

OM SANDSYNLIGHEDSREGNING MED STATISTIK I DET DANSKE GYMNASIUM

DAVID FOG

Ved et af den danske matematiklærerforenings møder i oktober 1956 fandt der en forhandling sted om emnet: Om muligheden af at indføre sandsynlighedsregning, herunder statistikkens elementer, i gymnasieundervisningen. Som første og anden indleder fungerede henholdsvis ovennævnte og professor, dr. phil. Mogens Pihl. Da vi i alle principielle synspunkter var helt på samme linie, har vi ment, at det af os fremførte bedst kom til at virke som en helhed, når visse hovedpunkter fra den sidste indledning blev indarbejdet i den første. Det nedenstående er resultatet heraf. For et initiativ til den nævnte fremgangsmåde vil jeg gerne her bringe prof. Pihl en hjertelig tak.

Sandsynlighedsregningen og den dermed forbundne matematiske statistik hører til de forholdsvis unge skud på matematikkens ærværdige stamme. Sandsynlighedsregningen hidrører som bekendt oprindelig fra interessen for hasardspil og fremstod i det 17. århundrede i tilknytning til navne som Pascal, Fermat, Laplace m. fl.; men den kraftige udvikling i forbindelse med skabelsen af den matematiske statistik satte først ind omkring det sidste århundredskifte, og den har fortsat med stormskridt siden, stimuleret af stadig større og større anvendelsesmuligheder. I dag er sandsynlighedsregning med statistik en omfattende videnskabsgren og et uundværligt hjælpemiddel for lægevidenskab, veterinærvidenskab, landbrugsvidenskab såvel som inden for mange af teknikens vigtigste grene. Det er derfor naturligt, at man fra skolens side spørger: Er der her noget, som vi bør drage ind i vor undervisning? Det er dette spørgsmål, som vi i dag skal søge belyst og besvaret.

Jeg skal i det følgende omtale en række punkter, som jeg mener, en eventuel skoleundervisning i sandsynlighedsregning med statistik naturligt bør omfatte eller i hvert fald berøre. Jeg tager dem i den rækkefølge, jeg personligt ville foretrække. Den svarer nogenlunde til en monoton stigning i sværhedsgrad og — som en uundgåelig praktisk følge deraf — til en monotont aftagende mulighed for præcis fremstilling. Ved valget af disse punkter har jeg dels søgt at tage hensyn til det matematikpen-

sum, den nye undervisning skal udgøre en del af, dels til anvendelsesmulighederne, både inden for skolen — d. v. s. væsentlig inden for fysik- og kemiundervisningen — og senere ved de højere læreanstalter. Jeg betragter imidlertid ikke min opgave som begrænset til en ren og skær opremsning af en sådan række punkter; jeg vil til fremførelsen af disse punkter knytte diverse almindelige overvejelser, der gerne skulle tjene til dybere forståelse af det stof, det drejer sig om.

1. Det elementære sandsynlighedsbegreb, svarende til den historiske begyndelse. Et eksperiment antages at kunne få et vist antal, N , ligeberettigede udfald (ordet »ligeberettigede« defineres ikke, specielt ikke som »lige sandsynlige«!). Ved n af disse udfald, $0 \leq n \leq N$, indtræffer en begivenhed A , ved de andre ikke. Sandsynligheden $S(A)$ for A 's indtræffen ved et eksperiment af den ovennævnte art defineres da som n/N , d. v. s. som forholdet mellem antallet af »gunstige« udfald og det samlede antal af mulige udfald. Man har altid $0 \leq S(A) \leq 1$. Dersom $S(A) = 0$, er begivenheden umulig; for $S(A) = 1$ er den sikker.

Som illustrationer kan betragtes plat og krone, terningkast, kortfordelinger. Sandsynligheden for at få krone ved kast med en mønt er $\frac{1}{2}$; for at få en sekser med en terning er den $\frac{1}{6}$. Lad os som et ikke helt trivielt eksempel finde sandsynligheden for, at en bestemt person ved tilfældig ligelig fordeling af 52 kort mellem 4 personer får 13 hjertere på hånden. Da antallet af forskellige »hænder« er $\binom{52}{13}$, men kun een af disse er gunstig, bliver svaret $1/\binom{52}{13} \approx 1/(6,35 \cdot 10^{11})$. Det ses, hvorledes man herved får tilknytning til skolens kombinatorik, som hidtil har stået så temmelig isoleret.

Lad $\bar{A}$ betegne den til A »komplementære« begivenhed, d. v. s. den begivenhed, at A ikke indtræffer. Det er da klart, at

$$(1) \quad S(A) + S(\bar{A}) = 1.$$

2. Sandsynligheders addition og multiplikation. Vi betragter et eksperiment med N ligeberettigede udfald. Lad A og B være to begivenheder med tilknytning til dette eksperiment. Hver af de sammensatte begivenheder (A, B) , $(A, \bar{B})$, $(\bar{A}, B)$ og $(\bar{A}, \bar{B})$ antages at indtræffe i forbindelse med en bestemt del af de N udfald og optræder derfor med en bestemt sandsynlighed. Da gælder sætningen om sandsynligheders addition:

$$(2) \quad S(A \text{ eller } B) = S(A) + S(B) - S(A, B).$$

Dersom A og B udelukker hinanden, altså $S(A, B) = 0$, reduceres (2) til

$$(2a) \quad S(A \text{ eller } B) = S(A) + S(B) .$$

I denne form kan sætningen umiddelbart udvides til flere end to begivenheder. For en række begivenheder $A, B, \dots, K$, af hvilke en — og kun een — indtræffer ved hvert forsøg, fås herved

$$(3) \quad S(A) + S(B) + \dots + S(K) = 1 .$$

Dette kan opfattes som en udvidelse af (1).

Dersom begivenhederne A og B er mulige ($S(A) > 0$, $S(B) > 0$), kan man tale om *betingede sandsynligheder*. Med den betingede sandsynlighed $S(B|A)$ menes sandsynligheden for B blandt de udfald, hvor A indtræffer, eller, som man også kort siger, »sandsynligheden for B for indtruffet A «. Analogt kan man indføre $S(A|B)$. Herom gælder *sætningen om sandsynligheders multiplikation*:

$$(4) \quad S(A, B) = S(A) \cdot S(B|A) = S(B) \cdot S(A|B) .$$

Dersom A og B er *uafhængige*, d. v. s. $S(B|A) = S(B)$ og derfor også $S(A|B) = S(A)$, reduceres (4) til

$$(4a) \quad S(A, B) = S(A) \cdot S(B) ,$$

der omvendt også er tilstrækkelig betingelse for uafhængigheden. Sætning (4a) udvides let til flere, indbyrdes uafhængige begivenheder.

De anførte sætninger kan let udledes direkte af sandsynlighedsdefinitionen. Som en anvendelse af multiplikationssætningen kan vi atter betragte kortfordelingen fra 1. Sandsynligheden for, at det første af de 13 kort er en hjerter, er $\frac{13}{52}$. Sandsynligheden for, at det næste derefter også er en hjerter, er $\frac{12}{51}$, idet der nu er 12 gunstige muligheder blandt 51, o. s. v. Svaret bliver da

$$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \dots \cdot \frac{2}{41} \cdot \frac{1}{40} ,$$

stemmende med før.

Som et andet eksempel kan vi bestemme sandsynligheden for i et kast med 6 terninger at få mindst een sekser. Den tilsvarende komplementære begivenhed, slet ingen seksere at få, har sandsynligheden $(\frac{5}{6})^6$, og den søgte sandsynlighed bliver derfor

$$1 - (\frac{5}{6})^6 \approx 66,5\% .$$

3. Diskontinuert sandsynlighedsfordeling. Stokastisk variabel. Lad de mulige værdier for en variabel x være $x_1, x_2, \dots, x_n$ ¹ med tilhørende sandsynligheder $p_1, p_2, \dots, p_n$, hvis sum ifølge (3) er lig med 1. Der foreligger da, hvad man kalder en *diskontinuert sandsynlighedsfordeling*, og x

¹ En udvidelse til tællelig uendelig mange værdier kommer vi her ikke ind på.

betegnes som en *stokastisk variabel*. En simpel illustration har man i antallet af øjne ved et terningkast. Vi vil nærmere omtale et vigtigt eksempel.

I en række på n indbyrdes uafhængige forsøg antages hvert forsøg at have sandsynligheden p for at »lykkes« og $q = 1 - p$ for at »mislykkes«. Vi betragter den stokastiske variabel x , som angiver antallet af vellykkede forsøg blandt de n . Værdierne, som x kan antage, er $0, 1, 2, \dots, n$; vi søger den tilhørende sandsynlighedsfordeling. Sandsynligheden for, at i bestemte forsøg (med bestemte numre i rækken) lykkes, medens de andre $n - i$ mislykkes, er ifølge multiplikationssætningen $p^i q^{n-i}$. Da de i forsøgsnumre kan udtages på $\binom{n}{i}$ forskellige måder, bliver sandsynligheden p_i for, at i (og kun i) vilkårlige forsøg lykkes, ifølge additionsætningen

$$(5) \quad p_i = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}.$$

Lader man her i gennemløbe værdierne $0, 1, 2, \dots, n$, fremstiller (5) leddene i binomialudviklingen for $(q + p)^n$, og den betragtede sandsynlighedsfordeling betegnes i overensstemmelse hermed som *binomialfordelingen*. At summen af sandsynlighederne p_i er lig med 1, følger her direkte af binomialformlen. Det ses, at vi på ny får tilknytning til det nuværende artiumspensum.

Et særlig simpelt eksempel på en binomialfordeling fås for $p = q = \frac{1}{2}$ (plat og krone). Her bliver

$$(6) \quad p_i = \binom{n}{i} \frac{1}{2^n}.$$

4. Middelværdi og spredning. Disse begreber indføres for den i begyndelsen af 3 omtalte stokastiske variabel x ved definitionerne

$$(7) \quad m\{x\} = \sum_i x_i p_i$$

og, idet $m\{x\}$ for kortheds skyld betegnes μ ,

$$(8) \quad \sigma\{x\} = \sqrt{\sum_i (x_i - \mu)^2 p_i}.$$

Spredningskvadratet $\sigma^2\{x\}$ betegnes også som variansen. Naturligvis må i gymnasieundervisningen disse definitioner forberedes og kommenteres på passende måde.

For binomialfordelingen kan man vise, at

$$(9) \quad m\{x\} = np, \quad \sigma^2\{x\} = npq.$$

Vi vil her nøjes med kort at gennemgå et bevis for den første formel (9). Af identiteten (binomialformlen)

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = (q+p)^n,$$

der jo gælder for alle p og q , fås ved differentiation med hensyn til p (idet q holdes konstant)

$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} p^{i-1} q^{n-i} = n(q+p)^{n-1}.$$

Multipliseres her på begge sider af lighedstegnet med p , og indsættes på højre side $q+p=1$, fås

$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = np,$$

hvormed beviset er ført. Den anden formel (9) kan vises ved endnu en differentiation, efterfulgt af nogle omskrivninger.

Begrebet *relativ hyppighed*, $\frac{x}{n}$, kan umiddelbart indføres. Ud fra (9) findes

$$(10) \quad m\left\{\frac{x}{n}\right\} = p, \quad \sigma^2\left\{\frac{x}{n}\right\} = \frac{pq}{n}.$$

5. Tchebycheffs ulighed. Vi vil nu omtale en vigtig formel, som sammenkæder begreberne middelværdi og spredning. Lad som foran x være en stokastisk variabel, der antager værdierne $x_1, x_2, \dots, x_n$ med sandsynlighederne $p_1, p_2, \dots, p_n$. Middelværdien kaldes μ og spredningen σ . Idet ε betegner et vilkårligt positivt tal, har vi da

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i \geq \sum_{|x_i - \mu| \geq \varepsilon} (x_i - \mu)^2 p_i,$$

idet tegnet $\geq$ svarer til, at vi har udeladt de eventuelle x -værdier i intervallet $\mu - \varepsilon < x < \mu + \varepsilon$. I summen til højre er $(x_i - \mu)^2 \geq \varepsilon^2$, og vi får derfor

$$\sigma^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{|x_i - \mu| \geq \varepsilon} p_i = \varepsilon^2 S(|x - \mu| \geq \varepsilon),$$

altså

$$(11) \quad S(|x - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Overgang til den komplementære sandsynlighed giver

$$(12) \quad S(|x - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Formlen (11) — eller den dermed ækvivalente (12) — betegnes som *Tchebycheffs ulighed*. Som en første anvendelse af den vil vi betragte den relative hyppighed $\frac{x}{n}$ i 4. Indføres udtrykkene (10) i (12), fås

$$S\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{pq}{n};$$

altså vil, når ε fastholdes,

$$(13) \quad S\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1 \text{ for } n \rightarrow \infty.$$

Man siger, at $\frac{x}{n}$ *konvergerer stokastisk* mod p . Vi skal i 7 nærmere kommentere indholdet af dette begreb.

6. Todimensionale fordelinger. Lad (x, y) være et stokastisk variabelpar, hvor x kan antage værdierne $x_1, x_2, \dots, x_m$ og y værdierne $y_1, y_2, \dots, y_n$. Sandsynligheden for, at $(x, y) = (x_i, y_j)$, kaldes p_{ij} , hvor ifølge (3)

$$\sum_{ij} p_{ij} = 1.$$

Herved er bestemt en *todimensional diskontinuert sandsynlighedsfordeling*.

De i tabel 1 og 2 tykt indrammede rektangler fremstiller to eksempler på sådanne fordelinger, hvor x og y hvert sted kan antage henholdsvis 3 og 2 værdier. Tallene i rektanglernes felter angiver sandsynlighederne p_{ij} i %. Det ses, at inden for hvert rektangel er summen af de 6 sandsynlighedsprocenter lig 100.

$y \backslash x$	1	3	4	Sum
1	12	4	24	40
3	18	6	36	60
Sum	30	10	60	100

Tabel 1

$y \backslash x$	1	3	4	Sum
1	26	2	12	40
3	4	8	48	60
Sum	30	10	60	100

Tabel 2

Under rektanglerne er anbragt en ekstra række, hvis tal angiver summen af tallene i den tilhørende søjle. Disse sumtal giver de samlede sandsynligheder for, at x antager værdierne 1, 3 og 4. De fremstiller, hvad man kalder *randfordelingen* for x . På lignende måde findes til højre for hvert rektangel en søjle, som fremstiller randfordelingen for y . Eksemplerne er valgt således, at de to todimensionale fordelinger, som jo er forskellige, har ens randfordelinger. Summen af tallene i hver af disse randfordelinger er, som den jo skal være, 100.

I almindelighed bestemmes sandsynlighederne p_i og p_j i de to randfordelinger for henholdsvis x og y ved

$$(14) \quad p_i = \sum_j p_{ij}, \quad p_j = \sum_i p_{ij}.$$

En prik betegner her summation efter den variabel, hvis mærketal den erstatter.

Idet middelværdien af $x + y$ defineres i naturlig forlængelse af (7), fås

$$m\{x+y\} = \sum_{ij} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{ij} x_i p_{ij} + \sum_{ij} y_j p_{ij} = \sum_i x_i p_i + \sum_j y_j p_j,$$

altså

$$(15) \quad m\{x+y\} = m\{x\} + m\{y\}.$$

De variable x og y siges at være *stokastisk uafhængige*, når det for alle forekommende mærketal i og j gælder, at begivenhederne $x = x_i$ og $y = y_j$ er uafhængige, altså når (se (4a))

$$(16) \quad p_{ij} = p_i \cdot p_j.$$

Dette er opfyldt for fordelingen i tabel 1, men ikke i tabel 2. Det følger af (16), at når x og y er stokastisk uafhængige, er den todimensionale fordeling fuldstændig fastlagt ved sine randfordelinger.

Vi forudsætter nu, at x og y er stokastisk uafhængige, og kan da udlede en til (15) svarende formel for spredningen på $x + y$. Idet middelværdierne for x og y kort betegnes henholdsvis μ_1 og μ_2 , fås

$$\begin{aligned} \sigma^2\{x+y\} &= \sum_{ij} (x_i + y_j - (\mu_1 + \mu_2))^2 p_{ij} \\ &= \sum_{ij} (x_i - \mu_1)^2 p_{ij} + \sum_{ij} (y_j - \mu_2)^2 p_{ij} + 2 \sum_{ij} (x_i - \mu_1)(y_j - \mu_2) p_{ij}. \end{aligned}$$

Indføres (16) i sidste led på højre side, fås ved omskrivning

$$\sigma^2\{x+y\} = \sum_i (x_i - \mu_1)^2 p_i + \sum_j (y_j - \mu_2)^2 p_j + 2 \sum_i (x_i - \mu_1) p_i \cdot \sum_j (y_j - \mu_2) p_j.$$

I tredje led på højre side er begge summer lig 0, og vi får derfor

$$(17) \quad \sigma^2\{x+y\} = \sigma^2\{x\} + \sigma^2\{y\}.$$

Det er let at forstå, hvorledes det ovenstående kan udvides til dimensionstal større end 2. Dersom $x_1, x_2, \dots, x_n$ er n stokastiske variable, får man, svarende til (15):

$$(18) \quad m\{x_1+x_2+\dots+x_n\} = m\{x_1\} + m\{x_2\} + \dots + m\{x_n\}.$$

Er yderligere x 'erne indbyrdes stokastisk uafhængige, fås som udvidelse af (17):

$$(19) \quad \sigma^2\{x_1+x_2+\dots+x_n\} = \sigma^2\{x_1\} + \sigma^2\{x_2\} + \dots + \sigma^2\{x_n\}.$$

7. Gentagelser. De store tals lov. Lad x være en stokastisk variabel, der har middelværdi μ og spredning σ . For tilnærmelsesvis at bestemme μ tænker vi os foretaget en serie på n indbyrdes uafhængige forsøg; resultaterne kaldes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tænker vi på samlingen af alle mulige forsøgsserier af denne art, kan vi opfatte $x_1, x_2, \dots, x_n$ som n indbyrdes uafhængige stokastiske variable, der alle har middelværdi μ og spredning σ . Af (18) og (19) får vi da

$$m\{x_1+x_2+\dots+x_n\} = n\mu, \quad \sigma^2\{x_1+x_2+\dots+x_n\} = n\sigma^2.$$

For gennemsnittet $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$ finder vi derved de to vigtige formler

$$(20) \quad m\{\bar{x}\} = \mu, \quad \sigma^2\{\bar{x}\} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Anvender vi nu Tchebycheffs ulighed (12) på $\bar{x}$, fås

$$S(|\bar{x} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Heraf ses, at for fastholdt ε vil

$$(21) \quad S(|\bar{x} - \mu| < \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Gennemsnittet $\bar{x}$ konvergerer altså stokastisk mod middelværdien μ , når $n \rightarrow \infty$. Denne sætning kaldes *de store tals lov*.

Da $\sigma\{\bar{x}\}$ ifølge den sidste formel (20) går mod 0 for $n \rightarrow \infty$, kunne det være fristende at tro, at for et ubegrænset voksende antal gentagelser ($n \rightarrow \infty$) ville $\bar{x} \rightarrow \mu$, altså at man for ethvert fast $\varepsilon > 0$ ville have

$$(22) \quad |\bar{x} - \mu| < \varepsilon$$

for alle n større end et passende N . Det er imidlertid let at indse, at dette ikke kan finde sted; thi f. eks. vil jo en ubegrænset forsøgsrække

med alle $x_i - \mu$ større end ε være teoretisk mulig, omend yderst usandsynlig. Derimod viser (21), at uligheden (22) vil gælde »med en til vished grænsende sandsynlighed«, når $n \rightarrow \infty$. Det er dette sidste, som er indholdet af den stokastiske konvergens.

I de store tals lov er specielt indeholdt den tidligere formel (13). Lad nemlig de variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ være knyttet til en serie på n indbyrdes uafhængige forsøg, der hvert har sandsynligheden p for at lykkes, og lad x_i antage værdien 1 eller 0, efter som det i 'te forsøg lykkes eller ej. Da vil $\bar{x}$ angive den relative hyppighed for vellykkede forsøg i serien, og (21) går over i (13).

Forskellen mellem almindelig og stokastisk konvergens kan måske synes subtil; ikke desto mindre er den teoretisk set ganske principiel og klar. I praksis fortoner forskellen sig imidlertid: Ud fra (21) vil man praktisk slutte, at (22) er opfyldt for store n ; thi en begivenhed, hvis sandsynlighed går mod 1 for $n \rightarrow \infty$, må praktisk set betragtes som sikker, når n er stor.

Inden vi går videre, vil vi lige forsøge at gøre vort bo op. Punkterne 1-4 kan i gymnasiet behandles helt eksakt — i samme forstand som det øvrige matematikpensum. Det samme gælder om punkt 6, når man er rede til at tage lidt let på overgangen fra 2 til n dimensioner. Punkterne 5 og 7 går sådan set heller ikke ud over, hvad en flink gymnasiast kan bringes til at forstå; men det deri indeholdte stof er dog sikkert for svært til, at man kan forvente det tilegnet i sædvanlig forstand.

8. Udvidelse af sandsynlighedsbegrebet. Den under 1 nævnte klassiske sandsynlighedsdefinition har meget begrænset anvendelse. Man kommer let ud for situationer, hvor antallet af forskellige udfald er uendelig stort, eller hvor udfaldene, selv om deres antal forbliver endeligt, ikke kan anses for ligeberettigede. Hvis derfor ikke sandsynlighedsregningen skal begrænses til et meget snævert område, må selve sandsynlighedsbegrebet udvides. Lad os stille følgende to spørgsmål:

a) Hvad er sandsynligheden for at ramme et bestemt mål med et skud fra en bestemt kanon?

b) Hvad er sandsynligheden for et folketingsvalg inden 1. april 1957?

Begge spørgsmål lyder da ganske fornuftige. Lad os begynde med a). Hvordan skulle vi finde den omhandlede sandsynlighed? Benyttelse af den oprindelige definition med ligeberettigede udfald er udelukket; men der er vel ingen tvivl om, hvordan vi kunne bære os ad? Vi kunne affyre et stort antal, n , skud og tælle antallet x af træffere. Dersom vi tør benytte, hvad der foran er sagt om stokastisk konvergens, vil vi kunne slutte, at x/n er en tilnærmet værdi for den søgte sandsynlighed.

Ved spørgsmål b) ligger sagen helt anderledes. Hvis f. eks. en person mener, at svaret er 30%, medens en anden holder på 70%, er disse tal umulige at kontrollere — endda selv om vi venter til 1. april. Vi kan ikke foretage en række forsøg som under a). Tallene er derfor meningsløse. De kan ikke bruges til at bygge videnskab på, højst som grundlag for indgåelse af væddemål.

For at udvide sandsynlighedsregningen går vi derfor således frem: Vi betragter kun eksperimenter, der kan gentages et vilkårligt antal gange under praktisk taget ens forhold. I visse tilfælde indtræffer en forud præciseret begivenhed, i andre ikke. *Vi går da ud fra, at vi til nævnte begivenhed kan knytte et bestemt tal, som vi kalder sandsynligheden for denne begivenhed under de foreliggende omstændigheder* (den benyttede forsøgsanordning), *og at således indførte sandsynligheder tilfredsstiller de før omtalte sætninger om sandsynligheders addition og multiplikation* (i en lidt modificeret form, hvad vi ikke her skal komme ind på).

For disse sandsynligheder gælder da de resultater, som vi foran har omtalt. Specielt kan vi ved dannelse af gennemsnit for lange forsøgsrækker finde tilnærmelsesværdier for ukendte konstanter og kontrollere påstande om deres størrelse.

Hermed er sandsynlighedsregningen trådt ud af sine børnesko, for nu kan den, som først vist af Kolmogorov, opbygges som en rent logisk videnskab på bestemt aksiomatisk grundlag. Man definerer ikke, hvad sandsynligheder er, men postulerer, at de tilfredsstiller en række simple aksiomer, ganske som man i geometrien ikke definerer grundbegreber som punkt og ret linie, men opstiller en række aksiomer, som de påregnes at tilfredsstille.

En sådan aksiomatisk opbygning af sandsynlighedsregningen, som jeg her har skitseret, kan umuligt gennemføres i skolen; men læreren bør kende den, og måske også prøve at antyde lidt af det principielle for eleverne.

9. Grænseovergang til kontinuert fordeling. Lad os tænke os, at vi foretager en forsøgsserie til bestemmelse af en eller anden fysisk konstant. På grund af den begrænsede nøjagtighed, hvormed forsøgene kan anstilles, får vi ikke hver gang samme resultat. Vi vil idealisere de virkelige forhold stærkt, idet vi vil antage, at fejlen, d. v. s. måleresultatets afvigelse fra den »sande værdi« μ , skyldes indvirken af n indbyrdes uafhængige fejlkilder, der hver giver en ændring på $+\varepsilon$ eller $-\varepsilon$, begge med sandsynligheden $\frac{1}{2}$. Måleresultatet kan da antage følgende værdier:

$$\mu - n\varepsilon, \mu - n\varepsilon + 2\varepsilon, \dots, \mu - n\varepsilon + 2i\varepsilon, \dots, \mu + n\varepsilon$$

eller, kort skrevet,

$$(23) \quad x_i = \mu - n\varepsilon + 2i\varepsilon, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Bogstavet i angiver antallet af positive småfejl. Sandsynlighederne p_i for de forskellige værdier x_i danner derfor en binomialfordeling med $p=q=\frac{1}{2}$, altså:

$$(24) \quad p_i = \binom{n}{i} \frac{1}{2^n}.$$

Af (23) fås let

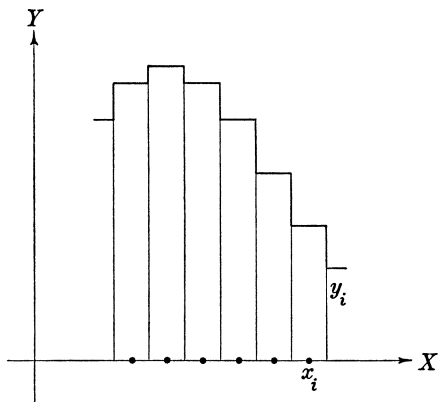
$$M\{x\} = \mu, \quad \sigma^2\{x\} = \varepsilon^2 n.$$

Vi tænker os nu, at fejkildernes antal, n , vokser over alle grænser. Hvis forholdene skal have noget med virkeligheden at gøre, må da samtidig småfejlenes størrelse ε gå mod 0. Vi vil antage, at dette sker på en sådan måde, at $\varepsilon^2 n \rightarrow \sigma^2$, hvor σ er en positiv konstant.

Inden vi går videre, vil vi tænke på en grafisk fremstilling af den foreliggende situation. Som abscisser bruger vi værdierne x_i i (23); afstanden mellem to naboværdier er 2ε . Som ordinater vælger vi

$$y_i = \frac{1}{2\varepsilon} p_i,$$

hvor sandsynlighederne p_i er givet ved (24). I stedet for at afsætte ordinaten y_i som et liniestykke ud fra punktet x_i opbygger vi for hvert sådant punkt et rektangel, hvis grundlinie er 2ε og har x_i som midtpunkt, og hvis højde er y_i . Vi får derved et såkaldt histogram. Arealet af et rektangel er $2\varepsilon \cdot y_i = p_i$, altså lig sandsynligheden for at få værdien x_i , og sandsynligheden for, at x falder på et liniestykke, dannet af en sammenhængende række småintervaller 2ε , angives derfor ved arealet af den over det nævnte liniestykke liggende del af histogrammet. Specielt bliver hele histogrammets areal lig med 1.



Det kan nu vises, at for $n \rightarrow \infty$ vil trappelinien, som begrænser histogrammet opadtil, konvergere mod en kurve med ligningen

$$(25) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Denne kurve bestemmer den såkaldte *normale fordeling* (eller Gauss'iske fordeling). Også ved langt mindre specielle forudsætninger om fejlklidernes virkemåde kommer man til samme ligning.

Jeg har engang for nogle år siden gennemgået dette i et foredrag her i matematiklærerforeningen¹ og skal ikke gentage det nu. Det meste ville man principielt kunne få en dygtig gymnasieelev til at følge, men det er utvivlsomt for svært som obligatorisk gymnasiestof. Derimod vil en skitse som den, jeg har givet i dag, nok kunne bruges i gymnasiet og give eleverne en fornemmelse af, hvad det drejer sig om.

10. Kontinuert fordeling. Den normale fordeling er det vigtigste eksempel på kontinuerte fordelinger. En almindelig kontinuert fordeling for en stokastisk variabel x fremstilles ved en funktion $f(x)$ med følgende egenskaber:

a) $f(x)$ skal være kontinuert (i hvert fald til skolebrug),

b) $f(x) \geq 0$ for alle x ,

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Forbindelsen med sandsynlighedsregningen består i, at sandsynligheden for, at x falder i intervallet (a, b) , angives ved det over intervallet og under kurven $y=f(x)$ liggende areal, d. v. s.

$$S(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Betingelsen c) udtrykker den selvfølgelige ting, at $S(-\infty < x < +\infty) = 1$. For et givet x_0 (og Δx positiv) bliver

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x_0 < x < x_0 + \Delta x)}{\Delta x};$$

$f(x)$ betegnes derfor som *sandsynlighedstæthed*.

Begreberne middelværdi og spredning overføres på naturlig måde fra de diskontinuerte fordelinger ved grænseovergang, og man får, idet de anførte integraler antages konvergente,

$$(26) \quad \mu = m\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

og

$$(27) \quad \sigma^2\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

¹ Se Dansk Matematisk Tidsskrift A, 1949, s. 25-34.

Også her kan man betragte flerdimensionale fordelinger og indføre begrebet stokastisk uafhængighed. Ligeledes kan man påny vise formlerne (15) og (17), de mere almindelige formler (18) og (19) samt de deraf følgende formler (20). Yderligere formlen (21) vedrørende den stokastiske konvergens.

Alt dette kan i skolen kun gives i skitseret form. Navnlig kender man jo slet ikke til uegentlige integraler. Man kunne for at undgå den sidste vanskelighed tænke sig at begrænse behandlingen til sådanne kontinuerede fordelinger, hvor $f(x)=0$ for x numerisk tilstrækkelig stor; men herved udelukker man bl. a. den normale fordeling, som efter min mening næsten er den eneste kontinuerede fordeling, der bør omtales nærmere i skolen. Der synes da ingen anden udvej åben end en ganske kort forklaring af, hvad man mener med et uegentlig integral.

11. Normal fordeling. Herved forstås som berørt i 9 en kontinuert fordeling, hvis sandsynlighedstæthed er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Udseendet af den tilsvarende kurve $y=f(x)$ bestemmes let. Man kan også nogenlunde simpelt vise, at $M\{x\}=\mu$ (henvisning til kurvens symmetri om linien $x=\mu$ er tilstrækkelig, hvis konvergens af det i (26) optrædende integral i forvejen er sikret). Noget vanskeligere er det at godtgøre, at $\sigma\{x\}=\sigma$.

Et særdeles vigtigt problem inden for den matematiske statistik består i, at man ud fra en række forsøgsresultater $x_1, x_2, \dots, x_n$ finder de bedst mulige tilnærmelsesværdier — de bedste skøn, som man siger — for middelværdien og spredningen¹. For normal fordeling, som vi her betragter, bestemmes disse skøn ved

$$(28) \quad \mu \approx \bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}, \quad \sigma^2 \approx s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Den første af de to formler kan motiveres med den i (21) udtrykte stokastiske konvergens af $\bar{x}$ mod μ . Vedrørende den anden kan man f. eks. oplyse, at

$$M\{s^2\} = \sigma^2, \quad \sigma^2\{s^2\} \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty,$$

hvoraf ved Tchebycheffs ulighed følger, at s^2 konvergerer stokastisk mod σ^2 for $n \rightarrow \infty$.

¹ En nøjagtig fastlæggelse af, hvad »bedst« i denne forbindelse skal betyde, lader vi her ligge.

Endelig kan man nævne, ligeledes uden bevis, at dersom man har to forsøgsrækker

$$x_1, x_2, \dots, x_m \text{ og } y_1, y_2, \dots, y_n,$$

der har fælles spredning σ , men ikke nødvendigvis samme middelværdi, da bestemmes det bedste skøn for σ^2 ved

$$(29) \quad \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{(m-1) + (n-1)}.$$

Analogt ved flere forsøgsrækker.

Hvad der er nævnt i 11, bør i høj grad belyses ved regneeksempler, hentet fra vidt forskellige områder. Det vil være nyttigt at indøve gruppering af forelagte råmaterialer og tegning af dertil svarende histogrammer.

Her skal jeg standse. Nogle vil måske synes, at der er taget for meget med. Andre vil savne forskellige ting, som f. eks. nærmere behandling af stokastisk afhængighed og korrelation — eller af χ^2 -fordelingen og dens anvendelser; men det kan man jo diskutere. Ligeledes vil nogle måske mene, at man burde gribe sagen helt anderledes an, sætte empiriske forsøgsmaterialer i spidsen og lade teorien ligesom gro naturligt frem ved studiet af sådanne materialer. Det sidste kan lyde bestikkende; men jeg er bange for, at det nye pensum i så fald bliver et stykke naturfag, hvor sætningerne bliver bevist, som man praktisk beviser naturlovene: ved at anstille eksperimenter, der konstateres ikke at stride imod dem. Jeg tror, at vi skal holde fast på, at hvis denne undervisning skal indføres og gives af matematiklærerne, må den have karakter af matematik, d. v. s. den skal være så logisk og tankemæssigt afklaret som muligt, så den er kommensurabel med den øvrige matematikundervisning. Dog må vi være klare over, at vi her er på et område, hvor en løsning til en vis grad må være et kompromis.

Jeg har nu talt om muligheden af at indføre sandsynlighedsregning med statistik i gymnasiet, men jeg har endnu ikke udtalt mig om ønskeligheden deraf. Jeg holder mig til den nuværende matematiske linie. Her får man jo næppe flere timer til rådighed for vort fag, end man i øjeblikket har, og så står og falder det hele efter min mening med, hvad man tænker på at skyde ud. Hvis man vil plukke undervisningen for de sidste fjer, den har i hatten, såsom sfærisk trigonometri, komplekse tal og andre smukke, men isolerede ting, så det hele bliver gråt i gråt, vil jeg bestemt protestere. Bedre kunne jeg tænke mig at reducere den

teoretiske side af funktionsteorien noget og ligeså begyndelsen af stereometrien; men om man kan skære så meget bort, at der bliver plads til de nye ting, er et meget stort spørgsmål. Det er ligesom med folkepensionen: Selvfølgelig er den et gode — navnlig for dem, der skal have den, naturligvis —; men den skal betales. Her i vort tilfælde bør man overveje prisen i tide og ikke vente med at finde besparelserne til bagefter.

LITTERATUR

Nedenfor anføres en lille litteraturliste, der blot er tænkt som en vejledning for læsere, der ikke har forhåndskendskab til sandsynlighedsregning og matematisk statistik, men kunne ønske at sætte sig ind i disse emner.

N. ARLEY—K. RANDER BUCH: *Sandsynlighedsregning*. 4. udg., København 1950.

H. CRAMÉR: *Sannolikhetskalkylen*. Uppsala 1949.

W. FELLER: *An introduction to probability theory, I*. New York 1950.

D. FOG: *Introduktion til matematisk statistik*. København 1949.

B. GNEDENKO—A. KHINTCHINE: *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Leipzig 1955.

C. E. WEATHERBURN: *A first course in mathematical statistics*. 2. ed., Cambridge 1956.

W. A. WHITWORTH: *Choice and chance*. London 1951.

For lidt viderekomne kan anbefales:

H. CRAMÉR: *Mathematical methods of statistics*. 6. ed., Uppsala 1954.

A. HALD: *Statistiske metoder*. København 1948.

A. N. KOLMOGOROV: *Foundations of the theory of probability*. 2. ed., New York 1956.

ANSKUELIG FREMSTILLING AV SUMMEFORMLER, II

JOHANNES LOHNE

4. I første artikkel (NMT 4 (1956), s. 85) har vi med en trappefigur illustrert summen av de naturlige tall

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \binom{n+1}{2}.$$

Når vi i denne summeformel setter $n=1, 2, 3, \dots$, får vi *trekant-tallene*

1, 3, 6, 10, 15, $\dots$

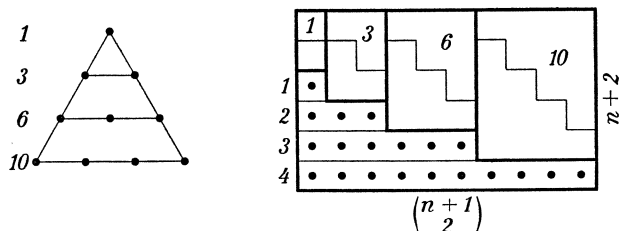


Fig. 4

De suksessive *summer* av disse trekant-tall kan leses ut av fig. 4 og en naturlig fortsettelse av figuren. Rektanglet fremstiller den tredoble sum av de fire første trekant-tall. Det er bygget opp av en »trappe« med fire trin og av fire delrektangler over denne trappen. Trappetrinene representerer tallene 1, 3, 6, 10, og delrektanglene det dobbelte av de samme tall. Figuren kan utbygges så langt en ønsker, f. eks. til å omfatte de n første trekant-tall. Det vil da få grunnlinjen $\binom{n+1}{2}$ og høyden $n+2$. Vi ser at summen av de n første trekant-tall blir tredjeparten av rektanglets flatemål, altså lik

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{n+2}{3}.$$

5. Når vi i summeformelen for trekant-tallene setter $n = 1, 2, 3, \dots$, får vi *pyramidetallene*

1, 4, 10, 20, 35, $\dots$

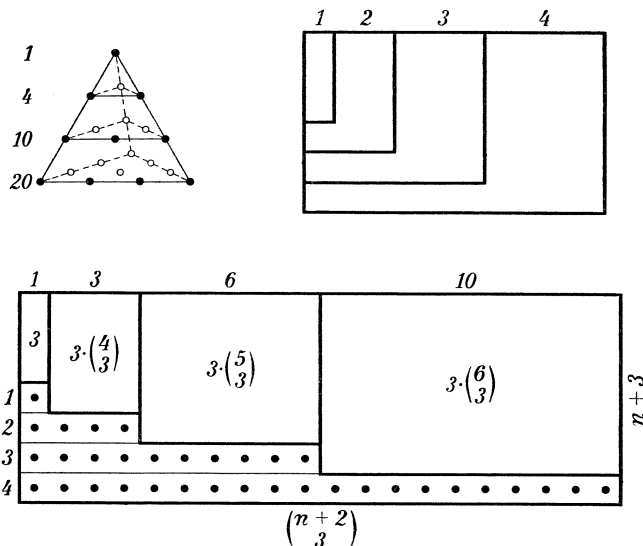


Fig. 5

Når vi tegner fig. 4 om igjen slik som vist øverst på fig. 5, ser vi at de lavere pyramidetall ligger inne i det store rektanglet som esker inne i eske, eller som skuffer skjøvet inn i skuffe. Vi trekker skuffene ut av hverandre som vist nederst på fig. 5, og får de tredoble pyramidetall velordnet etter hverandre. For å få et nytt rektangel, må vi stille trappe-trin under. De representerer atter pyramidetallene 1, 4, 10, 20, $\dots$ Det er klart at også denne figur kan utvides til å omfatte så mange pyramidetall en ønsker. *Summen* av de n første pyramidetall blir fjerdeparten av det nye rektanglet, altså lik

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{n+3}{4}.$$

De fremkomne binomialkoeffisienter kan igjen summeres for $n = 1, 2, 3, \dots$, med en tilsvarende anskuelig fremstilling. Prinsippet kan fortsettes til dimensjon p , hvor vi finner

$$\sum_{x=1}^n \binom{p+x-1}{p} = \binom{n+p}{p+1}.$$

6. Våre illustrasjoner av summeformler kan ved passende substitusjoner for n også gjøre tjeneste som anskuelige figurer for binomialkoeffisientene selv. En samlet fremstilling av disse får vi imidlertid på helt annen måte av figur 6.

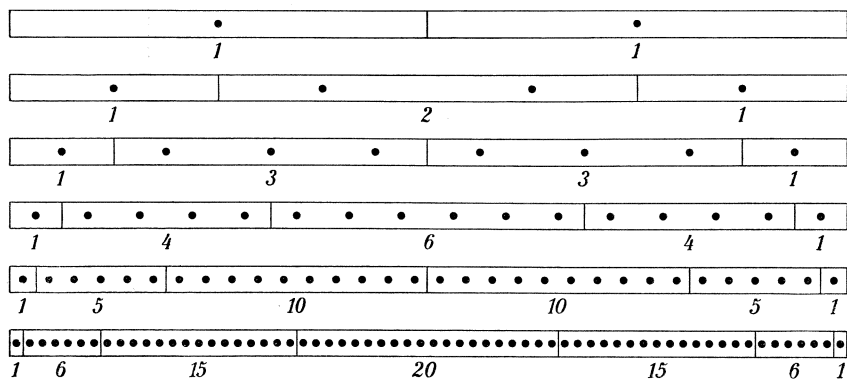


Fig. 6

Den øverste stripe på figuren er delt på midten, slik at stykkene forholder seg som 1:1. Under midtpunktene av disse stykkene er neste stripe delt. Dens tre stykker må derfor forholde seg som 1:2:1. På neste stripe får vi forholdene 1:3:3:1. Vi innser lett at hver ny stripe må bli delt etter tallforhold som svarer til rekkene i *Pascals trekant*. Den p^{te} stripe blir delt etter tallforholdene

$$1:\binom{p}{1}:\binom{p}{2}:\binom{p}{3}:\dots:\binom{p}{p-1}:1.$$

Vi leser av koeffisientene ved å telle prikkene i hver stripes deler. Da antall prikker blir fordoblet for hver ny stripe, ser vi at p^{te} stripe får 2^p prikker. Dermed blir summen av de binomiske koeffisienter lik 2^p .

EN MONOTONT VOKSENDE, KONTINUERLIG FUNKSJON SOM IKKE ER DERIVERBAR I NOE INTERVALL

R. TAMBS LYCHE

Til å belyse bærevidden av de fundamentale definisjoner og setninger i analysen, er det viktig å kunne angi konkrete eksempler på funksjoner som illustrerer disse forhold. Den intuitive forestilling om en funksjon, avbildet ved sitt »diagram« er, tross sin store pedagogiske verdi, ikke uten faremomenter, for så vidt som den lett frister til feilaktige slutninger, nettopp m. h. t. bærevidden av begrepene. For eksempel er det viktig for forståelsen av begrepet *kontinuitet*, at kontinuitet i ett punkt ikke innebærer kontinuitet i omegnen av punktet (eks.: $f(x) = x$ for rasjonale x , $f(x) = -x$ for irrasjonale x), at en funksjon kan være kontinuerlig i en overalt tett punktmengde, f. eks. for alle irrasjonale x , men diskontinuerlig i en annen, overalt tett punktmengde, f. eks. for alle rasjonale x ; osv.

Som bekjent er det nødvendige og tilstrekkelige vilkår for at den kontinuerlige kurve $y = f(x)$ skal ha en buelengde fra $x = a$ til $x = b$, at $f(x)$ har begrenset variasjon i det lukkede intervall $[a, b]$. Dette kravet er oppfylt dersom $f(x)$ er deriverbar med kontinuerlig (eller i det minste begrenset) derivert i intervallet. Gode eksempler til å belyse disse forhold gir funksjonen

$$f(x) = x^p \sin \frac{\pi}{|x|^q} \quad (-1 \leq x \leq 1, x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

når p er et naturlig tall og q er positiv. Så lenge $p > q$ har $f(x)$ begrenset variasjon i $[-1, +1]$, og kurven $y = f(x)$ har buelengde. For $p = 2, q = 1$ er $f(x)$ deriverbar, med diskontinuerlig, men begrenset derivert; for $p = 2, q = \frac{3}{2}$ deriverbar, med ikke begrenset derivert; for $p = 1, q = \frac{1}{2}$ er den ikke deriverbar for $x = 0$. Dersom $p = q$ har $f(x)$ ikke lenger begrenset variasjon i $[-1, +1]$, og kurven mangler buelengde; for $p = q = 2$ er den likevel deriverbar (men den deriverte er ikke begrenset); for $p = q = 1$ er den ikke deriverbar for $x = 0$.

I disse eksemplene har $f(x)$ en kontinuerlig derivert i hele intervallet $[-1, +1]$ med unntak av $x=0$; det er bare i dette punkt det opptrer »uregelmessigheter«.

Jeg vet ikke å ha sett noe enkelt eksempel på en funksjon $f(x)$ med begrenset variasjon, altså for hvilken kurven $y=f(x)$ har buelengde, men som ikke er deriverbar i noe intervall. Det kan derfor muligens være av en viss interesse å gi et slikt eksempel.

Vi tenker oss da de rasjonale tallene i intervallet $[0, 1]$ ordnet i en tallfølge $\{\alpha_n\}$, f. eks. etter voksende nevnerne:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1; \alpha_3 = \frac{1}{2}; \alpha_4 = \frac{1}{3}, \alpha_5 = \frac{2}{3}; \alpha_6 = \frac{1}{4}, \alpha_7 = \frac{3}{4}; \dots$$

Setter vi da for $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x - \alpha_n|,$$

blir $f(x)$ åpenbart kontinuerlig, idet rekken tydeligvis konvergerer uniformt (og absolutt) i $[0, 1]$. Da $|x - \alpha_n|$ har variasjonen 1 i intervallet, får $f(x)$ en variasjon ≤ 1 i samme intervall.

Det er her lett å vise at $f(x)$ er ikke-deriverbar for rasjonale x mellom 0 og 1, idet den for $x = \alpha_k$ har innbyrdes ulike ensidige deriverte $f'_+(\alpha_k)$ og $f'_-(\alpha_k)$ med differens 2^{-k+1} .

For å bevise dette lar vi først ε være et fritt valt positivt tall, og velger et slikt naturlig tall q at $2^{-q} < \varepsilon$. La så x være et fritt valt tall i $[0, 1]$, og la

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_r}{q_r}$$

være alle de rasjonale tallene $\neq x$ som tilhører intervallet $[0, 1]$ og har nevnerne $\leq q$. Vi setter

$$\delta = \min_{1 \leq i \leq r} \left| \frac{p_i}{q_i} - x \right|.$$

Velger vi da $|h| < \delta$, vil de rasjonale tallene som ligger mellom x og $x+h$, alle ha nevnerne $> q$. Er da α_n et slikt rasjonalt tall, må vi sikkert ha $n > q$, og summen

$$\sum'_{(x_n)} \frac{1}{2^n},$$

utstrakt over alle rasjonale α_n mellom x og $x+h$, blir derfor mindre enn

$$\frac{1}{2^{q+1}} + \frac{1}{2^{q+2}} + \dots = \frac{1}{2^q} < \varepsilon.$$

Det betyr at den nevnte summen konvergerer mot null med h .

Nå kan vi skrive $f(x)$ på formen

$$f(x) = \sum_{\alpha_n < x} \frac{1}{2^n} (x - \alpha_n) + \sum_{\alpha_n > x} \frac{1}{2^n} (\alpha_n - x).$$

La så, for $x < 1$, h være positiv og $x + h \leq 1$; vi får da

$$f(x+h) = \sum_{\alpha_n < x+h} \frac{1}{2^n} (x+h - \alpha_n) + \sum_{\alpha_n > x+h} \frac{1}{2^n} (\alpha_n - x - h).$$

Av dette får vi så

$$f(x+h) - f(x) = h \left[\sum_{\alpha_n \leq x} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n \geq x+h} \frac{1}{2^n} \right] + \sum_{x < \alpha_n < x+h} \frac{1}{2^n} (2x - 2\alpha_n + h).$$

Av $x < \alpha_n < x+h$ følger nå

$$2x - 2\alpha_n + h = \theta_n h, \quad |\theta_n| < 1,$$

slik at

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{\alpha_n \leq x} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n \geq x+h} \frac{1}{2^n} + \sum_{x < \alpha_n < x+h} \frac{\theta_n}{2^n},$$

og det viser at

$$(1) \quad f'_+(x) = \sum_{\alpha_n \leq x} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n > x} \frac{1}{2^n}.$$

På nøyaktig samme måte finner vi, for $x > 0$ og $0 < h \leq x$,

$$\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \sum_{\alpha_n \leq x-h} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n \geq x} \frac{1}{2^n} + \sum_{x-h < \alpha_n < x} \frac{\theta'_n}{2^n}, \quad |\theta'_n| < 1,$$

og derfor

$$(2) \quad f'_-(x) = \sum_{\alpha_n < x} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n \geq x} \frac{1}{2^n}.$$

Sammenholder vi (1) og (2), får vi:

1° Er x irrasjonal, blir $f(x)$ *deriverbar*, med derivert

$$f'(x) = \sum_{\alpha_n < x} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n > x} \frac{1}{2^n}.$$

2° Er x rasjonal $= \alpha_k$ og $0 < x < 1$, blir

$$f'_+(x) = \frac{1}{2^k} + \sum_{\alpha_n < x} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n > x} \frac{1}{2^n},$$

$$f'_-(x) = -\frac{1}{2^k} + \sum_{\alpha_n < x} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n > x} \frac{1}{2^n},$$

og $f(x)$ er *ikke deriverbar* for $x = \alpha_k$.

Vi bemerker videre at

$$f'_+(0) = \sum_{\alpha_n \leq 0} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n > 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

mens

$$f'_-(x) = \sum_{\alpha_n < x} \frac{1}{2^n} - \sum_{\alpha_n \geq x} \frac{1}{2^n} > 0$$

for alle $x > 0$, idet

$$\sum_{\alpha_n < x} \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2}, \quad \sum_{\alpha_n \geq x} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}.$$

Av dette følger at $f(x)$ er monotont voksende i intervallet $[0, 1]$ og derfor har variasjonen $f(1) - f(0)$ i dette intervallet.

En ser også at $f'_+(x)$ er kontinuertlig fra høyre, mens $f'_-(x)$ er kontinuertlig fra venstre.

BOKMELDINGER

EDWIN F. BECKENBACH: *Modern mathematics for the engineer*. (University of California engineering extension series.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1956. 20+514 pp. sh. 56/6.

(Innehållsförteckning i NMT, denne årgång, s. 44.)

Föreliggande bok sönderfaller i tre stora delar: Matematiska modeller, probabilistiska problem samt beräkningsmässiga metoder.

I den första delen behandlas sju avsnitt, nämligen lineära och icke-lineära oscillationer, jämviktsanalys, yttre ballistik, variationskalkyl, hyperboliska och elliptiska partiella differentialekvationer samt elastostatiska randvärdesproblem. Inga skäl ges till detta urval, och kanske skulle man vilja se ett kapitel om exempelvis integralekvationer. Varje avsnitt har sin egen författare, som är specialist på ifrågavarande område. Dessa kapitel kan, möjligen med ett par undantag, i stort sett uppfattas som klassiska. Man får emellertid genomgående en god översikt av vederbörande område med huvudvikten på väsentliga saker, och författarna tycks ha lagt sig vinn om att läsaren inte skall behöva drunkna i detaljer.

I den andra delen behandlas prognosteor, spelteori, operationsanalys, dynamisk programmering samt Monte Carlo-metoder. Som synes rör det sig här genomgående om nya och aktuella områden, för vilka samlade framställningar endast i begränsad utsträckning existerar. Texten illustreras med mer eller mindre genomräknade exempel, som ger en god bild av själva metodiken. Några av problemen, bl. a. hur man bäst skall organisera malmbrytningen, om man råkar vara lycklig ägare till två guldgruvor, är kända från tidskriftslitteraturen men försvarar väl sin plats även i denna antologi.

Den sista delen i boken, som behandlar synpunkter på de numeriska metoderna, är indelad i sju kapitel med följande rubriker: Matriser, transformation av funktioner, konform avbildning, icke-lineära metoder, relaxation, »steep descent«, samt användning av snabba matematikmaskiner. I kapitlet om matriser tar vederbörande författare kanske väl lätt på de i en mängd sammanhang återkommande problemen om hur inversion bäst skall utföras, och man saknar även Jacobis metod för

beräkning av egenvärden till symmetriska matriser. På sid. 316 påstås vidare, at $\text{Spår } (AB) = (\text{Spår } A) \cdot (\text{Spår } B)$, vilket uppenbart är oriktigt. Sista kapitlet, som behandlar både analogi- och siffermaskiner, är tyvärr alltför kortfattat för att ge en helt rättvisande bild av detta område.

Som helhetsomdöme gäller, att detta är en utomordentligt stimulerande bok, som är sammansatt efter en mycket tilltalande princip. Bokens titel innebär närmast en understatement genom att inte bara ingenjörer utan många andra grupper kan studera den med stor behållning.

Carl-Erik Fröberg

R. CREIGHTON BUCK: *Advanced calculus*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1956. 8+423 pp. sh. 64/-.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 44.)

En bok med tittel »Advanced calculus« er en matematisk forundringspakke. Man åpner den, uvitende om innhold og framstilling, med spenning, en smule forventning — og en stor porsjon skepsis.

Da jeg leste gjennom det foreliggende eksemplar av arten, opplevde jeg det gledelige (og for den kritiske sans farlige) at forventningen steg og skepsisen svant etter hvert som jeg skred fram gjennom boka.

Av forkunnskaper kreves, ut over det som læres på realgymnaset, en del trening i ubestemte integraler, et visst kjennskap til differensiallikninger, samt kjennskap til tallkroppen av de reelle tall. Sistnevnte er summarisk behandlet i et tillegg.

Boken starter med å presentere definisjoner og setninger om punkter og punktmengder, av grunnleggende betydning for framstillingen av det øvrige stoff. Kapitlet er kalt »Elementary topology«, hvor ordet topologi naturlig nok er brukt i »gammeldags« betydning, idet omegn av et punkt defineres med assistanse av avstandsbegrepet.

I kapitlet om integrasjon forbauses man ved å støte på dobbeltintegralet først. Forfatterens hensikt var ifølge forordet å helgardere seg mot sammenblanding av integrasjon og antidifferensiering. I samme kapittel er tatt med et avsnitt om mengdefunksjoner.

Differensialer er definert som lineærtransformasjoner, og differensialet av en transformasjon fra n -rommet til m -rommet er angitt ved en n - m -matrise.

Begrepene kurve og flate er knyttet til transformasjonene, ikke til de geometriske bilder. Dette synes meg å være en fordel, idet disse begreper på den måten kan anvendes uten skrupler. Videre lettes terminologien i

omtalen av singulariteter. En kurve i konvensjonell mening er angitt som en ekvivalensklasse av kurver (transformasjoner).

Noe av det mest bemerkelsesverdige er den utførlige omtale av differensialformer (riktignok bare i 3-rommet), visstnok den eneste i en engelsk bok på dette nivå. Framstillingen tar sikte på å utvikle den tilstrekkelige teknikk for utledning og forståelse av Green's og Stokes' setninger. Analogien med vektorregningen er morsomt framstilt. Som eksempel på anvendelse er behandlet Maxwells likninger.

Framstillingen er ledsaget av eksempler, figurer og oversiktlige skjemaer, og boken inneholder nesten 450 oppgaver med svar (og til dels vink om framgangsmåte).

Boken er så moderne at den kan tjene som en god oppvarming til studiet i ren matematikk, så umoderne at en nybegynner med tradisjonelt grunnlag ikke blir skremt, så praktisk og jordnær at folk som skal anvende matematikken vil ha stor nytte av den, og så velskrevet at den må glede og inspirere enhver som underviser i matematikk.

Haakon Waadeland

JOHN CHARLES BURKILL: *The theory of ordinary differential equations.* (University mathematical texts.) Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1956. 9+102 pp. sh. 8/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 45.)

Ved undervisningen i matematisk analyse på vore nordiske universiteter og højskoler har differentiaalligningernes teori gjennom mange år indtaget en central plads, og dette formentlig af mange grunde. Dels er et indgående kendskab til denne disciplin nødvendig af hensyn til dens mange anvendelser, dels giver emnet et rigtholdigt anvendelsesområde for andre af analysens centrale emner, såsom integralregningen og de uendelige rækkers teori, og videre kan man måske tillade sig at fremhæve, at det i sig er et morsomt emne, der altid har kunnet fange de studerendes interesse.

Ganske vist har traditionen medført, at man de fleste steder har indskrænket sig til at meddele og bevise løsningsformler for visse hovedtyper af differentiaalligninger, hvor en eksplicit fremstilling af det fuldstændige integral er mulig, medens det store område af differentiaalligninger, hvor dette ikke er muligt, er trængt noget i baggrunden. Også et mere detaljeret studium af de egenskaber ved løsningerne, der kan afledes ud fra de uløste ligninger, har man så godt som ikke medtaget i de gængse elementære lærebogsfremstillinger. Men det ville vel føre for vidt ved de obligatoriske kurser?

Den foreliggende lille bog, der af forfatteren er tænkt som lærebog ved et udvidet kursus i differentialligningernes teori, behandler mange af de mindre områder indenfor teorien, som der ellers ikke bliver tid til. Trods sit beskedne omfang giver bogen en detaljeret behandling af de valgte emner. Uden at gå i enkeltheder skal bl. a. fremhæves det lille og underholdende kapitel III (Oscillation theorems), der indeholder sætninger om løsningernes nulpunkter, disses indbyrdes afstand o. s. v. i tilfælde, hvor eksplicit løsning ikke er mulig. Endvidere skal fremhæves forfatterens udstrakte anvendelse af de komplekse funktioners teori. De vanskeligheder, hvormed fremstillingen derved behæftes, opvejes langt ved den homogenitet, der opnås i sætningernes formulering og ved løsningernes analytiske fremstilling. Bogens sidste kapitler giver et kort men interessant indblik i teorien for Legendre-polynomier og Bessel-funktioner. Endelig skal bemærkes, at bogen indeholder et stort antal (såvel lette som vanskelige) øvelsesopgaver.

K. Rander Buch

E. J. DIJKSTERHUIS: *Archimedes*. (Acta historica scientiarum naturalium et medicinalium 12.) Published by the University Library, Copenhagen. Ejnar Munksgaard, København, 1956. 422 pp. Hft. d. kr. 60.00, indb. d. kr. 68.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 4 (1956), s. 216.)

Det er J. L. Heibergs store fortjeneste at have givet en moderne tekst-kritisk udgave af Archimedes' arbejder. Af denne udgave fremkom efterhånden to gode oversættelser, nemlig T. L. Heath: *The Works of Archimedes* og P. Ver Eecke: *Les Oeuvres Complètes d'Archimède*. Man kunne da tro, at Archimedes' arbejder hermed var behandlet til bunds, men det foreliggende arbejde af Dijksterhuis viser klart, at dette ikke er tilfældet. Det er virkelig lykkedes Dijksterhuis at gengive Archimedes' tankegange betydeligt bedre, end hans forgængere har formået. Medens nemlig Ver Eecke nøjedes med at give en fuldstændig ordret oversættelse af Archimedes' arbejder, og Heath gengav disse arbejder med moderne betegnelser, har Dijksterhuis i en vis forstand lagt sig imellem sine to forgængere; han giver ikke en ordret oversættelse og bruger heller ikke moderne betegnelser, hvor dette er i strid med tekstens ånd, men derimod nogle af ham selv konstruerede symboler, der på udmærket måde dækker over de begreber, der er karakteristiske for den græske størrelseslære. Hvor Heath f. eks. skriver $a \cdot b$ og dermed kunne bibringe den ukyndige læser det indtryk, at talen er om produktet af to tal a og b , skriver Dijksterhuis $O(a, b)$ som betegnelse for rektanglet (orthogo-

nion) med siderne a og b ; og forholdet mellem to størrelser A og B af samme art, af Heath gengivet ved $\frac{A}{B}$, udtrykker Dijksterhuis ved den neutrale betegnelse (A, B) . Disse små ændringer kan synes ubetydelige, men de er i virkeligheden af gennemgribende betydning, thi de moderne betegnelser, som Heath betjener sig af, egner sig slet ikke til at gengive sætningerne fra den geometriske algebra eller sætningerne om læren om forhold fra Euklids V. bog.

I kapitel I (The life of Archimedes) gennemgår forfatteren omhyggeligt endnu engang de beretninger, man har om Archimedes' liv og virke, og det lykkes ham da også at nå frem til små ændringer i det billede, man traditionsmæssigt har dannet sig af Archimedes. I beretningerne om Archimedes' død opfatter Dijksterhuis således ordet pulvis som sand på et slags regnebræt og ikke (som man sædvanlig gør det) som sand på jorden. Og som dokumentation anfører Dijksterhuis et citat fra St. Jerome samt to citater fra Cicero. I overensstemmelse dermed mener Dijksterhuis, at Archimedes blev dræbt af en romersk soldat inde i sit hus og ikke i det fri. Denne antagelse bliver støttet af et billede, fundet i Herculaneum, som viser Archimedes siddende ved et bord, medens en romersk soldat står foran ham med draget sværd. Billedet er reproduceret på bogens titelblad.

Kapitel II indeholder en oversigt over Archimedes' arbejder samt en redegørelse for de omstændigheder, hvorunder de forskellige manuskripter er blevet overleveret. I denne redegørelse støtter Dijksterhuis sig til Heibergs undersøgelser. Det fra et matematisk synspunkt interessanteste afsnit er kapitel III, hvori Dijksterhuis gør rede for den matematiske baggrund for Archimedes' arbejder. Der gives — under anvendelse af de betegnelser, som blev nævnt ovenfor — en udmærket oversigt over de væsentlige punkter i den keglesnitslære, som Archimedes betjener sig af; hvor Archimedes bruger sætninger, til hvilke man ikke kender beviser fra det foreliggende tekstmateriale, leveres sådanne af forfatteren.

Videre indeholder kapitel III en analyse af de processer, som i den almindelige litteratur går under navnet exhaustionsmetoden, og som Dijksterhuis med en vis ret foretrækker at kalde »The indirect method for infinite processes«. Det fremhæves, at denne metode i virkeligheden består af en kompressionsmetode og en approksimationsmetode, og at kompressionsmetoden igen optræder på to former, nemlig som en differensform og en forholdsform. I øvrigt skal jeg ikke her gå nærmere ind på den udmærkede analyse, som Dijksterhuis underkaster de uendelige processer, men nøjes med at henvise til NMT 2 (1954), s. 5–23, hvor Dijksterhuis selv har gjort rede for sine undersøgelser.

De resterende kapitler indeholder en beskrivende gennemgang af Archimedes' enkelte arbejder med fyldige kommentarer. Som en lille stikprøve slog anmelderen ned på sætning 9 i Om Kuglen og Cylinderen, idet de tidligere bearbejdere har givet en forkert begrundelse for et simpelt lemma, som Archimedes anvender uden bevis. Det er derfor med en vis tilfredshed, det konstateres, at Dijksterhuis leverer et korrekt bevis for dette lemma.

Oversættelsen til engelsk er foretaget af Miss C. Dikshoorn, og så vidt anmelderen kan bedømme, er den foretaget med omhu og takt, således at Dijksterhuis' klare og flydende stil er blevet bevaret. Dog synes de første linier af paragraf 8, side 130, hvor der står »... application of the theory of convergent variants« at være resultatet af en mindre god oversættelse.

Olaf Schmidt

HALFRID STENMARK: *Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolormer.* (Skrifter utgivna av Sveriges yngre läroverkslärarens förening, 15.) C. W. K. Gleerups Förlag, Lund, 1956. 326 s. Sv. kr. 13.50, inb. sv. kr. 17.50.

Ifølge forfatterens forord omhandler bogen synspunkter, der efter hans erfaringer vil være hensigtsmæssige i undervisningen i regning og matematik i den svenske realskole, 5.-9. skoleår (evt. blot 7.-9. år), altså nærmest svarende til den danske mellemskole. Bogen giver da også en lang række forslag og fremdrager talrige problemer, som den erfarne lærer vil nikke genkendende til, og for den unge lærer vil det være af værdi at have et sted, hvor han kan finde de uundgåelige problemer behandlet.

Bogens første afsnit omhandler naturligt den elementære regning, og der gives ikke blot en gennemgang af teori, men tillige en række råd i forbindelse med en undervisningstimes opdeling i hovedregning, tavle-regning og selvstændigt elevarbejde; endvidere fremhæves betydningen af at vænne eleverne til omhu i sprogbrug o. s. v. For en læser, der ikke har de svenske lærebøger ved hånden, kunne det have været bekvemt, om der på fundamentale steder var anført de benyttede definitioner, og enkelte steder ville en yderligere uddybning have været ønskelig, f. eks. s. 12, hvor spiren til de negative tal lægges; det ville have været rart at se forfatterens gennemgang af dette for mange elever vanskelige spørgsmål.

En morsom advarsel til læreren om omhu med opgaveretning findes i afsnittet om algebra, hvor der er givet nogle eksempler på ligninger

»løst« med de sædvanligt forekommende fejl, men hvor resultatet alligevel er blevet rigtigt, altså se også mellemregningerne efter.

I geometrien følges de traditionelle retningslinier for stoffets behandling præget både af tegnearbejde og teoretiske overvejelser; en enkelthed skal nævnes, nemlig beviset for den pythagoræiske sætning, som det findes i Euklids Elementer, og en omtale af retvinklede trekanter, hvis sider har hele måltal.

Ef afsnit »Matematiklaborationer« er ganske underholdende, men vil efter danske forhold vel nærmest høre under fysiklærerens domæne.

Selv om mangt og meget ikke er nyt for den trænede lærer, kan man have hyggelige timer med Stenmarks bog.

Regnar Norgil

MOTTATTE BØKER

P. S. Alexandroff: *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*. Übersetzung aus dem Russischen. (Hochschulbücher für Mathematik 23.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. 12 + 279 S., 25 Fig. DM 18.00.

Unendliche Mengen 1–20 * Reelle Zahlen 21–35 * Geordnete und wohlgeordnete Mengen. Transfinite Zahlen 36–71 * Lineare und ebene Punktmengen 72–102 * Reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen 103–143 * Punktmengen in metrischen Räumen 144–183 * Topologische Räume 184–200 * Kompakte und vollständige Räume 201–267 * Literaturhinweise der Herausgeber 268–271 * Namen- und Sachverzeichnis 272–279.

Applied probability. Vol. VII: Proceedings of the seventh symposium in applied mathematics of the American Mathematical Society. Edited by L. A. McColl. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957 (for the American Mathematical Society). 5 + 104 pp. sh. 37/6.

Paul Lévy: Brownian motion depending on n parameters: The particular case $n = 5$ 1–20 * J. L. Doob: A new look at the first boundary-value problem 21–33 * William Feller: On boundaries defined by stochastic matrices (abstract) 35–40 * Eberhard Hopf: On the application of functional calculus to the statistical theory of turbulence 41–50 * Guido Münch: Stochastic processes of astronomical interest 51–66 * G. K. Batchelor: The singularity in the spectrum of homogeneous turbulence 67–72 * Mark Kac: Probability in classical physics 73–85 * S. M. Ulam: Infinite models in physics 87–95 * B. O. Koopman: Quantum theory and the foundations of probability 97–102 * Index 103–104.

E. Artin: *Geometric algebra*. (Interscience tracts in pure and applied mathematics 3.) Interscience Publ., New York, 1957. 10 + 214 pp. \$ 6.00.

Preliminary notions 1–49 * Affine and projective geometry 51–103 * Symplectic and orthogonal geometry 105–150 * The general linear group 151–172 * The structure of symplectic and orthogonal groups 173–211 * Bibliography 212 * Index 213–214.

C. W. Churchman — R. L. Ackoff — E. L. Arnoff: *Introduction to operations research*. John Wiley & Sons, New York, 1957. 10 + 645 pp. \$ 12.00.

Introduction: The general nature of operations research. An operations research study of a system as a whole. Research team approach to an inspection operation 1–65 * The problem: Analysis of the organization. Formulation of the problem. Weighting objectives 67–154 * The model: Construction and solution of the model 155–194 * Inventory models: Elementary inventory models. Inventory models with price breaks. Inventory models with restrictions 195–277 * Allocation models: Linear programming. The assignment problem. Some illustrations of allocation problems 279–390 * Waiting-time models: Queuing models. Traffic delays at toll booths. Sequencing models 391–476 * Replacement models 477–516 * Competitive models: The theory of games. Bidding models 517–573 * Testing, control, and implementation: Data for model testing. Controlling and implementing the solution 575–622 * Administration of operations research: Selection, training and organization for operations research 623–635 * Author index 637–640 * Subject index 641–645.

Karl-Richard Dorfner: *Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik*. (Ergebnisse der angewandten Mathematik 3.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg. 1957. 7 + 150 S., 44 Fig. DM 26.00.

Physikalische und mathematische Grundlagen 1–28 * Allgemeine Strömungsfelder 28–57 * Strömungsfelder mit konischer Symmetrie 57–125 * Homogene Strömung 125–148 * Literaturverzeichnis 149 * Namen- und Sachverzeichnis 150.

E. B. Dynkin — W. A. Uspenski: *Mathematische Unterhaltungen, I–III*. Übersetzung aus dem Russischen. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik 13–15.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955–56.

Teil I: *Mehrfarbenprobleme*. 7 + 65 S., 90 Fig. DM 5.10.

Einleitung 1–3 * Aufgaben über zwei Farben 3–10 * Färbung mit drei Farben 10–22 * Das Vierfarbenproblem. Der Satz von Wolynski 22–24 * Der Satz von Euler. Der Satz über fünf Farben 24–29 * Schlussbemerkungen 29–30 * Anhang: Über die Färbung der Sphäre mit drei Farben 31–35 * Lösungen 36–65.

Teil II: *Aufgaben aus der Zahlentheorie*. 9 + 124 S., 32 Fig. DM 6.10.

Das Rechnen mit Restklassen (Restklassenarithmetik) 1–14 * m -adische und p -adische Zahlen 15–30 * Anwendungen der Arithmetik der Restklassen modulo m und modulo p in der Zahlentheorie 31–52 * Ergänzungen zur Fibonacciischen Folge und zum Pascalschen Dreieck 53–59 * Die Gleichung $x^2 - 5y^2 = 1$ 60–62 * Schlussbemerkungen 62–66 * Lösungen 67–124.

Teil III: *Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. 7 + 84 S., 32 Fig. DM 4.10.

Einleitung 1–5 * Grundlegende Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit 5–17 * Aufgaben über die Irrfahrt auf der unendlichen Geraden 18–27 * Das Gesetz der grossen Zahlen 27–38 * Irrfahrten mit endlich vielen Zuständen 38–52 * Irrfahrten mit unendlich vielen Zuständen 52–64 * Schlussbemerkungen 64–65 * Lösungen 66–84.

Enzyklopädie der Elementarmathematik, I, II. Redaktion: P. S. Alexandroff — A. I. Markuschewitsch — A. J. Chintschin. Übersetzung aus dem Russischen. (Hochschulbücher für Mathematik 7,8.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954, 1956.

Band I: *Arithmetik*. 11 + 403 S. DM 26.70.

I. G. Baschmakowa — A. P. Juschkewitsch: *Die Entstehung der Bezeichnungssysteme für die Zahlen* 3–60.

I. W. Proskurjakow: *Mengen, Gruppen, Ringe und Körper. Die theoretischen Grundlagen der Arithmetik*: Einleitung 63–65 * Mengen 65–82 * Gruppen, Ringe, Körper 83–111 * Die natürlichen Zahlen 112–133 * Der Ring der ganzen Zahlen 134–148 * Der Körper der rationalen Zahlen 148–163 * Der Körper der reellen Zahlen 163–198 * Der Körper der komplexen Zahlen 198–221 * Literatur 222–223.

A. J. Chintschin: *Die Elemente der Zahlentheorie*: Teilbarkeit und Primzahlen 227–240 * Die Kongruenzmethode 241–259 * Der Euklidische Algorithmus und die Kettenbrüche 259–273 * Die Darstellung der Zahlen durch systematische Brüche und durch Kettenbrüche 273–285 * Kettenbrüche und diophantische Approximationen 285–302 * Algebraische und transzendente Zahlen 303–311 * Literatur 312–313.

W. M. Bradis: *Kopfrechnen und schriftliches Rechnen. Hilfsmittel für das Rechnen*: Allgemeine Bemerkungen über das Rechnen und die Näherungsrechnungen 317–346 * Fehlerrechnung 346–374 * Verschiedene Fragen 375–393 * Literatur 394–395. Namenverzeichnis 396–397 * Sachverzeichnis 397–403.

Band II: *Algebra*. 9 + 405 S., 33 Fig. DM 27.30.

A. I. Uskow: *Vektorräume und lineare Transformationen*: Determinanten und Auflösung linearer Gleichungen 3–31 * Vektorräume und Systeme von linearen Gleichungen 32–71 * Lineare Transformationen der Ebene und des dreidimensionalen Raumes 72–112 * Literatur 113.

L. J. Okunjew: *Der Ring der Polynome und der Körper der rationalen Funktionen*: Der Ring der Polynome in einer Unbestimmten 117–216 * Der Ring der Polynome in mehreren Unbestimmten und der Körper der rationalen Funktionen 217–250 * Über die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale 251–292 * Literatur 293.

A. P. Domorjad: *Numerische und graphische Methoden zum Auflösen von Gleichungen*: Einleitung 297–300 * Die Auflösung von algebraischen Gleichungen 301–340 * Die Auflösung von transzendenten Gleichungen 341–362 * Die Auflösung von Gleichungssystemen 363–373 * Graphische Verfahren 374–394 * Anhang 395–400 * Namenverzeichnis 401 * Sachverzeichnis 402–405.

G. Grosche: *Projektive Geometrie, II.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 8.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 196 S., 46 Fig. Geb. DM 9.10.

Kurven zweiter Ordnung und Kurven zweiter Klasse 1–94 * Büschel von Kurven zweiter Ordnung (C_2 -Büschel) 95–122 * Projektive Geometrie in Räumen höherer Dimension 123–180 * Lösungen zu den Übungen 181–193 * Namen- und Sachverzeichnis 194–196.

H. Hadwiger: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 93.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 13 + 312 S., 34 Fig. DM 46.20, ganzl. DM 49.80.

Elementargeometrie der Polyeder 1–34 * Der elementare Inhalt 34–84 * Jordanscher Inhalt und Lebesguesches Mass 85–137 * Ausgewählte Studien zur Mengengeometrie 137–179 * Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie 179–198 * Konvexe Körper und allgemeine Integralgeometrie 198–294 * Literaturverzeichnis 295–306 * Namenverzeichnis 307–308 * Sachverzeichnis 309–312.

Helmut Hasse: *Höhere Algebra.* Band I: Lineare Gleichungen. Vierte Auflage. (Sammlung Götschen 931.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1957. 152 S. DM 2.40.

Literaturverzeichnis 4 * Einleitung 5–7 * Ringe, Körper, Integritätsbereiche 7–48 * Gruppen 49–68 * Determinantenfreie lineare Algebra 68–103 * Lineare Algebra mit Determinanten 104–148 * Schluss 149–150 * Namen- und Sachverzeichnis 151–152.

Joseph E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik, II, III.* (Sammlung Götschen 875, 882.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1957. 109, 107 S. Je DM 2.40.

Band II: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden (etwa 1625 bis 1695).

Descartes 4–15 * Erste Erfolge auf infinitesimalem Gebiet 15–30 * Ausweitung und Vertiefung des Gewonnenen 30–49 * Erfindung der Potenzreihen 50–62 * Erfindung des Calculus 62–75 * Ausbau der neuen Methoden 75–94 * Namen- und Schriftenverzeichnis 95–103 * Zeitschriftenverzeichnis 104 * Sachverzeichnis 105–109.

Band III: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur Französischen Revolution (etwa 1695 bis 1790).

Auseinandersetzungen um den Calculus 4–23 * Sonstige mathematische Fortschritte — Infinitesimalmathematik in Japan 24–39 * Allgemeines; elementare Fragen 40–52 * Führende Persönlichkeiten auf dem Festland 52–77 * Nachlese 77–83 * Namen- und Schriftenverzeichnis 84–98 * Zeitschriftenverzeichnis 99 * Sachverzeichnis 100–107.

I. M. Jaglom — W. G. Boltjanski: *Konvexe Figuren*. Übersetzung aus dem Russischen. (Hochschulbücher für Mathematik 24.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. 16 + 257 S., 318 Fig. DM 15.00.

Aufgaben: Allgemeine Eigenschaften konvexer Figuren 1–13 * Der Satz von Helly und seine Anwendungen 13–19 * Eine Eigenschaft der stetigen Funktionen 19–28 * Addition konvexer Figuren und Kurven 28–38 * Das isoperimetrische Problem 38–45 * Verschiedene Maximum- und Minimumaufgaben 45–56 * Kurven konstanter Breite 56–68 * Kurven, die sich in einem gleichseitigen Dreieck drehen lassen (Δ -Kurven), und verwandte Kurven 68–83 * Anhang I. Grenzwertsatz für Kurven 83–89 * Anhang II. Über die Begriffe der konvexen und der nichtkonvexen Figur 89–91 * Lösungen 92–252 * Literaturverzeichnis 253–254 * Namen- und Sachregister 255–257.

Konrad Knopp: *Funktionentheorie, I*. Neunte, neubearbeitete Auflage. (Sammlung Götschen 668.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1957. 144 S., 8 Fig. DM 2.40.

Grundlegende Begriffe: Zahlen und Punkte. Funktionen einer komplexen Veränderlichen 7–38 * Integralsätze: Das Integral einer stetigen Funktion. Der Cauchysche Integralsatz. Die Cauchyschen Integralformeln 39–69 * Reihen und Reihenentwicklungen analytischer Funktionen: Reihen mit veränderlichen Gliedern. Die Entwicklung analytischer Funktionen in Potenzreihen. Analytische Fortsetzung und vollständige Definition der analytischen Funktion. Ganze transzendente Funktionen 69–117 * Von den singulären Stellen: Die Laurentsche Entwicklung. Die verschiedenen Arten singulärer Stellen 118–141 * Register 142–144.

Karl Menger: *Calculus. A modern approach*. Ginn & Co., New York, 1955. 18 + 354 pp.

The two basic problems of calculus and their solutions for straight lines 1–18 * Graphical solutions of the two basic problems 19–38 * Numerical solutions of the two basic problems 39–56 * The idea and the use of functions 57–106 * On limits 107–129 * The basic concepts of calculus 130–166 * The application of calculus to science 167–224 * The calculus of derivatives 225–245 * The calculus of antiderivatives 246–273 * The mean value theorem and its consequences 274–291 * Two-place functions 292–341 * Appendix 342–345 * Bibliography 346–347 * Topical index 349–353 * Index of symbols 354.

D. C. Murdoch: *Linear algebra for undergraduates*. John Wiley & Sons, New York, 1957. 11 + 239 pp. \$ 5.50.

Vectors and vector spaces 1–38 * Matrices, rank, and systems of linear equations 39–55 * Further algebra of matrices 56–78 * Further geometry of real vector spaces 79–90 * Transformations of coordinates in a vector space 91–99 * Linear transformations in a vector space 100–127 * Similar matrices and diagonalization theorems 128–149 * Reduction of quadratic forms 150–168 * Vector spaces over the complex field 169–185 * Appendix 1. Abstract definition of a vector space 186–190 * Appendix 2. Three dimensional analytic geometry 191–223 * References 224 * Answers to problems 225–233 * Index 235–239.

O. Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Band II: Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche. Dritte, verb. und erw. Aufl. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957. 6 + 316 S., 6 Fig. Ln. DM 49.00.

Transformation von Kettenbrüchen 1–37 * Kriterien für Konvergenz und Divergenz 38–106 * Verschiedene Zuordnungen von Potenzreihen zu Kettenbrüchen 107–179 * Die Kettenbrüche von Stieltjes 180–234 * Die Padésche Tafel 235–270 * Kettenbrüche, deren Elemente a_n und b_n rationale Funktionen von v sind 271–306 * Literatur 307–314 * Verzeichnis der bemerkenswerten Formeln 315 * Sachregister 316.

Karl Prachar: *Primzahlverteilung*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 91.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 10 + 415 S. DM 55.00, ganzl. DM 58.00.

Einleitung 1–9 * Elementare Ergebnisse 9–31 * Siebmethoden 31–54 * Der Primzahlsatz 55–96 * Primzahlen in einer arithmetischen Reihe 97–147 * Verschiedene Anwendungen 147–177 * Das Goldbachsche Problem 177–207 * Funktionentheoretische Eigenschaften der L -Funktionen. Explizite Formeln und deren Anwendungen 207–261 * Trigonometrische Summen 261–298 * Sätze über die Dichte der Nullstellen der L -Funktionen und ihre Anwendung in der Primzahltheorie 298–330 * Die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Reihe 330–370 * Anhang 370–407 * Literatur 408–413 * Sachverzeichnis 414–415.

Kurt Reidemeister: *Raum und Zahl*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 7 + 151 S., 31 Fig. DM 19.80.

Vom Ursprung des geometrischen Denkens 1–21 * Über Mechanismen 22–31 * Analytische Geometrie 32–52 * Über den Unterschied der Gegenden im Raum 53–69 * Anschauung und Begriff 70–99 * Geometrie und Logik 100–112 * Eine Begründung der Infinitesimalrechnung 113–122 * Carl Friedrich Gauss 123–125 * Geometrie und Zahlentheorie 126–140 * Prolegomena einer kritischen Philosophie 141–151.

Th. Schneider: *Einführung in die transzendenten Zahlen*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 81.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 7 + 150 S. DM 21.60, ganzl. DM 24.80.

Konstruktion transzendenter Zahlen 1–40 * Transzendente Zahlen als Werte von periodischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen 40–64 * Eine Klasseneinteilung der Zahlen nach Mahler 64–86 * Das Transzendenzmass 86–111 * Algebraische Unabhängigkeit transzendenter Zahlen 111–137 * Einige offene Fragestellungen 137–139 * Anhang 139–143 * Literaturverzeichnis 143–147 * Namenverzeichnis 148 * Sachverzeichnis 149–150.

Beniamino Segre: *Some properties of differentiable varieties and transformations*, with special reference to the analytic and algebraic cases. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 13.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 8+183 S. DM 36.00.

Differential invariants of point and dual transformations 1-14 * Local properties of analytic transformations at their united points 14-35 * Invariants of contact and of osculation. The concept of cross-ratio in differential geometry 35-53 * Principal and projective curves of a surface, and some applications 53-69 * Some differential properties in the large of algebraic curves, their intersections, and self-correspondences 69-88 * Extensions to algebraic varieties 88-108 * Vernonese varieties and modules of algebraic forms 108-132 * Linear partial differential equations 132-152 * Correspondences between topological varieties 152-171 * Bibliography 171-178 * Author index 179-180 * Analytic index 181-183.

George R. Stibitz — Jules A. Larrivee: *Mathematics and computers*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 7+228 pp. sh. 37/6.

Mathematics, computers, and problems 1-18 * Applied mathematics and solutions 19-31 * Kinds of problems and where they come from 32-44 * History of computers 45-63 * Numerical analysis 64-94 * Digital computer components 95-127 * Logical design of digital computers 128-149 * Analog computers and simulators 150-174 * Computing with random numbers 175-191 * Computer errors 192-199 * Computers at work 200-208 * Selected bibliography 209-211 * Some examples of computer applications 212-221 * Author index 223-224 * Subject index 225-228.

Angus E. Taylor: *Advanced calculus*. Ginn & Co., New York, 1955. 13+786 pp.

Fundamentals of elementary calculus 3-82 * The real number system 83-96 * Continuous functions 97-107 * Extensions of the law of the mean 108-131 * Functions of several variables 132-145 * The elements of partial differentiation 146-212 * General theorems of partial differentiation 213-237 * Implicit-function theorems 238-253 * Transformations and mappings 254-279 * Vectors and vector fields 280-314 * Double and triple integrals 315-358 * Curves and surfaces 359-404 * Line and surface integrals 405-477 * Point-set theory 478-493 * Fundamental theorems on continuous functions 494-503 * The theory of integration 504-538 * Infinite series 539-585 * Uniform convergence 586-604 * Power series 605-633 * Improper integrals 634-692 * Complex functions 693-710 * Fourier series and integrals 711-759 * Answers to selected exercises 761-779 * Index 781-786.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 121–123 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Matematisk Institutt, Blindern, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 15. november 1957.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

121. Lad $a_1, a_2, \dots, a_n$ være en mengde indbyrdes forskjellige tal. Bevis følgende identiteter:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} (a_k - a_j)^{-1} = 0, \quad n \geq 2$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} a_k (a_k - a_j)^{-1} = 1, \quad n \geq 2$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n a_j^p \prod_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} a_k (a_k - a_j)^{-1} = 0, \quad n > p, \quad p \text{ hel og positiv.}$$

Ove J. Munch

122. Finn det volumet som begrenses av de tre enkappede hyperboloider

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad -x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

R. Tambs Lyche

123. La $w(z)$ bety den elliptiske funksjon

$$w(z) = [\wp'(z) + \wp'(2-z)]^{-1},$$

der $\wp(z)$ er Weierstrass' $\wp$ -funksjon med periodene $2w_1$ og $2w_2$, hvor $w_1 = 1 - \varrho$, $w_2 = 2 + \varrho$, $\varrho = e^{2\pi i/3}$. Vis at $w(\varrho z) = w(z)$ og $w(2-z) = w(z)$, og nytt dette til løsning av oppgave 113 i forrige hefte.

Rolv Rasmussen

124. Lad A være en kvadratisk matrix af n -te orden, som tilfredsstiller ligningen $A^2 = E$, hvor E er enhedsmatricen. Lad m_1 og m_{-1} være multipliciteterne af 1 og -1 som rod i den til A hørende reduktionsdeterminant. Vis, at $m_1 + m_{-1} = n$.

Chr. U. Jensen

125. La A og B være to forskjellige punkter og la P og Q også være to forskjellige punkter, alle punktene i samme plan. Vis at dersom vinkelen mellom linjene AB og PQ er rett, så gjelder ligningen

$$AP^2 + BQ^2 = AQ^2 + BP^2,$$

og omvendt.

126. Vis at setningen i forrige oppgave gjelder, selv om man sløyfer forutsetningen om at de fire punktene ligger i samme plan.

127. Bevis formelen

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \binom{n-r}{r} x^r (1+x)^{n-2r}.$$

128. Løs differensialligningen

$$(x+y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + y - 2z.$$

LØSNINGER

113. I det komplekse tallplan betraktes to transformasjoner S og T , nemlig: S betyr rotasjonen på 120° om punktet $z=0$ og T rotasjonen på 180° om punktet $z=1$, eller m. a. o. S og T betyr henholdsvis transformasjonene

$$z' = \varrho z \quad (\varrho = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})) \quad \text{og} \quad z' = 2 - z.$$

Finn de punkter som fremgår av $z=0$ ved gjentatt og kombinert anvendelse av S og T .

La F være firkanten med hjørner $z=0$, $z=1$, $z=2+2\varrho$ og $z=\varrho$. Vis at et vilkårlig punkt ζ i det komplekse plan fremgår av et passende valgt punkt av F ved en passende rekke anvendelser av S og T .

Th. Skolem

Løsning: En anvender T en gang og S en og to ganger på hvert frembrakt punkt. Da får en alle og bare de punktene z_n som (ved innsetting av $\varrho^2 = -1 - \varrho$) kan skrives som

$$2a + 2b\varrho,$$

der a og b er hele tall og $a + b \neq 3h - 1$ for alle hele h , slik at z_n danner hjørnene i jamstore regulære sekskanter som fyller planet innenfor enhver avstand fra $z_0 (= 0)$ ved tilstrekkelig mange gjentagelser av S og T .

Firkanten F og de to firkantene en får ved en og to anvendelser av S , utgjør en regulær trekant med midtpunkt i z_0 . Ved å la S og T veksle som angitt ovenfor, får en i samme rekkefølge som z_n tre og tre firkanter som utgjør trekanter med midtpunkt i disse, og som fyller planet innenfor enhver avstand fra z_0 . Da både S og T er rotasjoner, er et punkt ζ av en fremkommet firkant ensliggende med det punktet av F som det er fremgått av.

H. Killingbergtrø

Også løst av Rolv Rasmussen (jfr. oppg. 123 foran) og av en anonym innsender som også har sendt løsninger av oppg. 115, 116 og 117.

114. La n og r betegne naturlige tall, og

$$\sigma_r = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^r}, \quad s_r = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \binom{n}{p} \frac{1}{p^r}.$$

Angi en rekursjonsformel ved hvis hjelp en kan uttrykke s_r ved $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$. En finner f. eks.

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1^2), \quad s_3 = \frac{1}{6}(\sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3).$$

W. Ljunggren

Løsning: It follows from

$$\sigma_r = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^r}, \quad s_r = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \binom{n}{p} \frac{1}{p^r}$$

that

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sigma_r t^r = \sum_p \frac{t}{p-t}, \quad \sum_{r=0}^{\infty} s_r t^r = \sum_p (-1)^{p-1} \binom{n}{p} \frac{p}{p-t}.$$

Let $f(t) = \prod_{p=1}^n (p-t)$; then

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} = \sum_p \frac{1}{p-t}, \quad \frac{n!}{f(t)} = \sum_p (-1)^{p-1} \binom{n}{p} \frac{p}{p-t}.$$

Thus

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} = \sum_1^{\infty} \sigma_r t^{r-1},$$

which implies

$$\frac{n!}{f(t)} = \exp \sum_1^{\infty} \frac{\sigma_r}{r} t^r.$$

Hence

$$(*) \quad \sum_{r=0}^{\infty} s_r t^r = \exp \sum_1^{\infty} \frac{\sigma_r}{r} t^r.$$

This yields

$$s_0 = 1, \quad s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1^2), \\ s_3 = \frac{1}{6}(2\sigma_3 + 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^3), \quad \text{etc.}$$

Remark: It is clear from (*) that

$$(**) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\sigma_r}{r} t^r = \log \left(1 + \sum_1^{\infty} s_r t^r \right),$$

which yields

$$\sigma_2 = 2s_2 - s_1^2, \quad \sigma_3 = 3s_3 - 3s_1s_2 + s_1^3, \quad \text{etc.}$$

Indeed σ_r is a polynomial in $s_1, \dots, s_r$ with integral coefficients. This is easily proved if we note that (**) implies

$$\sum_1^{\infty} \sigma_r t^r = \frac{\sum_1^{\infty} r s_r t^r}{1 + \sum_1^{\infty} s_r t^r},$$

which also gives the formula

$$r s_r = \sigma_r + \sigma_{r-1} s_1 + \sigma_{r-2} s_2 + \dots + \sigma_1 s_{r-1}. \quad L. Carlitz$$

115. Vis at

$$1 - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p} \prod_{k=1}^p \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right).$$

H. Killingbergtrø

Løsning: It follows at once from

$$\cos \pi x = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2} \right)$$

that

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

On the other hand, if

$$U_p = \frac{1}{4p} \prod_{k=1}^p \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^2 = \frac{2^{4p-2} (p!)^3 (p-1)!}{((2p+1)!)^2},$$

we get, using $U_p = ((2p+1)^2 - 4p(p+1)) U_p$:

$$U_p = V_{p-1} - V_p, \quad V_p = \frac{2^{4p} (p!)^3 (p+1)!}{((2p+1)!)^2}.$$

Thus

$$S_n = 1 - \sum_{p=1}^n U_p = 1 - \sum_{p=1}^n (V_{p-1} - V_p) = V_n.$$

Using Stirling's formula, we find that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{\pi}{4},$$

so that

$$1 - \sum_{p=1}^{\infty} U_p = \frac{\pi}{4}.$$

L. Carlitz

Også løst av Ragnar J. Solvang.

116. La n være et naturlig tall, og sett

$$a_{1,n} = n^2, \quad a_{m+1,n} = (n-m) \left\lceil \frac{a_{m,n}-1}{n-m} \right\rceil, \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

Vis at $b_n = a_{n,n}$ er det n -te tall i den tallfølgen 1, 3, 7, 13, ... som defineres i oppg. 107 (NMT, denne årgang, s. 48).

H. Killingbergtrø

Løsning: Lad $\{b_n^{(1)}\}$ være den naturlige talrække 1, 2, 3, ... og $\{b_n^{(r)}\}$ den talrække, som står tilbage etter de $r-1$ første uttyndinger. Denne fremkommer således ved at slette hvert r -te tal i den $(r-1)$ -te række.

Da må $b_n^{(n)}$ være det n -te element b_n i rækken 1, 3, 7, 13, ..., idet de følgende uttyndinger ikke vil berøre $b_n^{(n)}$.

Lad nu $b_k^{(r-1)}$ være det element i $(r-1)$ -te række, som er lig $b_k^{(r)}$ ($r \geq 2$). Idet k' er nedre index for det k -te tal i rækken

$$b_1^{(r-1)}, \dots, b_{r-1}^{(r-1)}; b_{r+1}^{(r-1)}, \dots, b_{r+(r-1)}^{(r-1)}; \\ b_{2r+1}^{(r-1)}, \dots, b_{2r+(r-1)}^{(r-1)}; \dots,$$

er $k' - k$ det største antal »hele« grupper, på hver $r-1$ elementer, til sammen indeholdende højest $k-1$ tal, d. v. s. $k' - k = \left\lceil \frac{k-1}{r-1} \right\rceil$. Da k er et helt tal, fås

$$(*) \quad k' = \left[k + \frac{k-1}{r-1} \right] = \left[\frac{kr-1}{r-1} \right].$$

Idet nedre index for det element i $(n-m+1)$ -te række ($m=1, 2, \dots, n$), som er lig $b_n^{(n)}$, sættes lig $a_{n,m}^{(n-m+1)}$, er

$$\frac{a_{n,1}}{n} = n, \text{ d. v. s. } a_{n,1} = n^2 \quad \text{og} \quad a_{n,n} = b_{\frac{a_{n,n}}{1}}^{(1)} = b_n^{(n)} = b_n.$$

Ved hjælp af (*) fås den ønskede rekursionsformel, idet man sætter $r=n-m+1$ ($m=1, 2, \dots, n-1$, hvorved $r \geq 2$):

$$\frac{a_{n,m+1}}{n-m} = \left[\frac{\frac{a_{n,m}^{(n-m+1)}}{n-m+1} - 1}{(n-m+1) - 1} \right]$$

eller

$$a_{n,m+1} = (n-m) \cdot \left[\frac{a_{n,m} - 1}{n-m} \right].$$

Chr. U. Jensen

117. Bevis for alle naturlige n formlen

$$\sqrt{n} = 2^{n-1} \prod_{v=1}^{\infty} \prod_{q=1}^{2n-1} \frac{2nv-q}{2nv-n}.$$

Anders Bager

Løsning: Let

$$\begin{aligned} P_N &= \prod_{v=1}^N \prod_{q=1}^{2n-1} \frac{2nv-q}{2nv-n} = \prod_{v=1}^N \frac{(2nv)!}{(2n(v-1))!} \cdot \frac{1}{n^{2n}(2v)(2v-1)^{2n-1}} \\ &= \frac{(2nN)!}{n^{2nN}} \cdot \frac{(2^N \cdot N!)^{2n-2}}{((2N)!)^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Since

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(2\pi N)^{\frac{1}{2}} N^N e^{-N}} = 1,$$

it follows that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = n^{\frac{1}{2}} 2^{-n+1}.$$

L. Carlitz

Også løst av Ragnar J. Solvang.

RESULTAT AV PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASSELEVER

(Oppgavene sto i NMT 4 (1956), s. 226-227.)

I konkurransen var det 8 deltakere. H. K. H. Kronprinsens premie kr. 100 for beste besvarelse ble tildelt Øyvind Frøyshov, elev av 5 Røa, Hamar katedralskole. Et tidligere ikke utdelt like stort premiebeløp ble tildelt Sven Nielsen, elev av 5R, Hegdehaugen skole (Oslo). 3 av de andre deltakerne fikk diplomer.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1957 på de matematiske gymnasielinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. Ligningen

$$2x^6 - 4x^5 + 2x^4 + cx^2 - x + d = 0$$

har dobbeltroden 1.

Bestem c og d .

Løs derefter ligningen, idet de komplekse rødder angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I en indskrivelig, konveks firkant $ABCD$ er vinkel $A = 98^\circ, 84$, siden $BC = 2,989$ og diagonalen $AC = 3,816$; endvidere er den vinkel, som diagonalen AC danner med siden BC , lig med $56^\circ, 64$.

Beregn firkantens ubekendte vinkler og sider samt diagonalen BD .

3. Undersøg og tegn kurven

$$y = (\ln x)^2 - 2 \ln x,$$

hvor $\ln x$ betyder den naturlige logaritme af x .

Beregn derefter arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og x -aksen.

Matematik II.

1. Den 1. maj 1950 er der i et hus optaget et statslån på 40000 kr.; rentefod 2% p.a. Lånet forrentes og afdrages ved årlige ydelser, der alle betales den 1. maj, første gang den 1. maj 1951. De første 20 ydelser er hver på 800 kr. (d. v. s. den årlige rente af det oprindelige lån), og de følgende ydelser er hver på 1200 kr. undtagen den sidste, der er mindre end 1200 kr.

Hvilket år betales den sidste ydelse, og hvor stor bliver denne?

2. P er et variabelt punkt på hyperblen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Normalen til hyperblen i P skærer x -aksen i punktet N .

Find N 's abscisse udtrykt ved P 's abscisse.

På liniestykket NP 's forlængelse udover P afsættes punktet S således, at $PS = NP$.

Find ligningen for det geometriske sted for S .

Undersøg det geometriske steds art og dets beliggenhed i koordinatsystemet, såvel for $a \neq b$ som for $a = b$.

3. I en pyramide $P-ABCD$ er grundfladen en konveks firkant $ABCD$ med siderne $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$ og $AD = \sqrt{21}$, medens vinkel C er ret.

Bevis, at grundfladen har en omskrevne cirkel.

Højden PQ , der har sit fodpunkt Q i midtpunktet af diagonalen BD , har længden 6.

Find pyramidens rumfang samt toplansvinklen langs kanten CD .

P er toppunktet for en kegleflade, på hvilken alle punkter af firkant $ABCD$'s omskrevne cirkel er beliggende. Denne kegleflade skæres med en plan gennem D parallel med keglefladens tangentplan langs frembringeren gennem P og B .

Beregn afstanden mellem brændpunkt og toppunkt i den fremkomne parabel.

FINLAND

Längre kursen.

1. Vid nyåret 1957 stego somliga hyror med 27 %. Med huru många % nedgingo därigenom de för annat bruk till buds stående medlen för en familj, vars hyresutgifter varit 15 % av inkomsterna?

2. Av andra, fjärde, sjätte o. s. v. termen i en oändlig, konvergent geometrisk serie bildas en ny serie. Summan av de första termerna i den nya och den ursprungliga serien är $= 1$, och summan av själva seriernas summor är $= 0$. Angiv begynnelsetermerna i den ursprungliga serien.

3. Skillnaden mellan samt summan och produkten av rötterna till en andra-grads ekvation bilda en aritmetisk serie, medan skillnaden, produkten och summan (i denna ordning) bilda en geometrisk serie. Uppskriv ekvationen.

4. Origo och punkten $(2, -4)$ äro hörnpunkter och linjen $x + 2y + 3 = 0$ diagonal i en rektangel. Beräkna dennas area. Rita figur.

5. Bevisa att ett plan, som innehåller normalen mot ett annat plan, utgör ett normalplan till detta.

6. Med en given sträcka a som bas uppritas en likbent triangel och i denna inskrives en kvadrat med två hörn på triangelns bas. Bestäm triangeln så, att förhållandet mellan kvadratens och triangelns areor blir så stort som möjligt.

7. En i en cirkel inskriven liksidig triangel är med en linje, parallell med en triangelnsida, delad i två lika stora delar. Bestäm förhållandet mellan areorna av den i deltriangeln inskrivna cirkeln och den givna.

8. En kub och en sfär ha gemensam medelpunkt. Sfärens yta går genom mittpunkterna av kubens kanter. Huru stor del av kubens volym faller utanför sfären? (Exakt värde och närmevärde med tre decimaler.)

9. Lös fullständigt ekvationen $\sin(x + 45^\circ) = \sin 2x$.

10. Bestäm det minsta värde som funktionen $2\log(x+1) - \log x$ kan anta för positiva värden på x . Logaritmsystemets bas antas vara större än 1.

ÍSLAND

I.

1. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{4x(x-3)}{(x-6)^2}.$$

Gennem punktet $C(4, 4)$, der ligger på kurven, tegnes en linie l således, at den skærer kurven i to andre punkter, A og B . Vis, at når linien l drejes om C , så vil midtpunktet af liniestykket AB bevæge sig på en linie, der er parallel med y -aksen. Bestem denne linie.

2. Bestem alle løsninger af ligningen

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1,$$

og vis at summen af røddernes 6. potenser er lig den dobbelte sum af deres 4. potenser.

3. $O-ABCDEF$ er en regulær sekssidet pyramide. Længden af hver kant i grundfladen er a cm og længden af pyramidens højde, OO_1 , er $\frac{3}{2}a$ cm. Beregn vinklen mellem sideflade og grundflade, samt vinklen mellem sidekant og grundflade.

En plan gennem grundfladekanten AB og vinkelret på sidefladen OED skærer kanterne OC , OD , OE og OF i C_1 , D_1 , E_1 og F_1 . I hvilke forhold deles sidekanterne af disse punkter? Beregn til sidst rumfanget af pyramiden $O-ABC_1D_1E_1F_1$.

II.

1. I trekant ABC er $a = 8$ cm, $b - c = 3$ cm og vinklen $B = 60^\circ$. Beregn trekantens ubekendte sider og vinkler samt radierne i den indskrevne og den omskrevne cirkel.

2. Bestem skæringspunkterne mellem kurverne $y = x^2$ og $y = x^2 + \sin 2x$ i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Bestem et punkt på den første kurve og et punkt på den anden kurve med samme abscisse, således at tangenterne i disse punkter er parallelle. Hvor mange sådanne punktpar findes der i intervallet? Den figur, der begrænses af kurverne i intervallet, drejes 360° omkring linien $y = -1$. Beregn rumfanget af det frembragte omdrejningslegeme.

3. a) Vis, at ligningen $x^2 + y^2 + 2ky - 1 = 0$ for enhver værdi af k fremstiller en cirkel. Bevis, at alle cirkler i denne samling går gennem to faste punkter, og bestem disse punkter. Bestem dernæst radikalcentret for cirklen

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$$

og to vilkårlige cirkler af ovennævnte samling og vis, at det er uafhængigt af valget af disse.

b) Konstruer en cirkel, der går gennem to givne punkter og skærer en bue på 120° af en given cirkel.

NORGE

Reallinjen.

1. a) Skriv opp betingelsen for at en (uendelig) geometrisk rekke er konvergent, og skriv opp formelen for summen av rekken i dette tilfelle.

b) Vi har en (uendelig) geometrisk rekke som er konvergent. Det tredje leddet er $\sqrt[3]{m}$, der m er forskjellig fra null. Rekkens sum er lik produktet av de fire første leddene i rekken. Finn rekkens kvotient (forholdstall) uttrykt ved m , og avgjør hvilke verdier m kan ha.

c) En (uendelig) geometrisk rekke har kvotienten $\frac{1}{3}$. Det første leddet i rekken er lik $\lg(27x^3 + 7)$, og det andre leddet er lik $\lg(3x + 1)$, der $\lg$ betyr briggske logaritmer. Regn ut x og rekkens sum.

2. I en sirkel med radius R er innskrevet en trekant ABC . Hjørnet C og sirkelens sentrum O ligger på samme side av AB . Buen AB er 120° , og vinkelen BAC er x grader. Tegn figur ved hjelp av passer og linjal; velg $R = 5$ cm. Finn av figuren de grenser som x må ligge mellom.

Finn arealet av $\triangle ABO$ uttrykt ved R . Finn deretter arealet av $\triangle ABC$ uttrykt ved R og trigonometriske funksjoner av x . Finn ved regning hvor stor x må være for at arealet av $\triangle ABC$ skal bli lik arealet av $\triangle ABO$. Konstruer i dette tilfelle $\triangle ABC$ på samme figur som før, men uten å gjøre bruk av beregningen ovenfor. Påvis at beregning og konstruksjon gir de samme verdier for x .

Finn til slutt av figuren for hvilke verdier av x arealet av $\triangle ABC$ er mindre enn arealet av $\triangle ABO$.

3. En parabel har sin akse langs y -aksen. Parabelen går gjennom det faste punktet $A(a, 0)$ på den positive x -aksen, og tangenten til parabelen i dette punktet har vinkelkoeffisienten 1. Vis at parabelens likning blir $x^2 - 2ay - a^2 = 0$. Finn koordinatene til parabelens brennpunkt og likningen for dens styrelinje.

Velg $a = 4$ cm, og bestem ved konstruksjon det punkt B på parabelen som ligger i første kvadrant, og som har ordinaten a . Konstruer tangenten til parabelen i B , og vis geometrisk at den også tangerer sirkelen $x^2 + y^2 = a^2$. Kall tangeringspunktet med sirkelen for P . Utfør konstruksjonene på millimeterpapiret, og forklar framgangsmåten. Tegn parabelen på figuren.

La så Q være et punkt på parabelen med positiv abscisse (x). Regn ut produktet av Q 's abscisse og ordinat uttrykt ved x og konstanten a . Bestem den verdien av x som gjør det nevnte produktet minst mulig, og vis at Q i dette tilfelle ligger på radien til P i sirkelen $x^2 + y^2 = a^2$.

Beregn — uttrykt ved a — arealet av det flatestykket som er begrenset av parabelen, x -aksen og parabeltangenten i B .

Projeksjonstegning. Et skråplans horisontaltrase danner en vinkel på 45° med grunnlinjen. Skråplanets bøyningvinkel med horisontalplanet er 30° , og begge trasene går til høyre.

En regulær, firkantet pyramide $ABCDT$ står med grunnflaten $ABCD$ på skråplanet. Siden i pyramidens grunnflate er 7,5 cm, og pyramidens høyde er 10 cm. Hjørnet A ligger i skråplanets horisontaltrase, 9 cm fra trasenes skjæringspunkt, og hjørnet D ligger i vertikaltrasen. Av grunnflatens hjørner ligger B lengst fra vertikalplanet.

Pyramiden blir skåret av et plan som er parallelt med BC , danner en vinkel

på 30° med pyramidens grunnflate og går gjennom pyramidehøydens midtpunkt. Planet skjærer sidekantene AT , BT , CT og DT i henholdsvis a , b , c og d . Tb er større enn Ta .

Skjæringsplanet blir så fjernet, og den avskårne topppyramiden $abcdT$ blir dreid til høyre om snittlinjen bc til toppunktet T faller i det gitte skråplan.

Tegn horisontal- og vertikalprojeksjonen av de to pyramidedeler i den stilling de nå har. Tegn trasene til det gitte skråplan.

Legg grunnlinjen parallell med tegnearkets langside, 12 cm fra øvre kant, og la skråplanet skjære grunnlinjen 13 cm fra tegnearkets venstre kant.

SVERIGE

Matematiska grenen.

1. Bestäm konstanten a , så att funktionen $\frac{x-a}{x^2-ax+1}$ får ett maximum för $x=0$.

2. I ekvationen $\operatorname{tg} y = \frac{1+cx}{c-x}$ är c en konstant. Om $x \neq c$ och y ligger i intervallet $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, så bestämmes y genom ekvationen som en deriverbar funktion av x . Bevisa, att denna funktion uavhengende av værdet på konstanten c satisfierar ekvationen $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

3. Punktene A og B på en parabel ligger lika langt från vertex. En tredje punkt P på parabolen sammanbindes med A og B . Sammanbindningslinjene skär parabelns axel eller dess förlängning i punktene C og D . Bevisa, att sträckan CD halveras av vertex.

4. I en triangel är en vinkel 45° . Medianen till den motstående sidan bildar med denna en vinkel av 45° . Beräkna triangelns obekanta vinklar.

5. I en rätvinklig parallelepiped är två motstående sidoytor kvadratiske. Hörnen i den ena av dessa ligger på ytan av en sfär med radien R , og den andra sidoytan tangerar sfären. Hur stora är parallelepipedens kanter, om deras summa är så stor som möjligt?

6. Kurvorna $y = \sin x$ og $y = \sin(x-v)$, där v är en konstant, som inte är en multipl av 2π , begränsar tillsammans ett oändligt antal lika stora slutna områden. Beräkna ytan av ett av dessa i det fall, då $v = \frac{\pi}{3}$. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att ytan bestämmes även för det fall, då v har ett godtyckligt värde.

7. Høyden i en given likesidig triangel är 6 cm. Bestäm geometriska orten för en punkt så belägen, att summan av kvadraterna på dess avstånd till triangelns sidor är konstant og lika med $a \text{ cm}^2$. Diskutera og ange ortens läge i förhållande till triangeln för olika värden på konstanten a .

8. Funktionen $y=f(x)$ har bestämda första og andra derivator, og $f''(0) \neq 0$. Funktionskurvan går genom origo og tangerar där x -axeln. Normalen till kurvan

i en godtycklig punkt P skär y -axeln i punkten N . Bevisa, att punkten N obegränsat närmar sig till en punkt N_0 med y -koordinaten $\frac{1}{f''(0)}$, då P obegränsat närmar sig origo. Detaljerad motivering erfordras.

Biologiska grenen.

1. En rät cirkulär kon, en rät cirkulär cylinder och en sfär har lika stora totala begränsningsytor. Konens och cylinderns bottenytor har lika stor radie som sfären. Bestäm, hur de tre kropparnas volymer förhåller sig till varandra, och ange resultatet exakt och i så enkel form som möjligt.

2. Den längre av de parallella sidorna i ett parallelltrapets ligger längs x -axeln. Ekvationerna för två av de övriga sidorna är $2x - y = 0$ och $3x + y - 8 = 0$. Bestäm ekvationen för den mindre av de parallella sidorna så, att trapetsets yta blir 4 ytenheter.

3. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av termernas kvadrater dubbelt så stor som seriens summa. Vilka värden kan seriens första term anta?

4. En vinkel i en romb delas i förhållandet 1:2 av en rät linje, som delar en av rombens sidor innantill i förhållandet 1:2. Bestäm rombens vinklar.

5. Kurvan $y = ax^3 - ax^2 + bx + 3$ har en minimipunkt i punkten $(-1; 0)$. Bestäm konstanterna a och b , upprita kurvan och beräkna ytan av det ändliga område, som begränsas av kurvan och x -axeln.

6. På kurvan $2y = 11 - 2x^2$ är en punkt P så belägen, att normalen till kurvan i P skär de positiva koordinataxlarna. Bestäm normalens ekvation, då ytan av den triangel, som normalen bildar med de positiva koordinataxlarna, är så stor som möjligt. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att de värden anges, som abskissan för punkten P kan anta.

7. I en pyramid är basytan en kvadrat $ABCD$ med sidan 2 cm; O är pyramidens spets. Sidoytan OAB är vinkelrät mot basytan, och sidokanterna OA och OB är lika långa. Pyramidens höjd är 3 cm. Genom en punkt P på pyramidens höjd lägges ett plan, som går genom baskanten CD . Ytan av snittfiguren mellan detta plan och pyramiden är en funktion av sträckan OP . Ange denna funktion, undersök den med avseende på maximi- og minimivärden samt beskriv, hur snittytan varierar, då punkten P genomlöper pyramidens höjd.

8. En funktion $f(x)$ och dess derivata är båda kontinuerliga i intervallet $0 \leq x \leq 10$. I intervallet $0 \leq x \leq 4$ är funktionen definierad som ett polynom av första graden och i intervallet $4 \leq x \leq 10$ som ett polynom av andra graden. Vidare är $f(0) = 4$, $f(2) = 5$ och $f(10) = 0$. Bestäm funktionen, och upprita den motsvarande funktionskurvan. Ange särskilt funktionens största värde.

SUMMARY IN ENGLISH

DAVID FOG: *Probability theory and statistics in the Danish grammar school.* (Danish.)

The article contains a lecture given before the association of Danish grammar school teachers of mathematics, and was prepared in cooperation with M. Pihl. The desirability of introducing probability theory and statistics is an open question, but if it should be done, the author outlines his views as to what could be included and how it should be presented.

The following topics can be treated with rigour: The elementary probability concept, with the laws of addition and multiplication. Discrete distributions (also in two dimensions) with mean value and dispersion.

More difficult topics are the inequality of Tchebycheff and the law of large numbers. Only indications of proofs can be given for continuous distributions and the corresponding generalized concept of probability. Some details, and several applications, should be given of the normal (Gaussian) distribution.

JOHANNES LOHNE: *Graphical illustration of summation formulae, II.* (Norwegian.)

The well-known formula

$$\sum_{x=1}^n \binom{p+x-1}{p} = \binom{n+p}{p+1}$$

is illustrated graphically for $p=2$ and $p=3$ in figs. 4-5 pp. 136-137. A geometrical representation of Pascal's triangle of binomial coefficients is shown in fig. 6 p. 138.

R. TAMBS LYCHE: *A monotonously increasing continuous function which is not differentiable in any interval.* (Norwegian.)

A function with the properties of the title is given by

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x - \alpha_n|, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

where $\{\alpha_n\}$ is the sequence of rational numbers between 0 and 1, arranged for instance by increasing denominators:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1; \alpha_3 = \frac{1}{2}; \alpha_4 = \frac{1}{3}, \alpha_5 = \frac{2}{3}; \alpha_6 = \frac{1}{4}, \alpha_7 = \frac{3}{4}; \dots$$

It is shown that $f(x)$ is differentiable only for irrational x , whereas for a rational value of the argument:

$$f'_+(\alpha_k) - f'_-(\alpha_k) = 2^{-k+1}.$$