

MATEMATIKKENS PLASS I AMERIKANSK SKOLE OG LÆRERUTDANNING, II¹

KAY PIENE

Undervisningen i matematikk. Det er ikke lett å gi en uttalelse om den amerikanske matematikkundervisning og hvordan den arter seg i praksis bare etter å ha vært en relativ kort tid i U. S. A. og med noen enkelte skolebesøk. Det lille jeg så — supplert med erfaring fra lesning og fra samtaler med lærere —, sier meg at denne undervisningen ikke er vesensforskjellig fra vår. Som hos oss er grunnformen klasseundervisning. Læreren vender seg til hele klassen og alle elever går i det store og hele samlet fram. Samtidig forekom det meg at den enkelte elev kanskje hadde en noe større rolle enn hos oss. Der ble mer enn hos oss gitt plass til regning av oppgaver — f. eks. slik at 5–6 elever kunne regne samtidig på de store tavlene. Eller de kunne bli kalt fram for å forsvare sitt arbeid overfor de andre i klassen. Videre er amerikanske elever opplagt flinkere enn norske til å *spørre*. I en klasse som riktignok ikke var stor, stilte faktisk hver elev et spørsmål i løpet av timen, og det var stort sett forstandige og vesentlige spørsmål. Men også svake elever spør — derfor gir en amerikansk klasse ofte inntrykk av å ha dårligere elever enn våre —, og lærerne er utrolig flinke til å svare; de føyer noen rosens ord til et godt spørsmål og er tålmodige og uanfektete om spørsmålet ikke er så bra.

Jeg hadde ellers et visst inntrykk av at vår undervisning stort sett virker noe fastere, men det beste jeg så i U. S. A. var på den andre siden helt fremragende. Her var det faktisk slik at en kunne svare ubetinget ja på det lærerspørsmålet J. W. A. Young stiller i sin matematikk-metodikk [26]: Har hver enkelt elev hatt noe igjen for at jeg har vært i deres klasse idag?

Jeg nevnte at klasseundervisning synes å være den dominerende undervisningsform. Sant nok har også andre metoder blitt anbefalt og til dels

¹ Første del sto i NMT, denne årgang, s. 5–18. Der finnes også den fullstendige *litteraturfortegnelse* for hele artikkelen.

også vært satt ut i praksis. Det gjelder f. eks. *laboratoriemetoden*, der en har et spesielt matematikkrom med verktøy, instrumenter osv., der elevene lærer »by doing«, noe som vel særlig egner seg ved innføringsundervisningen [27]. Videre har det vært drevet forsøk med *individuell undervisning* og *gruppeundervisning*, men alt i alt fikk jeg inntrykk av at slikt hører til sjeldenhetene.

Derimot tror jeg nok at en i amerikanske skoler mer enn hos oss bruker forskjellige hjelpemidler til matematikkundervisningen. En ser det bl. a. av de mange avertissementer om modeller og instrumenter, filmer og lysbilder, og annet som kan tjene til å belyse stoffet eller til å øke elevenes interesse for faget.

Jeg så en del av slikt utstyr i en forelesningsrekke for vordende matematikklærere, likesom det oftest var demonstrasjoner av slikt på matematikklærermøter.

Til det beste regner jeg de enkle »landmålingsinstrumenter« som vinkel-spel og jakobsstav, som ble brukt til måling av utilgjengelige linjestykker, som høyden av et tre, bredden av en elv, og som til løsningen krevde bruk av enkle geometriske setninger, ensformete trekanter, Pytagoras o. l. Jeg er ikke i tvil om at det her er muligheter som bør utnyttes og som vil skape økt innsikt i og større interesse for faget. Jeg kan i den forbindelse vise til boka *Surveying instruments* av E. R. Kiely, som i en særdeles god framstilling gir oppmålingsinstrumentenes historie og deres bruk i klassen [32, bd. 19]. Her kan en få praktiske idéer som måtte kunne realiseres i samarbeid med bl. a. sløydlæreren.

Av annet materiale jeg så kan nevnes en modell i balzatre av en bikube, som var svært interessant [27]. Videre kan nevnes en rekke såkalte dynamiske — kinematiske ville være et bedre ord — instrumenter laget av pinner og snorer (elastiske), slik at en kunne få fram figurer som oppstår når f. eks. tre sider i en firkant er konstante, den fjerde variabel, eller til demonstrasjon av geometriske steder osv. Dette er igjen instrumenter som må kunne lages i sløydtimene.

Alt i alt var mitt inntrykk av det jeg så av modeller, instrumenter o. l. til bruk i matematikktimen at en del med stort hell kunne innføres hos oss, mens noe bare ville bety tidsspille. Faren er opplagt den, som det ble sagt, at en bruker slike hjelpemidler for å unngå å undervise, ikke som hjelp.

Dette siste gjelder sikkert de matematiske filmer, filmband og lysbilder som det eksisterer ikke så helt få av. Her var mitt hovedinntrykk det at det meste av det som er laget, faktisk ikke gir noe som ikke både fortære og mer effektivt kan tas på en tavle av læreren. Et unntak var en ypperlig film om regnestaven (U. S. Office of Education Training

Films), der det ble mulig å få demonstrert detaljer som det ellers er vrient å vise i en klasse. Jeg så også en liten regnestav av papp som elevene kunne lage sjøl — verktøyet var litt lim og en stiftmaskin. Ellers er det selvsagt noe en film kan greie som en lærer ikke vil få til. Den kan f. eks. vise den kurveskare som kommer fram når en parameter i en viss funksjon varierer. Noe helt ut tilfredsstillende eksempel på en slik film så jeg imidlertid ikke, og ikke alt det jeg så av matematiske filmband eller lysbilder imponerte. En vitenskapelig vurdering av film etc. har D. Johnson [28] gitt. Han hevder på grunnlag av resultater fra eksperimentene bl. a.: 1) audio-visuelle hjelpemidler bør tjene til å supplere, ikke til å repetere undervisningen, 2) før en film kommer på markedet, skal den underkastes vitenskapelig granskning.

De beste hjelpemidler til matematikkundervisningen er så gode og verdifulle at det ville være gunstig om vi kunne ta dem i bruk. Vi må imidlertid være klare over at det ennå i for liten utstrekning foreligger velfunderte konklusjoner fra utnyttelsen av hjelpemidler i matematikktimene. Det er ellers klart at også *vi* må granske utbyttet av slike hjelpemidler, vi kan ikke uten videre bruke de resultater en finner i U. S. A., som ikke behøver å være gyldige hos oss.

Et hovedproblem i amerikansk matematikkundervisning blir stadig mer aksentuert: Hvorvidt og hvordan skal en ta hensyn til det faktum at skolen etterhvert omfatter et bredere utvalg av elever, slik at spredningen i begavelsesgrad blir stadig større i klassene? En skal øve opp gode ledere i matematikk, men også forstandige forbrukere, sier Reeve.

En differensiering etter begavelsesgrad blir vanskeliggjort eller umuliggjort i de mange små high schools. En utvei som brukes er denne: De svakeste elevene (intelligensmessig) beviser bare de setningene som ikke er markert, gjennomsnittselevene dessuten de setninger som er merket med én stjerne, mens de flinkeste tar de som har to stjerner.

En viss oppdeling etter begavelse blir brukt; noen skoler har to linjer (two tracks), slik at den ene er for de som ikke skal ha mer matematikk, den andre for de som skal videre. Ved noen skoler er det hver uke en ekstratime, tildels med eldre, flinke elever som »lærere«, for de som er svake, har fått huller el. l. Ved små skoler blir visse kurs bare holdt annet hvert år.

Spesiell undervisning for de særlig begavete har vært prøvd noen steder, enten ved å øke pensum (f. eks. ta med infinitesimalregning), ved å korte lesetiden eller ved en kombinasjon av dette. På denne måten kan flinke elever spare ett eller to år — kanskje mer — i sin skolegang [29]. I

New York blir således elever med $IQ > 130$ satt i spesielle klasser (rektor har endelig avgjørelse), og de greier da 7., 8. og 9. klasse på to år.

Vurdering av ytelsene i matematikk. I større grad enn hos oss er amerikansk skole opptatt av å vurdere det som presteres i skolen. En har et særskilt ord, *evaluation*, for å betegne denne vurdering som gjelder nær sagt alt som foregår i skolen, heri inkludert elevenes (og lærernes) holdning og innstilling og om mulig deres personlighet. Det blir ikke bare tale om vurdering ved hjelp av vanlige eksamener og konvensjonelle intelligenstester eller standpunktprøver. Her kommer med innstillings-, personlighets- og karaktertester, vurderingsskalaer og spørreskjemaer, intervjuer og observasjonsteknikk m. m. Disse videre synspunkter blir omtalt i et verdifullt kapitel om «evaluation» i beretningen fra The Joint Commission [3, s. 162].

Vurderingen i U. S. A. er altså langt allsidigere enn vår, den prøver å få tak i så mye mer. Til gjengjeld har de nordiske land noe en savner i U. S. A.: Offentlige eksamener for alle elever i hele riket, med samme oppgaver og sensur utenfor den skolen eleven har fulgt. Dessuten blir nordisk skole mer kontrollert gjennom inspeksjon, og er i det hele mer enhetlig og også mer oversiktlig enn amerikansk skole.

Helt uten store felles eksamener er likevel U. S. A. ikke. I staten New York har det siden 1880 vært en eksamen i matematikk, den såkalte Regents' Examinations (Board of Regents of the University of the State of New York) med felles oppgaver for hele staten. Oppgavene jeg har sett fra denne prøven er bygd opp etter det typiske amerikanske systemet, mange og korte oppgaver, hver gjerne med bare ett svar. Hele prøven minner således mye om en intelligenstest. Vi finner ikke slik som hos oss oppgaver med mange, mer eller mindre sammenhengende spørsmål, eller så vidt komplekse i sin oppbygging at det blir et vesentlig arbeid å finne ut det som er gitt, og det som skal finnes. Heller ikke blir det plass for drøftinger, for utarbeiding av en oversikt over de forskjellige situasjoner som kan oppstå ettersom de gitte størrelser er slik eller slik.

Besvarelsene på de amerikanske oppgavene er lettere å sensurere enn våre, og de er mer representative for hele det pensum som prøven gjelder. På den andre siden vil en prøve med korte oppgaver — spesielt hvis disse bygges opp etter noenlunde ens mønster — lett kunne invitere til drill. Dyktige og drevne lærere vil kunne trene elever til å greie prøven, selv om de ikke har nok av den matematiske innsikt og spesielt den fulle forståelse som skulle prøves. Om Regents-prøven ble det i hvert fall fra kompetent hold uttalt at en slik preparering er mulig.

Om denne prøven kan jeg nevne at i 1952 var det bl. a. et oppgavesett

i plangeometri som skulle besvares på 3 timer (9^{15} – 12^{15}). Det var i del I 25 spørsmål, i II skulle 3 av 4 besvares, i III 1 av 2 og i IV også 1 av 2. Det var angitt hvor mange poeng (»credits«) hvert spørsmål eller hver del gir.

I romgeometri var det også en 3 timers prøve med tre deler. I del I var det 20 spørsmål (geometriske sted, beregninger osv.), i II skulle 2 spørsmål av 4 besvares og i III 3 av 4. I del I var det $2\frac{1}{2}$ credits pr. rett svar, mens II og III kunne gi 10 credits hver. For ett spørsmål var formelen $V = \frac{1}{3}h(G + g + \sqrt{Gg})$ oppgitt. I 1954 var det vel 150 tusen som tok Regents' Examinations i matematikk, og 80% som besto prøven.

Ved Regents' Examinations er der også spørsmål av logisk art, tildels uten direkte geometrisk betydning. En skal f. eks. vise at argumenter er »usunne« på grunn av et feilaktig resonnement, valt blant fire oppgitte. F. eks.: John har lært at parallelle korder avskjærer like store buer av en sirkel. I hans tegning er AB og CD to korder som skjærer hverandre. Han slutter derfor at buen AC ikke kan være lik buen BD .

Det kan i denne forbindelse minnes om at betenknningen Mathematics in general education [2, s. 369] hevder at en mest mulig bør unngå ren memorering, at elevene bør få god trening i logikkens fundamenter, bør finne bevis selv for ukjente setninger og anvende sine kunnskaper i deduktiv tenkning i ikke-geometriske situasjoner.

En annen fellesprøve er den som arrangeres av det såkalte College Entrance Examination Board (CEEB), og som først og fremst er ment å bli brukt ved opptaking til et college, altså den institusjon som i U. S. A. faller mellom skole og universitet, med felles trekk fra begge disse institusjoner og med elever fra 17 til 22 år stort sett. Likevel skjer i 90% av tilfellene overgangen på grunnlag av elevenes karakterer i high school.

Etter det jeg har sett er opplagt CEEB-oppgavene mer objektive enn våre eksamensoppgaver, og de viser også matematiske kunnskaper og ferdigheter innen et stort område, men jeg tror våre oppgavesett er bedre modenhetsprøver.

Til å begynne med var CEEB-oppgavene prøver omtrent som våre. I 1901 var det f. eks. oppgavesett i elementær algebra, videregående algebra, geometri, romgeometri og trigonometri.

Siden kom det inn nye oppgaveområder, også slike som kombinerer disipliner (eksempelvis plan + romgeometri). Etterhvert har en prøvd å gjøre dem mer elastiske, frie, »uavhengige« eller »tidløse«, for at det på den måten skulle bli mindre lett å forberede seg til prøvene uten virkelig forståelse av det prinsipielle, og slik at en mest mulig unngikk å legge overdrevent vekt på elevenes evne til »formal manipulation«.

En vil altså ha tak i kandidatens matematiske dyktighet i seg selv, minst mulig influert av undervisningen, eller i hvert fall av en »uærlig« undervisning som mer forbereder til å greie visse oppgavetyper enn sikter på alminnelig matematisk dyktighet.

Fra midten av trettiårene ble det gitt såkalte *attainmentstests* i matematikk som spesielt skulle måle skikkethet for college. Det var tre slike prøver, *Alpha* for de som ikke mener å ha bruk for matematikk i college, *Beta* for de som er beredte til å bruke noe matematikk der og *Gamma* for de som vil ha videregående studier i matematikk og naturfag.

Nylig er det igjen skjedd endringer i CEEB-prøvene, og nå eksisterer det i matematikk disse tre prøvene: 1) Den matematiske del av den såkalte Scholastic Aptitude Test (SAT), 2) en Achievement Test i mellomliggende (intermediate) og 3) en annen slik test i videregående (advanced) matematikk [30].

Den første testen (SAT) prøver å få tak i hvor godt en elev kan tenke kvantitativt, uavhengig av den mengde trening han har hatt i matematikk i skolen. De to Achievement Tests (oversiktsprøver) skal finne ut hvor mye matematikk eleven kjenner som resultat av de skolekurser han har hatt og hvor godt han kan anvende det som han vet. Det heter at det er mulig at en elev med svært lite formell skolering i matematikk kan gjøre det godt i SAT, men det er usannsynlig at en slik elev vil gjøre det godt på noen av de to Achievement Tests.

Den lettere Achievement Test dekker elementær og videregående algebra samt plangeometri, den andre trigonometri, romgeometri og noe algebra. De har begge hver ca. 50 spørsmål som skal besvares på en time ialt. En har oppgitte svar (»multiple choice«-metoden), som f. eks. i disse to oppgavene:

1) Hvis $\sin(2x + 45^\circ) = \cos(30^\circ - x)$, hva er da den minste positive verdi av x ?

(A) 5° , (B) 10° , (C) 15° , (D) 30° , (E) 45° .

2) Hva er den positive rot i ligningen $x^2 - 2x - 399 = 0$?

(A) 19, (B) 21, (C) 23, (D) 38, (E) 42.

Elevene skal i slike tilfelle merke bokstaven foran det riktige svaret.

Det blir naturligvis lett å korrigere besvarelser på slike oppgaver, det kan forsåvidt gjøres av folk som er uten noen som helst faglig innsikt. En unngår derfor en hver sensurtvil. Men ordningen har også sine negative sider. Elevene kan bli for sterkt fristet til å gjette, noe som kanskje ikke er så farlig da det totale antall oppgaver jo er svært stort. Verre er det at selve oppgaveformen kan lede eksaminandene til å unngå eller

omgå det vesentlige i en oppgave. Således vil det i oppgave 2) være mulig å finne rett svar for en som ikke kan løse en 2.gradsligning. Alt ved innsetning av tall nr. to finner en jo det riktige svaret.

Så vidt jeg kan skjønne, henger utviklingen i CEEB-oppgavene sammen med forskjellige ønsker fra lærernes og collegenes side: En har ønsket en prøve som har minst mulig uheldige virkninger på selve skoleundervisningen, som altså fremmer en god undervisning og minst mulig fører til drill og vettløst pugg, men til varige og verdifulle kunnskaper. På den andre siden har man ønsket å skille mellom »nature and nurture«, mellom de medfødte matematiske anlegg og det som er ervervet i skoleundervisningen. Hvor vidt, hvor langt eller hvor sikkert dette er gjennomførlig er en annen sak.

Jeg nevner at CEEB også har en romsanskuelsestest (Spatial Relations Test) som er en »aptitude«-test. — Ellers er det vel overflødig å nevne at de oppnådde resultater på CEEB-testene blir underkastet en grundig analyse, en finner testenenes støhet og gyldighet (»reliabilitet« og »validitet«), prøver deres prognostiske evne og i det hele tatt gransker den nytte en kan ha av dem i selve skoleprosessen. Uten tvil har CEEB-prøven betydd mye for skolene, idet de har bidradd til å normere og standardisere de forskjellige pensa (lærebøker) i matematikk, men derved også innskrenket lærernes frihet.

Men test er et vidt begrep i U. S. A. Hos oss brukes jo vanligvis test om en psykologisk prøve som har til oppgave å gi et tallmessig uttrykk for en persons intelligens. I U. S. A. betyr test en prøve, og det kan menes en samling oppgaver gitt ved en eksamen, men en test kan også bety en prøve av annet slag.

Vi har alt talt om *oversiktsprøvene* (achievement tests) som viser hvor godt en elev mestrer sitt fag. Slike tester vil være nyttige når en lærer skal ta til med en ny klasse og gjerne vil kartlegge den, finne hva elevene behersker, hva de husker og hva de har glemt.

Diagnostiske tester har til oppgave å finne de spesielle svakheter som er årsak til svikt i emnet, f. eks. de definisjoner, regneregler osv. som elevene ikke behersker, uvitenhet eller manglende ferdighet.

Prognostiske tester prøver å utsi (spå) noe om utsikt til suksess i faget, f. eks. Orleans' geometri test. De bør nok suppleres med andre opplysninger.

En test kan være laget av læreren selv, eventuelt for en bestemt klasse. Test-resultatene må da sees i lys av dette — og får selvsagt en sterkt avgrenset utsagnskraft.

Testene blir gjerne konstruert slik at de inneholder en rekke enhets-

spørsmål. Til hvert hører ett og bare ett korrekt svar — alle andre er gale. Testene er derfor *objektive*, hva forsåvidt også et hvert problem i matematikk er. Forskjellen er vesentlig den at de oppgaver i matematikk som f. eks. blir gitt i nordiske skoler, ofte er mer komplekse.

Objektive tester *standardiseres* ved at de blir gitt til en stor samling forsøkspersoner som antas å utgjøre et representativt bilde av den gruppe en vil teste. Dermed kan en lærer som har en enkelt klasse, se hvordan elevene her står sammenlignet med de normer standardiseringen har gitt.

Etterhånden er det også kommet et rikt utvalg av matematiske tester av alle mulige slag, standardiserte med oppgitte mål på reliabilitet og validitet. På dette område har vi nesten intet i de nordiske land.

Jeg vil også nevne at det blir holdt en del matematikk-konkurranser rundt om i U. S. A. Jeg så prøvene fra en av dem, arrangert av New York-seksjonen av Mathematical Association of America. Her deltar over 20 tusen elever, som får en prøve med 50 enkeltoppgaver og fem svar til valg til hver; alt skal besvares på 1 time og 20 min. Svært hyppig var det femte svaret en benektelse av de fire første svarene. Oppgavene er ordnet etter vanskelighet og gir 2, 3 eller 4 poeng når de er rett løst. Maksimal teoretisk poengsum 150, i praksis ca. 125.

Jeg savner vesentlige forutsetninger for å gi en fullstendig vurdering av de amerikanske matematiske tester. Det lille jeg har sett og erfart, forteller meg at de i mange situasjoner er nyttige, dvs. kan føre til en bedre undervisning; jeg tenker da f. eks. på de diagnostiske tester og på oversiktstestene. Derimot er jeg noe betenkt ved å se hvordan vanlige matematiske prøver i high school eller college domineres av korte enkeltspørsmål med alle data lagt til rette. Kunnskap og ferdighet kan måles slik, men vanskeligere den matematiske modenhet som et kurs i matematikk — likegyldig hvilket alderstrinn — gjerne skulle utvikle.

Testenes store fordeler er åpenbare. I et land som U. S. A. med så varierte skolesystemer av høyst vekslende kvalitet, med utstrakt selvbestemmelsesrett, er det av vesentlig betydning å kunne ha en felles norm som kan gjøre det mulig å foreta sammenligninger.

Testene kan brukes også til andre formål enn til å gi opplysninger om den enkelte elevs dyktighet i matematikken, eller hans utsikter til å greie seg i faget i sin senere skolegang. De kan også gi opplysninger om hvordan barn og unge mennesker tilegner seg faget, om hvordan de resonnerer, om anlegg for matematikk i det hele tatt og i fagets enkeltdisipliner osv. Her er det utført ikke så få undersøkelser i U. S. A.

En finner undersøkelser på forskjellige områder. Jeg nevner eksempelvis dyktighet i matematikk, bl. a. kartlegging av de faktorer som spil-

ler inn her: Måling av, forståelse av, holdning til, interesse for og innstilling til faget, av læringsproblemer, bestemmelse av optimalt alderstrinn for innøvelse av de forskjellige prosesser. Undersøkingene har etter hvert fått et videre arbeidsområde. De ser faget i en større sammenheng, dets forbindelser med andre fag og spesielt med det vi kunne kalle praktisk logikk. Men også elevene blir studert under videre synsvinkler, hele personligheten kommer inn i bildet, ikke bare det rent matematisk-intellektuelle.

Vi kan sikkert utnytte mye av det som er funnet i U. S. A., men må også være oppmerksom på at hele bakgrunnen, spesielt skolesituasjonen, er så vidt forskjellig at vi ikke direkte kan »låne« hverken måleredskaper eller resultater. Det er også klart at ikke alt i U. S. A. er like bra på dette området, og det er nødvendig kritisk å vurdere det som en vil »importere«. Til dette kommer at en vurdering av det som presteres i et skolefag må sees i relasjon til hva vi mener er fagets formål i skolen. Her er vel også synspunktene ikke helt de samme i U. S. A. og i Norden, men også hos oss kan og bør det komme inn nye eller endrete formuleringer av formålsparagrafene. På dette området kan vi sikkert lære noe fra diskusjonene i U. S. A., der problemer om målsetting og pensas har vært mye livligere enn hos oss. Når skoleplikten blir lenger i de nordiske land og skolen dermed blir mer lik den amerikanske i sin bygning, kommer for alvor inn slike problemer som: Hvem skal lese matematikk i ungdomsskolen, d. e. de nye obligatoriske klassene (8. og evtl. 9. skoleår), hva slags matematikk skal det være og hvordan skal elevene om nødvendig sorteres i de grupper med mer, mindre eller ingen matematikk-undervisning som da vil oppstå?

Jeg tror ellers ikke siste ord er sagt i disse sakene i U. S. A., og det er all grunn til å følge med utviklingen, og dermed kanskje unngå å gjøre feil på områder der amerikanerne ennå ikke har funnet en god løsning.

La oss heller ikke glemme at fagfolk på matematikkundervisningens område i U. S. A., som har besøkt europeiske land, peker på mye som de misunner oss for, og at det derfor er all grunn til å tro at økt samarbeid og utveksling av idéer burde føre til vesentlige bedringer i matematikkundervisningen i begge verdensdeler.

Lærerutdanningen. Til en lærer i sekundærskolen må det bli stilt fire krav: 1) Han skal være tilstrekkelig *almendannet*. 2) Han skal ha tilstrekkelig *faglig* innsikt. I et fag som matematikk skal han ikke bare beherske det stoff som han skal undervise i, men også kjenne fagets grunnlag og struktur, ha arbeidd med faget og lært dets metoder gjennom stoff ut over skolens pensas. 3) Han skal ha tilstrekkelig *pedagogisk*

innsikt. Det betyr at han skal ha teoretisk og praktisk opplæring i hvordan han skal undervise i faget på de forskjellige trinn og i det hele tatt løse de oppgaver som faller på en lærer. 4) Han skal så vidt det er mulig i lærerutdanningen ha utviklet de sider av *personligheten* som betyr noe vesentlig i forholdet lærer — elev.

I de nordiske land regner en med at de vordende lærere har fått tilstrekkelig almendanning i skolen og i filosofiundervisningen ved universitetet. Den faglige utdanning skjer ved et universitet, den pedagogiske i egne institusjoner, mens personlighetsutviklingen vel ikke er gjenstand for synderlig bevisst omtanke.

I U. S. A. foregår hyppig den almendannende, den faglige og den pedagogiske utdanning i de samme institusjoner, og — så vidt jeg kan skjønne — kommer personlighetsutviklingen sterkere med enn hos oss.

Den faglige opplæring skjer i et college, i et teachers college eller i et universitet — eller i kombinasjoner av disse. Et college er fireårig, har studenter fra 17–18 år og oppover og er en blanding av universitet og skole i nordisk forstand. De to første årene blir på mange måter et slags høyere gymnas, fordi det er mer almendannende i sitt faglige innhold enn våre studier og fordi undervisningen tildels er mer skolemessig enn på våre universiteter.

Et universitet bygger på college og gir ren spesialutdanning. Et teachers college er prinsipielt mer beregnet på lærerutdanning enn et vanlig college, men i praksis trenger det ikke være noen forskjell, og det er heller ikke noe i veien for at et teachers college også kan gi universitetsutdanning for viderekomne. I Chicago får en således to slags kandidater: noen hører hjemme i det pedagogiske »department«, men har disipliner også i den matematiske »division«; mens for de andre blir forholdet omvendt. Det er mulig å ta masters grad i matematikk og doktorgrad i pedagogikk.

En vesentlig ulikhet mellom amerikansk og nordisk lærerutdanning ligger i selve studieordningen. I U. S. A. er stoffet stykket opp i enheter (units), kurser på et semester eller trimester (quarter) som gir et bestemt antall poeng (credits) når de er bestått. Det blir en »atomistisk« studieordning, der det er forlangt at et visst antall poeng er ervervet for at en skal få den grad studiet fører til. Et college fører til en baccalaureategrad (bachelor) med betegnelser som A. B., B. S. el. l.

Det kan i det følgende bare bli tale om å gi visse generelle trekk, forholdene er ikke de samme overalt. Det er da også klart at jeg særlig holder meg til de colleges som jeg besøkte, nemlig Teachers College ved Columbia University, N. Y.; The University of Chicago; George Pea-

body College for Teachers, Nashville, Tenn.; San Francisco State College; University of Pennsylvania.

Overalt er det visse opptakingskrav, men disse varierer fra sted til sted. Stort sett gjelder det at det er vanskeligere å komme inn på de (store) private colleges enn på de statlige, idet de siste kan stå åpne for alle som har greidd high school. En kan ellers ta hensyn til oppnådde resultater på CEEB-tester, intelligens tester og intervjuer foruten til fagkrets og karakterer i high school. Det er å merke at ikke alle colleges forlanger at en skal ha hatt matematikk i high school, og andre krever bare lite matematikk (f. eks. algebra og geometri, evtl. noe trigonometri). I løpet av collegeårene skal så den vordende matematikklærer følge kurser, avlegge prøver og dermed oppnå den nødvendige credit-sum. Noen kurser er obligatoriske, andre valgbare innen et visst område og atter andre helt frie. Så vidt jeg kunne se, er studieordningen i realiteten temmelig fast, det blir ikke så mange veier som en skulle tro.

Et visst antall enheter skal være almindendannende fag (general education). Her dukker det ofte opp fag eller fagkombinasjoner som virker fremmedartet for oss. Eksempelvis blir det i San Francisco krevd 45 enheter, og dette programmet blir krevd (tallet i parentes er enhetstallet): Psykologi (8): Personal and occupational development + Home and family. Engelsk (5): Basic languages skills. Samfunnslære (12): Socio-civic competence. Naturfag, helselære og matematikk (math. in human affairs) (10). Humaniora (5): Literature, philosophy, world culture. Kunst (2): Creative art activities. Gymnastikk og rekreasjon (2 + 1). En enhet er en uke time i 18 uker og tilhørende studier er anslått til 2 timer pr. forelesning. Obligatorisk frammøte forutsettes.

For å få graden Bachelor of Science i San Francisco blir det krevd 124–132 enheter med middels gjennomsnittskarakter. Herav 45 enheter i general education og minst 36 enheter i hovedfaget. Hertil blir det krevd kunnskaper i U. S. A.'s konstitusjon, historie osv. Ellers er det å merke at staten California som San Francisco tilhører, stiller sine bestemte krav (credentials) til lærerne som også må tilgodeses. Av en lærer i high school blir det krevd A. B.-grad, et visst minimum av karakterer, 30 enheter tatt etter A. B.-graden (studiet er derfor 5 årig), deriblant 6 i fag fra high school og 6 i pedagogiske kurser. Endelig skal kandidatene ha et hovedfag og et bifag blant en rekke til valg. Matematikk kan tas med henblikk på JHS eller SHS. Videre forlanges 27 enheter i pedagogiske fag: Pedagogisk psykologi (8) i 8. semester, high school pedagogikk (9) i 9. semester og undervisningspraksis (10) i 10. semester.

For matematikk hovedfag kreves av den vordende lærer minst 36 enheter. (Til A. B. bare 30.) Der er kurser i algebra, analytisk geometri og infinitesimalregning, i ligningsteori, statistikk og regning fra høyere synspunkter (tils. 27 enheter), foruten en del videregående kurser (matematikkens historie, moderne algebra, differensialligninger, fundamentale begreper i analyse, høyere geometri osv.). Der er videre seminarer (workshops) i matematikk også for aktive lærere. Matematikk kan godt kombineres med »business«. Er fysikk ikke det annet fag, kreves 3 enheter mekanikk.

For matematikk som bifag kreves 21 enheter. Det kan kombineres med mange andre fag, mest med naturfag og engelsk.

Et karakteristisk trekk ved amerikansk utdanning av matematikklærere må nevnes. Det gjelder kurser i det som kalles »professionalized« matematikk, som en kunne si betyr studium av matematikk sett fra undervisningssynpunkt. Det blir til en viss grad matematikk »von höherem Standpunkt aus«, eller kanskje snarere en utdypning av skolematematikken for lærere, en blanding av skole- og universitetsstoff hos oss pluss metodiske utnyttelser, som skal begrunne og utvide den matematikk de skal undervise i. Jeg kan f. eks. vise til Howard F. Fehr's Secondary mathematics [31].

De amerikanske kurser er som en forstår kortvarige. De ender gjerne med prøver med enkeltspørsmål, foruten at de har slike prøver midt i terminen. Mange enkeltspørsmål må synes fremmede for nordiske matematikklærere, f. eks.:

1) Skill mellom hvert av disse parene: (a) Euklidisk geometri og ikke-euklidisk geometri. (b) Plangeometri og romgeometri. (c) De fundamentale setninger i college (»høyere«) geometri og setninger i den elementære plangeometri.

2) Ligningene $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ definerer a) en flate, b) en kurve, c) et punkt.

3) Den uendelige rekken

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

representerer funksjonen a) e^x , b) $\sin x$, c) $\cos x$.

Det er ikke lett å foreta en jamføring av en amerikansk og en nordisk matematikklærers faglige dyktighet. Den amerikanske bachelor må nærmest svare til en norsk cand. mag., som jo har tre like store fag (bifag). De skulle være omtrent like gamle ved avslutningen av sitt faglige studium, den norske kanskje litt eldre. Amerikaneren har to, nordmannen tre fag. Mye taler for at nordmannen kunnskapsmessig står sterkere i

hvert fag, og i hvert fall skulle den norske eksamen være mer omfattende og i høyere grad være en modenhetsprøve. (Mer omfattende skriftlige oppgaver, kritikkoppgaver og kommentaroppgaver i geometri, »forelesning« i geometri osv.) På den andre siden blir amerikanske studenter mer innstilt på sitt fremtidige yrke. I de »professionalized« kursene kommer det noe inn som vi har lite eller intet av og som opplagt er verdifullt for den vordende lærer. Faren er bare den at blir det for mye av dette, kan det gå ut over den dypere faglige sikkerhet.

De enkelte stater i U. S. A. har sine bestemte regler for hvem som skal undervise i high school. Det forlanges (overalt?) en del pedagogisk innsikt (gjennomsnittlig 15–18 credits) og veiledet undervisningspraksis. I JHS underviser lærerne i flere fag, i SHS er det faglærere, om mulig med masters grad.

I lærerutdanningen blir det ved siden av rent pedagogiske kurser gitt undervisning i fagmetodikk (teaching algebra etc.), som kan drøfte formål i undervisningen, fagets grunnlag, viktige kapitler, undervisningsmetoder, tester osv. Det blir sjeldnere veiledet i undervisningen i general mathematics.

Ved Peabody College var der våren 1955 kursene: Mathematics in the elementary school; Resource material in the teaching of secondary mathematics, der en 4 timer pr. uke studerte alle slags hjelpemidler som modeller, instrumenter, filmer, lysbilder osv.; og Investigations in the teaching of mathematics. Det siste var for viderekomne, og her ble det av de studerende under professor Wrens ledelse på grunnlag av grundige litteraturstudier utarbeidd en rapport på 110 sider over geometriens stilling i amerikansk skole fra 1900 til idag, avsluttet med oversikter over de problemer i skolegeometrien i dag som deltakerne mente var særlig viktige.

Ved universitetet i Chicago var der et kurs Fundamental concepts of mathematics for teachers, og ved Northwestern University (utenfor Chicago) kurser i Mathematics for teachers in upper grades, i Multisensory aids in the teaching of mathematics og i Teaching of mathematics in the secondary schools.

Ved Teachers College i New York blir vel undervisningen av matematikklærerne drevet lengst i U. S. A. De studerende er ferdige med college, har hyppig vært i arbeid i en tid, og forbereder seg til en doktorgrad. Våren 1955 var det her disse kursene: Teaching of algebra in secondary schools. Professionalized subject matter in advanced secondary school mathematics. History of mathematics. Introduction to research in mathematical education. Foundations of mathematical analysis for teachers. Research in teaching mathematics. Departmental seminar and

project conference in mathematics. Student observation and teaching in mathematics. — Lærere her var professorene Fehr og Roskopf, som altså begge har en stor forelesningsbyrde ved siden av et imponerende forfatterskap i fagets tjeneste.

De kursene jeg her nevner har jeg tildels fulgt selv. Mitt hovedinntrykk av dem er avgjort positivt. De lå gjennomgående på et høyt plan, og bør kunne heve nivået i skolenes matematikktimer. De gir verdifulle og nyttige kunnskaper og de var ofte lagt opp slik at tilhørerne ble aktivisert bl. a. gjennom små »foredrag« eller ved diskusjoner, gruppearbeid, hjemmeoppgaver o. l. Det ble delt ut stensilerte resyméer, litteraturlister og oppgaver. Nå var det sikkert noe av det beste jeg så i den pedagogiske side av amerikansk matematikklærerutdanning, og jeg bør ikke på noen måte bringe generelle slutninger.

Normalt hører også undervisningspraksis med i lærerutdanningen. Den foregår dels som hos oss på ulike skoler nær colleget, men kan skje i spesielle øvingsskoler eller forsøksskoler knyttet til det. Arbeidet tar til med observasjoner, siden delvis deltagelse (participation) og ender med hel undervisning.

For å få undervisningspraksis må en søker i Chicago ha en viss karakterstandard såvel i pedagogiske som i faglige disipliner. Det kreves visse attester og kandidaten blir intervjuet. Undervisningen foregår ved en anerkjent skole og varer et kvartal (f. eks. 1/4—ca. 20/6), slik at kandidaten er på skolen halve dagen. Kandidaten har to klasser i matematikk og tilbringer også en tredje time på skolen. Dessuten er det en diskusjonstime hos en pedagogikk-professor, og kandidaten kan når som helst komme med sine problemer fra timene.

I San Francisco er det før det egentlige undervisningssemester litt observasjon og undervisning en gang pr. uke, slik at kandidatene har noen erfaring når de begynner veiledningskursene i hoved- og bifag (Curriculum and instruction course). I det egentlige undervisningssemester er kandidatene på en av distriktets skoler 5 dager i uken fra 9–12 og har da 2 klasser, mens den tredje timen brukes til forskjellig: biblioteksarbeid, testing, kontorarbeid og annet som kan gjøre ham fortrolig med alle sider av skolearbeidet. En inspektør (supervisor) som er en college-lærer (department of education) har ansvaret for 6–10 kandidater og besøker dem 2 ganger i uken, men ikke alltid hele timen. En gang i uken er det et totimers seminar som gir råd, drøfter praksisundervisningen og gir veiledning til den. Dessuten er det en eller to ganger besøk av den spesielle inspektør som er lærer (professor) i vedkommende fag. Det har ellers i stor utstrekning vært en »pedagog«, ikke en fagspesialist, som har besørget inspeksjonene rundt om.

Som en vil forstå har lærerutdanningen i U.S.A. sitt tyngdepunkt mer mot den pedagogiske side enn vi har. Og i kritikken mot amerikansk skole er det også kommet fram at det blir for mye å lære *hvorledes* på bekostning av å lære *hva*.

Ellers er det så at ikke alle matematikklærere stanser med college. Det går an å gå videre, til masters degree (M. A.) eller til doktorgrad (Ph. D.).

Kandidater med M. A. eller spesielt Ph. D.-grad går ikke så mye til high school, men til overordnede stillinger og spesielt til college, der faget matematikk ikke bare leses av de som har direkte bruk for det i videre studier, men også som et almindennende fag.

Ved Teachers College i New York er kravene til M. A. disse: En må ha tatt B. A.-grad og ha hatt 15 til 24 »timer« matematikk. Studiet varer ett år (minst) og det kreves disse kursene (tall i parentes gir »points«): Philosophy and history of education (4). Current problems in teaching secondary school mathematics (3). Teaching of algebra (3). Professionalized subject matter in advanced secondary school mathematics (3). Valgfritt: Modern algebra (3). — I annen »term«: Education as personal development (psykologi) (4). Teaching of geometry (3). Professionalized subject matter (3). Foundation of mathematical analysis for teachers (3). History of mathematics (eller lign. kurs) (3). Endelig er det undervisningspraksis (3).

I alt blir det forlangt 32 »points«, eller 30 pluss en oppgave (thesis) eller rapport som skal vise kandidatens evne til å velge, organisere og framstille resultatet av en undersøkning i faget. Emnet må være godkjent på forhånd.

Som en ser er det en pedagogisk utdanning det her er tale om. Jeg hørte forelesninger i flere av kursene som nettopp ble nevnt. De var svært grundige, de siktet på vordende matematikklærere eller inspektører, men hadde også et sterkt faglig innslag. Således fikk logikken en grundig behandling.

Ellers vil jeg nevne at M. A.-studiet avsluttes med en eksamen av videre omfang. Her kommer den syntese som trengs som motvekt til alle kursprøvene som hver jo dekker et relativt lite stoffområde.

For å bli Ph. D. ved Teachers College er det oppstilt disse kravene: 1) M. A.-grad med bra resultat. Høy intelligens og godt vokabular. 2) Kunne lese to moderne språk. 3) 75 semestertimer ved universitetet inklusive M. A.-arbeid. 4) Utarbeide et forskningsprogram som skal forsvares i vedkommende seminar og aksepteres som mulig. 5) Prøve i matematisk pedagogikk med resultat av en viss høy standard. 6) Dissertasjon. 7) Avsluttende forsvar av dissertasjonen.

Jeg leste en del dissertasjoner, og de var som rimelig kunne være av vekslende kvalitet. Den beste jeg så, kunne kanskje ha greidd seg til en norsk doktorgrad, men de fleste ville jeg si ligger på et nivå som *gode* avhandlinger til en norsk magistergrad i pedagogikk. Jeg var tilstede i seminaret nevnt i punkt 4 et par ganger. De tilstedeværende professorer ga en særdeles inngående kritikk — advarte bl. a. mot »kontordameundersøking«, og slo ned på de svake punkter både i opplegg og i detaljer; der var også innlegg fra enkelte av kandidatene. — Dissertasjonene blir nå vanligvis maskinskrevet i få eksemplarer, mens et resymé blir trykt.

Amerikanerne er selv klar over at deres utdanning av matematikklærere kan forbedres. En finner kritikk og reformforslag i 1923 i rapporten *The reorganization . . .* [1] og i 1935 i en rapport fra *The Mathematical Association*. Her oppstilles et minimumsprogram i matematikk og beslektede fag (fysikk, økonomi og statistikk), et ønskeprogram i matematikk og videre fagområder, i engelsk og humaniora i det hele og i praktisk og teoretisk pedagogikk, et program som, om det ble realisert, sikkert ville bety en god heving av dagens gjennomsnittskrav.

I nær tilslutning til de sistnevnte kravene stiller *The Joint Commission* i 1940 opp krav til matematikklærere i high school og i college [3, s. 187]. Det blir her sagt at selv om fysikk og matematikk er nøye forbundet, må det også være mulig å velge andre kombinasjoner, f. eks. engelsk + matematikk. De mange kvinnelige lærere vil foretrekke denne kombinasjonen, heter det.

Det blir uttalt at »the time spent in professional (pedagogisk) training has been carried in some cases beyond all reason«, mens »the amount of study of mathematics that is required to obtain a license to teach the subject in a high school is far too low in most of the states«. Det sies rett ut at en ikke har gitt lærerne tilstrekkelig kompetanse i faget. Det argumenteres kraftig (s. 195) for solide kunnskaper godt ut over skolens relativt små pensa. Det heter således: »Nothing but study beyond the bare elements of a subject can make the elements seem simple and natural; nothing else can show their full significance.«

Som en ser blir det ikke lagt skjul på svakhetene i den amerikanske matematikklærerutdanning. Kritikken som nettopp ble sitert er fra 1940. Har den hjulpet, kan en spørre. Det er det vanskelig å uttale seg om. Somme steder har en gått over til et 5 års kurs istf. 4 års, og som det synes med gode erfaringer. Det er ellers klart at det ikke er lett å utvide et kurs nettopp på en tid da mangelen på lærere er så stor.

I 1949 krevde 42 stater minst 4 års college for high school teachers, mens New York krevde 5 års utdanning. California krever bachelors

degree (4 år) + 18 semestertimers videregående (graduate) arbeid, og mer enn halvparten av high school-lærere her har masters degree eller høyere grad. Sikkert er det at det i dag er mangel på kvalifiserte matematikklærere, og verre vil det bli i årene som kommer. Industri og forskning byr på sterk konkurranse. Ca. 90% med Ph. D. og over 50 år underviser, mens ca. 70% med Ph. D. under 35 år gjør det. Alt i 1941 hadde 41% av de lærere som underviste i matematikk i Minnesota hverken faget som bifag (minor) eller hovedfag (major) i college. I 1950 ble det utdannet 4618 matematikklærere, i 1953 bare 2710. I 1960 trenger man 50% flere matematikklærere enn i 1950. Ved fire ledende universiteter er over 40% av matematikerne av europeisk bakgrunn. Hver sjette med Ph. D. er født utenfor U. S. A. Dette vil si at selv om lærerutdanningen mange steder kan være reformert, vil det likevel være alt for få herfra som kan besette de ledige stillinger, og i stor utstrekning må en nøye seg med lærere med ringe kompetanse i faget. I forhold til andre yrker er lærerne dårlig betalt (Detroit: lærer 3862 \$ og metallarbeider 5304 \$), og etter alt å dømme er de mindre ansett enn europeiske lærere.

Vi må ellers huske på at den amerikanske high school ikke går så langt som våre gymnas og at det til lærere som underviser i matematikk i de to første college-år (junior college) stilles noe høyere krav, M. A. eller Ph. D.-grad. I praksis vil en naturligvis finne alle mulige nivåer.

Videreutdanning. Den uteksaminerte matematikklærer i U. S. A. kan på forskjellig vis følge med i sitt fag og få impulser av betydning i sitt yrke. Først bør da nevnes alle *sommerskoler* som blir arrangert rundt om i colleges og universiteter. De har tildels stor tilslutning, ved Teachers College i New York er det sikkert årets travleste tid. Her blir det vel særlig siktet på opprykking i høyere stillinger, som skolebestyrer, inspektør, collegelærer osv. Jeg så også at mange lærere i forskjellige aldre fulgte spesielle forelesninger om lørdagene da skolene har fri.

Det foreligger også atskillig på trykk til støtte for læreren i tjeneste. Først bør nevnes den fortreffelige serie av håndbøker som er gitt ut av den amerikanske matematikklærerforening, The National Council of Teachers of Mathematics. I alt er det kommet 22 slike Yearbooks [32]. Enkelte er monografier, andre samlinger av kortere og lengere artikler. De fleste av bøkene må betegnes som pedagogisk-metodiske, men faktisk dekker de bindene som nå er kommet eller er i arbeid, de aller vesentligste sider av det en matematikklærer er, eller bør være, opptatt med.

Der er oversiktsbind (bd. 1, 4, 6, 11, 22) og der er flere bind om pensaa og undervisning i de enkelte disipliner (bd. 2, 3, 5, 7, 8, 10), mens ett behandler selve innlæringen i matematikkundervisningen (bd. 21). Der

er i arbeid et bind om moderne matematikk, stoff som ennå ikke er kommet inn i skolen. Fire bind er grundige monografier om funksjonell tenking (bd. 9), om regning med tilnærmete tall (bd. 12), om bevisets natur (bd. 13) og om utdanning av matematikklærere i England og U. S. A. (bd. 14). Tre andre bind behandler instrumenter, modeller etc., (bd. 18, 19) og kildemateriale til oppgaver (bd. 17). Ett bind behandler metersystemet som jo amerikanerne ikke har (bd. 20).

To bind er komité-betenkninger, det ene behandler regningens plass i almindanningen (bd. 16), og det andre er den verdifulle innstilling fra felleskomiteen fra collegelærernes og high school-lærernes matematikkforeninger (bd. 15: *The final report of The Joint Commission of The Mathematical Association of America and The National Council of Teachers of Mathematics*). Det siste bindet er det vist til annensteds flere ganger [3].

Det er videre typisk for U. S. A. at det eksisterer flere metodikkverker i matematikk, lærebøker i undervisningen i faget. Jeg tror en har lov å si at de er av vekslende kvalitet, selv om de er skrevet etter noenlunde samme mønster. Av de eldre slike håndbøker bør nevnes J. W. A. Young: *The teaching of mathematics* [26], som bærer litt preg av forfatterens europeiske kontakter. De nyere bøker er mer »amerikanske«, ofte bredt skrevet, med omfattende litteraturlister og med arbeidsoppgaver til lærerne. Butler & Wren: *The teaching of secondary mathematics* [33] er på om lag 500 sider og er formodentlig den boka som brukes mest i lærerutdanningen. Det er en særdeles innholdsrik håndbok som behandler fagets plass og oppgave i skolen, selve undervisningen og arbeidsmetodene der samt en bred drøfting, sett fra undervisningssynspunkt, av det stoff som hører til de forskjellige klasser i high school.

Det finnes som sagt andre slike metodiske bøker. Jeg vil bare nevne den før siterte bok av W. D. Reeve [10], som gir alle mulige opplysninger av verdi for en matematikklærer. En særdeles grundig oppslagsbok, som samtidig er rik på impulser. Annensteds er omtalt H. F. Fehr: *Secondary mathematics* [31], som er en funksjonell »approach« for lærere og vordende matematikklærere, for å gi dem noe »professionalized« stoff som har til hensikt »to broaden and deepen the teacher's knowledge of the mathematics that he teaches«. Boka gir en bredt skrevet framstilling av stoffet i high school med oppgaver av forskjellig slag, men det meste av stoffet ligger utenfor eller over dette pensum, selv om det stadig har hentydninger til dette.

Foruten de bøker som er nevnt og atskillige unevnte har de amerikanske matematikklærere to tidsskrifter som orienterer dem og holder dem à jour om det som skjer innen undervisningen i deres fag. Det er *The Mathe-*

matics Teacher som blir utgitt av The National Council of Teachers of Mathematics (N. C. T. M.), og det er *School Science and Mathematics*, gitt ut av Central Association of Mathematics and Science Teachers.

Begge tidsskrifter er langt mer pedagogisk-metodiske enn de elementære europeiske matematikktidsskrifter. Der er atskillige artikler uten en eneste formel eller et matematisk symbol. Til gjengjeld er kanskje tidsskriftene mer direkte nyttige for den alminnelige lærer.

Mathematics Teacher har nå egne avdelinger for hjelpemidler, for historikk, om tips for nybegynnere, eksempler fra timene osv., og har kritiske bokmeldinger foruten lister over ny litteratur og annet materiale til undervisningen. Ellers finner vi artikler av de ledende krefter innen matematikkundervisningen, artikler som bl. a. drøfter de aktuelle problemer, erfaringer og reformplaner og som i det hele gir et godt bilde av den aktuelle undervisning og av det beste i den kommende.

I *School Science and Mathematics* må matematikken dele plass med skolens realfag, men der er atskillig stoff av stor interesse for matematikklærerne.

Ellers må også nevnes et tredje mer faglig betont matematisk tidsskrift. Det er *American Mathematical Monthly*, som er organet til The Mathematical Association of America. Dette tidsskrift er i særlig grad collegelærernes. Det er som M. T. rikt variert i sitt innhold.

De matematiske foreninger holder regelmessig møter — regionale og statlige. Det blir på kort tid holdt en hærs-kare foredrag av — etter mine erfaringer — vekslende kvalitet. Det beste er kanskje de som behandler praksis og erfaringer fra skoleklassene. De mer generelle foredrag av en eller annen »autoritet« kan bli litt mye ord. Ellers er møtene ikke minst viktige sosialt. Lærerne får treffe hverandre, og skolelederne får høve til å plukke ut nye krefter.

Til slutt må det nevnes at N. C. T. M. også har gitt ut en del brosjyrer av interesse for matematikklærerne. Her finner en utfyllende stoff til timene, opplysende stoff som agitasjon for økt tilslutning til matematikkursene så vel i skole som i college. (W. L. Schaaf: *Recreational mathematics*; W. R. Ransom: *Geometry growing*; Margaret Joseph: *Byroads of algebra*; Henry Swain: *How to study mathematics*. Guidance pamphlet on mathematics.)

Endelig utgir N. C. T. M. også et eget tidsskrift for regneundervisning (*Arithmetic Teacher*) og fire ganger om året en firesiders avis (*The Mathematics Student Journal*) for skoleelever med variert innhold, oppgaver etc.

APROPOS KUBENS FORDOBLING

ERNST S. SELMER

De tre klassiske konstruksjonsproblemer fra den greske oldtid er som kjent vinkelens tredeling, sirkelens kvadratur og kubens fordobling. Grekerne forlangte løsninger bare ved hjelp av *passer og linjal*, hvilket algebraisk svarer til uttrykk hvis eneste irrasjonaliteter er *kvadratrøtter*. Først i moderne tid er det blitt bevist at alle tre konstruksjonsoppgaver da er uløsbare.

Sirkelens kvadratur og kubens fordobling svarer til konstruksjon av π og av $\sqrt[3]{2}$ henholdsvis. I tidens løp er det laget en rekke *tilnærmede konstruksjoner* av π , mer eller mindre kompliserte. Derimot later det ikke til å ha vært noen særlig interesse for $\sqrt[3]{2}$. Grunnen er kanskje delvis at kubens fordobling i sin opprinnelige formulering er et *romgeometrisk* problem.

Under et arbeid med såkalte generaliserte kjedebrokker har jeg støtt på en meget enkel og nøyaktig tilnærmelseskonstruksjon for

$$\frac{1}{10}\sqrt[3]{2} = 0,125992105,$$

nemlig ved den minste rot i annengradsligningen $x^2 - 16x + 2 = 0$:

$$8 - \sqrt{62} = 0,125992126.$$

Vi får overensstemmelse i syv desimaler, altså i seks desimaler for $\sqrt[3]{2}$ selv.

Det er klart at en geometrisk konstruksjon *i praksis* ikke lar seg utføre med en nøyaktighet på 6–7 desimaler. Slike konstruerbare tilnærmelsesverdier har derfor vesentlig teoretisk interesse, og må nærmest betegnes som matematiske kuriositeter.

Mens vi er inne på kuriositeter, kan jeg nevne en morsom omforming av den funne tilnærmelse. Vi skriver

$$\sqrt{62} = \sqrt{64-2} = 8\sqrt{1-2^{-5}},$$

og setter inn i den binomiske rekke

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

Med $x = 2^{-5}$ vil alle ledd t. o. m. x^3 bli rene negative potenser av 2. Ved innsetning finner vi da tilnærmelsen

$$\frac{1}{10}\sqrt[3]{2} \approx \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{16}} = 0,12599182,$$

med seks riktige desimaler (etter avrunding).

I *totalssystemet* blir tydeligvis den oppnådde tilnærmelsesverdi, skrevet som dyadisk brøk, særlig enkel:

$$0,0010000001000001.$$

Feilen opptrer her først i det 22^{de} binærsiffer etter komma.

Den vanlige fremgangsmåten for å oppnå rasjonale tilnærmelser er som kjent ved *kjedebrokker*. Som »gode« konvergener kan vi regne slike hvor den første av de utelatte delnevner er stor, f. eks. ≥ 10 . Gjennomfører vi regningen for $\frac{1}{10}\sqrt[3]{2}$, finner vi kjedebroktutviklingen

$$(1) \quad \frac{1}{10}\sqrt[3]{2} = [0, 7, 1, 14, 1, 6, 1, 22, 1, 5, 2, \dots],$$

og derfor følgende »gode« tilnærmelser innen det nøyaktighetsområde (6-7 desimaler) som vi er interessert i:

$$(2) \quad \frac{1}{8} = 0,125 \quad (14), \quad \frac{127}{1008} = 0,125992063 \quad (22).$$

Den første utelatte delnevner er angitt i parentes. Den siste brøk gir syv riktige desimaler (etter avrunding).

En litt bedre tilnærmelse ville vi oppnå ved å erstatte den utelatte delnevner 22 med et tall i nærheten av 22. Det er da naturlig å betrakte følgende uendelige, *periodiske* utvikling:

$$(3) \quad [0, 7, 1, \underbrace{14, 1, 6, 1, 14, 1, 6, \dots}] ,$$

som stemmer overens med (1) i de seks første konvergener. Det er nemlig kjent at enhver periodisk kjedebroøk gir en *kvadratisk irrasjonalitet*. I dette tilfelle viser det seg at (3) nettopp gir tilnærmelsen $8 - \sqrt[3]{62}$ (som jeg opprinnelig fant på en annen måte).

Ved hjelp av den første brøk (2) kan vi også komme direkte frem til den samme tilnærmelsesverdi. Vi danner differensen

$$y = \frac{1}{10}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{8},$$

som tydeligvis er en meget liten størrelse (ca. 10^{-3}). Ved å isolere $\sqrt[3]{2}$ og kubere, ser vi at y tilfredsstiller tredjegradslikningen

$$64000y^3 + 24000y^2 + 3000y - 3 = 0.$$

Her er det første ledd meget mindre enn de øvrige. For å redusere graden, *sløyfer* vi dette ledd, og får tilnærmelsen

$$8000y^2 + 1000y - 1 \approx 0.$$

Den tilsvarende ligning for $x = \frac{1}{10}\sqrt[3]{2}$ fremkommer ved å sette $y = x - \frac{1}{10}$:

$$8000x^2 - 1000x - 1 \approx 0.$$

For å få en enklere ligning, kan vi multiplisere med x^2 og innføre $1000x^3 = 2$, $1000x^4 = 2x$:

$$x^2 - 16x + 2 \approx 0,$$

altså nettopp den ligning som ga tilnærmelsen $8 - \sqrt{62}$ for $\frac{1}{10}\sqrt[3]{2}$. Denne fremgangsmåte ble utformet under en diskusjon med O. Kolberg.

Når man først vil være etterpåklok, er det også en tredje direkte metode for å finne den samme tilnærmelse. Jeg har tidligere (Norsk Mat. Tidsskr. 29, 1947, s. 18) angitt en systematisk metode til å bestemme approksimasjoner i form av *differenser mellom kvadratrotter av naturlige tall*. Den gang anvendte jeg metoden på π , altså på sirkelens kvadratur. Hvis man isteden angriper $\sqrt[3]{2}$ (det naturlige utgangspunkt ved kubens fordobling), vil man etter ca. 1 times regning på bordmaskin oppdage tilnærmelsen

$$\sqrt[3]{2} \approx \sqrt{6400} - \sqrt{6200} = 10(8 - \sqrt{62}).$$

En rekke opplysninger om kubens fordobling (også kalt »det deliske problem») finnes i F. Enriques: *Fragen der Elementargeometrie*, Leipzig 1907 (bd. 2, s. 189–227). Her behandles problemets historie, og det gis flere *eksakte* løsninger ved andre hjelpemidler enn passer og linjal, f. eks. visse stangsystemer. Både denne bok og Th. Vahlen: *Konstruktionen und Approximationen*, Leipzig 1911 (s. 282–285) inneholder også noen få tilnærmede, konstruerbare løsninger. Disse gir imidlertid hverken så enkle eller så nøyaktige uttrykk som min tilnærmelse $8 - \sqrt{62}$.

ET BEVIS FOR DIXONS FORMEL

ODDMUND KOLBERG

Blant de tallrike summeformler angående binomialkoeffisienter er følgende formel av Dixon [2] en av de mest berømte:

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Senere er formelen bl. a. også bevist av Fjeldstad [3], Kvamsdal [5], Ljunggren [6] og Staver [7].

En ser lett at (1) er ekvivalent med

$$(2) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^3} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^3} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3 ((2n)!)^3} x^{2n}.$$

Det er i denne form vi her skal bevise setningen.

I det følgende betegner y og z funksjoner av x som kan utvikles i potensrekke omkring $x=0$. Vi betrakter operatoren

$$D = x \frac{d}{dx}.$$

Nå gjelder følgende sats:

$$(3) \quad \left[\frac{d^m}{dx^m} (D^q y) \right]_{x=0} = m^q \left[\frac{d^m y}{dx^m} \right]_{x=0}.$$

Vi beviser dette ved induksjon etter q . Anta at (3) gjelder for en bestemt verdi av q . Vi får

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} (D^{q+1} y) &= \frac{d^m}{dx^m} \left(x \frac{d}{dx} (D^q y) \right) = x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (D^q y) + m \frac{d^m}{dx^m} (D^q y), \\ \left[\frac{d^m}{dx^m} (D^{q+1} y) \right]_{x=0} &= m \left[\frac{d^m}{dx^m} (D^q y) \right]_{x=0} = m^{q+1} \left[\frac{d^m y}{dx^m} \right]_{x=0}. \end{aligned}$$

Da (3) gjelder for $q=0$, er formelen dermed bevist.

Vi setter nå

$$w = yz, \quad v = DyDz, \quad u = D^2yD^2z, \quad t = D^3yD^3z$$

$$P_{ij} = D^i y D^j z + D^i z D^j y.$$

Vi får da følgende ligninger:

$$\begin{array}{l|l|l} P_{01} = Dw & P_{12} = Dv & P_{23} = Du \\ P_{02} = D^2w - 2v & P_{13} = D^2v - 2u & P_{24} = D^2u - 2t \\ P_{03} = D^3w - 3Dv & P_{14} = D^3v - 3Du & P_{25} = D^3u - 3Dt \end{array}$$

For nå å bevise (2) velger vi

$$(4) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^3}, \quad z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^3}.$$

Da $w = yz$ blir en like funksjon av x , får vi rekkeutviklingen

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left[\frac{d^{2n}w}{dx^{2n}} \right]_{x=0} \cdot x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n} x^{2n}.$$

Vår oppgave er nå å finne w_{2n} .

Anvender vi operatoren D tre ganger på funksjonene (4), får vi

$$(5) \quad D^3y = xy, \quad D^3z = -xz.$$

Herav følger $P_{03} = yD^3z + zD^3y = 0$, altså

$$(6) \quad D^3w = 3Dv.$$

Anvender vi D på (5), får vi videre

$$\begin{aligned} D^4y &= xy + xDy = D^3y + xDy \\ D^4z &= -xz - xDz = D^3z - xDz. \end{aligned}$$

Herav følger $P_{14} = P_{13}$, altså

$$(7) \quad D^3v - D^2v = 3Du - 2u.$$

På tilsvarende måte får vi

$$D^5y = 2D^4y - D^3y + xD^2y, \quad D^5z = 2D^4z - D^3z - xD^2z.$$

Herav følger $P_{25} = 2P_{24} - P_{23}$, altså

$$(8) \quad D^3u - 2D^2u + Du = 3Dt - 4t.$$

Multiplikasjon av ligningene (5) gir videre

$$(9) \quad t = -x^2w.$$

Vi deriverer så ligningene (6)–(9) $2n$ ganger og setter $x=0$, idet vi benytter (3). Vi får da etter divisjon med $(2n)!$:

$$\begin{aligned}(2n)^3 w_{2n} &= 6n v_{2n} \\ (2n)^2 (2n-1) v_{2n} &= (6n-2) u_{2n} \\ 2n(2n-1)^2 u_{2n} &= (6n-4) t_{2n} \\ t_{2n} &= -w_{2n-2} .\end{aligned}$$

Her betegner v_{2n} , u_{2n} og t_{2n} koeffisientene i rekkeutviklingene for v , u og t . Vi multipliserer så sammen disse fire ligningene, og får

$$w_{2n} = -\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{n^3(2n)^3(2n-1)^3} w_{2n-2} .$$

Da $w_0=1$, får vi herav

$$w_{2n} = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3 ((2n)!)^3} .$$

Dette beviser (2) og dermed Dixons formel (1).

Den metoden vi har brukt her, kan også anvendes i andre tilfeller. Vi kan sette

$$\begin{aligned}y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+a)!(n+b)!} \\ y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+b)!}{n!(n+a)!} x^n \\ y &= \sum_{n=0}^N \frac{(n+a)!(n+b)!}{n!} x^n ,\end{aligned}$$

og i hvert tilfelle

$$z = y(-x) .$$

Vi kan da på lignende måte utlede formlene

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{2n+2a}{k+a} \binom{2n+2b}{k+b} \\ = (-1)^n \frac{(2n)!(2n+2a)!(2n+2b)!(3n+a+b)!}{n!(n+a)!(n+b)!(2n+a)!(2n+b)!(2n+a+b)!} \\ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{\binom{2n}{k} \binom{2n+2a}{k+a}}{\binom{2n+2b}{k+b}} = \frac{b!(n+b)!(n+a-b-1)!(2n)!(2n+2a)!}{(a-b-1)!n!(n+a)!(2n+a)!(2n+2b)!}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n+2a}{k+a} \binom{2n+2b}{k+b}} = \frac{a!b!(n+a)!(n+b)!(2n)!(2n+a+b+1)!}{n!(n+a+b+1)!(2n+2a)!(2n+2b)!}.$$

Dette er formel som alle følger av kjente setninger om generaliserte hypergeometriske rekker, se f. eks. [1], s. 186. Den første formel, som er en generalisasjon av (1), er bevist av Fjeldstad [4] i en litt annen form.

LITTERATUR

- [1] H. BATEMAN: *Higher transcendental functions, I*. New York 1953.
- [2] A. C. DIXON: *On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem*. Messenger of Math. 20 (1891), pp. 79–80.
- [3] J. E. FJELDSTAD: *Oppgaveløsning*. Norsk Mat. Tidsskr. 24 (1942), pp. 60–62.
- [4] J. E. FJELDSTAD: *A generalization of Dixon's formula*. Math. Scand. 2 (1954), pp. 46–48.
- [5] J. KVAMSDAL: *Oppgaveløsning*. Norsk Mat. Tidsskr. 24 (1942), pp. 94–95.
- [6] W. LJUNGGREN: *Et elementært bevis for en formel av A. C. Dixon*. Norsk Mat. Tidsskr. 29 (1947), pp. 35–38.
- [7] T. B. STAVER: *Om summasjon av potenser av binomialkoeffisientene*. Norsk Mat. Tidsskr. 29 (1947), pp. 97–103.

PROPORTIONELLA VALMETODER

CARL-ERIK FRÖBERG

Principen för proportionella val är som bekant att mandaten fördelas i relation till de röstetal som de olika partierna erhållit. Denna från början tämligen vaga formulering har inte lett till ett entydigt praktiskt resultat, utan det existerar ett flertal metoder, som med växlande framgång användas på skilda håll. Vi skall först i all korthet beskriva de mest använda metoderna och sedan närmare granska deras för- och nackdelar.

Vi inför då först några beteckningar. Låt p vara antalet partier, M antalet avgivna och godkända röster, fördelade på de olika partierna med antalen $M_1, M_2, \dots, M_p$, samt n antalet mandat, varvid de olika partierna erhållit $n_1, n_2, \dots, n_p$ mandat respektive. Vidare sätter vi $m_r = nM_r/M$, och därmed kan vi säga att talen n_r skall vara heltaliga approximationer till talen m_r , som vi i fortsättningen kallar reducerade röstetal. Självfallet gäller $\sum_r m_r = \sum_r n_r = n$. Slutligen betecknar vi med a' heltalsdelen av $a + 1$.

De metoder som närmast kan komma i betraktande är d'Hondts, Droops, Sainte Laguës eller uddatalsmetoden samt valkvotsmetoden. De »rena» metoderna kan sedan kompletteras med tilläggsvillkor av i regel politiskt ursprung, och vi skall behandla de viktigaste av dem i slutet av uppsatsen. För samtliga dessa metoder gäller, att man successivt beräknar en serie jämförelsetal för varje parti, varefter mandaten i tur och ordning utdelas till det parti som för tillfället har det högsta jämförelsetalet. Enligt d'Hondts metod och uddatalsmetoden bildas dessa jämförelsetal genom att M_r divideras med en given serie divisorer, medan jämförelsetalen enligt de båda andra metoderna bildas genom successiv subtraktion av 1 från vissa begynnelsevärden. Det är uppenbart, att M_r i första fallet kan ersättas med m_r utan att resultatet ändras.

Enligt den d'Hondtska metoden är divisorerna de naturliga talen 1, 2, 3, 4, ... och enligt uddatalsmetoden, som framgår redan av namnet, talen 1, 3, 5, 7, Vi illustrerar omedelbart med ett exempel. Antag att tre partier erhållit 23940, 13860 och 5040 röster respektive, och att 8 mandat skall fördelas. Resultatet blir då

$$\begin{array}{l}
 \text{enligt} \\
 \text{d'Hondt}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{r}
 \frac{23940}{13860} \quad \frac{11970}{6930} \quad \frac{7980}{4620} \quad \frac{5985}{} \quad \frac{4788}{} \quad 3990 \\
 \hline
 \frac{5040}{} \quad 2520
 \end{array}
 \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \text{enligt udda-} \\
 \text{talsmetoden}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{r}
 \frac{23940}{13860} \quad \frac{7980}{4620} \quad \frac{4788}{2772} \quad \frac{3420}{1980} \quad 2660 \\
 \hline
 \frac{5040}{} \quad 1680
 \end{array}
 \right.$$

Understrykning anger, att mandat erhållits på grundval av detta jämförelsetal.

Enligt den Droopska metoden bildas en s. k. förminskad valkvot genom att antalet röster delas med antalet mandat, ökat med 1, varefter kvoten höjes till närmast liggande heltal. Sedan erhållas jämförelsetalen genom division av röstetalen med valkvoten. Således: $k = [M/(n+1)]'$ och jämförelsetalen $x_r = M_r/k$. Varje parti får sedan direkt så många mandat som anges av heltalsdelen av x_r , varefter överblivna mandat utdelas efter största överskjutande bråktal. Vi skall genast med ett exempel visa, att denna metod inte fungerar obetingat, då röstsiffrorna är små. Antag nämligen, att 20 mandat skall fördelas på 5 partier, vilka erhållit 29, 24, 19, 9 och 4 röster. Den Droopska valkvoten blir alltså $= (85/21)' = 5$ och jämförelsetalen sålunda 5.8, 4.8, 3.8, 1.8 och 0.8. Mandattilldelningen blir följaktligen 6, 5, 4, 2 och 1, d. v. s. tillsammans 18 (!). Detta innebär, att metoden inte förmår fördela alla mandat, ett förhållande som såvitt bekant inte tidigare observerats. Den Droopska metoden borde därmed kunna avföras från diskussionen.

Valkvotsmetoden slutligen är synnerligen okomplicerad: jämförelsetalen är helt enkelt $= m_r$.

Innan vi går vidare i diskussionen kan det vara lämpligt att precisera de fordringar som en valmetod bör uppfylla. Därvid synes följande villkor böra komma i fråga: A) Metoden måste fungera rent tekniskt i alla situationer. B) Den bör inte ens i undantagsfall ge direkt orimliga resultat, vilket bl. a. innebär, att heltalsdelarna av de reducerade röstetalen alltid är säkrade åt resp. partier. C) Den bör kunna användas vid alla slags val. D) Den skall vara enkel att använda i praktiken. E) Den skall ge god proportionalitet vid användning i en valkrets (lokal proportionalitet). F) Den skall ha god förmåga att utjämna tillfälliga fel då ett flertal kretsar tagas tillsammans (god total proportionalitet).

Härtill kommer ett politiskt villkor: G) Metoden bör inte gynna politisk splittring. Detta villkor skall diskuteras senare.

Villkoren ovan hänger naturligtvis samman mer eller mindre, men det kan ändå vara lämpligt att betrakta dem i denna form. Den Droopska metoden föll då för villkoret A) och därmed även för C). Vi skall nu först

med exempel visa, att både den d'Hondtska metoden och uddatalsmetoden kan kollidera med villkoret B. I fortsättningen behöver vi uppenbarligen inte längre betrakta M_r , utan kan arbeta med enbart m_r .

Antag då att fyra partier erhållit de reducerade röstetalen 1.65, 1.67, 1.68 och 6.00, alltså tillsammans 11 mandat. En enkel räkning ger omedelbart vid handen, att den d'Hondtska metoden ger 1, 1, 2, 7 medan uddatalsmetoden ger 2, 2, 2, 5. Trots att vi ännu inte har fixerat någon norm för bedömningen, sticker dessa resultat bjärt av från vår intuitiva uppfattning om vad som här vore minst orimligt, nämligen 1, 2, 2, 6. Detta är just det resultat som erhålles ur valkvotsmetoden. Man kan f. ö. lätt ge exempel på fall där ett parti på liknande sätt berövats 2 eller flera mandat.

För att säkrare kunna bedöma de olika metoderna skall vi nu söka fastställa en objektiv norm för bestämning av felet. Ett enkelt geometriskt resonemang leder omedelbart till en rimlig definition. Låt i ett tvådimensionellt, rätvinkligt koordinatsystem P_r ($r=1, 2, \dots, p$) vara punkter med koordinaterna (m_r, n_r) , så inses, att en valmetod bör åstadkomma, att P_r grupperar sig i nära anslutning till linjen $y=x$. Med denna bakgrund kommer man fram till följande definition: Felet är proportionellt mot summan av punkternas avstånd från linjen $y=x$ räknade i lodrät led. Då ett partis överskott motsvaras av ett eller flera andra partiers underskott, framgår att proportionalitetskonstanten bör sättas $=\frac{1}{2}$. Vi definierar alltså felet δ enligt:

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_r |m_r - n_r| = \frac{1}{2} \sum_r \delta_r.$$

Det är nu rimligt att söka finna en metod genom vilken δ minimeras, och det är lätt att visa, att vi då kommer fram till valkvotsmetoden. Antag först att något $\delta_r > 1$. Man kan då flytta motsvarande punkt sträckan 1 i lodrät led och en annan punkt på motsatt sida om linjen samma sträcka i motsatt riktning så att δ därigenom minskas. På detta sätt kan man tvinga ned alla δ_r under 1. Antag sedan att ett parti A fått ett extra mandat på sitt överskjutande bråktal α , medan ett parti B inte fått något mandat på sitt överskjutande bråktal β , och att $\alpha < \beta$. Man har då: $\delta_A + \delta_B = 1 - \alpha + \beta$. Om mandatet tages från A och ges åt B , blir motsvarande storhet $1 + \alpha - \beta$, vilket uppenbarligen är mindre än $1 - \alpha + \beta$. Vi kan alltså draga slutsatsen, att varje annan fördelning än den valkvotsmetoden ger, medger en förflyttning av mandat så att felet minskas. — Geometriskt innebär valkvotsmetoden att punkterna P_r ligger inom en remsa, begränsad av linjerna $y = x \pm (p-1)/p$.

Vi skall nu göra liknande resonemang för de båda andra metoderna. Den d'Hondtska metoden innebär, att för alla i och k :

$$\frac{m_i}{n_i} \geq \frac{m_k}{n_k + 1} \quad \text{eller} \quad m_i n_k + m_i \geq m_k n_i.$$

Summera först över alla $k \neq i$:

$$m_i(n - n_i) + (p - 1)m_i \geq n_i(n - m_i) \quad \text{eller} \quad n_i \leq m_i \left(1 + \frac{p - 1}{n}\right).$$

Summation över alla $i \neq k$ ger analogt:

$$n_k \geq m_k \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

eller om k bytes mot i :

$$(1) \quad m_i \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \leq n_i \leq m_i \left(1 + \frac{p - 1}{n}\right).$$

För uddatalsmetoden gäller då $n_i > 0$:

$$\frac{m_i}{2n_i - 1} \geq \frac{m_k}{2n_k + 1} \quad \text{eller} \quad 2m_i n_k + m_i \geq 2m_k n_i - m_k.$$

Den senare olikheten gäller även om n_i eller n_k eller båda är $= 0$. Efter summation över $i \neq k$ resp. $k \neq i$ får man:

$$(2) \quad m_i \left(1 - \frac{p - 2}{2n}\right) - \frac{1}{2} \leq n_i \leq m_i \left(1 + \frac{p - 2}{2n}\right) + \frac{1}{2}.$$

Dessa båda dubbla olikheter definierar sektorformade områden, där punkterna P_r måste ligga. I förra fallet gäller, att för tillräckligt stora m_i blir $n_i > m_i$, vilket innebär, att metoden måste vara behäftad med ett systematiskt fel. Detta kommer också att framgå av de kvantitativa resultat, som refereras senare. För uddatalsmetoden är de maximala avvikelserna lika i båda riktningar. Områdets form medför emellertid att ehuru inga systematiska fel uppträda (bortsett från området närmast origo), så blir likväl felen större än för valkvotsmetoden. För $p = 2$ finner man speciellt:

$$m_i - \frac{1}{2} \leq n_i \leq m_i + \frac{1}{2}$$

vilket betyder att i detta speciella fall uddatalsmetoden och valkvotsmetoden är identiska.

Vi kan nu lätt visa, att uddatalsmetoden med vissa inskränkningar kan baseras på en minimering av ett relativt fel

$$\varepsilon = \sum_i \left| 1 - \frac{n_i}{m_i} \right|.$$

Inskränkningen består i att inget δ_r större än 1 får uppträda, ty då gäller inte nedanstående resonemang, och man kan f. ö. med exempel visa, att inskränkningen är nödvändig. Betrakta alltså två konkurrerande värden m_i och m_k med motsvarande mandattal n_i och n_k , där $n_i > m_i$ och $n_k < m_k$. Det relativa felet är då:

$$\varepsilon_1 = \frac{n_i}{m_i} - \frac{n_k}{m_k}.$$

Överflyttas ett mandat från n_i till n_k blir relativa felet:

$$\varepsilon_2 = \frac{n_k + 1}{m_k} - \frac{n_i - 1}{m_i}.$$

Villkoret $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ger omedelbart $2n_i m_k - 2m_i n_k < m_i + m_k$, vilket är exakt den olikhet, som definierar uddatalsmetoden. Vi har alltså funnit, att om uddatalsmetoden och den här nämnda minimimetoden gett resultat, där inget δ_r är större än 1, så är resultaten identiska. Man kan emellertid inte gärna bygga en valmetod på en minimering av det relativa felet, då en sådan metod skulle bli mycket besvärlig rent tekniskt. Söker man i stället minimera kvadratavvikelsen, kommer man, som lätt inses, åter fram till valkvotsmetoden.

Ehuru dessa resonemang gett en del upplysningar, saknar vi dock ännu kvantitativa värden på de olika felen. För att erhålla sådana har Monte Carlo-metoden tillgripits. Vi har därvid begränsat oss till fallet $p=5$, som i de nordiska länderna gäller med någorlunda god approximation. Vidare har vi endast betraktat $n=5, 8, 12$ och 20 , men resultaten tillåter slutsatser även för andra värden. Då man enligt det föregående endast behöver befatta sig med talen m_r , kan problemet i första hand formuleras så: Sök fem positiva tal $m_1, \dots, m_5$ så att deras summa är $=a$ och så att talen i övrigt är slumpvis fördelade. Detta senare villkor behöver preciseras, och för att lättare genomföra detta, betraktar vi först det enklare fallet $p=3$. Vi söker alltså tre positiva tal x, y och z så att $x+y+z=1$. Detta villkor kan representeras geometriskt i ett rätvinkligt koordinatsystem i rymden, och varje val svarar

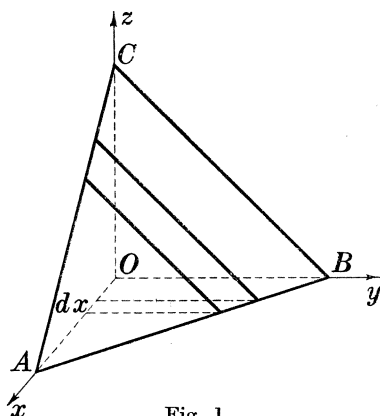


Fig. 1

mot en punkt i den liksidiga triangeln ABC (fig. 1). Vårt andra villkor kan nu formuleras så, att dessa punkter skall vara jämnt fördelade över hela triangelytan. Men uppenbarligen gäller detta i så fall även i projektionen OAB , som är en likbent, rätvinklig triangel. Låt nu $p_x dx$ vara antalet punkter, vilkas x -koordinat ligger mellan x och $x+dx$, och låt x vara en funktion av en stokastisk variabel ξ med rektangulär fördelning i intervallet $(0,1)$. Vi har då $p_x dx = p_\xi d\xi$ med $p_\xi = 1$. Ur figuren följer omedelbart $p_x = k(1-x)$, och efter insättning och integration från 0 till 1 får vi $k=2$. Således är $d\xi = 2(1-x)dx$ och med lämplig konstantbestämning

$$x = 1 - \sqrt{1-\xi}.$$

Men då ξ är rektangulärt fördelad i $(0,1)$ gäller detsamma om $1-\xi$ och vi kan alltså skriva

$$x = 1 - \sqrt{\xi}.$$

Det är sedan lätt att bestämma y och z , ty $y+z=1-x$, och vi har samma problem på nytt i lägre dimension.

Detta kan nu generaliseras till högre dimensionsantal, ehuru den geometriska åskådligheten därvid går förlorad. Vi väljer alltså fyra »random numbers» ξ_1, ξ_2, ξ_3 och ξ_4 , vilka är rektangulärfördelade i $(0,1)$. Sedan bildas våra fem m_r enligt följande schema:

$$\begin{aligned} m_1 &= a(1 - \sqrt[4]{\xi_1}) \\ m_2 &= (a - m_1)(1 - \sqrt[3]{\xi_2}) \\ m_3 &= (a - m_1 - m_2)(1 - \sqrt{\xi_3}) \\ m_4 &= (a - m_1 - m_2 - m_3) \cdot \xi_4 \\ m_5 &= a - m_1 - m_2 - m_3 - m_4. \end{aligned}$$

För vart och ett av de fyra a -värdena 5, 8, 12 och 20 bestämdes 150 »punkter» ($m_1, \dots, m_5$), och i vart och ett av dessa fall fördelades mandaten enligt de tre metoder vi betraktar. Sammanlagda antalet mandat uppgick alltså till 6750. Felen beräknades sedan dels för en krets (lokalt fel), dels sedan en viss utjämning skett genom att 25 kretsar slagits samman (totalt fel). Resultatet framgår av tabell I, i vilken d'Hondts metod, uddatalsmetoden och valkvotsmetoden betecknats med A , B och C .

Tabell I:

	Lokalt fel			Totalt fel		
	A	B	C	A	B	C
5 mandat	0.86	0.66	0.65	0.65	0.23	0.22
8 »	0.88	0.65	0.64	0.68	0.19	0.17
12 »	0.91	0.65	0.64	0.70	0.16	0.14
20 »	0.94	0.64	0.63	0.73	0.13	0.12

Särskilt påfallande är att kolumnerna *B* och *C* innehålla så mycket lägre värden i tabellen för det totala felet, medan värdena i kolumnen *A* avtagit endast obetydligt i förhållande till det lokala felet. Detta bör tolkas så att felet i den d'Hondtska metoden huvudsakligen är systematiskt, medan de båda andra metodernas fel huvudsakligen är tillfälliga. De ovan återgivna siffrorna visa med all önskvärd tydlighet, att även den d'Hondtska metoden bör kunna avföras från diskussionen.

Vad de båda återstående metoderna beträffar är tydligen valkvotsmetoden den bättre med hänsyn till felen. Ehuru differenserna rent siffermässigt är små, är de likväl långt ifrån betydelselösa, vilket redan tidigare påpekats i samband med drastiska exempel. Invändningarna mot valkvotsmetoden har också mestadels rört sig om det politiska villkoret, att en valmetod inte bör gynna politisk splittring. För fullständighetens skull skall vi därför undersöka hur de båda återstående metoderna kan anpassas till detta villkor och vilka konsekvenser det får beträffande felen.

Villkoret innebär att man skärper fordringarna för erhållande av det första mandatet. Detta kan för uddatalsmetoden ske genom att man ersätter den första divisorn 1 med ett något högre tal, rimligtvis mellan 1 och 1.5, eller också genom att man inför en spärr, så att alla partier, som inte uppnått detta värde (i praktiken mellan 0.4 och 0.7) uteslutas från sammanräkningen. För valkvotsmetoden kan endast den senare metoden komma i fråga. Det visar sig då, att det totala felet är speciellt känsligt för dylika ingrepp och kan ge en ganska säker indikation om vilken siffra som bör väljas. Denna siffra visar sig även vara starkt beroende av mandatantalet, vilket knappast är överraskande. I tabell II anföres det totala felet i uddatalsmetoden vid användande av modifierad första divisor och i tabell III det totala felet i valkvotsmetoden vid användande av spärregel.

Tabell II:

Divisor	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
5 mandat	0.23	0.26	0.33	0.40	0.45
8 »	0.19	0.21	0.24	0.29	0.36
12 »	0.16	0.19	0.21	0.27	0.34
20 »	0.13	0.15	0.19	0.21	0.23

Tabell III:

Spärr	0.4	0.5	0.6	0.7
5 mandat	0.25	0.30	0.41	0.63
8 »	0.19	0.23	0.28	0.40
12 »	0.13	0.18	0.21	0.34
20 »	0.13	0.13	0.20	0.23

Man kan tydligt iakttaga hur felet stiger kraftigt vid en bestämd punkt, olika för olika mandatantal. Som ett grovt medelvärde kan i första fallet användas 1.2 och i andra fallet 0.5. Den i Sverige provisoriskt använda divisorn 1.4 torde sakna teoretisk bakgrund.

Sammanfattningsvis kan konstateras, att undersökningen gett till resultat, att valkvotsmetoden kompletterad med en spärregel vid 0.5 mandat, är den metod som bäst tillgodoser de uppställda villkoren. För ett gott resultat är det också nödvändigt att valkretsarna inte är för små, och helst bör de omfatta åtminstone 10–15 mandat.

Till sist skall också nämnas, att om man är villig att ge avkall på villkoret att metoden skall vara enkel i praktiken, så är möjligheterna inte uttömda. Man kan t. ex. söka minimera den »inbördes orättvisan» i stället för som tidigare avvikelserna från medeltalet. Införes beteckningen

$$q_r = \text{Max} \left(\frac{n_r}{m_r}, \frac{m_r}{n_r} \right),$$

så skall man söka bestämma n_r så att $\prod_r q_r$ blir minimum. Man kan då visa, att detta leder till en bestämd metod, svarande mot divisorerna $\sqrt{n(n-1)}$. Metoden har anförts av Huntington och huvudsakligen diskuterats i U. S. A. Den karakteriseras bl. a. av att varje parti får minst ett mandat, vilket är rimligt då det gäller delstaternas representation i kongressen.

För närmare detaljer om denna och andra mindre kända metoder hänvisas till ett monografiskt arbete av F. Glaven: *Om metoder for afstemninger og valg*, København 1955.

BOKMELDINGER

ROSS A. BEAUMONT — RICHARD W. BALL: *Introduction to modern algebra and matrix theory*. Rinehart & Co., New York, 1954. 12 + 331 pp. \$ 6.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 4 (1956), s. 157.)

Denne boken er beregnet på »the student whose interest is in mathematics, the physical sciences, or certain of the social sciences«, skriver forfatterne i forordet. Den gir en grundig innføring i lineær algebra og ligningsteori, og forfatterne har villet presentere dette stoffet i forbindelse med en innføring i moderne algebra. Sammen med ønsket om å gi leserne et innblikk i den moderne matematikks bevisførsel, er dette bokens idé.

I det første kapitlet blir matriser definert, og en utvikler den vanlige elementære matrise- og determinantteori. Overalt ser en at forfatterne har villet gi stoffet en slik form, at utvidelser til f. eks. matriser med elementer hentet fra en ring eller kropp, blir naturlig.

I de to neste kapitler behandles transformasjonsgrupper og vektorrom. Her defineres begreper som »tallkropper«, »ekvivalensrelasjoner«, »faktorrom« o. s. v. Men ingen av disse begrepene blir behandlet generelt. Det er hele tiden snakk om tall og matriser med elementer fra en tallkropp. Vektorrom blir f. eks. innført som »sequence spaces«, hvor elementene er $(n-1)$ -matriser. Det er ganske imponerende å se hvor mange generelle begreper det er blitt plass til på disse få sidene, hele tiden uten å vende oppmerksomheten bort fra de mere elementære emner som behandles.

Disse tre første kapitler danner sammen med de to siste en slags »bok i boken«. En kan lese dem uavhengig av resten, og en aner at dette er forfatternes trumfkort. Denne inndelingen gjør det mulig for de som ikke hovedsakelig er interessert i matematikk, men som likevel har bruk for lineær algebra, å lese boken med utbytte. Samtidig står døren åpen for en dypere inntrengning i stoffet gjennom de resterende kapitler, som er av mer abstrakt natur. Her gis en liten innføring i det en vanligvis kaller moderne algebra. I ett kapittel behandles grupper, og i to andre ringer og kropper, samt algebraiske og transcendent utvidelser av kropper. Stoffet er klart og greit behandlet, og det er meget lettlest.

Så vidt jeg kan skjønne er det ikke noe som mangler her, av det en kan vente tatt med i en slik innføring.

Bokens to siste kapitler har overskriftene »Matrices with polynomial elements« og »Canonical forms for groups of matrix transformations«. I det siste defineres »Hermitiske matriser«, og det hele slutter med en kort omtale av unitære transformasjoner.

Med den vide leserkrets som denne boken er tiltenkt, må det nødvendigvis finnes ting som ikke tilfredsstiller alle parter. For de som er mest interessert i moderne algebra, vil den nok kunne virke en smule kjedelig. Spesielt vil det vel irritere at alle begreper blir behandlet to ganger, først elementært i de tre først kapitler, og så abstrakt i det følgende. Men for de som trenger en innføring i lineær algebra, og som måtte ønske å se dette emnet behandlet i forbindelse med moderne algebra, kan boken anbefales på det varmeste.

Olav Arnfinn Laudal

WOLFGANG HAACK: *Darstellende Geometrie, III. Axonometrie und Perspektive.* (Sammlung Götschen 144.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1957. 127 S., 100 Fig. DM 2.40.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 110.)

Arbetet bildar tredje och sista bandet av den ursprungligen av R. Haussner utgivna, senare av författaren fullständigt omarbetade läroboken i deskriptiv geometri och handlar om axonometri och perspektivlära. Något kapitel om fotogrammetri som nämnts i vissa förhandsmeddelanden finnes ej.

Axonometrin, d. v. s. läran om åskådlig och måttäkta avbildning genom ortogonal eller sned parallellprojektion behandlas på 38 sidor. Inom denna trånga ram har emellertid författaren lyckats få plats för det viktigaste kunskapsstoffet i ämnet, såväl det teoretiska som det praktiska. Den relativt nya konstruktionsmetoden enligt Schmid och Eckhart har ägnats tillbörlig uppmärksamhet. Författaren rekommenderar den ortogonaldimetriska projektionsmetoden med förkortningsförhållandena $\frac{1}{2}:1:1$ av koordinataxlarna och har utfört ett flertal figurer enligt densamma.

Däremot nämns ej den amerikanska trimetriska ortogonalprojektion vid vilken icke förkortningsförhållandena utan vinklarna mellan bildaxlarna ha möjligast bekväma värden (105° , 120° , 135°). Till sist redogörs för det äldsta (fullständiga) beviset för Pohlkes fundamentalsats enligt vilken man har så gott som oinskränkt frihet att vid sned axonometri välja bildaxlarna och deras enhetssträckor efter behag.

I perspektivläran ingår en utförlig jämförelse mellan det naturliga

seendet og åskådlig avbildning medels centralprojektion, given till en del redan på bokens första sidor. Dessa betraktelser förtjäna särskilt framhållas. Liksom vid behandlingen av parallellprojektion utvecklas centralprojektionens teori och dess praktiska tillämpning efterhand (på sammanlagt 80 sidor) i en omfattning motsvarande större läroböcker i ämnet, varvid dock perspektiv avbildning på bildplan i snett läge lämnas åsido. Möjligen hade det varit skäl inskränka betraktelserna över cirkeln perspektiva bild i avsikt att bereda plats för några fullständigt utförda, mönstergilla perspektivbilder i stil med den på sidan 5 med tillhörande kommentarer.

Den välskrivna och med hänsyn till omfånget överraskande innehållsrika boken kan varmt rekommenderas.

E. J. Nyström

HELMUT HASSE: *Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung*. (Schriftenreihe zur Mathematik 1.) Otto Salle Verlag, Frankfurt a. M., 1955. 8 + 103 S. DM 6.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 45.)

Dette er en ualminnelig interessant, ja rent ut sagt morsom liten bok. Det kreves minimale forkunnskaper (norsk realskole er nok), men det forutsettes unektelig en viss modenhet hos leseren. Når f. eks. forfatteren først beviser at ethvert rektangel som ikke er et kvadrat, kan omgjøres til et annet rektangel med *samme* omkrets, men med *større* areal, og så hevder at man av dette ikke uten videre kan slutte at kvadratet er det største av alle rektangler med gitt omkrets — ja, da vil vel en nybegynner i faget utvilsomt steile. Imidlertid slippes ikke leseren løs etter å ha vært pådyttet en slik påstand. Ved enkle og fremfor alt demonstrative eksempler viser forfatteren oss tilfeller der en funksjon stadig vokser (eventuelt avtar) i et intervall, er begrenset i intervallet, og allikevel ikke *oppnår* noen ekstremalverdi.

De fire paragrafene omhandler følgende emner: Primtall, ekstremaloppgaver, irrasjonale tall, firefargeproblemet. På grunn av stoffets elementære karakter føres bevis bare i de aller enkleste tilfellene, ellers presenteres det hele rent refererende, og fremstillingen er i stor utstrekning historisk.

Forfatteren har ofret mest plass på firefargeproblemet, idet det fyller den siste halvdel av boka. Dette problemet ble i 1879 presentert på et møte i Det Geografiske Selskap i London av den kjente engelske matematiker Cayley. Det går som kjent ut på følgende: På et kart (der bare landegrenser er inntegnet) skal en fargelegge hvert land med sin tildelte farge slik at to land som støter opp til hinannen langs en grense ikke skal ha

samme farge (men to land med samme farge kan godt ha et hjørne felles). En innser lett at tre eller ferre farger ikke strekker til, og det lar seg bevise (Hasse tar med dette beviset) at den nevnte fargelegging lykkes med 5 eller flere farger. Men hittil har ingen klart å bevise om det lykkes eller ikke når en tar nøyaktig 4 farger til hjelp.

Det forutsettes i dette tilfellet at kartet er tegnet på en kuleflate, dvs. en flate av slekt null. I tilknytning til dette gåes så inn på det analoge problem for flater av slekt $g > 0$, og det viser seg at for slike flater er problemet løst. Forfatteren fremhever sterkt det eiendommelige ved dette forhold, at problemet lar seg løse for mer »innviklede« flater, men at det er uløst for den enkleste, nemlig kuleflaten.

Til slutt nevnes en del andre problemer som er ekvivalente med fire-fargeproblemet.

Selv om boka ligger på et helt elementært nivå, behandler den så mange høyst forskjellige emner at fag-matematikere også vil finne atskillig av interesse. Men de leserne som ubetinget vil ha størst glede av den, er matematikk-interesserte gymnasiaster. De kan rett og slett ikke unngå å bli sjarmert over den mangfoldighet av varierte problemer som matematikerne gjennom årtusener har slitt med — med mer eller mindre hell — og hvor overraskende løsningene ofte kan være. Boka bør derfor settes øverst på lista over nyanskaffelser ved elevbibliotekene på alle gymnasier.

John Olav Stubban

DAVID HILBERT: *Grundlagen der Geometrie*. Achte Auflage, mit Revisionen und Ergänzungen von Paul Bernays. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1956. 7 + 251 S., 124 Fig. Kart. DM 11.40, hln. DM 13.40.

(Innholdsfortegnelse i NMT 4 (1956), s. 216.)

Den foreliggende udgave af Hilberts berømte tekst er et næsten uændret optryk af syvende udgave. Af Anhang I–X fra syvende udgave er dog kun medtaget Anhang I–V, idet kun disse omhandler geometriske emner. Til gengæld er der tilføjet tre korte Supplemente, af hvilke I er et kort referat af det udeladte Anhang VI, medens II indeholder en simplificeret fremstilling af proportionslæren, og III indeholder en kommentar til Anhang II (om basisvinkler i en ligebeinet trekant). I selve teksten er foretaget følgende ændringer: Fuldstændighedsaksiomet er ligesom i syvende udgave formuleret lineært, men i den foreliggende udgave er det klarere og præcisere formuleret. I kapitel IV er der tilføjet en henvisning til J.-P. Sydners arbejder vedrørende delingslighed og tilføjes-

lighed for polyedre. Endelig er der i kapitel VI udeladt en uholdbar påstand om tællelighed af et ikke-Archimedisk tallegeme.

H. Tornehave

A. KHINTCHINE: *Kettenbrüche*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 3.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1956. 6 + 97 S. Geb. DM 5.40.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 45.)

Boken er en oversettelse fra russisk. Originalen er skrevet med det formål å være en elementær lærebok i kjedebrøkteori til bruk ved russiske universiteter og høyskoler. Den utkom første gang i 1935. Den foreliggende tyske utgaven bygger på annet opplag (Moskva, 1949).

I første kapitel behandles kjedebrøkernes mest elementære egenskaper. Så følger i annet kapitel de vanlige approksimasjonssatsene, og litt om periodiske kjedebrøker.

Av spesiell interesse er det siste av bokens tre kapitler. Her gis en innføring i den såkalte metriske kjedebrøkteori, som særlig er utviklet av russiske matematikere. Det dreier seg her om følgende problemstilling: Man betrakter en mengde av reelle tall (mellom 0 og 1) som er bestemt ved en eller annen spesiell egenskap ved tallenes kjedebrøkutvikling. (F. eks. de tall hvor partialnevnerne i kjedebrøkutviklingen er begrenset.) Oppgaven er så å bestemme målet for denne mengden.

Boken er klar og velskrevet. Forfatteren har en sjelden evne til å fremheve det vesentlige. Når man tar i betraktning det beskjedne sidetall, er boken forbausende innholdsrik. Den gir riktignok ingen øvelsesoppgaver, og det er også svært sparsomt med eksempler, men den er allikevel lettlest på grunn av den fyldige teksten.

Oddmund Kolberg

IVAN NIVEN: *Irrational numbers*. (Carus mathematical monographs 11.) John Wiley & Sons, New York, 1956. 12 + 164 pp. \$ 3.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 46.)

Forfatteren har satt seg til oppgave å gi en fremstilling av noen av de viktigste resultater i teorien for de irrasjonale tall, innbefattet transcendent og normale tall. Da stoffet er meget omfattende, er der gjort et skjønnsomt utvalg med hovedvekten lagt på de deler av teorien som har nær tilknytning til tallteori og diofantiske approksimasjoner. Etter anmelderens mening er resultatet blitt meget vellykket, slik at vi her har fått en høyst interessant og inspirerende bok. I enkelte avsnitt forutsettes at leseren har noe kjennskap til algebraiske tall og funksjons-

teori, ellers kreves ingen spesielle forkunnskaper utenom elementene av differensial- og integralregningen.

Boken er delt i 10 kapitler, som — stort sett — er ordnet etter vanskelighetsgraden. De fleste kapitler kan også leses uavhengig av hverandre. Etter hvert kapittel følger en kort historisk oversikt og litteraturhenvisninger for dem som måtte ønske å fordype seg mere i de emner som er behandlet.

I det følgende omtaler jeg ganske kort noe av det rike materiale som en vil finne i boken.

I første kapittel vises bl. a. at nesten alle reelle tall er irrasjonale. I annet kapittel bevises at de trigonometriske og hyperbolske funksjoner er irrasjonale for alle rasjonale verdier av argumentene som er forskjellige fra null. Videre gis et kort bevis for at e er et transcendent tall. Det tredje kapitlet er viet Lehmers sats om graden av de hele algebraiske tall $2 \cos \frac{2\pi k}{n}$ og $2 \sin \frac{2\pi k}{n}$. Forfatteren bestemmer så graden av det algebraiske tall $\text{tg} \frac{2\pi k}{n}$. Dette siste resultat synes å være nytt. I femte

kapittel drøftes regelmessige kjedebrøksutviklinger for reelle tall. Spesielt kan nevnes at en her finner en ny variant av beviset for periodisiteten i kjedebrøksutviklingen av en kvadratisk irrasjonalitet.

I fjerde og sjette kapittel omtales approksimasjoner av irrasjonale tall ved hjelp av rasjonale tall. Bl. a. bevises klassiske satser av A. Hurwitz. Nevnt er også K. E. Roth's generalisasjon av Thue-Siegel-Dyson's sats. Videre følger et avsnitt om »likefordeling«.

I kapittel 7 behandles algebraiske og transcendente tall, herunder Liouville'ske tall. I kapittel 8 gis en interessant fremstilling av hovedpunktene i teorien for de såkalte »normale« tall.

I det niende kapittel finner en et bevis for det generelle Lindemanns teorem. Det siste kapitlet i boken er det tyngste. Her gis et bevis for Gelfond-Schneiders sats: Er α og β algebraiske tall, $\alpha \neq 0$ og $\neq 1$ og β ikke noe reellt rasjonalt tall, da er α^β et transcendent tall. Beviset er basert på en forenkling av Gelfonds bevis. Denne forenklingen skyldes C. L. Siegel.

W. Ljunggren

B. L. VAN DER WAERDEN: *Mathematische Statistik*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 87.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 11 + 360 S., 39 Fig. DM 46.00, ganzl. DM 49.60.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 47.)

Læren om hvorledes man på grunnlag av statistiske erfaringsmaterialer trekker almenngyldige slutninger er en forholdsvis ny gren av de matematiske vitenskaper. Av bevisste forsøk på å skape en generell statistisk metodelære kjenner man før dette århundre antagelig bare ett (Bayes 1763). Det var R. A. Fisher i 1920-årene og J. Neyman, E. S. Pearson og A. Wald i 1930-årene og senere som ga vitenskapen sin nåværende utforming. Det er forbausende at den sterke utvikling innen den matematiske statistikk helt til i dag praktisk talt utelukkende har funnet sted i England og Amerika. Inntil etter siste krig syntes man på det europeiske kontinent ikke engang å være oppmerksom på hva som foregikk.

I dag arbeides det åpenbart iherdig for å ta igjen det forsømte. Et par ypperlige lærebøker som er utkommet på tysk i den senere tid viser det, den ene av dem er den foreliggende bok av van der Waerden. Det er to grunner til at man nesten kunne vente gode lærebøker fra kontinentalt hold når de først kom. For det første er man ikke i de land som ikke deltok i utviklingen i 1920- og 1930-årene bundet av tidligere standpunkter i den bitre strid som fant sted dengang om prinsipielle synspunkter. Det er en fordel å kunne se med friske øyne på problemene om sannsynlighetsregningens grunnbegreper, a priori sannsynlighet som grunnlag for statistiske slutninger, momentmetoden kontra sannsynlighetsmaksimeringsmetoden, Neyman-Pearson's hypoteseprøvningsprinsipper og teststyrken, fiducial sannsynlighet og konfidensintervaller osv. For det annet finner man ikke hos de kontinentale forfattere av matematiske lærebøker den redsel for presise matematiske formuleringer som er så alminnelig blant anglo-amerikanske læreboksforfattere. (For å bli forstått må man uttrykke seg upresist!)

Ett av stridsspørsmålene fra mellomkrigstiden gjaldt som nevnt spørsmålet om sannsynlighetsregningens grunnbegreper. Denne strid synes — forsåvidt det gjelder sannsynlighetsregningen som grunnlag for den statistiske metodelære (og statistisk mekanikk og fysikk) — å være avgjort entydig til fordel for Kolmogoroff's synspunkt. van der Waerden tar her et greit standpunkt. Han sier i innledningen: »Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist als exakte mathematische Theorie in dem hier erforderlichen Umfang zuerst von Kolmogoroff entwickelt worden. Auf diesen axiomatischen Aufbau stützen wir uns hier, ohne uns über die Herkunft des Wahrscheinlichkeitsbegriffs weiter Sorgen zu machen. Die reine mathematisch aufgebaute Theorie bewährt sich in der Anwendung so gut wie die Euklidische Geometrie die Newtonsche Mechanik, das möge genügen. Die philosophische Erörterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist ohne Zweifel interessant und wichtig, gehört aber nicht in ein Lehrbuch wie dieses hinein.«

Kolmogoroffs sannsynlighetsregning bygger på mål- og integralteorien slik som den er utviklet av Borel, Lebesgue og Caratheodory. Forutsetningen for å forstå van der Waerden's bok er derfor strengt tatt at man er fortrolig med denne gren av den matematiske analyse. Dette vil neppe vekke særlig anstøt i dag hvor mål- og integralteorien hører med til matematikerens almenutdannelse. Likevel vil man kunne lese boken uten målteoretiske kunnskaper, men enkelte utledninger vil i så fall bare være overfladisk forståelige.

Sannsynlighetsregningens enkleste grunnbegreper gjennomgås kort og skissemessig på de 22 første sidene. Forfatteren har ikke sett det som sin oppgave å gå videre i detalj her, men henviser til Caratheodory, Kolmogoroff og Cramér.

På side 165–168 gjennomgås så — likeledes skissemessig, men pedagogisk meget elegant — Kolmogoroffs definisjon av betinget sannsynlighet og forventning. Disse definisjoner danner så utgangspunktet for den presise definisjon av Fisher's viktige begrep *sufficient statistic* — på tysk kalt »erschöpfende statistische Grösse«. Blackwell's teori (1946) for forbedret estimering og Lehman og Scheffe's teorier (1950) for komplette estimatorer er så omtalt. Det er meget verdifullt at disse overordentlig viktige nyere synspunkter nå er innarbeidet i læreboks form.

Før omtalen av disse synspunkter utvikler forfatteren side 22–105 de klassiske ideer i statistikken: relativ hyppighet i relasjon til sannsynlighet, hyppighetsfordelinger, empiriske størrelser, de vanlige begreper i forbindelse med sannsynlighetsfordelinger. Her går forfatteren grundig til verks; når det gjelder den egentlige statistikk forutsetter han i virkeligheten ingen forkunnskaper hos leserne.

Gauss' feilteori og minste kvadraters metode supplert med Students test er så gjennomgått på side 105–148, mens variansanalysen omtales — forbausende kortfattet — på side 242–251. Det virker overraskende at den generelle teori for lineærnormale forsøk og forsøksplanlegging ikke er omtalt. Den statistiske forsøksplanlegging utgjør dog en av den moderne statistikk's viktigste landevinninger.

Bivariabel korrelasjon med sannsynlighetsfordelingen for korrelasjonskoeffisienten er derimot relativt utførlig omtalt på bokens siste 30 sider.

I forbindelse med estimeringsteoriene er Frechets fundamentale ulikhet (1943) utledet og anvendt. Sannsynlighetsmaksimeringsmetoden kommenteres inngående, og de asymptotiske egenskaper ved de fremkomne estimatorer behandles. Kjikvadrat-minimaliseringsmetoden med anvendelser på probitanalyse (»Bio-Auswertung«) er behandlet i samme forbindelse.

Det er åpenbart at forfatteren legger megen vekt på kjiqvadrat-føyningstestene. Fordelen ved disse testmetoder er at de er meget elastiske når det gjelder å tilpasse dem til de forskjellige hypoteser som man blir stillet overfor i statistisk praksis. Men slik som de foreligger fra R. A. Fisher's hånd har de samtidig den svakhet at de ikke så lett lar seg tilpasse til de a priori kunnskaper i de konkrete situasjoner. Dette forsøkte man lenge å rette på ved å supplere med såkalte fortegnstester. I betraktning av den utførlige omtale av kjiqvadrat-tester er det skuffende at forfatteren ikke omtaler J. Neyman's elegante løsning av disse vanskeligheter. (Se theorem 7 i »Contribution to the theory of the χ^2 -tests«, Berkeley Symposium 1949.) Det synes i det hele å være forfatterens synspunkt (uten at han direkte sier det) at de testmetoder som bygger på lite spesifiserte a priori forutsetninger er de mest anvendbare. Det fremgår også av den vekt han har lagt på de ikke-parametriske metoder.

Forfatterens behandling av disse metoder (tysk »Anordnungstests«) er forøvrig overordentlig verdifull og fremstillingen er meget klar.

Neyman og Pearson's epokegjørende teorier om prinsippene for hypoteseprøving er gjennomgått på 11 sider. Testing av delspesifiserte hypoteser med »similar regions« er nevnt uten beviser. Mange ville nok ha ønsket en langt bredere fremstilling av disse viktige synspunkter i en generell innføringsbok i matematisk statistikk. Det sto lenge strid om disse synspunkter. I dag er de alminnelig akseptert som en selvfølgelig del av den matematisk-statistiske lærebygning.

Som en generell karakteristikk av van der Waerdens lærebok kan det sies at det er forbausende hvor meget stoff han har greid å behandle på få sider. Forfatteren har åpenbart stillet seg som oppgave å gi en konsentrert oversikt over den matematiske statistikk's viktigste landevinninger opp til i dag. Det har ført til at han har måttet omtale en rekke emner uten utledninger; men de grunnleggende ideer er relativt utførlig omtalt og utledet.

Den matematisk-statistiske metodelære er som nevnt en ung vitenskap og lærebøkene er ennå i sin vorden. van der Waerden's lærebok er den mest verdifulle av de innføringer i emnet som nærværende anmelder har stiftet bekjentskap med på mange år.

Erling Sverdrup

EDUARD WINTER: *Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766. Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin.* Akademie-Verlag, Berlin, 1957. 13 + 393 S.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 111.)

I anledning av 250-årsdagen 15. april i år for Eulers fødsel ble det ved Akademiet i Berlin holdt en »Eulerfeier« med en påfølgende »Mathematiker-Tagung«. Samtidig forelå også denne boken av Winter ferdigtrykt.

Disse »registrer«, som er utdrag av den tapte protokoll, er ikke tidligere trykt. De er skrevet på fransk og gir fortegnelse over de tilstedeværende ved de ukentlige møter og emnene for foredragene. De må tillegges stor verdi tiltross for at de er meget kortfattet. Ett sted får vi høre at Euler har holdt foredrag »de nummeris«. Men som regel er den fullstendige tittel angitt og man får et overblikk over Eulers veldige flid både som foredragende og som deltagende medlem. Av de hundre første av de noterte møter har han bare forsømt seks!

I 1830-årene beskjeftiget P. H. Fuss seg med en av Petersburgerakademiet planlagt utgave av Eulers samlede verker. Planen strandet på tsar Nikolai I's motstand og ble først tatt opp igjen på nittenhundretallet i Sveits. Den brevveksel som i sakens anledning ble ført mellom Fuss og C. G. J. Jacobi er offentliggjort i 1908. Da Eneström utarbeidet sin bibliografi over Eulers verker holdt han seg til Jacobis oppgaver. Men da disse var unøyaktig ført, er det også blitt en del feil i den høytfortjente svenske matematikkhistoriker Eneströms bibliografi, bemerker Winter.

Boken inneholder foruten registrene en ganske utførlig omtale av Eulers liv og virke inntil han i 1766 forlot Berlinerakademiet. Enhver som interesserer seg for matematikkens historie vil ha stor glede av å lese denne Winters skildring av den store sveitsiske matematikers liv i denne tid hvor han beriket den matematiske litteratur på en så avgjørende måte. Størst interesse knytter det seg kanskje til skildringen av forholdet mellom Euler og Fredrik den Store, som var alt annet enn godt. Tilslutt besluttet Euler seg til å forlate Berlin for å reise tilbake til Petersburg. Kong Fredrik hadde nemlig gått så vidt som til å foreslå d'Alembert som president for Akademiet! Det tjener til d'Alemberts heder at han avslo dette tilbudet og foreslo kongen å gjøre Euler til president. Men denne hensynsløshet fra kongens side såret selvfølgelig Euler dypt. Men heller ikke han var tapt bak en vogn! Da kongen ba Euler foreslå en passende overbibliotekar for det kongelige bibliotek, foreslo Euler en person Wegelin som overhodet ikke eksisterte! Forslaget ble godtatt og da man så skulle skrive til ham måtte Euler meddele at den imaginære herr Wegelin ikke lenger var interessert i å komme til Berlin, da han hadde fått forhøyet sin lønn i sin hjemby. Alt tyder på at kongen fikk kjennskap til saken, men da hadde alt Euler innlevert sin avskjeds-søknad. Kongen forsøkte lenge å sabotere denne søknad ved ikke å svare, da han tross alt nødigg ville miste ham. »War doch Euler der leuchtendste Stern in seiner Akademie und der verbündeten Kaiserin Katharina II gönnte er ihn am wenigsten«, skriver Winter.

Viggo Brun

MOTTATTE BØKER

Carl-Erik Frøberg: *Hexadecimal conversion tables*. Second, completely revised edition. (Lund University, Dept. of Numerical Analysis. Table No. 1.) CWK Gleerup, Lund, 1957. 29 s. Sv. kr. 3.00.

Decimal-hexadecimal conversion of integers 5-9 * Decimal-hexadecimal conversion of fractions 10-17 * Conversion to normalized hexadecimal numbers 18-22 * Frequently used constants in hexadecimal form 23 * Hexadecimal-decimal conversion of fractions 24-26.

Carl-Erik Frøberg: *Complete elliptic integrals*. (Lund University, Dept. of Numerical Analysis. Table No. 2.) CWK Gleerup, Lund, 1957. 82 s. Sv. kr. 10.00.

The integrals

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt,$$

$$K'(k) = K(k'), \quad E'(k) = E(k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

and the auxiliary functions

$$S(k) = K' - \log \frac{4}{k}, \quad S'(k) = K - \log \frac{4}{k'},$$

are tabulated to 10 decimal places for

$$k = 0(0.001)0.9(0.0001)1.$$

Second order differences are given throughout.

Fünfzig Jahre Relativitätstheorie. Verhandlungen, Bern 11.-16. Juli 1955. Herausgegeben von A. Mercier und M. Kervaire. (Helvetica Physica Acta, Supplementum IV.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1956. 286 S. SFr. 36.00.

Programm, Teilnehmer, Ansprachen 5-37.

Kurze Mitteilungen von M. v. Laue, A. Alexandrov, J. Tits, D. van Dantzig, C. Möller, O. Costa de Beauregard, Y. Fourès-Bruhat, H. Bondi, J. Géhéniau et R. Debever, O. Heckmann und E. Schücking, A. Papapetrou, W. H. McCrea, E. Corinaldesi, O. Klein, F. Hoyle, W. Scherrer, G. Ludwig und K. Just, N. Rosen, M. A. Tonnelat, F. A. E. Pirani, V. Fock, L. Infeld.

Hauptreferate: O. Klein: Generalizations of Einstein's theory of gravitation considered from the point of view of quantum field theory 58–71 * P. G. Bergman: Quantisierung allgemein-kovarianter Feldtheorien 79–97 * R. J. Trumpler: Observational results on the light deflection and on the red-shift in star spectra 106–113 * H. P. Robertson: Cosmological theory 128–146 * P. Jordan: Über die Hypothese einer Veränderlichkeit der sogenannten Gravitationskonstante 157–167 * A. Lichnerowicz: Problèmes généraux d'intégration des équations de la relativité 176–191 * E. Wigner: Relativistic invariance of quantum-mechanical equations 210–226 * B. Kaufman: Mathematical structure of the non-symmetric field 227–238 * M. Born: Physics and relativity 244–260.

Schlusswort, Jubiläumsfeier 261–286.

G. Grosche: *Projektive Geometrie, I.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 7.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957. 6 + 204 S., 45 Fig. Geb. DM 10.20.

Einleitung 1–32 * Projektive Geometrie in der Punktreihe 33–97 * Projektive Geometrie im Ebenen- und Geradenbüschel 98–115 * Projektive Geometrie in den Grundgebilden zweiter Stufe 116–186 * Lösungen zu den Übungen 187–201 * Namen- und Sachverzeichnis 202–204.

Wolfgang Haack: *Darstellende Geometrie, III.* Axonometrie und Perspektive. (Sammlung Götschen 144.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1957. 127 S., 100 Fig. DM 2.40.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 100.)

Axonometrie 10–48 * Grundzüge der ebenen Perspektive 48–68 * Elemente der angewandten Perspektive 69–82 * Perspektive von Kreisen 82–107 * Schattenkonstruktion in der Perspektive 107–122 * Literatur 123 * Register 124–127.

M. Hieke: *Vektoralgebra.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 4.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1956. 6 + 154 S., 67 Fig. Geb. DM 9.20.

Der Vektorbegriff. Addition und Subtraktion von Vektoren 1–6 * Lineare Abhängigkeit. Koordinatendarstellung 6–14 * Das skalare Produkt und seine Anwendungen 14–29 * Das Vektorprodukt. Mehrfache Produkte 29–40 * Linienvektoren und ihre Anwendung in der Physik 40–74 * Darstellung von Vektoren und Transformationen durch Matrizen 74–94 Reziproke Grundsysteme 94–105 * Anwendung von Vektoren in der Kristallographie 105–120 * Tensoren 121–152 * Sachverzeichnis 153–154.

Paul Montel: *Leçons sur les récurrences et leur applications.* Recueillies et rédigées par J. Dufresnoy et É. Lefebvre. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions.) Gauthier-Villars, Paris, 1957. 11 + 268 pp. fr. 4300.

Définitions et généralités 1–16 * Récurrences linéaires 17–43 * Récurrences du premier ordre 45–66 * Récurrences d'ordre supérieur 67–96 * Le théorème de Poincaré 97–113 * Propriétés générales des fractions continues 115–124 * Fractions continues d'ordre infini 125–136 * Convergence des fractions continues 137–181 * Fraction correspondante et fraction associée 183–211 * Fractions de Stieltjès 213–227 * Itération 229–239 * Itération de fonctions à cercle fondamental 241–263 * Table des matières 265–268.

Albert Pfluger: *Theorie der Riemannschen Flächen*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 89.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg. 1957. 12 + 248 S., 5 Fig. DM 36.00, ganzl. DM 39.20.

Begriff der Riemannschen Fläche 1–36 * Analytische Fortsetzung und Überlagerungsfläche 36–61 * Homologie und Cohomologie 62–94 * Existenzsätze 94–137 * Uniformisierungstheorie 137–168 * Harmonische und analytische Differentiale 168–201 * Einige Klassen von Riemannschen Flächen 201–238 * Literaturverzeichnis 239–244 * Sachverzeichnis 245–248.

Eduard Winter: *Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766*. Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin. Akademie-Verlag, Berlin, 1957. 13 + 393 S.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 107.)

Die Bedeutung der Registres 1–5 * Eulers Leben und Wirken bis zu seiner 1741 erfolgten Berufung an die Berliner Akademie der Wissenschaften 5–12 * Die Berufung Eulers an die Berliner Akademie 12–19 * Die ersten Schritte in Berlin 19–26 * Die Société littéraire und Euler 26–34 * Das Ringen um die neue Akademie 34–40 * Die Anfänge der neuen Akademie 40–48 * Der Streit der Berliner Akademie mit Samuel König 48–55 * Die letzten Jahre der Präsidentschaft Maupertuis' 55–63 * Die Akademie ohne Präsidenten 63–69 * Die Akademie unter der unmittelbaren Leitung des Königs 69–80 * Der Weggang Eulers von der Berliner Akademie 80–91 * Registres 93–324 * Anmerkungen 325–381 * Personenverzeichnis 383–393.

Kentaro Yano: *The theory of Lie derivatives and its applications*. (Bibliotheca Mathematica 3.) North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1957. 10 + 299 pp. Guilders 30.50.

Introduction 1–17 * Lie derivatives of general geometric objects 18–29 * Groups of transformations leaving a geometric object invariant 30–47 * Groups of motions in V_n 48–84 * Groups of affine motions 85–129 * Groups of projective motions 130–156 * Groups of conformal motions 157–176 * Groups of transformations in generalized spaces 177–213 * Lie derivatives in a compact orientable Riemannian space 214–224 * Lie derivatives in an almost complex space 225–243 * Bibliography 244–262 * Appendix 263–287 * Bibliography 288–293 * Author index 295–297 * Subject index 298–299.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 113–117 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Holmen, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. august 1957.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

113. I det komplekse tallplan betraktes to transformasjoner S og T , nemlig: S betyr rotasjonen på 120° om punktet $z=0$ og T rotasjonen på 180° om punktet $z=1$, eller m. a. o. S og T betyr henholdsvis transformasjonene

$$z' = \varrho z \quad (\varrho = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})) \quad \text{og} \quad z' = 2 - z.$$

Finn de punkter som fremgår av $z=0$ ved gjentatt og kombinert anvendelse av S og T .

La F være firkanten med hjørner $z=0$, $z=1$, $z=2+2\varrho$ og $z=\varrho$. Vis at et vilkårlig punkt ζ i det komplekse plan fremgår av et passende valgt punkt av F ved en passende rekke anvendelser av S og T .

Th. Skolem

114. La n og r betegne naturlige tall, og

$$\sigma_r = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^r}, \quad s_r = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \binom{n}{p} \frac{1}{p^r}.$$

Angi en rekursjonsformel ved hvis hjelp en kan uttrykke s_r ved $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$. En finner f. eks.

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1^2), \quad s_3 = \tfrac{1}{6}(\sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3).$$

W. Ljunggren

115. Vis at

$$1 - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p} \prod_{k=1}^p \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right).$$

H. Killingbergtrø

116. La n være et naturlig tall, og sett

$$a_{1,n} = n^2, \quad a_{m+1,n} = (n-m) \left[\frac{a_{m,n}-1}{n-m} \right], \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

Vis at $b_n = a_{n,n}$ er det n -te tall i den tallfølgen 1, 3, 7, 13, ... som defineres i oppg. 107 (NMT, denne årgang, s. 48).

H. Killingbergtrø

117. Bevis for alle naturlige n formelen

$$\sqrt{n} = 2^{n-1} \prod_{\nu=1}^{\infty} \prod_{q=1}^{2n-1} \frac{2n\nu - q}{2n\nu - n}.$$

Anders Bager

118. Vis, at enhedskvadratet er den eneste firkant, hvis sider og diagonaler alle har lengder i intervallet $1 \leq x \leq \sqrt{2}$.

Anders Bager

119. Gjennom et fritt valt punkt P på den enkappede hyperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ går to rettlinjede generatriser L_1 og L_2 . Vis at vilkåret for at det skal finnes slike punkter P at L_1 og L_2 står vinkelrett på hverandre, er at $c \leq \max(a, b)$, og at i så fall disse punktene P er hyperboloidens fellespunkter med kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$.

120. La (a_i, b_i, c_i) for $i = 1, 2, \dots, n$ være gitte punkter i rommet, og

$$z = f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Sett $c_i' = f(a_i, b_i)$ og velg $A, B, \dots, F$ slik at

$$\sum_{i=1}^n (c_i' - c_i)^2$$

blir minst mulig. Vis at oppgaven alltid er entydig løsbart med mindre alle punktene (a_i, b_i) ligger på et kjeglesnitt.

LØSNINGER

106. I en assosiativ halvgruppe (uten forkortningsregel) er to elementer a og b knyttet sammen ved relasjonene

$$aba = a, \quad bab = b, \quad ab = ba.$$

Vis at hvis a kommuterer med et tredje element c , $ac=ca$, så vil også b kommutere med c .

Th. Skolem

Løsning: Da den associative lov gjelder, kan parenteserne settes efter behag (eller udelades):

$$\begin{aligned} bc &= babc = bbac = bbca = bbcaba = bbacba = babcba \\ &= bcba = bcab = bacb = bacbab = bacabb = baacbb \\ &= abacbb = acbb = cabb = cbab = cb. \end{aligned}$$

Erik Brandt Lassen

Også løst av Anders Bager, Ulf Ottoson, T. Schaug-Petersen, Gerner Spure og B. Stolt.

107. (Etter en idé av Viggo Brun.) Av den naturlige tallrekke stryker en først hvert annet tall, så bare de odde (ulike) tall står igjen; av den fremkomne tallrekke stryker en så hvert tredje tall, av den nye hvert fjerde, osv. Av den opprinnelige tallrekke står da igjen en tallrekke som begynner med

$$(1) \quad 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, \dots$$

La x være et naturlig tall og $\nu(x)$ antallet av tall $\leq x$ i tallrekken (1). Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\nu(x)^2} \geq \frac{1}{2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\nu(x)^2} \leq 1.$$

Det antas at $x/\nu(x)^2$ for voksende x nærmer seg en grense med en verdi av ca 0,79. Om mulig ønskes denne formodning bekreftet.

R. Tambs Lyche

Løsning: La $\varphi(x, k)$, x og k naturlige tall, betegne antallet av tall som står igjen av de x første naturlige tallene etter at strykningsprosessen er utført $k-1$ ganger (siste gang er altså strøket hvert k -te tall). Vi har da

$$(1) \quad \varphi(x, k) = \varphi(x, k-1) - \left\lfloor \frac{\varphi(x, k-1)}{k} \right\rfloor$$

for $k > 1$; her er $\varphi(x, 1) = x$. Av (1) får vi

$$(2) \quad \varphi(x, k-1) \cdot \frac{k-1}{k} \leq \varphi(x, k) \leq (\varphi(x, k-1) + 1) \cdot \frac{k-1}{k}.$$

Ved suksessiv anvendelse av (2) får vi

$$(3) \quad \frac{x}{k} \leq \varphi(x, k) \leq \frac{x}{k} + \frac{k-1}{2}.$$

La så r være et naturlig tall $\leq \frac{1}{2}x$. Da $\varphi(x, k) = \varphi(x, k)/(k+1)$ avtar mot 0 med voksende k for et gitt x , og da $\varphi(x, 1) = \frac{1}{2}x$, kan vi bestemme $k = k_r$ slik at

$$(4) \quad \varphi(x, k_r - 1) \geq r, \quad \varphi(x, k_r) < r.$$

Åpenbart avtar k_r med voksende r for et gitt x ; videre er $\varphi(x, k_1)$ det samme som oppgavens $\nu(x)$. Av (1) følger så

$$\varphi(x, k_r) \geq \varphi(x, k_r - 1) - \frac{\varphi(x, k_r - 1)}{k_r} = \varphi(x, k_r - 1) \cdot \left(1 - \frac{1}{k_r}\right),$$

og derfor ifølge (4):

$$\varphi(x, k_r) \geq rk_r \left(1 - \frac{1}{k_r}\right) = r(k_r - 1).$$

Vi har derfor

$$(5) \quad r(k_r - 1) \leq \varphi(x, k_r) < r(k_r + 1).$$

Av $\varphi(x, k-1) - \varphi(x, k) = [\varphi(x, k-1)]$ og $\varphi(x, k_{r-1}-1) \geq r-1$, $\varphi(x, k_r) > r$ følger nå for $k_r < k < k_{r-1}$ at $[\varphi(x, k-1)] = r-1$. Og dette gir

$$(6) \quad \varphi(x, k_r) - \varphi(x, k_{r-1}) = (r-1)(k_{r-1} - k_r).$$

Videre gir (5) og (6)

$$\begin{aligned} \varphi(x, k_r) - \varphi(x, k_{r-1}) &< r(k_r + 1) - (r-1)(k_{r-1} - 1) \\ &= -(r-1)(k_{r-1} - k_r) + k_r + 2r - 1, \end{aligned}$$

eller

$$(2r-2)k_{r-1} < (2r-1)k_r + (2r-1),$$

og på samme måte

$$(2r-2)k_{r-1} > (2r-1)k_r - (2r-1).$$

Tilsammen gir dette

$$(7) \quad k_{r-1} - \frac{2r-1}{2r-2} < \frac{2r-1}{2r-2} k_r < k_{r-1} + \frac{2r-1}{2r-2}.$$

Av dette utleder vi igjen

$$(8) \quad k_1 - \varrho_r < \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2r-2)} k_r < k_1 + \varrho_r,$$

der

$$\varrho_r = \frac{3}{2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \dots (2r-2)}.$$

Formel (8) er for $r=2$ intet annet enn (7), og den almene formel vises da lett ved induksjon. Vi bemerker at i (8) er q_r tall som *bare avhenger av r* .

Nå får vi videre

$$\begin{aligned}(r - \tfrac{1}{2})(k_r - 1) &= r(k_r - 1) - \frac{k_r - 1}{2} \\ &\leq \varphi(x, k_r) - \frac{k_r - 1}{2} \leq \frac{x}{k_r} \leq \varphi(x, k_r) < r(k_r + 1),\end{aligned}$$

altså

$$(9) \quad (r - \tfrac{1}{2})(k_r - 1) \leq \frac{x}{k_r} < r(k_r + 1),$$

som bl. a. viser at k_r for et gitt r vokser over alle grenser med x . Nå gir (5) for $r=1$ at $k_1 - 1 \leq \varphi(x, k_1) \leq k_1 + 1$, slik at

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x, k_1)}{k_1} = 1.$$

Videre kan vi skrive (9):

$$(11) \quad (r - \tfrac{1}{2}) \left(1 - \frac{1}{k_r}\right) \leq \frac{x}{k_r^2} < r \left(1 + \frac{1}{k_r}\right).$$

Av (8) får vi

$$k_1 = \frac{3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \dots (2r-2)} k_r + \theta_r q_r, \quad |\theta_r| < 1.$$

Det gir

$$\begin{aligned}\frac{x}{k_1^2} &= x \cdot \left(\frac{3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \dots (2r-2)} k_r + \theta_r q_r \right)^{-2} \\ &= \frac{x}{k_r^2} \cdot \left(\frac{3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \dots (2r-2)} + \theta_r \cdot \frac{q_r}{k_r} \right)^{-2},\end{aligned}$$

altså

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{k_1^2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \dots (2r-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \dots (2r-1)^2} \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{k_r^2} \leq \frac{2^2 \cdot 4^2 \dots (2r-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \dots (2r-1)^2} r,$$

og

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{k_1^2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \dots (2r-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \dots (2r-1)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{k_r^2} \geq \frac{2^2 \cdot 4^2 \dots (2r-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \dots (2r-1)^2} (r - \tfrac{1}{2}).$$

Lar vi nå r vokse, følger av dette at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{v(x)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

T. Schaug-Petersen

Også løst av Christian Hansson, H. Killingbergtrø, Johan Stark og (i det vesentlige) av D. Stubbe Teglbjærg. Da Killingbergtrøs løsning i seg selv er interessant

og beror på helt andre betraktninger enn den her gjengitte, vil den bli trykt i et senere hefte av NMT.

108. Siderne i en sfærisk firkant er a, b, c og d , diagonalerne e og f , medens φ er den af vinklerne mellem e og f der ligger overfor a eller c . Bevis at φ kan bestemmes ved formelen

$$\sin e \sin f \cos \varphi = \cos a \cos c - \cos b \cos d.$$

Vilhjálmur Ögmundsson

Løsning: Diagonalerna delas i $e = m + n$ och $f = p + q$. Enligt första cosinusteoremet få vi

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos q \cos n + \sin q \sin n \cos \varphi \\ \cos c &= \cos m \cos p + \sin m \sin p \cos \varphi \\ \cos b &= \cos p \cos n - \sin p \sin n \cos \varphi \\ \cos d &= \cos q \cos m - \sin q \sin m \cos \varphi.\end{aligned}$$

Vid uträkning finner man då

$$\begin{aligned}\cos a \cos c - \cos b \cos d &= (\cos q \cos n \sin m \sin p + \cos m \cos p \sin q \sin n \\ &\quad + \cos q \cos m \sin p \sin n + \cos p \cos n \sin q \sin m) \cdot \cos \varphi \\ &= (\sin m \cos n + \cos m \sin n) \cdot (\sin p \cos q + \cos p \sin q) \cdot \cos \varphi \\ &= \sin(m+n) \cdot \sin(p+q) \cdot \cos \varphi = \sin e \sin f \cos \varphi.\end{aligned}$$

A. V. Peljo

109. La det være gitt en firkant og la oss danne en ny firkant med hjørner i midtpunktene av den førstes sider. Vis at flateinnholdet av den siste er halvparten av flateinnholdet av den første.

I. Johansson

110. Formuler og bevis en generalisering av påstanden i forrige oppgave for andre delingsforhold enn halvering.

I. Johansson

Løsning: La A, B, C og D være sidene i den gitte firkanten, idet vi tolker dem som vektorer; la T være firkantens flateinnhold, tolket som vektor (vinkelrett på firkantens plan). Da er

$$T = \frac{1}{2}(A \times B + C \times D) = \frac{1}{2}(B \times C + D \times A).$$

Vi deler så sidene i denne firkanten i forholdet $m:n$ ($m+n=1$), og danner en ny firkant som beskrevet i oppgaven, med sider A', B', C' og D' , hvor

$$A' = mA + nB, \quad B' = mB + nC, \quad C' = mC + nD, \quad D' = mD + nA.$$

Flateinnholdet T' av den siste firkanten blir så

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}(A' \times B' + C' \times D') \\ &= \frac{1}{2}\{m^2(A \times B + C \times D) + n^2(B \times C + D \times A)\}, \end{aligned}$$

eller

$$T' = (m^2 + n^2)T.$$

Rolv Rasmussen

Også løst av T. I. Engelskjøn, Per Hag, H. Killingbergtrø, Johs. Lohne, Henrik Meyer, A. V. Peljo, Aimo Remes, T. Schaug-Petersen og Harald Aarrestad.

RESULTAT AV DEN ANNEN INTERNORDISKE PRISOPPGAVE

(Oppgavene sto i NMT 4 (1956), s. 166–168.)

Det kom inn ialt 37 besvarelser: 16 danske, 7 norske og 14 svenske. Et utdrag av de beste løsninger vil bli publisert senere i NMT.

Bedømmelseskomiteen har innstilt *Karen Tønder Johansen*, III b, Odense Katedralskole, Danmark, som vinner av 1. premie på n. kr. 150. Beløpet for 2. premie økes til n. kr. 100, som deles likt mellom *Hans Blichfeldt Hansen*, III G mn, Gentofte Statsskole, Danmark, og *Tord Holmstedt*, R IV⁴, h. a. läroverket för gossar i Hälsingborg, Sverige.

NMT takker alle deltakerne for den utviste interesse. En ny internordisk konkurranse vil antagelig bli utskrevet i 1958.

RESULTAT AV PRISTÄVLINGEN FÖR SVENSKA GYMNASISTER

(Uppgifterna i NMT 4 (1956), s. 227–228.)

Första pris, sv. kr. 100, utdelas till *Arne Sundström*, Bromma h. a. l.; andra pris, kr. 50, till *Tord Holmstedt*, h. a. l. för gossar i Hälsingborg. Dessutom utdelas ett extrapris, två årgångar av NMT, till *Per Carlson*, Bromma h. a. l.

SUMMARY IN ENGLISH

KAY PIENE: *The place of mathematics in American education and teacher training, II.* (Norwegian.)

The author continues his survey of American mathematical education, making comparisons with conditions in the Scandinavian countries. The following topics are discussed in part II:

4° The teaching of mathematics in the schools is characterized by activation of the pupils. Many "unconventional" methods are in use, like laboratory work, instruments and films, in the author's opinion with varying success.

5° Tests and examinations: The "evaluation" of the students in U. S. A. covers more sides of the ability and personality than in Scandinavia. On the other hand, there exists a lot of objective, standardized tests. When the task, however, is to select the correct answer from a few given alternatives, the tests are less indicative of real understanding of the subject, and invite to drill.

In contrast to the Scandinavian countries, there are no public examinations common to the entire U. S. A. The most comprehending common tests are perhaps those arranged by the Board of Regents (New York) and by the College Entrance Examination Board; both tests are described in the article.

6° The training of teachers of mathematics takes place in a college, university or teachers college. Peabody College, San Francisco State College and Teachers College, Columbia University are mentioned as examples. The structure of the study is more "atomistic" than in Scandinavia, with an accumulation of credits for many separate courses. Emphasis is laid on the general education and on the pedagogical aspects of mathematical teaching, perhaps at the expense of the subject-matter. There is a serious lack of qualified teachers, who are underestimated and underpaid in comparison with their Scandinavian colleagues.

7° Post-graduate education often takes place at the many Summer extension courses. There are inspiring handbooks and journals available for the interested teacher of mathematics.

ERNST S. SELMER: *On the duplication of the cube.* (Norwegian.)

Approximations for $\sqrt[3]{2}$ are given by a quadratic surd, a simple dyadic fraction and a continued fraction convergent:

$$8 - \sqrt{62}, \quad \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{16}}, \quad \frac{127}{1008}.$$

The accuracy of the approximation is 7 decimals, 6 decimals (21 binary digits) and 7 decimals respectively, cf. actual values pp. 84-85. The quadratic surd seems to be simpler and more accurate than any expression resulting from earlier constructions with straightedge and compasses alone.

ODDMUND KOLBERG: *A proof of Dixon's formula.* (Norwegian.)

The well known formula of Dixon:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3},$$

is proved in the equivalent form

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^3} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^3} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3 ((2n)!)^3} x^{2n}.$$

The proof is much simplified by introduction of the operator $D = x \frac{d}{dx}$. The method is easily applied to more general summation formulae (cf. pp. 89-90). The results thus obtained are, however, already known from the theory of generalized hypergeometric series.

CARL-ERIK FRÖBERG: *Proportional representation systems.* (Swedish.)

The classical methods of d'Hondt, Droop, Sainte Laguë and the "method of greatest excess" are described and discussed. Well-known inequalities characterizing the different methods are derived in a simple manner. "Local" and "total" errors are defined and investigated by using a Monte Carlo-technique. The results show clearly that the methods of d'Hondt and Droop do not meet the conditions imposed, and for this reason they must be rejected.

The remaining two methods have been treated further with respect to the political condition of a barrier against the first seat. It turns out that the "method of greatest excess" with a barrier, depending on the number of seats, is the best one of the methods which have been discussed.