Förbundets tidskrift för de matematisk-naturvetenskapliga ämnena, »Matemaatistien Aineiden Aikakauskirja», skall utges som hittills. Redaktör är förbundets ordförande.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING I STOCKHOLM

höll årsmöte den 7–8 januari 1958. Vid mötet lämnade lektor Bror Gustaver de befattningar som föreningens sekreterare och skattmästare, vilka han innehåft i 20 år. Ordföranden, lektor Ernst Knave, tackade lektor Gustaver för hans aldrig svikande intresse för föreningen och påpekade hur mycket medlemsantalet och därmed föreningens betydelse ökat under dessa 20 år. Lektor Gustaver valdes av årsmötet till föreningens förste hedersledamot.

Till ordförande resp. vice ordförande omvaldes lektorerna Ernst Knave och Fredrik Ehrnst. Till ny sekreterare valdes fil. mag. Jan O. Unenge, Djursholm och till skattmästare adjunkt Jacob Isander, Bromma.

Under årsmötet hölls följande föredrag och demonstrationer:

- B. Nilsson: *Information om tidigareläggningen av studentskrivningen i fysik.*
- B. Grundström: *Några enkla ljusböjningsexperiment och deras betydelse för vår uppfattning om orsak och verkan.*
- R. Aarflot: *Matematiken, fysiken och kemin i de praktiska realskolorna.*
- B. Englund: *Demonstration av experiment till realskolans kemikurs.*
- G. Beskow—A. Hedelius: *Orienteringskurserna i fysik och kemi. Diskussion.*
- A. Heimer: *Om undervisningen i elektromagnetism.*
- U. Dahllöf — S. Hilding: *Studieförbundets Näringsliv och Samhälle utbildningsmålsutredning.*
- B. Gustaver: *Några avsnitt ur realskolans kemikurs med demonstrationer.*
- S. Paulsson: *Enhetsskolans institutionslokaler. Diskussion.*

Söndagen den 4 augusti 1957 samlades i Blå hallen i Stockholms stadshus, som välvilligt ställts till förfogande av stadens myndigheter, ett halvt tusental lärare från Nordens fem länder till den tredje nordiska kongressen för lärare i matematik, fysik och kemi (LMFK). Av deltagarna var 138 från Danmark, 121 från Finland, 68 från Norge, 1 från Island och resten från Sverige. Dessutom deltog 2 västtyska gäster. Inbjudare till kongressen var de två svenska ämnesföreningarna i Lund och Stockholm. Följande föredrag och diskussioner, som berörde matematiken, hölls:

- J. Orring: *Försöksskolans högstadium, de matematisk-naturvetenskapliga ämnenas ställning och problem.*
- B. Beskow: *De matematisk-naturvetenskapliga ämnena på enhetsskolans yrkeslinje.*
- C. E. Sjöstedt: *Matematiken i de svenska gymnasierna.*
- J. Vange: *Matematikken som hjälpedisciplin. Hvorledes kan man koordinere undervisningen på gymnasiets forskellige linier med universiteternes og de højere læreanstalters behov for matematik som hjælpedisciplin?*

Vid en därpå följande kort diskussion med huvudsakligen danska deltagare behandlades olika krav på stringens i matematikundervisningen på skolestadiet.

R. Woxén — O. Frostman: *Vilka krav kan ställas av det praktiska livet, industrien, den högre tekniska utbildningen och universiteten på skolans undervisning i matematik?*

O. Lindstad: *Om en generalisasjon av middelpunktbegrepet.*

K. Piene: *Om beviset i matematikken.*

L. Sandgren: *Synpunkter på det svenska gymnasiets kurs i funktionslära.*

E. Vanäs: *Terminologi och räknemetoder vid mekanisk räkning.*

Kongressen avslutades torsdagen den 8 augusti med avskedsmiddag i rikssalen på Uppsala slott.

UTNEVNELSER

Til professor i matematik ved Aarhus Universitet: Dr. phil. E. Sparre Andersen.

Til professor i matematikk ved Universitetet i Oslo: Fil. dr. O. Reiersøl.

Till professor i matematik vid Göteborgs Universitet: Fil. dr. T. Ganelius.

Til dosent i matematikk ved Norges Tekniske Høgskole, Trondheim: Cand. real. H. Waadeland.

Till laborator i matematik vid Stockholms Högskola: Fil. dr. O. Hanner.

Til rektorer ved følgende norske skoler:

Verdal komm. realskole: Lektor R. Dybvik.

Larvik h. skole: Lektor K. Kure.

Kragerø h. skole: Lektor S. Seim.

Til medlem av Undervisningsrådet i Norge fra 1.1.1958 (etter rektor K. Kure): Rektor A. Gjelsvik.

RESULTAT AV PRISTÄVLINGEN FÖR SVENSKA GYMNASISTER

(Uppgifterna i NMT 5 (1957), s. 210–211.)

Första pris, 100 kr., tilldelades Olav Kallenberg, Kommunala Gymnasiet i Gubbängen, Stockholm, medan andra pris, 50 kr., delades mellan Rooney Magnusson, Högre allmänna läroverket i Enskede, och Mats Neymark, Mörby kommunala gymnasium i Danderyd.

SUMMARY IN ENGLISH

H. GASK and J.-E. ROOS: *A simple model from potential theory.* (Swedish.)

The model consists of the lattice-points $x = n\delta$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) on the real axis. The force between two electric charges e and f at a distance r is assumed to be $K = -ef\psi(r)$, where $\psi(r)$ decreases monotonously to 0 as $r \rightarrow \infty$.

A positive unit charge E_0 is placed at $x = 0$. If a similar charge E is moved from $x + \delta$ to x or from $-x - \delta$ to $-x$ ($x \geq 0$), the necessary work is then *defined* to be $\delta\psi(|x|)$. The total work required to move E from ∞ to $x \geq 0$ or from $-\infty$ to $x \leq 0$ is the *potential* generated by E_0 :

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \delta\psi(|x| + h\delta).$$

An important property of the function φ is convexity outside the origin. For a distribution e of charges e_x , the potential is additive:

$$P(x) = \sum_y \varphi(x - y)e_y.$$

Only distributions with a *finite* number of charges e_x are considered.

The *energy* of a distribution e is introduced as

$$I(e) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \varphi(x - y)e_x e_y = \frac{1}{2} \sum_x P(x)e_x.$$

A central result, proved under the above assumptions, is that $I(e) > 0$ whenever charges are present.

The charges e_x of a distribution may be considered as coordinates in a linear space R . The distance between two points (two distributions) e and f is defined as $\sqrt{I(e - f)}$, and Cauchy sequences in R are introduced. In an elementary way, the following results are proved:

If all the charges of a distribution are positive, then the potential attains its maximum at a point with a charge. — Given a finite number of conductors L_k , each of which has a total charge l_k , there is a unique *equilibrium* distribution (of minimal energy), and the potential of this distribution is constant on each conductor. On a single conductor L with positive total charge, the equilibrium distribution contains no negative charges. If L , of length l , contains at least three points, then this distribution is concentrated at the *end-points* only if the potential function φ is *linear* in the intervals $0 \leq |x| \leq l$. Conversely, this property of φ implies that the equilibrium distribution is concentrated at the end-points of any set of non-overlapping conductors contained in an interval of length l .

VIGGO BRUN and BØRGE JESSEN: *A letter by Niels Henrik Abel from his youth.* (Norwegian.)

The letter, hitherto unpublished, was discovered in Copenhagen 1955. It was written in Christiania on Aug. (or probably Sept.) 13, 1823, to Abel's friend Frederik Christian Olsen in Copenhagen. The letter contains nothing of mathematical interest. Abel tells about his voyage from Copenhagen to Christiania, and asks Olsen to get an examination certificate for a Norwegian student Glatved.

BENGT JOEL ANDERSSON: *An inequality for convex functions.* (English.)

If $F_p(x)$, $p = 1, 2, \dots, n$, are convex functions in $0 \leq x \leq 1$, for which

$$F_p(x) \geq 0, \quad F_p(0) = 0, \quad \int_0^1 F_p(x) dx = \alpha_p,$$

then it is shown that

$$\int_0^1 F_1(x) F_2(x) \dots F_n(x) dx \geq \frac{2^n}{n+1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

M. TIDEMAN: *Comments on an old inequality.* (Swedish.)

It is shown that

$$\sum_{n=1}^{\infty} k t n^{2k-1} (n^2 + t)^{-k-1} < \frac{1}{2} \quad \text{for } t \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

With $k = 1$, $t = x^2$, we get an inequality which was first given by Mathieu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + x^2)^{-2} < \frac{1}{2x^2} \quad \text{for } x \neq 0.$$

GÖTE NORDLANDER: *A covering problem.* (Swedish.)

A set of point sets is said to be *distinct*, if no two of the sets have points in common. After a short treatment of the one-dimensional case, a set M of squares with parallel sides in the plane is considered. If $y(M)$ denotes the total area covered by M , one can find a distinct subset M' of M such that

$$y(M') \geq \kappa_2 \cdot y(M).$$

It is shown that $\kappa_2 \geq \frac{1}{9}$, and that $\kappa_2 = \frac{1}{4}$ when the squares are all of the same size. These results are due to R. Rado; a new and simple proof of the latter is given.