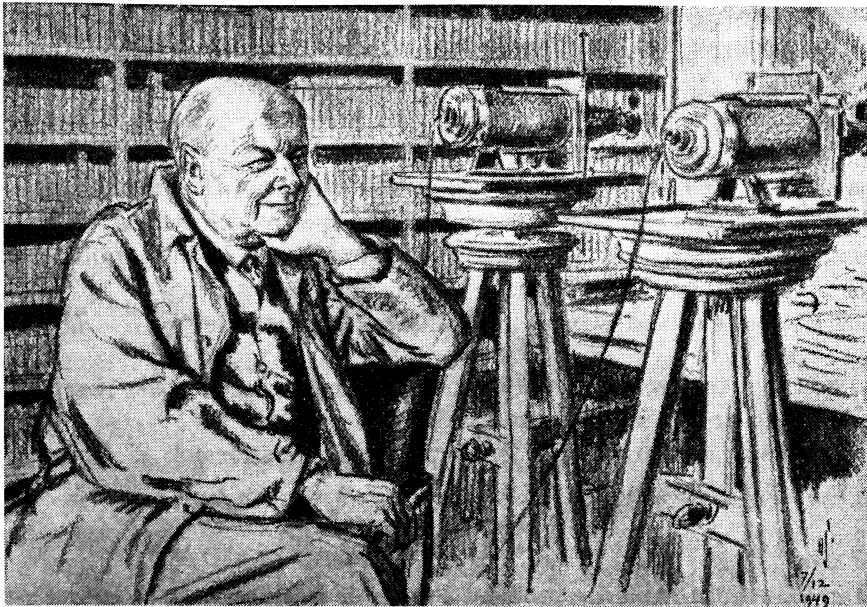




CARL STØRMER IN MEMORIAM

VIGGO BRUN

Den 13. august i år døde Carl Størmer i en alder av nær 83 år. Han var født i Skien 3. september 1874 som eneste barn av apoteker G. L. Størmer og frue født Mülertz.

Hans interesse for realfagene ble tidlig vakt. Han har selv berettet om dette: »Astronomi var noget av det første jeg var betatt av. Min eneste sorg var, at for at bli astronom måtte man lære noget som het matematikk. Jeg kom dog senere på andre tanker. Botanikk var en annen stor lidenskap.« Kjærligheten til botanikk bevarte han for øvrig gjennom hele sitt lange liv. Da jeg en ukes tid før hans død hjalp ham ned den bratte veien til hans vakre sommersted »Villa X« ved Drøbak, fortalte han meg navnene på alle de ville blomstene vi passerte.

Om sin første matematiske erobring har han skrevet: »Jeg har aldrig siden følt en slik opdagerglede, som da jeg første gang fandt flateinnholdet av et parabelsegment.« Han var bare 18 år da han utga sitt første

Tegningen ovenfor ble laget av Øyvind Sørensen for Aftenposten i anledning professor Størmers 75-års fødselsdag.

matematiske arbeid: »Summation af nogle trigonometriske rekker.« En av de setninger han her gir er

$$\frac{x^n}{2} = \left(\frac{\sin x}{1}\right)^n - \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^n + \left(\frac{\sin 3x}{3}\right)^n - \dots$$

når x ligger mellom grensene $-\pi/n$ og π/n . For $n=1$ får man den kjente Fourierrekke for $\frac{1}{2}x$. Han generaliserer formelen idet han erstatter x^n med produktet $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$. Det var i sannhet et betydningsfullt arbeid for en attenåring!

I sitt neste arbeid, »Om en generalisation af integralet $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ «, utfører han en grenseovergang for av sine trigonometriske formler å utlede tilsvarende »Fourierske integraler«.

Størmers neste arbeider er inspirert av Machins formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Han løser fullstendig det problem å finne de hele tall m , n , x , y og k som gir

$$m \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = k \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Han finner fire sett løsninger, hvoriblant Machins. Senere utvider han problemet til

$$m \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{y} + r \operatorname{arctg} \frac{1}{z} = k \cdot \frac{\pi}{4},$$

og finner 102 sett løsninger for hele m , n , r og k . Det er fremdeles et uløst problem om det finnes flere løsninger. Jeg gir et eksempel på en av disse løsninger:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{478} + \operatorname{arctg} \frac{1}{54608393}.$$

Størmer har omdannet problemet til et rent tallteoretisk, idet han har benyttet seg av at

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}.$$

Ved multiplikasjon av flere slike uttrykk får han da en sum av arcustangenser i eksponenten. Hvis denne sum blir $k\pi$ blir eksponensialfunksjonen ± 1 , og det resterende uttrykk kan behandles rent tallteoretisk. Problemet blir om et produkt av størrelser av formen $a + ib$ blir reelt,

rent imaginært eller ingen av delene. Størmer opplyser for øvrig at han er blitt oppmerksom på at Gauss før ham har benyttet seg av samme fremgangsmåte for å løse samme problem, slik som det går frem av Gauss' etterlatte papirer. Gauss har her beregnet divisortabeller for tallene $1^2 + x^2$, $2^2 + x^2$, $\dots$, $9^2 + x^2$, men han har bare etterlatt disse notater og har ikke behandlet problemet for en sum av n arcustangenser.

Størmer har også studert den alminneligere ligning

$$c_1 \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1} + c_2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x_2} + \dots + c_n \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n} = k \cdot \frac{\pi}{4},$$

og funnet en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at den skal være tilfredsstillet for heltallige verdier $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $c_1, c_2, \dots, c_n$ og for k lik 0 eller 1.

Disse undersøkelser har vært ført videre av Ljunggren.

Studiet av disse problemer har ført Størmer inn på undersøkelser av Pells ligning

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1.$$

Av de mange interessante resultater han her har funnet skal jeg bare nevne ett: For at ligningen

$$1 + x^2 = 2y^n$$

skal tilfredsstilles av hele tall x, y og n større enn 1 må n være en potens av 2.

Også Minkowskis »Geometrie der Zahlen« har inspirert Størmer til et arbeid: »Nogle geometriske satser fra den moderne taltheori.« Han benytter seg her også av Sophus Lies undersøkelser.

I et senere arbeid behandler han noen aritmetiske egenskaper ved elliptiske integraler og deres anvendelse på teorien for hele transcendente funksjoner. Det gir en vidtgående generalisasjon av Liouvilles, Hermites og Borels undersøkelser over transcendens.

I 1903 inntreffer en begivenhet som får avgjørende betydning for Størmers videre produksjon. Fra nå av ble det nordlyset som fanget hele hans interesse.

Som rimelig er har nordlyset opptatt sinnene i høy grad i Norge. I vår meget fattige vitenskapelige litteratur før 1800 finner man adskillige avhandlinger om nordlyset. Av størst betydning er skildringen av nordlyset i Kongespeilet fra 1200-tallet, dernest Gerhard Schønings utførlige avhandling fra 1759, »Nordlysets Ælde beviist med gamle Skribenters Vidnesbyrd«. Den danske matematiker Fester har i sin Trondhjemstid skrevet to avhandlinger om nordlys som også er av interesse.

I 1815 skriver Hansteen til H. C. Ørsted i Kjøbenhavn: »Inderlig skulde det glæde mig, om Degen paa mine lave Grundvolde kunde opføre en anseligere Bygning saa at Norden ved egne Kræfter havde bragt Magnet-theorien i Rigtighed. Unægtelig burde ogsaa en Magnet- og en Nordlys-theori komme fra os.«

Når dette for nordlysets vedkommende ble tilfelle skyldes det for en vesentlig del Størmers veldige innsats på dette felt. Han fikk i 1903 se de eksperimentene fysikeren Kristian Birkeland utførte for å gi en forklaring på nordlyset, idet han i en lufttom glassbeholder sendte katodestråler mot en magnetisk kule som skulle forestille jorden. Det slo da Størmer at han her sto overfor et meget interessant matematisk problem, å finne banene til de elektriske partiklene som beveger seg i det magnetiske felt omkring en magnetisk kule.

Størmer angrep problemet på følgende måte: Tenker man seg en magnetisk dipol anbragt i et romlig koordinatsystem med retning langs z -aksen og med midtpunkt i origo, gjelder det å studere banen for en negativt ladet korpuskel. Velger man buelengden s som uavhengig variabel får man et simultant system av tre annenordens differensialligninger til bestemmelse av korpuskelens koordinater x, y, z som funksjoner av s . Ved å innføre polarkoordinater for punktets projeksjon i xy -planet ($x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi$) utleder Størmer denne ligningen av de tre nevnte:

$$\frac{d}{ds} \left(R^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{R^2}{r^3} \right).$$

Her er r avstanden fra origo til korpuskelen. Denne ligning lar seg integrere, og man finner

$$R^2 \frac{d\varphi}{ds} = 2\gamma + \frac{R^2}{r^3},$$

hvor γ er en integrasjonskonstant. La vinkelen mellom banens tangent i punktet (x, y, z) og planet P som går gjennom z -aksen og punktet være θ . Da blir

$$R \frac{d\varphi}{ds} = \sin \theta = \frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3}.$$

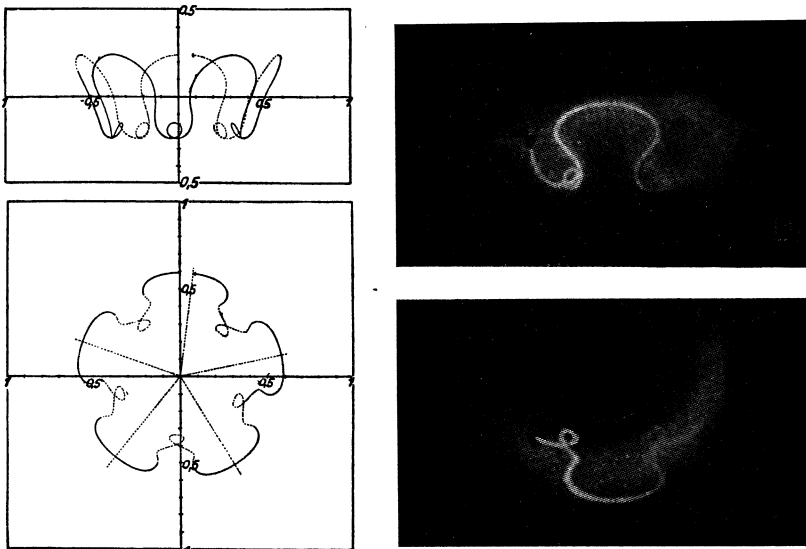
Dette gir en opplysning om de områder av rommet som ikke inneholder noen av de søkte kurver, da betingelsen $|\sin \theta| \leq 1$ må være oppfylt. Derved har Størmer skaffet seg en verdifull diskusjon av kurvenes forløp. Han utleder også det slående enkle resultat

$$\varrho = r^3,$$

hvor ϱ er kurvens krumningsradius.

Men for å utføre en integrasjon av differensialligningene ble det nødvendig å gripe til numeriske metoder. Ved hjelp av en stor stab assistenter ble det utført et regnearbeid som inntil 1940 hadde kostet 18000 timer. Under sitt arbeid med dette utviklet Størmer en tilnærmelsesmetode som fikk stor betydning. Den er opptatt i mange lærebøker, således i Hadamards, i Andersen-Bohr-Petersens og i Tambs Lyches matematiske analyser. Den er utarbeidet for integrasjon av et simultant system av annenordens differensialligninger. Den russiske matematiker Kryloff har forøvrig modifisert metoden til å kunne anvendes på et system av første orden.

I årene 1930 og 1931 offentliggjorde den tyske fysiker Brüche resultatene av noen forsøk med katodestråler. En mere slående overensstemmelse mellom de beregnede og de eksperimentelle baner kunne Størmer neppe ha ventet seg. (Se figuren.)



Til venstre periodiske elektronbaner, funnet ved numerisk integrasjon; til høyre de samme elektronbaner etter Brüches forsøk. (Billedet finnes også i boken »The polar aurora«, fig. 164.)

Størmer har også utført et meget stort arbeid for å bestemme nordlysets høyde ved å fotografere fra to stasjoner samtidig, med kjente stjernebilleder som bakgrunn for nordlyset. I alt er det blitt målt 20000 høyder.

I 1947 holdt Størmer en tale i norsk kringkasting, hvor han fremhevet de mange uløste problemer man ennå hadde i nordlysforskningen. Han

gir også anvisning på en løsningsmåte: »Vi behøver bare å sende en V2-rakett med instrumenter opp i nordlyset og la instrumentene enten sende radiosignaler om hva slags partikler det er eller få instrumentene ned i fallskjerm og lese dem av. Saken er mulig.»

Om alle disse undersøkelser har Størmer gitt en livfull skildring i et av kapitlene i sin bok »Fra verdensrummets dybder til atomernes indre». Den store popularitet denne boken oppnådde ser en best av at den ble oversatt til svensk, tysk, fransk, hollandsk og italiensk. Leser en denne spennende boken får en et sterkt inntrykk av forfatterens allsidige interesse for naturvitenskapene. I den retning tror jeg ikke han har hatt mange jevnbyrdige.

Etter å ha avlagt embedseksamen i 1898 studerte Størmer matematikk i Paris og ble i 1899 universitetsstipendiat ved universitetet i Kristiania i dette fag. I 1900 giftet han seg med Ada Clauson.

Som universitetsstipendiat nedla Størmer et stort arbeid ved utgivelsen av »Festskrift ved hundredårsjubileet for Niels Henrik Abels fødsel» (1902). Den verdifulle samling av dokumenter vedrørende Abel som finnes der skyldes Størmer.

Han var 29 år da han i 1903 ble professor i ren matematikk ved universitetet i Kristiania. Det var et tradisjonsrikt professorat han overtok. Hans forgjengere var C. A. Bjerknes, Ole Jacob Broch, Holmboe og Rasmussen, så disse få navnene fører oss over i den klassiske tiden da Abel levet. Størmer kom like fra studietiden i Paris og hans forelesninger virket inspirerende på oss unge studenter, preget som de var av den franske elegante, men nøkterne klarhet. Det matematiske seminar som Størmer i denne tid ledet fikk også stor betydning for dem av oss som hadde særinteresse for matematikk, og han fulgte våre senere forsøk som forskere med stor oppmerksomhet.

Gjennom mere enn 40 år ledet Størmer på en utmerket måte undervisningen for bifagsstuderende ved universitetet. Av de hovedfagsemner som han tok opp i denne tiden kan nevnes Sophus Lies transformasjonsgrupper, gammafunksjonen og de elliptiske funksjoner. De stensilerte utgaver over de to sidstnevnte emner vidner på en utmerket måte om Størmers dype innsikt i disse teorier.

Størmer var en ivrig deltager i de nordiske matematikerkongresser. Han deltok i samtlige tolv som ble holdt i hans levetid. Han var president for den internasjonale matematikerkongress i Oslo i 1936.

Det kan vel hende at en del av den rene matematikks dyrkere så med en viss bekymring på at Størmers sterke interesse for og utrettelige arbeid med nordlyset hindret ham i den rike utfoldelse av sine matematiske evner, som hans første arbeider hadde gitt så overbevisende løfte

om. At han også selv delte denne følelse fremgår av et brev han sendte meg i 1944. Jeg hadde meddelt ham en ganske komplisert rekkeutvikling. Det gjaldt en undersøkelse som sto i forbindelse med problemet om svingningene i primtallmengden. Størmer svarte pr. omgående at rekken måtte kunne behandles ved Lagranges omvendingsformel, noe jeg selv ikke hadde oppdaget. Det betydde en veldig forenkling av min undersøkelse. Størmer sluttet sitt brev slik: »Når jeg løser slike problemer, får jeg sån lyst til å ofre mig for matematikken igjen, men jeg er dessverre så nedsyltet i nordlysmaterialet, at jeg ikke får tid.«

Jeg tror allikevel at vi ikke behøver å sørge over at Størmer valgte et emne, noe på siden av professoratets fagkrets. En vitenskapsmann må alltid fritt følge inspirasjonens vei. Størmer er selv det beste bevis for at denne frihet i emnevalg kan føre til resultater av store dimensjoner. Han hadde også den glede å se utallige uttrykk for anerkjennelse av sin store innsats både fra utland og innland.

Mest gledet det ham sikkert at han av Sir Appleton i Oxford ble oppfordret til å samle sine studier over nordlyset i en bok. Den ble trykt i Oxford 1955 og fikk titelen »The polar aurora«. Han tilegnet boken til sin hustru, »who never ceased to encourage me to work hard till this book was safely finished«. Forordet i denne boken, som Størmer hadde den glede å arbeide med i sine siste leveår, slutter slik: »My work has given me infinite pleasure and satisfaction . . . This fascinating phenomenon, the aurora, guards its secrets well and it may be far in the future before they are completely yielded up to man.«

EN MATEMATISK MODELL FÖR LANDSVÄGSTRAFIK

LENNART CARLESON

I samband med diskussionen våren 1955 kring den svenska trafik-säkerhetsutredningen uppmärksammades trafikfrågorna också av Svenska matematikersamfundets kontaktnämnd. Det var genast klart att man i utredningen helt hade försummat att använda matematiska metoder. För att undersöka hur trafikproblem skall kunna matematiskt behandlas beslöt Kontaktnämnden att närmare undersöka gles¹ landsvägstrafik. Detta problem var lämpligt av två skäl: dels innehåller landsvägstrafiken få komponenter och dels hade resultaten intresse i samband med huvuddiskussionen angående hastighetsbegränsning. Undersökningen utfördes huvudsakligen av författaren och jag skall här närmare redogöra för den matematiska modell som konstruerades.

Vi tänker oss en obegränsad vägsträcka. Förbi en fix punkt på vägen passerar i medeltal a fordon² per timme. Vi gör vidare följande huvud-antaganden:

1° Varje fordon X har en »idealhastighet» x som det håller när det är ostört av andra fordon d. v. s. när det inte väntar på ett tillfälle att köra förbi ett långsammare fordon. Det finns då en fördelningsfunktion $H(x)$ så att $H(\xi)$ anger bråkdelen av fordonen med hastighet $x \leq \xi$.

2° Vid en omkörning av ett fordon med idealhastighet x av ett annat med idealhastighet $y < x$ fordras en säkerhetssträcka c så att om X går ut i högerfilen sträckan α bakom Y och återgår i vänsterfilen β framom Y , är $c = \alpha + \beta$. Omkörningssträckan blir då

$$\lambda = \frac{cx}{x-y}.$$

3° Vägen och mottrafiken är sådana att ett fordon X som hunnit upp ett fordon Y måste hålla Y :s hastighet sträckan $s(\lambda)$ innan det kan köra förbi och återtaga sin idealhastighet x . Vi skall senare specialisera $s(\lambda)$ till att vara en linjär funktion i λ .

¹ Norsk: glissen. Dansk: svag, sparsom.

² Norsk: kjøretøy.

4° Vi antar att trafiken är så gles att vi kan bortse från köbildning, d. v. s. under den tid X väntar bakom Y håller Y sin idealhastighet. (Det är lätt att ställa upp teorin utan detta antagande. Vi får emellertid då en icke-lineär integralekvation, som saknar enkel lösning.)

När det nu gäller att studera trafiken i stort är det i första hand fordonens *medelhastighet* man måste bestämma. Denna är en funktion $f(x)$ av idealhastigheten x . Vi studerar nu ett bestämt fordon X . Tätheten av fordon med hastighet $y < x$ längs vägen är

$$\frac{a}{f(y)} dH(y).^1$$

X närmar sig Y med hastigheten $f(x) - f(y)$. Totalt upphinnes således

$$(1) \quad a \frac{f(x) - f(y)}{f(y)} dH(y)$$

fordon Y per tidsenhet. Varje gång ett Y upphinnes måste X färdas sträckan $s(\lambda)$ (ant. 3°) med hastighet y (ant. 4°). Totalt färdas således X sträckan

$$(2) \quad a \int_0^x s(\lambda) \frac{f(x) - f(y)}{f(y)} dH(y)$$

bakom långsammare fordon. Den tid som åtgår är

$$T = a \int_0^x s(\lambda) \frac{f(x) - f(y)}{f(y)} \cdot \frac{dH(y)}{y}.$$

Resten av tidsenheten, $1 - T$, har X sin idealhastighet och hinner sträckan $x(1 - T)$. Detta uttryck jämte (2) blir då $f(x)$, d. v. s. vi får ekvationen

$$f(x) = x - a \int_0^x s(\lambda) \frac{f(x) - f(y)}{f(y)} (x - y) \frac{dH(y)}{y}.$$

Inför vi i stället $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$ får vi en *lineär* integralekvation:

$$1 = x\varphi(x) - a \int_0^x s(\lambda) (\varphi(y) - \varphi(x)) (x - y) \frac{dH(y)}{y}.$$

¹ De uppträdande integralerna innehållande $dH(y)$ är självfallet Stieltjes-integraler. Läsare som inte är förtrogna med detta begrepp, kan tänka sig fördelningsfunktionen $H(x)$ som en kontinuerlig funktion för alla x ; därvid uppträder endast ordinära integraler. Detta täcker också talet exemplet som är illustrerat i fig. 1, men däremot inte exemplen i tabellerna 1 och 2.

Vi skall nu behandla denna under det enklaste antagandet om $s(\lambda)$, $s(\lambda) = \gamma\lambda$. Om vi inför hjälpfunktionen

$$A(x) = ac\gamma \int_0^x \frac{dH(y)}{y} = k \cdot B(x), \quad k = ac\gamma,$$

kan ekvationen då skrivas

$$1 = x\varphi(x) - x \int_0^x (\varphi(y) - \varphi(x)) dA(y).$$

Antar vi att $A'(x)$ är kontinuerlig för alla x kan vi derivera och får ekvationen

$$-\frac{1}{x^2} = \varphi'(x)(1 + A(x)),$$

varav

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) - \int_{x_0}^x \frac{dt}{(1 + A(t))t^2} = \varphi(x_0) - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x} + \int_{x_0}^x \frac{A(t)}{1 + A(t)} \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

Antag nu att alla fordon har hastighet $\geq \delta > 0$. Då gäller $x\varphi(x) \equiv 1$ för $x < \delta$. Låter vi $x_0 \rightarrow 0$ får vi lösningen (gällande utan antaganden om $A'(x)$):

$$(3) \quad \varphi(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + \int_0^x \frac{A(t)}{1 + A(t)} \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

Ur denna formel kan nu några intressanta slutsatser dragas. Om vi i (3) låter $x \rightarrow \infty$ finner vi att

$$\frac{1}{g} = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \int_0^\infty \frac{A(t)}{1 + A(t)} \cdot \frac{dt}{t^2}$$

existerar och är $\neq 0$. Detta innebär att ett enstaka fordon vid en given hastighetsfördelning aldrig kan få en högre medelhastighet än g , oberoende av hur hög idealhastighet det har.

Antag i stället att trafiktätheten $a \rightarrow \infty$. Om då $A(x) = 0$ för $x < x_0$, $A(x) > 0$ för $x > x_0$, gäller

$$(4) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \varphi(x) = \frac{1}{x} + \int_{x_0}^x \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x_0}.$$

Samtliga fordon får således samma medelhastighet = långsammaste fordonets idealhastighet. Detta är ju också vad man bör fordra. Samma relation gäller också om $\gamma \rightarrow \infty$ och svarar t. ex. mot en intensiv mottrafik.

När det gäller att bedöma en trafiksituation ur säkerhetssynpunkt är det främst två kvantiteter som har intresse. Den första är trafikflödet F som anger den totala transporten per tidsenhet av de fordon som passerar en viss plats på vägen. Vi har formeln

$$(5) \quad F = a \int_0^{\infty} f(x) dH(x) .$$

Om man är intresserad av konsekvenserna av t. ex. trafikrestriktioner, vilka i vår teori innebär att $H(x)$ förändras, är det kvantiteten F som skall hållas fix. Den mäter ju nämligen transportmängden per tidsenhet. En sänkning av hastigheterna medför då att a växer.

Den andra kvantiteten är antalet omkörningar O per tidsenhet och längdenhet. Med hjälp av (1) finner vi lätt

$$(6) \quad O = a^2 \int_0^{\infty} \int_0^x (\varphi(y) - \varphi(x)) dH(y) dH(x) = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |\varphi(y) - \varphi(x)| dH(y) dH(x) .$$

Ett allmänt resultat följer här genast. Man skulle kanske vänta att antalet omkörningar växte kvadratisk då a växer. På grund av det tidigare nämnda förhållandet att $\varphi(x) \rightarrow 1/x_0$ när $a \rightarrow \infty$, gäller emellertid

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{O}{a} = C .$$

Om H ej har ett språng i $x = x_0$ (se (4)), visar en enkel räkning att

$$C = \frac{1}{c\gamma} \int_0^{\infty} \frac{H(x) dH(x)}{x^2 B(x)} .$$

Om vi vidare antar att den allmänna trafikintensiteten växer, då a växer, innebär detta att mottrafiken försvårar omkörningarna så att det är rimligt att ansätta t. ex. $\gamma = \gamma_0 a$. Vi får då som resultat att antalet omkörningar blir begränsat då $a \rightarrow \infty$. Man måste dock komma ihåg att härledningen skedde under antagande av gles trafik (ant. 4°), varför beskrivningen för stora a kan antas mindre god. Tendensen att antalet omkörningar växer mycket långsamt, torde dock stå sig.

För att illustrera ovanstående teori, tar vi några numeriska exempel. Vi antar först att endast två idealhastigheter förekommer och att båda är lika vanliga. Vi utgår (Tab.1) från den transportmängd som $a = 200$ ger när hastigheterna är 50–70 km/tim. Vi antar vidare $\gamma = 3$ och

$H(x)$	F	a	f	O	$k = a\gamma c$
30-50	11100	340	35,2	142	102,0
40-60	11100	251	48,3	68	75,3
50-70	11100	200	60,9	36	60,0
60-80	11100	167	72,8	20	50,1
70-90	11100	144	84,3	13	43,2
80-100	11100	127	95,4	8	38,1

Tabell 1

$c = 0,1$ km. Värdena för f i tabellen anger de snabbare fordonens medelhastighet.

I tabell 2 har vi gjort antagandet $\gamma = \gamma_0 a$ och utgått från $\gamma = 3$ för $a = 200$.

$H(x)$	F	a	f	O	$k = a\gamma c$
30-50	11100	351	33,2	99	184,8
40-60	11100	255	47,1	61	97,5
50-70	11100	200	60,9	36	60,0
60-80	11100	166	73,7	21	41,3
70-90	11100	143	85,6	13	30,7
80-100	11100	126	96,9	9	23,9

Tabell 2

I fig. 1 är inritad funktionen $f(x)$ för fördelningsfunktionen

$$(7) H(x) = \begin{cases} 0, & x < 30 \\ \frac{x-30}{60}, & 30 \leq x \leq 90 \\ 1, & x > 90. \end{cases}$$

Observera att man kan studera $f(x)$ även för $x > 90$; det anger medelhastigheten hos ett *enstaka* fordon med denna hastighet.

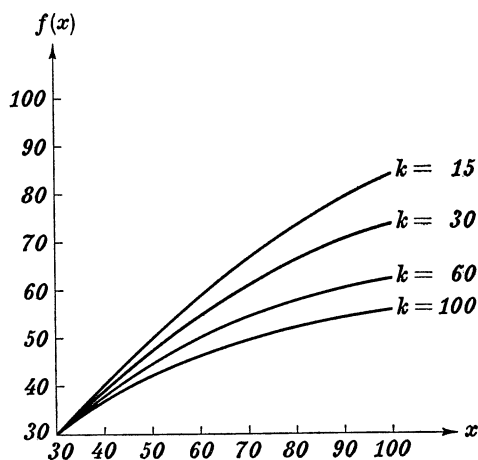


Fig. 1

OM ELEMENTÆERGEOMETRIENS KONGRUENSSÆTNINGER

H. H. HANSEN

Kongruenslæren indtager en ejendommelig stilling i de gængse fremstillinger af den elementære geometri. Sædvanligvis defineres to figurers kongruens ved, at de ved flytning skal kunne bringes til dækning punkt for punkt, hvorefter de bekendte sætninger om trekanters kongruens med større eller mindre held begrundes. Kongruensbegrebet tages derefter kun lejlighedsvis i anvendelse for andre figurer. Ved nøjere undersøgelse af sagen vil man bemærke, at det ved de nævnte trekantssætningers talrige anvendelser ikke i sig selv har så stor interesse at konstatere, at et par trekanter er kongruente, som at det deraf følger, at et par liniestykker eller et par vinkler er lige store. Kongruenssætningerne kommer derved til at optræde som formidlere af et sådant resultat, som hjælpesætninger om man vil.

Går man til Euklid, bliver man, som så ofte før, overrasket over klarheden. Ordet kongruens forekommer ikke, og de sætninger, der svarer til vore kongruenssætninger, har derfor en anden formulering. F. ex. har første kongruenssætning følgende ordlyd: »Når to trekanter har to sider parvis ligestore og de vinkler, der indesluttet af de ligestore rette linier, ligestore, så vil de også have grundlinierne ligestore, og trekanterne vil være ligestore, og de øvrige vinkler, overfor hvilke de ligestore sider ligger, vil være parvis ligestore.« Bortset fra, at det her siges, at de to trekanter er lige store — noget tilsvarende siges iøvrigt ikke i de øvrige kongruenssætninger — så dækker formuleringen netop det, der er væsentligt for sætningens anvendelser, nemlig at der på grundlag af visse liniestykkers og vinklers ligestorhed kan sluttes, at andre liniestykker og vinkler er lige store. Euklids bemærkning om, at de to trekanter er lige store, kan som bekendt forstås på flere måder ud fra en senere tids begrebsdannelser, og glosen kongruens er netop indført som betegnelse for en særlig form for figurers ligestorhed. Men dette har medført, at selve kongruensen som mål i sig selv er kommet til at dominere de omtalte trekants-

sætninger. En almindelig teori for figurers kongruens kan næppe have interesse, hvilket også viser sig ved, at man hovedsagelig kun taler om kongruens for trekanter.

Det vil imidlertid være formålstjenligt at se på disse sætningers stilling i den axiomatiske opbygning, og vi vil her holde os til Hilberts fremstilling, som vel må siges i hovedsagen at være en udtømmende analyse af den formelle struktur i den faktisk foreliggende geometri; i hvert fald er det den axiomatiske opbygning, der ligger elementargeometrien nærmest. I Grundlagen der Geometrie behandles kongruensen i axiomgruppe IV¹⁾. Da en formel, axiomatisk undersøgelse ikke er forbundet med noget bestemt forestillingsindhold, kan der ikke hos Hilbert være tale om en explicit definition af kongruens, kun om fastlæggelse af sådanne egenskaber derved, som er nødvendige og tilstrækkelige ved opbygning af den betragtede lærebygning. Det fastslås axiomatisk, hvilke egenskaber der skal tillægges relationen kongruens eller ligestorhed af liniestykker og vinkler. Da disse objekter er forskelligartede, må de to dertil svarende kongruensdefinitioner sammenknyttes, og det sker hos Hilbert ved følgende axiom: »Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Congruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ gelten, so sind stets auch die Congruenzen $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ und $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ erfüllt.« Dette er stort set ensbetydende med, at den ovenfor citerede euklidiske sætning medregnes blandt axiomerne. Man bemærker imidlertid, at det ikke i axiomet siges, at de to trekanter er kongruente, hvilket naturligvis heller ikke kan gøres, før det er defineret, hvad der skal forstås ved trekanters kongruens. Det sker hos Hilbert ved en definition: »Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heissen einander congruent, wenn sämtliche Congruenzen

$$\begin{array}{lll} AB \equiv A'B', & AC \equiv A'C', & BC \equiv B'C' \\ \angle A \equiv \angle A', & \angle B \equiv \angle B', & \angle C \equiv \angle C' \end{array}$$

erfüllt sind.« Ved denne definition fastholdes, ligesom ved en tilsvarende for vilkårlige figurer, at det drejer sig om liniestykkers og vinklers ligestorhed. Når Hilbert på grundlag af axiomerne går over til at bevise andre kongruenssætninger, nøjes han derfor heller ikke med at konstatere, at to trekanter er kongruente, men fastslår, at de vinkler og sider, hvorom der ikke er talt i forudsætningerne, er parvis lige store.

Som et lille sidespring skal det her bemærkes, at kongruensaxiomerne er uafhængige af parallelaxiomet, således at kongruens trives lige vel i de forskellige geometrier, der opstår ved de forskellige former af parallelaxiomet.

¹⁾ I førsteudgaven – i de sidste udgaver derimod i axiomgruppe III.

Vil man herefter søge at klargøre sig kongruenssætningernes særstilling, så kan det for det første bemærkes, at så at sige alle elementærgeometriens sætninger handler om liniestykker og vinkler i samme figur, mens kongruenssætningerne (sammen med proportionalitetssætningerne) udtaler sig om to figurer. Dernæst må det konstateres, at det ikke uden forbindende mellemlid er muligt at knytte nogen logisk tvingende forbindelse mellem så at sige frit svævende liniestykker eller vinkler. De to objekter må indgå i figurer, hvorom der vides eller antages et eller andet. Da trekanter er simple, let håndterlige figurer, vil det være naturligt at søge de betragtede liniestykker eller vinkler inkorporeret i trekanter. Dette er da også en hyppig brugt fremgangsmåde, når det skal bevises, at et par liniestykker eller et par vinkler er lige store. Herved kommer kongruenssætningerne til anvendelse, og disse kan derfor siges at være et hjælpemiddel til fastlæggelse af relationen lighed mellem størrelser af ovennævnte slags. De bliver så at sige det medium, der bærer ræsonnementet, og de kommer derved til at indtage en meget central plads i geometrien.

Ved den elementære geometriundervisning kan der naturligvis ikke være tale om abstrakte aksiomatiske betragtninger, så kongruens både af liniestykker, vinkler og heraf sammensatte figurer defineres utvivlsomt bedst som simpel og anskuelig dækningsmulighed. Efter en sådan explicit definition bliver det omtalte Hilbertske axiom, der forbandt kongruens af liniestykker og vinkler, øjensynlig overflødigt, således at den tilsvarende kongruenssætning bliver en sætning på linie med de øvrige. Dette er i overensstemmelse med, at et deduktivt system kan se anderledes ud som abstrakt system end som interpreteret system. For imidlertid at give trekantstilfældene det rette perspektiv vil det utvivlsomt være nyttigt straks på begynderstadiet at gøre opmærksom på, at kongruens af trekanter forklaret som dækningsmulighed er ensbetydende med, at liniestykker og vinkler bliver parvis lige store, og endvidere for at tydeliggøre kongruenssætningernes funktion at ledsage hver af dem med en forklaring, der nærmer sig den euklidiske formulering af sætningerne.

LITTERATUR

Euklids elementer. Oversat af Thyra Eibe. København 1897-1912.

F. GONSETH: *La géométrie et le problème de l'espace. 3: L'édification axiomatique*. Neuchâtel 1947.

D. HILBERT: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1899. — Oversigt over Hilberts axiom-system af J. O. Stubban i NMT 4 (1956), s. 76-84.

ET DISKUSSIONSINDLÆG

J. F. STEFFENSEN

Diskussionen om indførelse af sandsynlighedsregning i det danske gymnasium har bragt mig til at tænke over, hvordan man bedst indfører begrebet sandsynlighed i skolen. Resultatet af disse overvejelser følger nedenfor.

1. Et forsøg foretages under forhold, hvor udfaldet nødvendigvis må tilhøre et vist område, uden at der dog er nogetsomhelst, der tyder på, at den ene mulighed snarere vil blive realiseret end nogen af de andre. Som illustration vil vi benytte et kompaslignende apparat med en ikke-magnetisk nål. Vi ser foreløbig bort fra en inddeling af periferien og betegner for kortheds skyld apparatet som en »forsøgscirkel«.

Sætter man nu nålen i hurtig roterende bevægelse, vil den, når den standser, udpege et punkt på periferien, uden at der, hvis forsøgscirklen har været omhyggeligt konstrueret, har været nogetsomhelst, der tydede i retning af dette eller noget andet bestemt punkt. Vi siger derfor, at punktet er *tilfældigt* udpeget blandt *lige mulige* punkter.

Vi afsætter dernæst en bue af vilkårlig længde α på periferien, hvis samlede længde vi betegner ved P . Foretager man nu en række forsøg som foran nævnt, vil nålen enten udpege et punkt tilhørende α , eller et, som falder udenfor α . Men alle vil være enige om, at ved et tilstrækkelig stort antal forsøg vil antallet af tilfælde, hvor resultatet tilhører α , forholde sig til det samlede antal forsøg omtrent som α til P . Man udtrykker dette ved at sige, at *sandsynligheden* for et resultat tilhørende

α er $\frac{\alpha}{P}$.

Sandsynligheden for et resultat, der ikke tilhører α , er øjensynlig $\frac{P-\alpha}{P}$ eller $1 - \frac{\alpha}{P}$.

Er der på periferien afsat to forskellige buer α og β , er sandsynligheden for et resultat, der tilhører en af dem, ligegyldigt hvilken, åben-

bart $\frac{\alpha + \beta}{P}$ eller $\frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{P}$, altså summen af den til α og den til β hørende sandsynlighed. Dette er sætningen om sandsynligheders *addition*.

2. For at udlede sætningen om sandsynligheders *multiplikation* indfører vi endnu en forsøgscirkel med periferien Q , hvorpå der er afsat en bue med længden β . Vi betragter nu det *sammensatte* forsøg, som består af et forsøg med hver af de to forsøgscirkler, og der spørges om den hyppighed, hvormed man ved en lang forsøgsrække kan vente at få *både* et resultat tilhørende α og et tilhørende β ved det sammensatte forsøg.

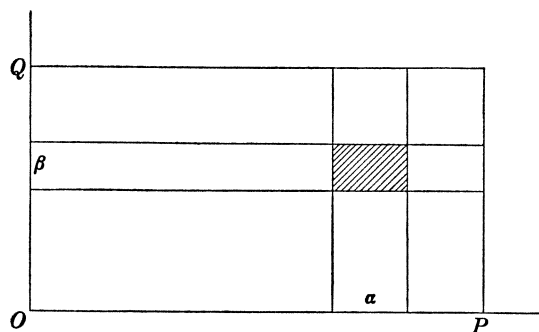


Fig. 1

Vi tænker os nu (se fig. 1) P og Q afsat som koordinater i et retvinklet koordinatsystem, hvor også α og β er afsatte. Et bestemt resultat af det sammensatte forsøg vil da være repræsenteret af et bestemt punkt af rektangleret med siderne P og Q , og alle punkter af dette rektangel må betragtes som *lige mulige*.

Ordinaterne i de to punkter, der begrænser α , og abscisserne i de to, der begrænser β , afgrænser et rektangel (skraveret på figuren), som repræsenterer de tilfælde, hvor *både* α og β er indtruffet ved det sammensatte forsøg, og man må antage, at ved et stort antal gentagelser af det sammensatte forsøg vil antallet af tilfælde, hvor resultatet tilhører det således afgrænsede areal, forholde sig til det samlede antal forsøg omtrent som dette areal, altså $\alpha\beta$, til det samlede areal PQ . Men dette udtrykkes ved at sige, at *sandsynligheden* for, at *både* α og β indtræffer, er $\frac{\alpha\beta}{PQ}$ eller $\frac{\alpha}{P} \cdot \frac{\beta}{Q}$, altså produktet af de to sandsynligheder $\frac{\alpha}{P}$ og $\frac{\beta}{Q}$. Dette er sætningen om *multiplikation* af sandsynligheder.

3. Vi har i det foregående talt om *områder* i stedet for som Laplace om *antal* af mulige og gunstige tilfælde. Har man at gøre med antal, behøver man blot at tænke sig forsøgscirkelns periferi inddelt i det ønskede antal dele. Således kan Laplace's terning erstattes af en forsøgs-cirkel, hvis periferi er inddelt i 6 lige store og *nummererede* dele. Vi behøver ikke at gå nærmere ind herpå.

4. Ved sandsynlighedsregningens mangfoldige anvendelser er situationen næsten aldrig den, at man som foran ved aprioriske betragtninger kan slutte sig til størrelsen af den sandsynlighed, man har brug for. Man må da gå den modsatte vej og undersøge den relative hyppighed, hvormed det resultat, man interesserer sig for, optræder ved gentagne iagttagelser. Dersom denne relative hyppighed synes at tendere mod et bestemt tal, når antallet af gentagelser vokser, accepterer man provisorisk dette tal som den søgte sandsynlighed og opererer dermed efter de for sandsynlighedsregningen gældende regler, så længe man ikke støder på modsigelser.

MERA OM VALMETODER

FOLKE ERIKSSON

I sin för övrigt mycket trevliga artikel om proportionella valmetoder (NMT 5 (1957), sid. 91–98) har Carl-Erik Fröberg i mitt tycke behandlat uddatalsmetoden en aning styvmoderligt i förhållande till valkvotsmetoden. Han nämner, att uddatalsmetoden med en viss inskränkning kan baseras på principen att det »relativa felet» bör minimeras. Däremot nämner han inte ett annat mycket naturligare sätt att härleda uddatalsmetoden direkt ur önskan att göra ett visst »fel» så litet som möjligt. Det kan kanske vara av intresse att här redogöra för denna härledning, som torde vara ganska okänd. Jag har tidigare i största korthet publicerat den i artikeln »En metod att fördela mandat», Liberal Debatt nr. 1, 1949.

Utgångspunkten är principen att alla röster bör ha samma värde. Denna princip skall här få en exakt innebörd. Vi intresserar oss närmast för vilket utbyte i mandat varje enskild röst har gett vid en viss mandatfördelning. Om t. ex. ett parti har fått 3 mandat för 30000 röster, kan varje röst anses ha gett 0.0001 mandat. Låt oss då säga att rösten har fått mandatvärdet 0.0001. Allmänt definierar vi *mandatvärdet* för en röst på ett parti I , vilket fått M_i röster och n_i mandat, som kvoten n_i/M_i . Mandatvärdet är alltså helt enkelt antalet erhållna mandat per röst.

Den ideala rättvisan vore givetvis att rösterna på alla olika partier finge samma mandatvärde. Men utan att införa delbara mandat kan man endast undantagsvis förverkliga detta. I regel uppstår skillnader mellan mandatvärdena för röster på olika partier. Skillnaden mellan mandatvärdena för röster på i -te resp. k -te partiet skall vi beteckna med δ_{ik} . Således är

$$\delta_{ik} = \left| \frac{n_i}{M_i} - \frac{n_k}{M_k} \right|.$$

Dessa δ_{ik} är ett slags fel i mandatfördelningen. Det är naturligt att sträva efter en fördelning som gör alla δ_{ik} små.

Vi övergår nu till själva mandatfördelningen och behåller den vanliga, bl. a. i de nordiska länderna använda, successiva fördelningen: mandaten

utdelas ett och ett med användning av vissa jämförelsetal. Antag att vi kommit till ett steg, då det i -te partiet har fått n_i mandat ($i = 1, 2, \dots$). Vi vill nu undersöka vilket parti som bör få nästa mandat. Vi jämför därför möjligheterna att ge mandatet till partiet I eller partiet K : Om I får mandatet, blir skillnaden mellan mandatvärdena för röster på I resp. K :

$$\delta'_{ik} = \left| \frac{n_i + 1}{M_i} - \frac{n_k}{M_k} \right|.$$

Om K får mandatet, blir motsvarande skillnad:

$$\delta''_{ik} = \left| \frac{n_i}{M_i} - \frac{n_k + 1}{M_k} \right|.$$

Den förra möjligheten är att föredraga, om $\delta'_{ik} < \delta''_{ik}$ — den senare däremot om $\delta'_{ik} > \delta''_{ik}$. En enkel räkning visar att dessa villkor är ekvivalenta med uddatalsmetodens villkor att I :s jämförelsetal $M_i/(2n_i + 1)$ skall vara större resp. mindre än K :s jämförelsetal $M_k/(2n_k + 1)$. Man måste emellertid behandla de fyra olika tänkbara teckenkombinationerna var för sig:

$$(1) \quad \delta'_{ik} = \frac{n_i + 1}{M_i} - \frac{n_k}{M_k}, \quad \delta''_{ik} = \frac{n_k + 1}{M_k} - \frac{n_i}{M_i}.$$

Då är $\delta'_{ik} > \delta''_{ik}$, om

$$\frac{n_i + 1}{M_i} - \frac{n_k}{M_k} > \frac{n_k + 1}{M_k} - \frac{n_i}{M_i}; \quad \frac{2n_i + 1}{M_i} > \frac{2n_k + 1}{M_k}; \quad \frac{M_i}{2n_i + 1} < \frac{M_k}{2n_k + 1}.$$

(Detta bevis finns i huvudsak i Fröbergs artikel: jämförelsen mellan storheterna ε_1 och ε_2 , sid. 95.)

$$(2) \quad \delta'_{ik} = \frac{n_i + 1}{M_i} - \frac{n_k}{M_k}, \quad \delta''_{ik} = \frac{n_i}{M_i} - \frac{n_k + 1}{M_k}.$$

Då är $\delta'_{ik} > \delta''_{ik}$, ty $\delta'_{ik} - \delta''_{ik} = \frac{1}{M_i} + \frac{1}{M_k} > 0$. Vidare gäller enligt definitionen $\delta'_{ik} > 0 > -\delta''_{ik}$:

$$\frac{n_i + 1}{M_i} - \frac{n_k}{M_k} > \frac{n_k + 1}{M_k} - \frac{n_i}{M_i}.$$

På samma sätt som under (1) följer av denna sista olikhet $\frac{M_i}{2n_i + 1} < \frac{M_k}{2n_k + 1}$.

$$(3) \quad \delta'_{ik} = \frac{n_k}{M_k} - \frac{n_i + 1}{M_i}, \quad \delta''_{ik} = \frac{n_k + 1}{M_k} - \frac{n_i}{M_i}.$$

Analogt med (2) fås då $\delta'_{ik} < \delta''_{ik}$ och $\frac{M_i}{2n_i+1} > \frac{M_k}{2n_k+1}$.

$$(4) \quad \delta'_{ik} = \frac{n_k}{M_k} - \frac{n_i+1}{M_i}, \quad \delta''_{ik} = \frac{n_i}{M_i} - \frac{n_k+1}{M_k}.$$

Detta kan ej inträffa, ty i så fall vore $\delta'_{ik} + \delta''_{ik} = -\frac{1}{M_i} - \frac{1}{M_k} < 0$.

Vi finner således, att skillnaden mellan mandatvärdena för röster på partierna I resp. K blir mindre, om det av de båda partierna, som har det högsta jämförelsetalet enligt uddatalsmetoden, får ett nytt mandat, än om det andra får ett mandat till. Utsträcket jämförelsen till samtliga partier, framstår det som naturligt att ge nästa mandat till det parti som enligt uddatalsmetoden har det största jämförelsetalet $M_i/(2n_i+1)$.

SATS: Genom uddatalsmetoden erhålles en mandatfördelning, där varje fel δ_{ik} är minimalt i följande mening: Ingen överflyttning av mandat från ett parti, I , till ett annat, K , kan minska δ_{ik} (skillnaden mellan mandatvärdena för röster på I resp. K).

På detta sätt förverkligas alltså genom uddatalsmetoden den naturliga rättvisepincipen: att skillnaderna mellan olika rösters (mandat)värdet bör göras så små som möjligt.

Beviset för satsen är enkelt: Om δ_{ik} bleve mindre för mandatfördelningen (n_i-1, n_k+1) än för den givna fördelningen (n_i, n_k) , vore enligt ovan $M_i/(2n_i-1) < M_k/(2n_k+1)$. Det i -te partiet kunde då vid fördelningen enligt uddatalsmetoden aldrig ha fått sitt n_i -te mandat, innan det k -te fått sitt (n_k+1) :a.

Nu kunde man kanske förledas att tro, att fördelningen enligt uddatalsmetoden även gör »felsumman» $\sum_{i,k} \delta_{ik}$ minimal. Att detta inte alltid är fallet visas av följande exempel: 10 mandat skall fördelas mellan tre partier med $M_1=100000$, $M_2=20000$ och $M_3=1000$. Fördelningen blir $n_1=8$, $n_2=2$, $n_3=0$. (Jämförelsetalen för de bägge största partiernas åttonde resp. andra mandat är lika = $6666\frac{2}{3}$.) Mandatvärdet för en röst på resp. parti blir 0.00008, 0.0001 och 0. Därav fås »felen» $\delta_{12}=0.00002$, $\delta_{13}=0.00008$ och $\delta_{23}=0.0001$. Enligt ovan är dessa fel var för sig »minimala». Så t. ex. bleve för fördelningen $n_1=9$, $n_2=1$, $n_3=0$ mandatvärdena 0.00009, 0.00005 resp. 0, varvid $\delta_{12}=0.00004$ — dubbelt så stort som förut. Däremot skulle felsumman $\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23}$ minskas från 0.0002 till 0.00018, beroende på den kraftiga minskningen av δ_{23} till 0.00005. Exemplet visar också, att den fördelning som gör felsumman minst

knappast är rimlig. Det vore ju absurt, om existensen av det tredje partiet skulle ändra fördelningen mellan de två större partierna från (8, 2) till (9, 1)! En metod som strävar att minimera felsumman $\sum_{i,k} \delta_{ik}$ förefaller därför mindre lämplig. — Exemplet torde ha motsvarigheter i praktiken, eftersom småpartier utan mandat är vanliga.

Liksom Fröberg påpekat en orimlighet hos uddatalsmetoden (sid. 93), bör jag kanske nämna ett par orimligheter hos den av honom förordade valkvotsmetoden. För det första kan mandatfördelningen mellan två partier påverkas av ett tredje partis röstetal. Vi kan belysa detta med ett exempel, där 10 mandat skall fördelas mellan tre partier. Antag först att röstetalen är $M_1 = 85000$, $M_2 = 14000$ och $M_3 = 1000$. De »reducerade röstetalen» (Fröberg, sid. 91) blir $m_1 = 8.5$, $m_2 = 1.4$ resp. $m_3 = 0.1$. Således blir mandatfördelningen enligt valkvotsmetoden $n_1 = 9$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$. Nu antar vi, att M_3 vid nästa val ökas till 3000, medan M_1 och M_2 förblir oförändrade. Då blir de reducerade röstetalen $m_1 \approx 8.33$, $m_2 \approx 1.37$, $m_3 \approx 0.29$ och mandatfördelningen $n_1 = 8$, $n_2 = 2$, $n_3 = 0$. Parti 2 har vunnit ett mandat från parti 1 tack vare att parti 3 ökat sitt röstetal!

Den andra orimligheten är risken för ett parti att *förlora* ett mandat genom att totala antalet mandat *ökas*. Detta har verkligen inträffat i USA. Vid fördelning av platserna i representanthuset mellan de olika delstaterna förlorade Alabama ett mandat till följd av att antalet platser ökades. Som exempel på denna s. k. Alabama-paradox kan vi här ta tre partier med röstetalen $M_1 = 93000$, $M_2 = 83000$, $M_3 = 24000$. Om 20 mandat skall fördelas mellan dessa partier, blir de reducerade röstetalen $m_1 = 9.3$, $m_2 = 8.3$ resp. $m_3 = 2.4$. Mandatfördelningen enligt valkvotsmetoden blir då $n_1 = 9$, $n_2 = 8$, $n_3 = 3$. Ökas nu mandatantalet till 21, blir de reducerade röstetalen $m_1 \approx 9.8$, $m_2 \approx 8.7$, $m_3 \approx 2.5$ och mandatfördelningen $n_1 = 10$, $n_2 = 9$, $n_3 = 2$. Det tredje partiet förlorar ett mandat på grund av att hela antalet mandat ökats! Omvänt kan naturligtvis ett parti vinna ett mandat genom att totala antalet mandat minskas.

Avslutningsvis vill jag instämma med Fröberg i konstaterandet att valkvotsmetoden och uddatalsmetoden är klart överlägsna övriga diskuterade valmetoder. Valet mellan dessa båda metoder har däremot mera karaktären av en smakfråga. Bägge metoderna har sina för- och nackdelar. För min del hävdar jag dock gentemot Fröberg, att skälen för uddatalsmetoden överväger. Även Fröbergs egna tabeller över det »totala felet» kan åberopas som stöd härför: Det är anmärkningsvärt att uddatalsmetoden vid bedömning utifrån valkvotsmetodens egna premisser visar sig praktiskt taget jämbördig med denna metod.

REPLIK

CARL-ERIK FRÖBERG

Tanken att bygga en valmetod på principen »största möjliga rättvisa» kan självfallet inte leda till något entydigt resultat. Man måste nämligen bestämma sig för vem som skall komma i åtnjutande av denna rättvisa. Eriksson hävdar, att rättvisan skall vederfaras de röstande genom att alla röster såvitt möjligt skall ha samma värde. Denna uppfattning synes dock inte ha vunnit genklang hos den röstande allmänheten, som i stället undantagslöst intresserar sig för de olika partiernas erhållna mandat. Av denna anledning synes det naturligast att bygga på en minimering av summan av avvikelserna mellan mandat och reducerat röstetal, och därmed är man framme vid valkvotsmetoden.

Vad sedan den första paradoxen beträffar, så har man i det citerade fallet dock att göra med två olika politiska situationer, och jag kan inte finna något orimligt i att resultatet kan utfalla olika. Exemplet på den kända Alabamaparadoxen förtjänar att penetreras närmare. Vi antar dessutom, att mandatökningen sker efter halva mandattiden. Då skall det första partiet ha 9.30 mandat under första halvan och 9.76 mandat för andra halvan, eller i medeltal 9.53 mandat. Motsvarande siffror för de båda andra partierna är 8.30, 8.72 och 8.51 samt 2.40, 2.52 och 2.46 resp. Det verkliga mandatantalet blir 9.50, 9 och 2 enligt uddatalsmetoden samt 9.50, 8.50 och 2.50 enligt valkvotsmetoden. Felen blir 1.06 och 0.08 (!) resp. Nu invänder man kanske, att en sådan utjämning i tiden är främmande för det politiska livet. Detta är dock inte fallet. I Sverige förekommer ganska ofta, att två partier med varandra träffa avtal om en uppdelning av mandattiden.

Valkvotsmetoden måste således enligt min mening ges ett litet försteg framför uddatalsmetoden, främst därför att den är grundad på en mer realistisk minimiregel. Det skall emellertid gärna medges, att uddatalsmetoden i regel också är fullt acceptabel, och i de allra flesta fall ger metoderna identiska resultat. Vad som främst förtjänar att kritiseras är den i Sverige använda spärrfaktorn 1.4, som saknar varje tillstymmelse till teoretisk bakgrund.

BOKMELDINGER

ULF GRENANDER -- MURRAY ROSENBLATT: *Statistical analysis of stationary time series*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1956. 300 pp. Sv. kr. 56.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 45.)

Den matematiske teorien for stokastiske prosesser som er utviklet gjennom de siste ca. 25 årene, er nå temmelig omfattende når det gjelder grunnleggende kjennskap til selve prosessene, især de stasjonære. Samtidig utvides de praktiske anvendelsesområder for teorien stadig. Fysikere, ingeniører, biologer, meteorologer, sosialvitenskapsmenn etc. bruker stokastiske modeller i sine teorier. Vesentlige problemer melder seg her når man ut fra et gitt observasjonsmateriale, en »tidsrekke«, vil trekke slutninger om den prosess som postuleres å ligge bak observasjonene. Dette er for såvidt klassiske statistiske problemer, men de er langt fra løst for stokastiske prosesser, idet de vanlige metoder fra den teoretiske statistikk hittil bare har ført til sparsomme resultater. I en rekke avhandlinger siden 1950 har Grenander og Rosenblatt, hver for seg eller sammen, angrepet problemene, til dels på nye fronter. Resultatene er nå samlet og supplert i denne monografien. Hensikten er bl. a. å vise statistikerne på den ene siden og de øvrige forskere, særlig fysikere og ingeniører, på den annen, hvordan den generelle teorien for stokastiske prosesser kan brukes på de statistiske problemene.

Kap. 1 gir en meget god oversikt over den delen av teorien for stokastiske prosesser som brukes i boken. Spesielt er innføringen av stokastiske mengdefunksjoner og stokastiske integraler gjort på en tiltalende måte. Forfatterens viktigste hjelpemiddel videre i boken er representasjonen av kovariansfunksjonen for en stasjonær stokastisk prosess ved den spektrale fordelingsfunksjon (eller det avledede spektrum), og den tilsvarende ortogonale representasjon av prosessen selv.

I kap. 2 forutsettes prosessens spektrum kjent. Ut fra dette gis en fremstilling av Kolmogoroffs prediksjonsteori, noen interpolasjonsproblemer, et filterproblem og estimering i en regresjonsmodell.

Kap. 3 inneholder en kortfattet oversikt over metoder som har vært brukt ved »tidsrekkeanalyse«, fra periodogramanalyse til estimering i autoregressive modeller. Tilsynelatende har forfatterne lite til overs for disse metodene og anbefaler ikke-parametriske metoder isteden. I virke-

ligheten er det nok *misbrukt* av metodene de vil til livs, det har liten hensikt å bruke en metode som forutsetter en meget nøyaktig spesifisering av prosessen hvis en ikke kjenner prosessen godt nok til å vite om forutsetningene virkelig er rimelige.

I kap. 4 kommer forfatterne bidrag til løsning av et ikke-parametrisk problem, nemlig estimering av kontinuerlige spektra for reelle stasjonære prosesser ved estimatorer som er kvadratiske former i observasjonene. Estimeringskriteriene er konsistens, asymptotisk forventningsrettet og asymptotisk variansminimalitet (evtl. minimum mean square error). Forfatterne kommer bl. a. frem til »spectrograph-estimates» som kan betraktes som veiede gjennomsnitt av periodogrammet, og undersøker spesialtilfeller av disse som er foreslått tidligere, f. eks. av Bartlett.

I kap. 5 behandles spesielle eksempler hvor forutsetningene i kap. 4 erfaringsmessig kan anses oppfylt, nemlig problemer ved »random noise», turbulens og havbølger. Forøvrig vrir boken av eksempler fra de forskjellige områder, især fra fysikk, med henvisninger til litteratur hvor man kan finne bedre innføringer enn en kort oversikt kan gi.

Kap. 6 omfatter (asymptotisk) fordelingsteori for estimatorene, konfidensområder og dessuten estimeringsresultater for noen kunstig genererte tidsrekker. Kap. 7 behandler regresjonsmodeller med bl. a. hypoteseprov og estimering av regresjonskoeffisientene når »forstyrrelsesleddene» stammer fra en lineær, stasjonær prosess. I kap. 8 behandles diverse problemer, det viktigste er vel prediksjonsproblemet når spektret må estimeres fra data. Her er det visse uløste vanskeligheter.

De fleste av forfatterne resultater er av asymptotisk natur, de kan altså antas å gjelde tilnærmet for store utvalg, og de gjelder lineære prosesser med diskret t -parameter. For kontinuerlig t er det gitt noen resultater, som bl. a. kan være av betydning ved prosesser hvor en vil bygge en analogmaskin for beregningene. Som det vil forstås, er det især tekniske og fysiske anvendelser forfatterne behandler.

Man kunne ønsket at forfatterne hadde gitt seg tid til å gi boken en siste kritisk gjennomgåelse før utgivelsen. Det burde resultert i en mer enhetlig fremstilling gjennom de forskjellige kapitler, færre »trykkfeil» og retting av noen mindre heldige formuleringer og feil. Ett eksempel: på s. 114 står det at kravet om at den karakteristiske likning for en stokastisk differenslikning i én variabel skal ha røtter innenfor enhetssirkelen, er et identifikasjonskrav. I virkeligheten er det et stasjonaritetskrav. Den annen av de to løsninger som er gitt i eksemplet er *ikke* stasjonær under de vanlige betingelser om ortogonalitet etc. i en autoregressiv modell (men blir det hvis vi reverserer tidsrekkefølgen).

Disse innvendingene er imidlertid bagateller i forhold til bokens verdi

som et pionerarbeide på sitt område. Den viser hva som kan gjøres når en virkelig utnytter teorien, og den gir stimulans til videre arbeide på en rekke forskjellige felter.

Herdis Thorén Amundsen

JOS. E. HOFMANN: *Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-mathematik*. Monographies de l'Enseignement mathématique No. 3. Institut de Mathématiques, Université, Genève, 1957. 126 pp. \$ 3.80.

En av de aller interessanteste epoker i matematikkens historie er vel siste halvdel av 1600-tallet. Da levet og virket Newton, Leibniz, Jakob og Johann Bernoulli og mange andre. Til denne tid kan man henlegge differensial- og integralregningens oppståen, når man oppfatter dem som omvendte regneoperasjoner. Riktignok hadde de — tatt hver for seg — oppnådd en ganske stor fullkommenhet allerede hos Arkimedes og senere hos Pascal, Fermat og mange andre. Kanskje er dette forklaringen på at det omtrent samtidig med differensial- og integralregningens oppståen kunne løses variasjonsproblemer, noe som ellers synes noe nær mirakuløst. Newton løste således et meget vanskelig variasjonsproblem, å konstruere et prosjektil slik at luftmotstanden skulle bli minst mulig. Johann Bernoulli, Jakobs yngre bror, reiste i 1696 problemet om den brakystokrone kurve, korttidskurven for en glidende partikkel mellom to punkter. Oppgaven ble løst av Newton, Leibniz og Jakob Bernoulli, og Johanns egen løsning ble offentliggjort. Jakobs løsning var den verdifulleste, sier Hofmann. Om denne klassiske oppgaven i variasjonsregning forteller Hofmann, og om mange andre. Han forteller at Jakob Bernoulli hadde fått vite at Huygens hadde studert problemet om å dele en trekant i fire like store deler ved hjelp av to rette linjer som står loddrett på hverandre, et problem som skal la seg føre tilbake til Apollonios. Huygens var blitt ledet til en ligning av 40^{de} grad, mens Jakob Bernoulli reduserte det til en ligning av 8^{de} grad.

Hofmann forteller at Jakob da han var 28 år besøkte London hvor han traff matematikerne fra Royal Society. Han var inntil da fullstendig ukjent med infinitesimale metoder. Fra nå av kaster han seg over studiet av Descartes, Wallis og Barrow.

Etter hjemkomsten til Schweiz disputerte han ved universitetet i Basel, hvor han fikk å forsvare 100 teser. Jeg siterer noen av dem: »Wenn die übrigen Bedingungen gleich sind, ist grösser kleiner und kleiner grösser.« »Zu einer geraden Linie gibt es eine noch geradere.« »Manchmal gibt es mehrere kürzeste Wege von Punkt zu Punkt.« Selv Hofmann som i bokens 389 noter med gavmild hånd gjør oss meddelaktige i sin overveldende viten, gir tapt her: »Leider tappen wir hier

mangels irgendwelcher Hinweise in den Meditationes über die Absichten des Verfassers im Dunkeln.«

Viggo Brun

Insights into modern mathematics. Twenty-third yearbook, The National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D.C., 1957. 8+440 pp.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 199.)

Her i NMT har jeg i en artikkel om matematikkens plass i amerikansk skole pekt på de verdifulle »Yearbooks« for matematikklærere som blir gitt ut i U. S. A. (NMT 5 (1957), s. 81–82.)

Nylig er bind 23 i serien kommet, kanskje det beste av dem alle. Det har til hensikt å gi matematikklærerne innblikk i moderne matematikk, i såvel »stoff« som »ånd«. En rekke spesialister har gitt en utsikt over en aktuell disiplin, med litteraturhenvisninger og til dels oppgaver som skal gi en innføring i emnet såvidt grundig at leseren får beskjed om bakgrunnen for og hovedideen i vedkommende disiplin, og også får presentert definisjoner, setninger med bevis, alt i en så bred framstilling at det kan tales om virkelig innsikt. Hvert kapitel er blitt gjennomlest og kritisert av en gruppe lærere for å gjøre utbyttet av lesningen størst mulig.

En komité som bl. a. tellet menn som professor Saunders MacLane (Chicago) og professor F. Lynwood Wren (Nashville) sto for redaksjonen, og de bør være svært tilfredse med resultatet både fra faglig og pedagogisk synspunkt.

De emner som boka behandler er nevnt i innholdsfortegnelsen. Det er vanskelig å trekke fram det beste. Sikkert er det at boka gir usedvanlig nyttig og verdifullt stoff for matematikklærerne, hva enten de er nybegynnere eller har arbeidet lenge i skolen. Den er også et vitne om tendenser i U. S. A. som vil reformere de nokså tradisjonelle pensum skolen gjennomgående har der nå. Sluttkapitlet drøfter da også de følgene utviklingen i den nyere matematikk vil kunne få for skolens matematikkundervisning. Spørsmålet er om ikke også vi her i Norden gjennom denne boka kunne få inspirasjon til lignende pensumreformer hos oss. I alle fall har matematikklærere i alle land her fått en utmerket informasjons- og inspirasjonskilde.

Kay Piene

E. M. PATTERSON: *Topology*. (University mathematical texts.) Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1956. 8+128 pp. sh. 8/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 46.)

Selvfølgelig er det fremdeles mulig å finne områder av matematikken

(som f. eks. den elementære tallteori) hvor topologien ikke har vært anvendt i noen særlig utstrekning — men det blir færre og færre av dem for hver dag. Og til en yngre matematikkinteressert som ønsker å trenge inn i matematikken på en litt bredere front, kan man trygt si at topologi hører til noe av det han *må* lese hvis han ikke vil falle av lasset temmelig snart. Selv på et helt elementært nivå i analysen (både reell og kompleks) vil kunnskaper i topologi øke forståelsen i en vesentlig grad.

Denne lille boka av Patterson er lagt opp helt elementært og burde kunne leses med utbytte også av en interessert gymnasiast. Selv om det har foregått atskillig tilnærming i de senere årene, faller topologien i to nokså atskilte deler: Den generelle («mengdeteoretiske») topologi og den algebraiske (eller kombinatoriske) topologi. På bare 124 små sider har det lyktes forfatteren å gi en meget god innføring i begge disse emner. Innholdet av boka er dette: I et innledningskapittel blir det gitt en motivering for de senere kapitler. Forfatteren har valgt å gjøre dette ved eksempler fra den algebraiske topologi som Möbius-båndet, Kleins flaske, det projektive plan, Eulers polyedersats og firfarveproblemet. Dernest følger to kapitler om topologiske rom. Disse starter med en liten innledning om mengder, dernest gis det euklidiske n -dimensjonale rom og metriske rom i sin alminnelighet som eksempler på topologiske rom, før den generelle definisjon presenteres. Blant de generelle topologiske begreper som omtales i disse kapitlene kan nevnes kompakthet, sammenheng, normalitet og kompletthet. Tychonoffs sats bevises i tilfellet av to faktorer, og det mest dyptliggende resultat som bevises i denne delen av boka er utvilsomt det bekjente Urysohns lemma.

Annen del gir en helt elementær behandling av to hovedbegreper i den algebraiske topologi, nemlig homotopi og homologi. I tilknytning til homotopibegrepet behandles spesielt Poincarés fundamentalgruppe og homotopigruppene. Til slutt følger så litt om homologi, hvor det omtales begreper som simpleks, kompleks, kjede, sykel, homologigruppe, kohomologi og Betti-tall. Den algebraiske topologi spiller en nesten dominerende rolle i nåtidens matematiske forskning og har hatt avgjørende betydning på en rekke høyst forskjellige områder, som f. eks. kompleks funksjonsteori (spesielt av flere variable), algebraisk geometri og teorien for algebraiske tallkropper (klassekroppsteori).

Som sagt, for en som vil trenge litt dypere inn i matematikken er i det hele topologien så fundamental at en bør begynne studiet av den så tidlig som mulig. Og Pattersons bok synes å kunne gi en utmerket start.

K. E. Aubert

MOTTATTE BØKER

Philip L. Alger: *Mathematics for science and engineering*. (Based on Charles P. Steinmetz: *Engineering mathematics*.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 11+360 pp. sh. 41/6.

Arithmetic 1-35 * Trigonometry 36-58 * Directed numbers 59-93 * Algebraic equations 94-120 * Infinite series 121-144 * Numerical calculations 145-155 * Empirical curves 156-172 * Differentials and integrals 173-198 * Functions 199-219 * Trigonometric series 220-244 * Maxima and minima 245-258 * Differential equations 259-291 * Probability 292-316 * Mathematical models and electric circuits 317-334 * Appendix 335-356 * Index 357-360.

R. A. Buckingham: *Numerical methods*. Sir Isaac Pitnam & Sons, London, 1957. 12+597 pp. sh. 70/-.

An introduction to computation 1-45 * Sums and differences of polynomials 46-68 * Lagrangian methods of interpolation, differentiation and integration 69-91 * Newton's method of divided differences 92-107 * Differences at constant interval 108-142 * Symbolic methods 143-168 * Solution of ordinary differential equations (1) 169-207 * Solution of ordinary differential equations (2) 208-245 * Polynomial and other algebraic equations 246-297 * Fitting of data by the method of least squares 298-334 * Direct solution of simultaneous linear equations 335-369 * Matrices and determinantal equations 370-422 * Indirect methods for linear equations 423-445 * Ordinary differential and Fredholm integral equations 446-479 * Functions of two variables 480-509 * Partial differential equations 510-567 * Appendices 568-586 * Index of useful formulas in text 587-590 * Index 591-597.

H. S. M. Coxeter — W. O. J. Moser: *Generators and relations for discrete groups*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 14.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 8+155 S., 54 Fig. DM 32.00.

Cyclic, dicyclic and metacyclic groups 1-12 * Systematic enumeration of cosets 12-18 * Graphs, maps and Cayley diagrams 18-32 * Abstract crystallography 33-52 * Hyperbolic tessellations and fundamental groups 52-61 * The symmetric, alternating, and other special groups 61-82 * Modular and linear fractional groups 83-100 * Regular maps 100-117 * Groups generated by reflections 117-133 * Tables 134-143 * Bibliography 144-151 * Index 152-155.

Otto F. Fischer: *Five mathematical structural models* in natural philosophy with technical physical quaternions. The Axion Institute, Stock-

holm, 1957 (distributed by H. Lindstähls Bokhandel, Stockholm). 6+412 pp. \$ 10.00.

On quaternions 1-8 * The electromagnetic model of the quaternionian potential pyramid 9-41 * On translations and rotations in four-space 42-68 * The model of elastic deformations in four-space with electromechanical analogies 69-96 * Rotational and other hexavectors 97-111 * The technical model of hexavector motors 112-154 * On wave mechanics and octavector calculus 155-177 * The quantum mechanical model of Dirac octavectors 178-259 * Extremals, Hamilton's geometry and the idealized de Broglie wave model in three-space 260-302 * The quaternionian de Broglie wave model and the completed potential pyramid 303-373 * Comments, conclusion 374-391 * Appendix 392-406 * References 407-408 * Index 409-412.

C. F. Gauss Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955. Herausgegeben von Hans Reichardt. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 251 S. Leinen DM 25.80.

E. Kähler: Über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik 1-13 * H. Salié: Daten aus dem Leben und Wirken von Carl Friedrich Gauss 15-36 * G. J. Rieger: Die Zahlentheorie bei C. F. Gauss 37-77 * R. Kochendörffer: Gauss' algebraische Arbeiten 79-91 * W. Blaschke: C. F. Gauss und die Differentialgeometrie 93-110 * W. Klingenberg: Grundlagen der Geometrie 111-150 * A. I. Markuschewitsch: Die Arbeiten von C. F. Gauss über Funktionentheorie 151-182 * K. Schröder: C. F. Gauss und die reelle Analysis 183-191 * B. W. Gnedenko: Über die Arbeiten von C. F. Gauss zur Wahrscheinlichkeitsrechnung 193-204 * O. Volk: Astronomie und Geodäsie bei C. F. Gauss 205-229 * H. Falkenhagen: Die wesentlichsten Beiträge von C. F. Gauss aus der Physik 231-251.

N. M. Günter: *Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik*. Übersetzung aus dem Russischen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 10+342 S., 34 Fig. Geb. DM 18.00.

Hilfssätze 1-38 * Die Theorie des Potentials 39-117 * Das Neumannsche und das Robinsche Problem 118-174 * Das Dirichletsche Problem 175-214 * Greensche Funktionen und ihre Anwendungen 215-287 * Anhang 288-332 * Kurze Biographie 333-341 * Sachverzeichnis 342.

G. Hessenberg — H. Kneser: *Ebene und sphärische Trigonometrie*. Fünfte Auflage. (Sammlung Götschen 99.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1957. 172 S., 60 Fig. DM 2.40.

Einleitung 9-16 * *Ebene Trigonometrie*: Das rechtwinklige Dreieck 17-26 * Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel 27-45 * Das schiefwinklige Dreieck 45-58 * Die Additionstheoreme 58-73 * Geometrische Anwendungen der Additionstheoreme 73-87 * Das Viereck 87-100 * *Sphärische Trigonometrie*: Vorbereitungen aus der sphärischen Geometrie 101-119 * Das rechtwinklige sphärische

Dreieck 119–126 * Das schiefwinklige sphärische Dreieck 126–139 * *Berechnung und algebraische Anwendung der trigonometrischen Funktionen*: Elementare Berechnungsmethoden 140–144 * Der Moivresche Satz 144–156 * Die Methode der Hilfswinkel 157–172.

Insights into modern mathematics. Twenty-third yearbook, The National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D.C., 1957. 8+440 pp.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 195.)

Carroll V. Newsom: Introduction 1–6 * Ivan Niven: The concept of number 7–35 * E. J. McShane: Operating with sets 36–64 * Carl B. Allendoerfer: Deductive methods in mathematics 65–99 * Saunders MacLane: Algebra 100–144 * Walter Prenowitz: Geometric vector analysis and the concept of vector space 145–199 * John F. Randolph: Limits 200–240 * Rudolph E. Langer: Functions 241–272 * S. H. Gould: Origins and development of concepts of geometry 273–305 * R. H. Bing: Point set topology 306–335 * Herbert Robbins: The theory of probability 336–371 * Charles B. Tompkins: Computing machines and automatic decisions 372–403 * Bruce E. Meserve: Implications for the mathematics curriculum 404–427 * Index 429–440.

Philip J. McCarthy: *Introduction to statistical reasoning*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 13+402 pp. sh. 43/6.

Introduction 1–7 * The components of a statistical investigation 8–29 * The distribution of a variable 30–68 * The location of a distribution 69–104 * The spread of a distribution 105–124 * Simple random sampling 125–146 * Experiments with uncertain outcomes and probability 147–173 * The binomial probability model and statistical inference 174–223 * Drawing statistical inferences from the arithmetic mean of a large sample 224–269 * Elements of sample design 270–298 * χ^2 procedures for qualitative data 299–331 * The linear association of two quantitative variables 332–392 * Index 393–402.

L. S. Pontrjagin: *Grundzüge der kombinatorischen Topologie*. Übersetzung aus dem Russischen. (Hochschulbücher für Mathematik 29.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. 133 S. DM 8.80.

Einleitung 1–3 * Bezeichnungen 3–5 * Komplexe und ihre Bettischen Gruppen 6–50 * Die Invarianz der Bettischen Gruppen 51–93 * Stetige Abbildungen und Fixpunkte 94–126 * Literaturverzeichnis 127 * Literaturhinweise der Herausgeber 128 * Sachregister 129–133.

Bertrand B. Singer: *Basic mathematics for electricity, radio, and television*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 14+513 pp. \$ 5.75.

Introduction to electricity 1–12 * Simple electrical circuits 13–52 * Electrical measurements 53–66 * Series circuits 67–93 * Parallel circuits 94–126 * Combina-

tion circuits 127-147 * Electrical power 148-173 * Applications of series and parallel circuits 174-217 * Efficiency 218-234 * Electrical energy 235-245 * Resistance of wire 246-274 * Size of wiring 275-293 * Trigonometry for alternating-current electricity 294-307 * Introduction to A-C electricity 308-335 * Inductance and transformers 336-365 * Capacitance 366-397 * Series A-C circuits 398-432 * Parallel A-C circuits 433-467 * Alternating-current power 468-500 * Bibliography 501-502 * Visual aids 503-508 * Index 509-513.

W. Specht: *Elementare Beweise der Primzahlsätze*. (Hochschulbücher für Mathematik 30.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. 78 S. DM 6.40.

Einleitung 1-5 * *Der Primzahlsatz*: Vorbereitungen 5-18 * Die Gleichungen von A. Selberg 18-27 * Der Beweis des Primzahlsatzes 27-37 * *Der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen*: Die Charaktere 37-43 * Vorbereitungen 43-52 * Der Dirichletsche Satz 52-59 * Die Gleichungen von A. Selberg für arithmetische Progressionen 59-68 * Der Beweis des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen 68-78.

The teaching of mathematics. Issued by the Incorporated Association of Assistant Masters in Secondary Schools. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957. 9+231 pp. sh. 15/-.

Mathematics, teachers and pupils 1-16 * Pre-secondary school mathematics 17-35 * Aims and syllabuses for the first five years in a secondary grammar school 36-53 * Mathematics in the school and classroom 54-80 * Some general teaching topics 81-145 * Sixth form work 146-170 * The mathematical library 171-178 * The mathematics room 179-193 * The teaching of statistics 194-217 * The Jefferey report 218-226 * Index 227-231.

Alva M. Tuttle: *Elementary business and economic statistics*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 13+663 pp. sh. 50/6.

The meaning of statistics 1-5 * The classification of statistical data 6-19 * The sources and collection of statistical data 20-30 * Tabular presentation — tabulation — the statistical table 31-60 * Ratios, percentages, and the rounding of numbers 61-97 * Graphic presentation: Bar charts 98-119 * Graphic presentation: Line charts 120-147 * Graphic presentation: Miscellaneous charts 148-162 * The frequency distribution: Basic concepts, grouping, and graphic presentation 163-193 * The frequency distribution: Averages, or measures of central value 194-229 * The frequency distribution: Dispersion and skewness 230-267 * Elementary sampling and statistical inference 268-320 * Index numbers 321-379 * Simple correlation 380-453 * Time series analysis: Basic concepts and preliminary adjustment of data 454-473 * Time series analysis: The secular trend 474-506 * Time series analysis: The seasonal fluctuation 507-545 * Time series analysis: Cycles and forecasting 546-567 * Appendix 1: References 569-575 * Appendix 2: Sources of data; standards; tables 576-653 * Index 655-663.

Friedrich A. Willers: *Methoden der praktischen Analysis*. Dritte, verb. und erw. Aufl. (Göschens Lehrbücherei 12.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1957. 429 S., 93 Fig. Ganzl. DM 28.00.

Das Zahlenrechnen und seine Hilfsmittel 9–60 * Interpolation im engeren Sinne 61–121 * Genäherte Integration und Differentiation 122–184 * Ausgleichen. Trigonometrische Interpolation 185–252 * Praktische Gleichungslehre 253–344 * Genäherte Integration von Differentialgleichungen 345–420 * Sachverzeichnis 421–425 * Namenverzeichnis 426–429.

R. Zurmühl: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Zweite, verb. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 12+524 S., 125 Fig. Ganzl. DM 28.50.

Einführung. Hilfsmittel 2–9 * *Gleichungen*: Allgemeine Gleichungen mit einer Unbekannten 9–34 * Algebraische Gleichungen. Gleichungen dritten und vierten Grades 34–62 * Algebraische Gleichungen höheren Grades: Verfahren von Graeffe 62–77 * Stabilitätskriterien 77–91 * *Lineare Gleichungen und Matrizen*: Der Gaußsche Algorithmus 91–109 * Matrizen 110–124 * Die Kehrmatrix 124–133 * Das Eigenwertproblem 133–151 * Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme 152–159 * Iterative Behandlung des Eigenwertproblems 159–172 * *Interpolation und Integration*: Allgemeine Interpolationsformeln 173–184 * Spezielle Interpolationsformeln 184–196 * Numerische Integration 196–220 * Graphische Integration 220–229 * *Ausgleichsrechnung und Statistik*: Direkte Beobachtung einer Messgröße 229–242 * Ausgleich vermittelnder Beobachtungen 242–258 * Bedingte Beobachtungen 258–269 * Prüfverfahren der Statistik 269–308 * *Darstellung willkürlicher Funktionen*: Harmonische Analyse 308–334 * Ausgleichsparabeln 334–345 * Annäherung willkürlicher Funktionen 345–361 * *Differentialgleichungen*: Anfangswertaufgaben: Grundgedanken. Zeichnerische Verfahren 362–382 * Das Runge-Kutta-Verfahren 382–403 * Differenzenschemaverfahren (Interpolation) 403–418 * *Differentialgleichungen*: Rand- und Eigenwertaufgaben: Einführung 419–436 * Differenzen- und Quadratverfahren 436–465 * Funktionenansatz. Das Ritzsche Verfahren 465–499 * Verfahren der schrittweisen Näherung 499–516 * Namen- und Sachverzeichnis 517–524.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 129–132 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 15. februar 1958.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

129. Lad p være et primtal af formen $4n + 3$. Vis da, at

$$\prod_{x=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \prod_{y=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (x^2 + y^2) \equiv \pm 1 \pmod{p},$$

og angiv en simpel regel til bestemmelse af fortegnet på højre side.

C. V. Jensen

130. La n være et naturlig tall og $u(n)$ det største oddetall (ulike tall) som går opp i n . Rekken

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n \cdot u(n)}$$

konvergerer absolutt og uniformt for alle x . Vis at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon som ikke i noe intervall har begrenset variasjon.

R. Tambs Lyche

131. Vis at

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} |n+1-2(i+j)| \binom{n-i}{j} = 2 \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \binom{n+1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} - (n+1).$$

R. Tambs Lyche

132. Bevis formelen

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{(i+1) \binom{2n}{i}} = (2n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2}.$$

W. Ljunggren

133. Beregn integralene

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh^{2n+2} x}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh^{2n+2} x}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{\cosh^{2n+2} x} dx.$$

134. Bevis formelen

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\binom{m}{i}^2}{\binom{n}{i}} = 2\sigma_m - \sigma_n, \quad m \geq n, \quad \sigma_r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}.$$

135. La A være ett av brennpunktene for et kjeglesnitt og s og t to faste tangenter. En bevegelig tangent u skjærer s i S og t i T . Vis at vinkelen SAT er konstant når u beveger seg.

136. To kjeglesnitt har ett brennpunkt A felles. La styrelinjene møtes i B og fellestangentene i C . Vis at vinkelen BAC er rett.

LØSNINGER

107. (Etter en idé av Viggo Brun.) Av den naturlige tallrekke stryker en først hvert annet tall, så bare de odde (ulike) tall står igjen; av den fremkomne tallrekke stryker en så hvert tredje tall, av den nye hvert fjerde, osv. Av den opprinnelige tallrekke står da igjen en tallrekke som begynner med

$$(1) \quad 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, \dots$$

La x være et naturlig tall og $\nu(x)$ antallet av tall $\leq x$ i tallrekken (1). Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\nu(x)^2} \geq \frac{1}{2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\nu(x)^2} \leq 1.$$

Det antas at $x/\nu(x)^2$ for voksende x nærmer seg en grense med en verdi av ca 0,79. Om mulig ønskes denne formodning bekreftet.

R. Tambs Lyche

En løsning av denne oppgave er allerede gitt i inneværende årgang, hefte 2, s. 114–116. Nedenfor bringer vi en annen løsning. Den bygger på oppgavene 115 og 116, som begge er løst i hefte 3, s. 159–161.

Redaksjonen er blitt gjort oppmerksom på at likheten i oppg. 115 er en *identitet*,

i den betydning at den også gjelder for en *endelig* sum og det tilsvarende endelige produkt:

$$1 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{4p} \prod_{k=1}^p \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^2 = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right).$$

Dette følger umiddelbart av Carlitz' løsning ved å bemerke at hans V_n nettopp er produktet på høyre side ovenfor.

Løsning: En endelig tallfølge a_m , $m=1, 2, \dots, n$, er definert ved

$$a_1 = n^2 \quad \text{og} \quad \frac{a_{m+1}}{n-m} = \left[\frac{a_m - 1}{n-m} \right].$$

Settes siste tallet a_n lik b_n , får en den gitte rekken

$$b_n = 1, 3, 7, 13, \dots, \quad \text{når} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Under utregningen av a_m fra $a_1 = n^2$ til $a_n = b_n$ blir det $n-1$ ganger subtrahert et 1-tall (skravert på fig. 1) og en rest r_m (svart på figuren), mens vedkommende divisor er $d_m = n-m$. På fig. 1 er $n=10$, og $r_m = 0, 2, 4, 0, 4, 0, 2, 0, 0$ for $m=1, \dots, 9$. Kvadratets hvite del svarer til $b_{10} = 79$.

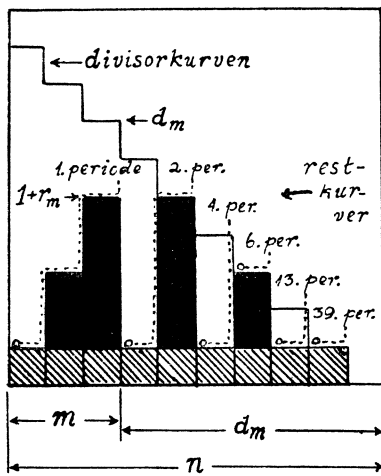


Fig. 1

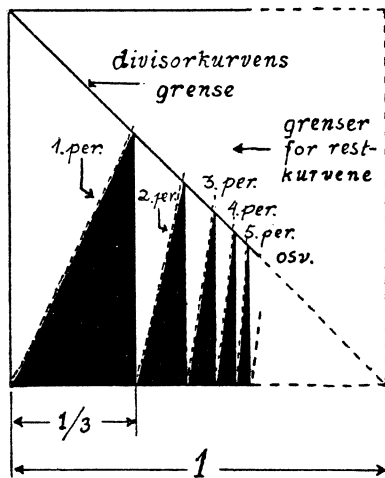


Fig. 2

Restene følger periodisk regelmessig etter hverandre. Første rest er alltid null, og i p -te periode danner restene en aritmetisk rekke med differens $2p$. Etter siste rest $r_m < d_m$ i p -te periode bestemmes neste rest $r_{m+1} < d_{m+1}$ av

$$d_{m+1} \leq r_m + 2p = h \cdot d_{m+1} + r_{m+1},$$

og r_{m+1} er første rest i $(p+h)$ -te periode. Når d_m avtar mot 1, ligger restenes regelmessighet skjult i at hver rest blir den eneste i sin periode, mens et stigende antall perioder, periodene mellom p og $p+h$, ikke blir representert. Men ved å velge n tilstrekkelig stor kan en, enten en dividerer planet med n^2 eller med $(n+1)^2$, få en figur så nær fig. 2 som en vil. For $n=\nu(x)$ er $b_n \leq x < b_{n+1}$. Av dette følger at $x/\nu(x)^2$ nærmer seg en grense når x vokser, og av fig. 2, hvor grensen for restkurven i p -te periode har vinkelkoeffisienten $2p$, utledes den søkte grensen som kvadratets hvite del,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\nu(x)^2} = 1 - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p} \prod_{k=1}^p \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

H. Killingbergtrø

121. Lad $a_1, a_2, \dots, a_n$ være en mengde indbyrdes forskjellige tal. Bevis følgende identiteter:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} (a_k - a_j)^{-1} = 0, \quad n \geq 2$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} a_k (a_k - a_j)^{-1} = 1, \quad n \geq 2$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n a_j^p \prod_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} a_k (a_k - a_j)^{-1} = 0, \quad n > p, \quad p \text{ hel og positiv.}$$

Ove J. Munch

Løsning: Er $P(x) = (a_1 - x) \dots (a_n - x)$, blir venstresidene i (1) og (3) henholdsvis

$$-\sum_{j=1}^n \frac{a_j^0}{P'(a_j)} \quad \text{og} \quad -a_1 \dots a_n \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{p-1}}{P'(a_j)},$$

som etter oppg. 68 (NMT 3 (1955), s. 173) er null for de gitte verdiene av p .

Dersom et a_j er null, følger (2) umiddelbart. Er alle $a_j \neq 0$, og er $Q(x) = xP(x)$, blir venstre side i (2) lik

$$\sum_{j=1}^n \frac{-a_1 \dots a_n}{a_j P'(a_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{-Q'(0)}{Q'(a_j)} - \frac{Q'(0)}{Q'(0)} + 1 = 1.$$

H. Killingbergtrø

Også løst av L. Carlitz, F. P. Dahlkild, Antti Issakainen, Arne Pleijel, Rolv Rasmussen og Ragnar J. Solvang.

122. Finn det volumet som begrenses av de tre enkappede hyperboloider

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad -x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

R. Tambs Lyche

Løsning: Det avgrensede volum kan deles i 48 like store deler, hvorav en er bestemt ved

$$(1) \quad x \geq y \geq z \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1 + z^2.$$

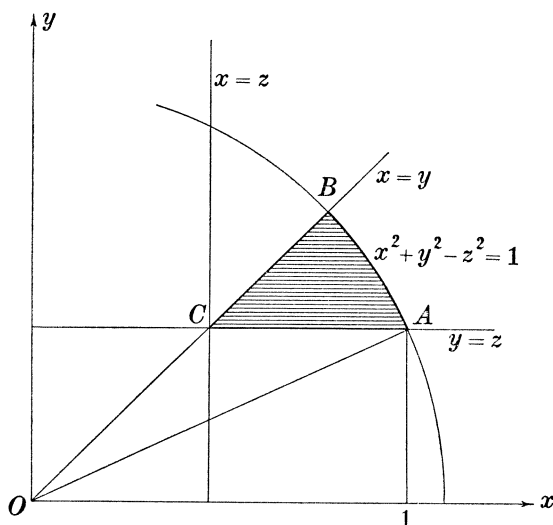


Fig. 3

Volumet beregnes så ved å betrakte et snitt av legmet (1) med konstant z -verdi (se fig. 3). Vi har $\angle BOA = \frac{\pi}{4} - \arctg z$, og $CA = 1 - z$. Følgelig blir

$$\text{areal}(ABC) = \frac{1}{2} \left((1+z^2) \left(\frac{\pi}{4} - \arctg z \right) - z(1-z) \right) = A(z),$$

og herav blir det søkte volum

$$48 \int_0^1 A(z) dz = 8 \ln 2.$$

Rolv Rasmussen

Også løst av J. J. Bisgaard, Antti Issakainen, H. Killingbergtrø og K. V. Rask.

DEN ANNEN INTERNORDISKE PRISOPPGAVE

Oppgaveteksten sto i NMT 4 (1956), s. 166–168. Resultatet av konkurransen ble kunngjort i NMT 5 (1957), s. 118.

Løsningene nedenfor bygger på innkomne besvarelser; oppgaveløserens navn er gitt ved hver oppgave. Besvarelsene er imidlertid noe forkortet og til dels bearbeidet. For enkelte oppgavers vedkommende var det selvsagt mange nesten likeverdige løsninger å velge mellom.

Johs. Østvold

1. (*Søren Poulsen*). Ved hjelp av sirklene med radius a og $b < a$ konstrueres ellipsepunktet P ved å trekke CP og EP . Sirkeltangenten i C skjærer x -aksen i F . Da er FP ellipsetangenten i P . Vi trekker $OQ \perp FP$.

Firkanten $OQCF$ kan innskri-
ves i en sirkel fordi de to rette
vinkler $\angle OQF$ og $\angle OCF$ spenner
over samme linjestykke OF . Av
dette får en $\angle COF = x = \angle CQF$.
Videre er $\angle PCF = \angle PEC = x$.
Da $\angle EPC = 90^\circ$ følger at $EPCQ$
kan innskrives i en sirkel med

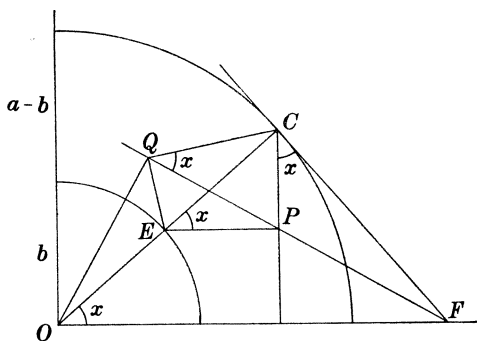


Fig. 1

$EC = a - b$ som diameter. Når
 x vokser fra 0° til 90° vil P bevege seg fra C til E langs nedre halvdel
av sirkelen over EC som diameter. Q vil bevege seg fra C til E over øvre
halvdel av samme sirkel. Ett sted vil punktene være diametralt mot-
satte. Den største verdi for PQ er altså $a - b$.

2. (*Erlend Østgaard*.) La projeksjonen av punktet P i planet ABC være P' . Da er $PA^2 + PB^2 + PC^2 > P'A^2 + P'B^2 + P'C^2$ når P ligger utenfor planet. Det er derfor tilstrekkelig å bevise påstanden for punktet P beliggende i planet ABC .

I dette plan legger vi et koordinatsystem med x -aksen langs AB og origo midt på AB . Med $A(-x_1, 0)$, $B(x_1, 0)$, $C(x_2, y_2)$ og $P(x_0, y_0)$ finner vi

$$3(PA^2 + PB^2 + PC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2) = (3x_0 - x_2)^2 + (3y_0 - y_2)^2 \geq 0.$$

Likhetstegnet gjelder for $x_0 = \frac{1}{3}x_2$, $y_0 = \frac{1}{3}y_2$, som gir skjæringspunktet for medianene i trekanten ABC .

3. (*Mogens Fredriksen.*) Gjennom A_1 trekkes A_1D parallell med CC_1 , altså $\triangle DBA_1 \sim \triangle C_1BC$ og $\triangle AC_1C_2 \sim \triangle ADA_1$. Dette gir

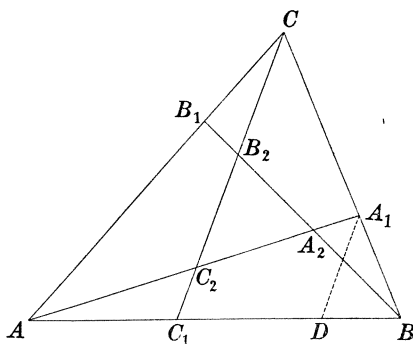


Fig. 2

$$BD = \frac{BA_1}{BC} \cdot BC_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{1+\gamma} \cdot AB,$$

$$AD = \frac{1+\gamma+\gamma\alpha}{(1+\alpha)(1+\gamma)} \cdot AB;$$

$$\frac{AC_2}{AA_1} = \frac{AC_1}{AD} = \frac{\gamma(1+\alpha)}{1+\gamma+\gamma\alpha}.$$

Videre blir

$$\frac{\triangle AA_1C}{\triangle ABC} = \frac{A_1C}{BC} = \frac{1}{1+\alpha},$$

$$\frac{\triangle AC_2C}{\triangle AA_1C} = \frac{AC_2}{AA_1} = \frac{\gamma(1+\alpha)}{1+\gamma+\gamma\alpha}.$$

Multiplikasjon av proporsjonene gir

$$\triangle AC_2C = \frac{\gamma}{1+\gamma+\gamma\alpha} \cdot \triangle ABC.$$

På tilsvarende måte fås

$$\triangle AA_2B = \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha\beta} \cdot \triangle ABC, \quad \triangle BB_2C = \frac{\beta}{1+\beta+\beta\gamma} \cdot \triangle ABC;$$

altså

$$\begin{aligned} \frac{\triangle A_2B_2C_2}{\triangle ABC} &= 1 - \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha\beta} - \frac{\beta}{1+\beta+\beta\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma+\gamma\alpha} \\ &= \frac{(\alpha\beta\gamma - 1)^2}{(1+\alpha+\alpha\beta)(1+\beta+\beta\gamma)(1+\gamma+\gamma\alpha)}. \end{aligned}$$

4. (*Tord Holmstedt.*)

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x};$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} > \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} > 0, \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$f(x) < \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \cos x} < \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cos x} = \frac{x}{2 \cos x},$$

altså $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

5. (*Hans Blichfeldt Hansen.*)

a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, eller $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - 1. \end{aligned}$$

b) Formelen $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ er riktig for $n=1$. Hvis den gjelder for $n=p$, vil den også gjelde for $n=p+1$, idet

$$\begin{aligned} a_{p+1} a_{p+3} - a_{p+2}^2 &= a_{p+1} (a_{p+2} + a_{p+1}) - a_{p+2}^2 \\ &= a_{p+1}^2 - a_{p+2} (a_{p+2} - a_{p+1}) = a_{p+1}^2 - a_p a_{p+2} = -(-1)^{p+1} = (-1)^{p+2}. \end{aligned}$$

Altså gjelder formelen for alle n .

c) $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, eller $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} - a_n^2 + (-1)^{n+1} = 0$, gir

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n + \sqrt{5a_n^2 - 4(-1)^{n+1}}),$$

idet minus foran roten må forkastes, da $a_{n+1} > a_n$. Altså

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5 + (-1)^n \cdot \frac{4}{a_n^2}} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}),$$

da $a_n \rightarrow \infty$ når $n \rightarrow \infty$.

6. (*Karen Tønder Johansen.*) Da n -kanten er konveks, ligger tre hjørner ikke på en rett linje. Det kan derfor alltid tegnes en firkant, hvis hjørner fremkommer ved å velge fire av n -kantens hjørner. Diagonalene i denne firkant er samtidig diagonaler i n -kanten. Deres skjæringspunkt er da et indre skjæringspunkt for to diagonaler. Omvendt ser en at ethvert indre diagonalskjæringspunkt bestemmes av to diagonaler som entydig bestemmer fire hjørner. Antallet av indre skjæringspunkter er derfor lik antall mulige kombinasjoner (uten gjentakelser) av 4 elementer blant n :

$$K_{n,4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \quad (n \geq 4).$$

Idet der i en n -kant kan trekkes $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonaler, ville disse skjære hverandre i $K_{\frac{1}{2}n(n-3),2}$ skjæringspunkter, dersom ingen av punktene falt sammen. Fra hvert hjørne går $n-3$ diagonaler. Det antall skjæringspunkter som faller sammen er da $K_{n-3,2}$ i hvert hjørne. Antall diagonal-skjæringspunkter utenfor n -kanten blir da

$$K_{\frac{1}{2}n(n-3),2} - nK_{n-3,2} - K_{n,4} = \frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}.$$

PRISTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Liksom föregående år anordnar Nordisk Matematisk Tidskrift en pristävling för svenska gymnasister. Var och en av de tre utgivande svenska föreningarna har ställt 50 kr. till disposition, varigenom ett första pris om 100 kr. och ett andra pris om 50 kr. kan utdelas.

För deltagande i tävlingen fordras, att lösningar insändas till minst fyra av nedanstående uppgifter. Gymnasister från övriga nordiska länder kunna delta utom tävlan.

Lösningar, åtföljda av en försäkran att de äro självständigt utarbetade, insändas senast den 1 mars 1958 till: Nordisk Matematisk Tidskrift, Matematiska Institutionen, Lund. Bifoga uppgift om namn, klass och läroverk.

1. Funktionen $s(x)$ är definierad på följande sätt:

$$\begin{aligned} s(x) &= +1 & \text{då } x > 0, \\ s(x) &= 0 & \text{då } x = 0, \\ s(x) &= -1 & \text{då } x < 0. \end{aligned}$$

Visa, att $s(a) - s(b) = s(a-b) \cdot [1 - s(a)s(b)]$.

2. I triangeln ABC är vinkeln $A = 3\alpha$, vinkeln $B = 3\beta$ och vinkeln $C = 3\gamma$. Inuti triangeln väljes en punkt P så att vinkeln $PAB = \alpha$ och vinkeln $PBA = \beta$. På analogt sätt väljas punkterna Q och R . En allmän sats säger då, att triangeln PQR är liksidig. Bevisa denna sats i det enklare fallet då triangeln ABC är likbent.

3. I en fyrhörning bilda vinklarna i ordning tagna aritmetisk serie och sidorna i ordning geometrisk serie. Bestäm seriernas differens resp. kvot.

4. Kurvan $y = x^2$ samt linjen $y = a$ ($a > 0$) är givna. På kurvan väljes en punkt $P_0(x_0, y_0)$ med $x_0 > 0$ och $y_0 > a$. Tangenten drages i denna

punkt og treffer linjen $y=a$ i punkten Q_0 . Genom Q_0 drages en vertikal linje, som treffer kurvan i punkten $P_1(x_1, y_1)$. Konstruktionen opprepas, og på dette sätt framkommer en serie punkter $P_0, P_1, P_2, \dots$ med x -koordinater $x_0, x_1, x_2, \dots$. Visa, att x_n går mot ett gränsvärde och angiv detta.

5. Visa, att för $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gäller $\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}$.

6. Summan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ betecknas med s_n . Visa, att talen s_n för $n > 1$ aldrig kan vara heltal.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

Oppgavekonkurranse for 1958, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Den beste samling besvarelser vil bli tildelt H.K.H. Kronprins Haralds premie på 200 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med. Oppgavene faller inn under reallinjens pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som råd er. Det er ikke nødvendig å ha svart på alle 6 oppgavene.

En sender løsninger til rektor Kay Piene, Skjerstadvn. 2 A, Smestad, Oslo, innen 1.5.1958, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

1. Som kjent gjelder følgende setninger: 1° Dersom a og b er naturlige tall og $c=ab$, så er også c et naturlig tall. 2° Et hvert naturlig tall kan skrives som et produkt av primtall og det bare på en måte.

La tall i det følgende bety tall av formen $4n+1$, der n er et naturlig tall. Gjelder da setningene 1° og 2° fortsatt? Gjelder den omvendte setning til 1°? Finn eksempler.

2. Bevis identiteten

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x(x+1) \dots (x+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \equiv \frac{(x+1)(x+2) \dots (x+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

3. I en trekant ABC er gitt $BC=a$, $AC=b$ og $\angle ACB=v$. Normalen på midten av AB skjærer BC i punktet N . Finn CN uttrykt ved a , b og v .

Siden AC ligger fast. Finn det geometriske sted for N når v varierer, mens BC har fast lengde. Hvorfor blir midtnormalen tangent til det geometriske sted?

4. I xy -planet ligger et kvadrat med hjørner $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 6)$ og $(0, 6)$, som er grunnflate i en terning. Et plan gjennom origo skjærer de to nærmeste sidekantene henholdsvis 2 og 3 lengdeenheter over xy -planet.

Finn koordinatene for trasene til snitt-figures sider i xy -planet, og finn ligningen for trasen til planet i xy -planet. Finn vinkelen mellom snittplanet og xy -planet.

Planet svinger om trasen. Hvordan endrer snittfiguren seg?

5. Vi sier at et naturlig tall med sifferne $a, b, c, \dots$ (fra venstre) har voksende siffer når $a < b < c < \dots$. Videre forutsetter vi at et telefonnummers første siffer ikke er 0.

a) Hvor mange firsifrete telefonnummer har ett siffer som er lik 7?

b) Hvor mange firsifrete telefonnummer har minst ett siffer som er lik 7?

c) Hvor mange to-, tre- og firsifrete telefonnummer har voksende siffer?

d) Besvar spørsmålene a) og b) for alle sekssifrete telefonnummer.

e) Et sekssifret telefonnummer kan deles opp i tre tosifrete tall. (469688 i 46 — 96 — 88.) Dersom disse tre tallene vokser, sier vi at tallene har voksende parsiffer. Hvor mange sekssifrete telefonnummer har voksende parsiffer?

f) Hvor mange 8-, 9- og 10-sifrete tall har voksende siffer?

6. På et vannrett plan α ligger tre kuler med sentrene A, B og C og radiene 1, 2 og 3 slik at de rører hverandre to og to. Prosjeksjonene av punktene A, B og C på planet er A', B' og C' .

Finn sidene i trekanten $A'B'C'$ og volumet av det legemet som avgrenses av trekantene ABC , $A'B'C'$ og trapesene $A'ABB'$, $B'BCC'$ og $C'CAA'$.

Finn cosinus til vinkelen mellom planet α og planet gjennom sentrene i kulene.

Er oppgaven løsbar dersom radiene er vilkårlige, lik a, b og c ?

SUMMARY IN ENGLISH

VIGGO BRUN: *Carl Størmer in memoriam.* (Norwegian.)

An obituary on professor Carl Størmer, who died August 13, 1957.

LENNART CARLSON: *A mathematical model for highway traffic.* (Swedish.)

(The formulas etc. referred to are found on pp. 176–180.)

The “public relation” committee of the Swedish Mathematical Society (Svenska Matematikersamfundets Kontaktnämnd) has asked the author to undertake a mathematical investigation of highway traffic. The following assumptions are made:

An average of a vehicles per hour is passing a fixed point of a two-lane road. Each vehicle X keeps an “ideal speed” x , when not waiting to pass a slower vehicle Y of speed y . The percentage of vehicles with ideal speed $\leq x$ is given by a distribution function $H(x)$. When X passes Y , it travels in the other lane a distance $\lambda = cx/(x-y)$, after having waited behind Y (on the average) a distance $s(\lambda)$ with speed y : the traffic is assumed so *sparse* that Y keeps its ideal speed during this period (no queues are formed). This assumption is inessential but simplifies the formulas.

Let $f(x)$ denote the *average speed* of a vehicle X . Then $\varphi(x) = 1/f(x)$ satisfies the integral equation

$$1 = x\varphi(x) - a \int_0^x s(\lambda)(\varphi(y) - \varphi(x))(x-y) \frac{dH(y)}{y}.$$

This is specialized to the case of $s(\lambda) = \gamma\lambda$ and the solution (3) is derived. It turns out that there is an upper bound g for the average speed $f(x)$ when $x \rightarrow \infty$.

The traffic flow F (total transport of vehicles passing a fixed point per time unit), and the number O of passings of other vehicles per unit of time and distance, are given by formulas (5)–(6). Table 1 illustrates the case $\gamma = 3$, $c = 0.1$ km, and only two ideal speeds (given in km/hour), both with the same frequency. The column f shows the average speed of the faster vehicles.—Table 2 is constructed similarly, but under the assumption that $\gamma = \frac{3}{2}a$.—Fig 1 shows $f(x)$ for the continuous distribution given by formula (7).

H. H. HANSEN: *The congruence theorems of elementary geometry.* (Danish.)

With references to Euclid and Hilbert, it is stressed that the development of congruence relations for triangles should not be a purpose in itself, but only a useful tool in geometric considerations.

J. F. STEFFENSEN: *Contribution to a discussion*. (Danish.)

In connection with the discussion about introducing probability theory and statistics in the Danish grammar schools, the author outlines his views as to how the elementary probability concept, with the laws of addition and multiplication, should be presented.

FOLKE ERIKSSON: *More about representation systems*. (Swedish.)

In an earlier paper in NMT (this volume, pp. 91–98), Carl-Erik Fröberg concluded that the classical methods of “odd divisors” (Sainte Laguë) and of “greatest excess” are superior to all other proportional election systems. In his opinion, the latter method has an advantage over the former one.

The author of the present paper joins Fröberg’s general conclusion, but he prefers the former method, which in a certain sense maximizes the “mutual justice” between any two parties. Some disadvantages of the method of greatest excess are illustrated by examples.

CARL-ERIK FRÖBERG: *Reply*. (Swedish.)

A few comments on the above-mentioned paper by Folke Eriksson.

INNHOLDSFORTEGNELSE

VIGGO BRUN: Carl Størmer in memoriam.....	169-175
LENNART CARLSON: En matematisk modell för landsvägstrafik.....	176-180
FOLKE ERIKSSON: Mera om valmetoder.....	187-190
DAVID FOG: Om sandsynlighedsregning med statistik i det danske gymnasium.....	121-135
CARL-ERIK FRÖBERG: Proportionella valmetoder.....	91- 98
CARL-ERIK FRÖBERG: Replik.....	191
H. H. HANSEN: Om elementærgeometriens kongruenssætninger.....	181-183
TORE HERLESTAM: Något om differential-differensekvationer.....	29- 36
ODDMUND KOLBERG: Et bevis for Dixons formel.....	87- 90
JOHANNES LOHNE: Anskuelig fremstilling av summeformler, II.....	136-138
E. J. NYSTRÖM: Om ellipsografer.....	19- 28
KAY PIENE: Matematikkens plass i amerikansk skole og lærerutdanning, I, II.....	5-18, 65- 83
ERNST S. SELMER: Apropos kubens fordobling.....	84- 86
J. F. STEFFENSEN: Et diskussionsindlæg.....	184-186
R. TAMBS LYCHE: En monotont voksende, kontinuerlig funksjon som ikke er deriverbar i noe intervall.....	139-142

Bokmeldinger

ROSS A. BEAUMONT—RICHARD W. BALL: Introduction to modern algebra and matrix theory (OLAV ARNFINN LAUDAL).....	99
EDWIN F. BECKENBACH: Modern mathematics for the engineer (CARL-ERIK FRÖBERG).....	143
E. BODEWIG: Matrix calculus (HENRY JENSEN).....	37
R. CREIGHTON BUCK: Advanced calculus (HAAKON WAADELAND).....	144
JOHN CHARLES BURKILL: The theory of ordinary differential equations (K. RANDEBACH).....	145
E. J. DIJKSTERHUIS: Archimedes (OLAF SCHMIDT).....	146
ULF GRENANDER—MURRAY ROSENBLATT: Statistical analysis of stationary time series (HERDIS THORÉN AMUNDSEN).....	192
WOLFGANG GRÖBNER: Matrizenrechnung (TORE HERLESTAM).....	39
WOLFGANG HAACK: Darstellende Geometrie, III (E. J. NYSTRÖM).....	100
HELMUT HASSE: Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung (JOHN OLAV STUBBAN).....	101
DAVID HILBERT: Grundlagen der Geometrie (H. TORNEHAVE).....	102
JOS. E. HOFMANN: Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik (VIGGO BRUN).....	194
Insights into modern mathematics (KAY PIENE).....	195

A. KHINTCHINE: Kettenbrüche (ODDMUND KOLBERG).....	103
KONRAD KNOPP: Infinite sequences and series (KÅRE DALEN).....	40
POUL MOGENSEN: Differential- og Integralregning (DAVID FOG).....	41
IVAN NIVEN: Irrational numbers (W. LJUNGGREN).....	103
E. M. PATTERSON: Topology (K. E. AUBERT).....	195
HALFRID STENMARK: Matematikundervisningen i realskolan och mot- svarande skolformer (REGNAR NORGIL).....	148
B. L. VAN DER WAERDEN: Mathematische Statistik (ERLING SVERDRUP)	104
R. W. WEITZENBÖCK: Der vierdimensionale Raum (LAURI PIMIÄ).....	42
EDUARD WINTER: Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaf- ten 1746-1766 (VIGGO BRUN).....	107
Mottatte bøker	44, 109, 149, 197
Oppgaver	
Oppgaver til løsning.....	48, 112, 156, 202
Løsninger.....	49, 113, 157, 203
Eksamensoppgaver	162
Nasjonale prisoppgaver for gymnasister.....	118, 161, 210
Internordisk prisoppgave.....	118, 207
Kronikk.....	56
Summary in English.....	64, 119, 168, 213