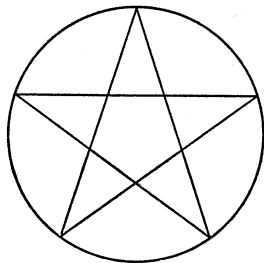


**NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT**



NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 5



OSLO 1957

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Suomen matematiikan ja fysiikan opettajien liitto – Finlands matematik- och fysiklärarförbund.

Íslenska stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

REDAKSJON:

Karl Dagerholm, David Fog, Carl-Erik Fröberg,

Regnar Norgil, E. J. Nyström, Kay Piene, Hans Rådström,

Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.

Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSE:

Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

MATEMATIKKENS Plass I AMERIKANSK SKOLE OG LÆRERUTDANNING, I

KAY PIENE

I 1955 tilbrakte jeg 5 måneder i U. S. A. med Smith-Mundt-stipendium for å studere matematikkundervisning og lærerutdanning. Jeg tilbrakte en termin ved George Peabody College for Teachers i Nashville, Tenn., flere uker ved Teachers College (Columbia University, New York) og besøkte ellers høyere læreanstalter i Chicago, Philadelphia og San Francisco.

Den følgende framstilling bygger på inntrykk fra mine studier i U. S. A., fra forelesninger, fra foredrag, fra besøk i skoler, fra samtaler med kolleger, fra lesning av trykt og maskinskreven litteratur, bøker, tidsskrifter, dissertasjoner, studieplaner, eksamensoppgaver, osv. Ikke alltid har jeg vist til kildene, men litteraturlisten inneholder det som jeg mener er det vesentligste til forståelse av mitt emne.

Jeg takker de myndigheter som gjorde reisen mulig, og jeg takker de amerikanere som ga meg alle de idéer og den informasjon som lesning alene aldri kan skaffe. Deres navn er å finne mange steder i det følgende.

Så langt jeg har funnet det forsvarlig har jeg gitt en vurdering av det jeg så eller hørte. Ellers er det klart at en på noen måneder ikke kan vente å få et noenlunde korrekt bilde eller en rettfærdig vurdering av matematikkens plass i skolen. Likevel håper jeg at jeg har pekt på noe av det vesentlige, spesielt sett fra et nordisk synspunkt. Skulle skolepolitikken hos oss gå i amerikansk¹ retning, bør vi i tide være klare over de problemer som da kan oppstå for vårt fag, og ta lærdom av de amerikanske erfaringer.

Det blir ikke her plass til å gi den historiske bakgrunn for matematikkens vilkår i de mer enn 300 år den har vært fag i den amerikanske skole. Etter hånden gikk utviklingen andre veier enn i Europa, selv om man stadig har pekt på idéer utviklet der. Men strømmingen i amerikansk

¹ Her og i det følgende refererer amerikansk seg til U. S. A. og bare til dette land.

pedagogikk og utviklingen i amerikansk skoleorganisasjon har betydd mer.

På den andre siden vil også matematikklærere i Europa kunne ha stort utbytte av kommisjonsbetenkn timer som er kommet ut i dette århundret i U. S. A. [1, 2, 3, 5]. En finner her tallrike verdifulle idéer, som forøvrig ikke alle er blitt realisert. Også i våre dager er kommisjoner igang og en kan vente radikale forslag fra dem.

Matematikens plass i skolen. Skolen i U. S. A. var opprinnelig en kopi av den tids europeiske, spesielt engelske skoler. Etterhvert har den imidlertid utviklet seg i sin egen retning og er nå temmelig forskjellig fra skolen her i Norden.

Forskjeller finner vi først og fremst på de alderstrinn som leser matematikk. For det første er skoleplikten lenger. Den er ikke like lang i alle stater, men det kan være tvungen skole opp til 16, 17 eller 18 år. For det andre er ungdomsskoler som i nordiske land er atskilte, i U. S. A. forent til samleskoler. Dette betyr at en i U. S. A. ikke har vårt utpregede skille mellom en grunnleggende primærskole og en videregående sekundærskole.

Den amerikanske skole er en enhetsskole med 12 klassetrinn, men den er delt opp i avdelinger av forskjellig karakter. Det alminnelige er vel nå mønsteret 6 + 3 + 3. Dette betyr en 6 års grunnskole, en 3 års *junior high school* (JHS) og en 3 års *senior high school* (SHS). Ordningen 8 + 4 forekommer fremdeles, men er i tilbakegang. High school er en skole for alle barn, uansett socio-økonomisk bakgrunn, anlegg, interesser eller ambisjoner. En regner at 50% av elevene i 5. kl. følger skolen til og med 12. kl., mens kanskje 90% hadde evner til det.

Barna begynner i skolen når de er omkring 6 år, ofte før, slik at de er 17–18 når de forlater 12. klasse. De fleste stater har skoleplikt til 16 år, men i 15 stater går plikten til avsluttet high school. Ellers er det å merke at mer enn halvdel av elevene i øverste fjerdedels intelligensnivå faller fra i high school eller søker ikke videregående skole etterpå.

Den udifferensierte 6-årige grunnskole har ikke matematikk, det dukker først opp i high school.

En tredje forskjell mellom amerikansk og nordisk sekundærskole må vi her være klar over. Amerikansk skole er ikke til de grader linjedelt slik som vår høyere skole, som har parallelle avdelinger med fast program. Den har noen obligatoriske fag (engelsk, »social studies« osv.), men ellers er de enkelte fag valgfrie, slik at elevene i ganske stor utstrekning kan plukke ut fag de vil ha ut fra anlegg, interesser, senere yrkesønske eller

mer irrelevante motiver. Yrkesrettledning (guidance) prøver å hindre »ville« valg og yte personlig hjelp i valgsituasjoner.

Til dette kommer at i amerikansk skole pleier et årskurs i matematikk bare å omfatte en enkelt disiplin. Således leser de i ett år elementær algebra, et annet elementær geometri, tilsammen for øvrig i et omfang som svarer til de parallelt leste grunnkurser i de nordiske land (mellomskole, realskole). Alt for vel 50 år siden hevdet E. H. Moore at de matematiske enkeltdisipliner pluss fysikk skulle settes sammen til helt igjennom sammenhengende kurs. Siden er dette blitt støttet av ledende matematikkipedagoger, men uten resultat.

I praksis vil forholdene bli omtrent slik i *high school*:

JHS			SHS		
12 år	13 år	14 år	15 år	16 år	17 år
7. kl.	8. kl.	9. kl.	10. kl.	11. kl.	12. kl.
Alm. matematikk eller regning		Begynner-algebra	Plangeometri	Melloml. algebra	Romgeometri og trigonometri

Skjemaet ovenfor viser for hvert årskull og klasse den matematikkdiriplin som pleier å bli lest. Gode opplysninger om søkning og andre data etc. finner en i en liten brosjyre, *Mathematics in public high schools*, utgitt av U. S. Department of Health, Education and Welfare [8]. Forfatteren Kenneth E. Brown er regjeringens »spesialist i matematikk«. Det er ellers å merke at skolen i U. S. A. er såvidt desentralisert at det bare i lite omfang eksisterer en federal skoleadministrasjon, og altså ikke et eget undervisningsdepartement for hele riket. Delstatene har hver sitt skolesystem, rår selv over varigheten av skoleplikten osv. Likevel er det så mange fellestrekk at det er forsvarlig å tale om »amerikansk« skole uten tanke på forholdene i en bestemt stat.

Alminnelig (general) matematikk i 7. og 8. klasse er et relativt nytt samlefag som inneholder stoff fra regning, elementær algebra og intuitiv geometri. Det leses alternativt i disse to klassene med vanlig regning, slik at en femtedel av elevene har alminnelig matematikk.

I 9. klasse kommer så begynneralgebraen, men med alminnelig matematikk som alternativ. Ca. 60% av elevene tar algebra, de øvrige alminnelig matematikk, som her for en god del repeterer 7. og 8. klassens pensum. Det er blitt anslått at ca. 1 million var innskrevet i algebra og ca. $\frac{3}{4}$ million i alm. matematikk i året 1952/53.

Det er sagt [9, s. 10] at begynnerundervisningen i algebra skal gi

1) økt dyktighet i, kunnskap om og forståelse av regning, 2) noen forståelse av matematikkens grunnlag (postulater osv.), 3) ferdighet i å bruke algebra for å svare på spørsmål om kvantitative forhold (algebraiske symboler, ligninger osv.).

Faget general mathematics er ikke noe entydig begrep. Det tales således om to eller tre slags kurser i faget svarende til de ulike behov. Det kan bety et noe lettere kurs litt i likhet med vår samfunnsregning (spesielt gitt til de som ikke skal inn i college), mens W. D. Reeve, professor i matematisk metodikk ved Teachers College, Columbia University, vil at det skal være et helt reorganisert kurs i «informal» geometri, regning, algebra, trigonometri, analytisk geometri og infinitesimalregning, som går fra 7. klasse og oppover slik at en ser hvordan disse disipliner henger sammen slik at de befrukter og styrker hverandre på forskjellig vis [10, s. 454].

Det er i det hele tatt en utbredt misnøye med det amerikanske system med oppdeling i isolerte disipliner. En ønsker mer enhet, enten innen den nåværende skoles pensum, eller slik at det skjer en virkelig fornyelse av pensum derved at stoff fra den moderne matematikk blir trukket inn. Det blir bedt om at general mathematics må utvides og ta med bl. a. trigonometri og statistikk, noe om matematikkens natur, fagets historie, anvendelser av faget i det daglige liv, regning med tilnærmete tall, regnestav osv., slik at det oppstår et samlet fag som tar hensyn til de mange naturlige forbindelser mellom emnene.

I 10. klasse blir det normalt lest plangeometri, men faget har bare omtrent halvparten av det antall som leser algebra (anslagsvis $\frac{1}{2}$ million i 1952/53). Et anselig antall leser ellers geometri i 11. klasse, på noen steder leses det i 9. eller 12. klasse.

Det er ellers å merke at hyppigheten av de som leser geometri har store variasjoner fra sted til sted. Såvel i dette fag som i algebra er det et ganske stort frafall i løpet av året. I algebra falt i 1951/52 14% av guttene og 9% av pikene bort fra første til annet halvår, og i geometri i samme år 18% av guttene og 11% av pikene, iflg. en representativ opptelling [8, s. 9 og s. 15].

I 11. klasse blir hyppigheten av matematikklesere enda lavere. Mens 34% leser geometri, er tallet 23% for «mellomliggende algebra», som er det typiske matematikkfag i 11. klasse. Endelig blir det i 12. klasse normalt lest romgeometri og (plan) trigonometri, og det av vel en tiendedel av samtlige elever i dette klassetrinnet, dvs. av 50 tusen elever.

I den før nevnte representative undersøkning ble det funnet at 92% av skolene krever minst ett år matematikkundervisning av alle elever. 65% av skolene melder at enten algebra eller alminnelig matematikk

kan tas. På den andre siden krever omtrent tre fjerdedeler av skolene minst 2 års matematikk av de elever som skal fortsette i et college, og 40% av skolene forlanger i så fall at geometri skal være med. Mange high schools har ikke lærere som kan gi videregående matematikkundervisning. En fjerdedel av skolene i en stat hadde ikke matematikk etter 9. klasse.

Ved siden av det tradisjonelle matematikk-kurs og kurset i »general mathematics« forekommer også et tredje kurs, det såkalte »remedial course«, som har til oppgave å fjerne huller i den grunnleggende matematiske innsikt og forståelse.

Stort sett har matematikk 5 »uketimer« og skoleåret har 36 uker, men timene kan variere fra 30 opp til 70 minutter.

En grov og forenklet sammenligning mellom U. S. A. og Norge skulle vise dette: I U. S. A. er det omtrent dobbelt så mange som leser begynneralgebra som i Norge, mens den relative hyppighet for begynnergeometri er omtrent den samme. Stoffet er nesten det samme begge steder. I U. S. A. er det flere anvendelser på problemer fra det daglige liv, og kanskje noe mindre teori.

På det høyere trinn skulle Norge heller stå sterkere. En sammenligning blir ellers vanskelig fordi det amerikanske skoleverket som før nevnt omfatter skoler som i Norge ikke er ledd i den almindelige skole, men er spesialskoler, tekniske o. l.

Formodentlig er det amerikanernes system med valgfrie fag som er en vesentlig årsak til ulikhetene. De matematiske disipliner krever en innsats eller anslåes å være relativt vanskelige og blir derfor skydd også av elever som skulle ha de intellektuelle forutsetninger for å greie dem. Av 4200 vordende sjøoffiserer (under siste krig) hadde bare 10% hatt trigonometri i high school, og en har videre funnet at halvparten av de studenter som på en eller annen måte siden fikk bruk for trigonometri unnlot å ta det i high school.

Sikkert er det at det i U. S. A. i det siste har gjort seg gjeldende sterke bekymringer over det relativt lave antall som tar matematikk i skolen (og i det hele tatt med tilgangen til de studier der matematikk spiller en vesentlig rolle). Konkurransen med andre land — ikke minst Sovjet-Samveldet — blir stadig nevnt. (Ca. 50 000 nye ingeniører pr. år i S.S.S.R. mot 20 000 i U. S. A.; det første tallet stiger, det andre synker.)

Klart er det at det amerikanske skolesystem, som tar relativt flere elever i ungdomsårene enn det nordiske, ikke makter å utdanne det tilstrekkelige antall elever med matematisk innsikt.

Lignende innvendinger blir for såvidt nå også rettet mot de nordiske

skoler, og matematisk innsikt og kunnskap synes i det hele tatt å være mangelvare i mange land. Det vesentlige problem er da spørsmålet om valgfrihet eller linjer med fast fagkrets. For meg står det slik at vi i de nordiske land må slepe på en del (en god del?) som ikke har noe utbytte av sin matematikkundervisning. I U. S. A., på den annen side, er det nok for mange som sløyfer matematikk av personlige grunner, og som kunne hatt nytte av mer matematikkundervisning til senere studier.

Hva leser man så i amerikanske skoler? Forenklet må vi som før nevnt kunne si at begynnerkursene i algebra og i geometri for en stor del svarer til de tilsvarende kurser i den norske realskoles første og andre klasse. Elevene er da i begge land i 14–15 årsalderen, men amerikanerne har hatt ett år mer skole på forhånd.

Forskjellen blir først og fremst den at en i U. S. A. leser hver disiplin for seg, og at bare halvdelen av dem som har algebra tar geometri. Jeg er ikke i tvil om at de nordiske land her har en bedre ordning. Her får alle begge disipliner (foruten regning), med de muligheter for samarbeid mellom fagene det kan gi, foruten at en derved gjør det mulig for en lærer som ønsker det, å starte med geometri før algebraen.

Det betenkelige ved den amerikanske skolen er det forhold at mens tilstrømmingen til skole i ungdomsårene (14–17 år) er gått så veldig opp i de siste femti årene (fra vel 10% til over 80%), så har ikke bare den relative hyppighet av de som velger matematikk gått avgjort ned, men i plangeometri også det absolutte antall i de siste tjue årene. Mens omkring 1900 56% av elevene i high school leste algebra og 27% geometri, var disse tallene i 1934 sunket til resp. 30% og 17% og er nå ca. 25% og 11%. Mens i 1934 767 tusen leste geometri, var det i 1954 664 tusen. Det er sagt at grunnene til de lave prosenttall er: 1) elevene innser ikke betydningen (nyttene) av faget, 2) faget regnes som vanskelig, 3) mange stryker.

En annen ulikhet mellom amerikansk og nordisk skole bør også nevnes. Skolen i U. S. A. er mer enn vår en skole for *alle*. Idealet er åpenbart å ha all ungdom i skoler opp til 17–18 år. I de nordiske land tenker man mer på at den videregående almindennende skole først og fremst skal være beregnet for en minoritet, den intellektuelle elite, om en tør bruke et slikt uttrykk.

Både amerikansk og norsk skole er temmelig sent ute med matematikken. Norge har jo 7 års grunnskole uten noe matematikk. Men norsk skole når lenger. Reallinjen i det norske gymnas behandler flere emner som en i U. S. A. først får i college. Riktignok er studentene i første college-år omtrent så gamle som våre elever i øverste gymnasklasse, men likevel

blir der en ulikhet i vår favør, en ulikhet som blir økt overfor de europeiske land som går enda lenger i matematikken enn Norge.

Matematikkundervisningen i U. S. A., spesielt i de høyere klasser, blir av mer forenklet karakter enn hos oss og er mer beregnet på massen. Vi finner da også stadig diskusjoner i presse og på møter om matematikkundervisningen for de særlige begavete. En brosjyre [11] utgitt av U. S. Department of Health, Education and Welfare gir en utmerket oversikt ved å referere drøftinger fra et ekspertmøte om saken. I resolusjonen heter det bl. a. at demokrati bygger på likhet i de pedagogiske muligheter, dvs. et hvert individ må nå sin maksimale ytelse. En har ikke råd til fortsatt å ha underskudd på høyverdig menneskelig ytelse og skaperkraft.

En krever pedagogiske kurser for lærere, flere stipendier for dyktige studenter, og forskning for å finne ut de beste undervisningsmåter til bruk for de velbegavete studerende.

Et problem har gjeldt spørsmålet om det forut for den mer deduktive («demonstrative») geometri skulle være et kurs i eksperimentell, induktiv, «uformell» geometri. Et annet har gjeldt spørsmålet om funksjon mellom to- og tredimensjonal geometri, slik at en underviste i begge disipliner mer parallelt. Forsøk har vært gjort med en slik undervisning og lærebøker har vært forfattet, men så vidt jeg skjønner uten så store positive resultater at det har ført til omlegning av leseplanene. Dersom en da ikke skal ta de nye kurser i alminnelig matematikk som et tegn på at barrierene mellom disiplinene er blitt brutt ned. Sikkert er det at en har fått kurser betegnet som «composite», «correlated», «unified», eller «general», og spesielt i JHS kan en nok tale om en sammensmeltning av disiplinene. Den egentlige geometriundervisning synes derimot å være nokså uendret i sitt innhold. Nettopp fordi så mange elever forlater skolen etter 8. eller 9. år ville det være verdifullt om en fikk en mer integrert matematikkundervisning.

Det mangler ikke på reformforslag [1, 3, 5, 10]. Det foreslås endrete pensa. I 29 punkter blir det således satt opp de hovedkrav det daglige liv stiller til matematisk innsikt [12]. Spesielt blir det drøftet muligheten av å ta mer hensyn til de enkelte elevgruppers behov. Samtidig har en problemet med de mange små skoler der en differensiering faller vanskelig.

Særskilt bør nevnes verdifulle reformforslag satt fram av lærere ved Teachers College, Columbia University [10, 13, 14, 15, 16].

Lærebøkene i matematikk. Disse er tallrike i antall, og det er uråd å gi en samlet behandling av dem her. De er gjerne utførligere enn våre tilsvarende bøker (2–3 ganger så tykke), går mer i detalj (selv om også

mye overlates til leseren), har flere anvendelser fra det daglige liv, er mer stimulerende, har illustrasjoner eller fotografier som viser anvendt matematikk, og mer variert oppgavestoff, tildels gruppert etter vanskegrad, mer beregnet på å fremme forståelse og resonnement. For å gi et lite inntrykk av det nyeste på området skal jeg, uten å gå i detaljer, si noen ord om et 3 binds nylig utkommet læreverk av M. F. Rosskopf, H. D. Aten og W. D. Reeve [17]. Den første og den tredje av forfatterne er det ellers vist til flere ganger annensteds.

De tre bøkene er store, fra 360 til 470 sider, og rikt illustrert med tegninger, fotografier og diagrammer. Der er en hærs-kare med oppgaver — med tegn for vanskegrad —, til dels samlet i »tester«; dessuten er det tallrike arbeidsoppgaver, spørsmål til å fylle ut og mye annet som kan sette leserne i aktivitet. Her er atskillig aktuelt, interessevekkende stoff.

Første bind er en blanding av regning, algebra (inklusive logaritmer og regnestav) og uformell geometri, med hovedvekt på algebra. Ledemotivene er: Algebraiske regler og prinsipper innføres uformelt. Det blir lagt vekt på tenkning med symboler. De fundamentale regneregler blir repetert. Vesentlige begreper og ferdigheter i uformell geometri blir behandlet. Videre formler og det generelle funksjonsprinsipp. Verdifulle sosiale aktiviteter blir brukt i oppgaver. Det blir gitt høvelig plass for øving i ferdigheter en siden får bruk for. Oppgavene har sammenheng med det daglige livs behov.

Annet bind er faktisk en lærebok i plangeometri, »demonstrative«, altså med bevis. Bemerkelsesverdig er den vekt som legges på den rent formelle side. Første kapitel heter: Tenkning og geometristudium, nr. 2: Å danne en arbeidshypotese, nr. 3: Fra syllogisme til skrittvis resonnement i bevis, nr. 4: Analyse og bevis. Mens nr. 5 er rent geometrisk (parallelle linjer), heter nr. 6: Indirekte bevismetode, nr. 7: En setning og dens omvendte, nr. 8: Induktive slutninger i geometrien, nr. 9: Nødvendige og tilstrekkelige betingelser i beviset (illustrert ved hjelp av geometriske steder). De tre siste kapitler har igjen rent geometriske titler.

Framhevet og kommentert i forordet til annet bind er disse punktene: Vokabularet er enkelt, men adekvat; betegnelsene er systematiske. Elevene må formulere setningene med bevis. Figurer kommer fram under beviset. Elevene må ha notisbøker. Kongruenssetningene postuleres. Romgeometri diskuteres uformelt. Algebraiske og geometriske metoder går naturlig sammen. Ikke-geometrisk stoff i hvert kapitel. Oppgavene er gradert. Både geometriske og ikke-geometriske situasjoner blir vurdert. Stoffet er vanlig elementær plangeometri samt litt trigonometri og analytisk geometri.

I hvert kapitel er det tallrike (graderte) oppgaver, også oppgaver til

repetisjon. Dessuten er det en rekke såkalte study assignments, dvs. oppgaver med visse data, gjerne en figur, og et problem som skal løses — enten individuelt eller av hele klassen. Nr. 1 lyder eksempelvis slik: Data: Vinklene A , B , C og sidene AB , BC og CA i en viss trekant. Problem: Finn tre kombinasjoner hver på tre »stykker« slik at de bestemmer trekanten entydig. — Endelig er det en rekke såkalte mastery tests, dels geometriske, dels ikke-geometriske med mange spørsmål. Et enkelt eksempel: Hvis alle katter er hunder og alle hunder har halsbånd, har så alle katter halsbånd?

Det kan nok innvendes at de ikke-geometriske spørsmål av og til ligger så vidt fjernt fra den eksakthet som hersker i den formelle geometri, at de *kan* virke uheldige, men sikkert er det at en del av dette geometri-bind representerer noe nytt som det skal bli svært interessant å høre meldinger om. I mitt land tror jeg ikke vi legger nok vekt på å lære elevene på begynnertrinnet hva et bevis er. Kanskje kunne vi få noen idéer av det som skjer i U. S. A.

Tredje bind behandler algebra (funksjoner og ligninger, tallsystemet, logaritmer osv.) og trigonometri. Ellers blir mye i 1. og 2. bind ført videre her. Forfatterne prøver å »gi en bedre forståelse av hvordan en vitenskap utvikler seg«, og har i 12 punkter gitt prinsippene bak boka, som virker mindre fremmedartet for oss enn bind 2. Her som i de to andre bindene vil nordiske matematikklærere finne mange verdifulle tanker og idéer, som kunne brukes hos oss, men framstillingen er nok ofte for utførlig sett fra vårt synspunkt.

Alt i alt er det tydelig at lærebøkene i geometri mer og mer tar opp ikke-geometrisk materiale, faktisk er det dagliglivets problemer som her blir angrepet med logikkens verktøy. En kan spørre om det da blir *geometri*, om det ikke snarere er *logikk*. Hva det nå er, så er det logiske resonnerer som brukes. Og det skulle være gode muligheter for at elevene på denne måten i større grad enn før blir oppøvd i rett tenkning i dagliglivets problemer.

I Denver, Col., har de således et eget kurs i »clear thinking«, dvs. elementær anvendt logikk, idet en bruker geometriske postulater og setninger som anvendelsesområde [18]. Det blir opplyst at en har fine resultater.

Det blir i virkeligheten et praktisk angrep på det såkalte transfer of training-problemet, det meget omdiskuterte spørsmål om hvorvidt undervisning i matematikk ved siden av å gi innsikt i faget også styrker tenkeevnen på andre, først og fremst beslektede områder. Så vidt jeg vet, er det ennå ikke kommet fram noe sikkert om resultatene av den endrete

geometriundervisning, men mye taler for at den må ha en viss virkning. På den andre siden hevder professor S. MacLane (Chicago) at lærebøkene er så ivrige etter å bruke bevis i praktiske problemer at de glemmer å bruke det der det virkelig skulle være med, i matematikken [19].

Den større frihet amerikansk skole har enn den nordiske, gjør det også mulig å *prøve* andre ordninger. Samtidig er U. S. A. et foregangsland i pedagogisk psykologi og pedagogisk statistikk, og forsøk i skolen har derfor alle muligheter for å bli drevet vitenskapelig, på en slik måte at resultatene kan få størst mulig utsagnskraft.

En del forsøk med endret pensum eller stoffplasing har vært gjort. Imidlertid har jeg inntrykk av at verdien av forsøksresultatene blir noe redusert fordi det i flere tilfelle har dreid seg om eksperimenter med utvalgte elever. Eksempelvis ser det ut til at elevmateriellet ved de skoler («laboratory» el. l.) som er knyttet til lærerutdanningen har en skjev elevrekruttering, nemlig flinkere elever enn vanlige skoler. Da sannsynligvis også lærerne ved slike skoler ligger over det gjennomsnittlige, blir skjevheten sterkere. Jeg finner ingen grunn til her å referere slike forsøk som altså gjelder et endret pensum. Men jeg vil nevne en enquête arrangert av K. E. Brown [20], som fikk 1500 svar på spørsmålet: Hvorfor undervise i geometri? Her viste det seg å være to typiske svar: 1) for å utvikle vanen å tenke klart og uttrykke seg presist, 2) å gi kunnskaper om geometriens fakta og prinsipper.

Jeg nevnte at det i amerikansk skole er en ganske sterk tendens til i geometrien å understreke dette at undervisningen skal påvirke elevenes logiske sans i dagliglivet. Det er ennå for tidlig å uttale noe om hvorvidt et slikt mål blir nådd eller kan nås i dagens skole. Det er gjort en del eksperimenter på dette området, men jeg tror mer må gjøres før en kan komme til sikrere resultater, og slik at utvikling av evnen til å tenke kritisk kan få riktige dimensjoner i geometriundervisningens målsetning. Det en ønsker er at elevene skal bli fortrolige med effektive metoder til å utvikle upartisk tenkning, kritisk vurdering, forstandig generalisering og bli kjent med hva matematisk strenghet og presisjon vil si. En kunne si at elevene trenes i «forbruker-matematikk» til ikke å bli lurt for mye i butikkene, og gjennom deduktiv matematikk (og logikk) til ikke å falle blindt til fote for propaganda i presse, kringkasting osv. I det hele tatt må en si at amerikansk undervisning i større grad enn vår forbereder den vordende samfunnsborger.

Junior College. Dette omfatter de to første år av det fireårige college, men kan også være en selvstendig institusjon. Det har studenter fra 17–18 opp til 20 år, og forbereder dels til videre college- og universitetsarbeid,

dels er det for mange avslutning på den almindennende opplæring. Det er regnet ut at 90% fra de øverste sosiale lag går i college, mens bare 15% fra de midlere og 5% av de lavere lag gjør det, og det ser ut til at det er like mange med de nødvendige forutsetninger *utenfor* som i college. Jeg minner om skolepengene ved de mange private colleges.

I Junior College blir det vanligvis undervist i såkalt college matematikk og det uten tanke på studentenes videre skjebne. Pensum omfatter gjerne algebra, trigonometri, analytisk geometri (også tredimensjonal) og differensial- og integralregning, slik at det meste er stoff innen de nordiske lands skolepensu.

Den såkalte Joint Commission [3] foreslår for Junior College to pensu som begge bygger på et års algebra og et års geometri i high school. Det ene behandler «nyttig» matematikk: måling, trigonometri, ligninger og diagrammer, statistikk, rekker, finansmatematikk, noe differensiering og integrasjon. Det andre er et orienteringskurs som skal gi et mer eller mindre teoretisk overblikk om hele matematikken: fagets utvikling og dets forhold til andre kulturområder, euklidisk geometri, tall, gruppe, klasser, funksjoner, grenser, statistiske begrep, bruk i fysikken.

Det mest vidtgående pensum nå er nok det som leses ved Chicago-universitetet, som har lagt opp et svært omfattende program, radikalt og krevende fra første år. Det heter Fundamental mathematics og blir gjennomgått i 5 uketimer. Kurset er kommet ut i 3 bind [22].

Her blir det lagt vekt på det logiske i høy grad. Det er snarere matematikkens vesen enn matematikken selv. På meg virket 3. bind, som inneholdt mer tradisjonell matematikk, lettere enn bind 1 og 2 som bl. a. inneholder en mengde logikk. Kurset har til formål å øve studentene i elementene av den vitenskapelige diskusjon (discourse) og deres bruk i uttalelser, organisering og kommunikasjon av idéer; å utvide innsikten i den matematiske tenknings natur og former (abstraksjoner, symboler, strukturer i matematikken) og gi visse begrep, fakta og metoder som er grunnleggende for de eksakte vitenskaper. En vil dekke behovene såvel til de studenter for hvem dette kurset er det eneste i matematikk som til de som skal studere mer i faget. En må også se kurset i lys av tendensen til nå å styrke almindenningen («general education») i skole og college. Det må videre nevnes at ved siden av funksjoner blir også det mer generelle begrep relasjoner behandlet. Mens en funksjon kort sagt er en ordnet samling tallpar (x_1, y_1) , der alle x_1 er forskjellige, har en relasjon ikke dette siste kravet.

Før opptakingen er det en prøve som har til oppgave å vise om studentene kan lære noe, mens det i begynnelsen av kurset blir gitt en «placement»-test som viser hva for kunnskaper studentene har. Ved

slutten av kurset er det 3 sett eksamensoppgaver hvert på 3 timer. Det første måler modenhet, de to andre kunnskaper. Til første prøve hører en lenger ukjent matematisk tekst og til denne en rekke spørsmål.

Meg forekommer prøvene ganske krevende, men en har i Chicago sikkert en samling studenter av høy kvalitet. Det ble ellers uttalt at det var vanskelig å holde et fast nivå i oppgavene. Man pleier imidlertid å ha en del »gjengangerspørsmål», og dessuten har man en viss kontroll i studentenes intelligenskvotienter som er tilgjengelige for professorene.

Jeg kunne også nevne et kurs Universal mathematics utarbeidd av en gruppe ved et sommerkurs ved University of Kansas. Forelesningene er trykt [23]. De er skrevet for første collegeår. Det interessante her er at det er en dobbelt framstilling som dels går parallelt: en »intuitiv» og en »formal». Særlig for de som skal *bruke* matematikk kan en slik dobbelt framstilling være heldig. De får greie på fagets indre natur og samtidig gjennom de mange eksempler se hvordan det kan anvendes. Ellers er forelesningene sterkt filosofisk, kunnskapsteoretisk preget og vil være utmerkete for vordende lærere, men vil kreve svært gode lærere for å bli forstått av en vanlig collegestudent. Også her blir såvel relasjoner som funksjoner behandlet, intuitivt og formalt. I den intuitive framstilling er en funksjon et system bestående av to mengder X og Y og en korrespondanseregul som utpeker til hver x i X en eneste verdi av y i Y . Mengden X kalles *domain* og mengden Y *range*. Disse to navnene synes å være i alminnelig bruk i U. S. A. I den formale framstilling startes med et *kartesisk produkt* $A \times B$ som er alle ordnete par (a, b) der a er i A og b i B . En *relasjon* er en undermengde av $R \times R$ der R er det reelle tallsystem, mens en funksjon er et trippel (f, A, B) som består av to mengder A og B og en relasjon f i $A \times B$ slik at ikke noe element a i A er det første i to par: (a, b) og (a, b_1) .

Noe mer moderat enn de to omtalte pensa er det som fins i en lærebok av C. B. Allendoerfer og C. O. Oakley [24], anmeldt her i NMT (Bd. 4, 1956, s. 36) av Lennart Sandgren. Han finner at forfatterne ikke har greidd å realisere oppgaven å gi vesentlige drag av moderne matematikk, en oppgave som anmelderen nærmest finner umulig å løse.

Det er ikke tvil om at boka er et interessant forsøk på å ta med nytt stoff (logikk, statistikk, gruppe-, mengde- og tallkroppbegreper), mens det kan diskuteres hvor godt tankene er satt ut i livet. Jeg traff den ene av forfatterne, som har brukt boka på flere kull, men det var på et college av høy standard, og det er mulig at den egner seg mindre for et vanlig college med ordinære lærerkrefter. Boka må sees på som et pionerverk og tiden vil vise det stoff i den som bør gå inn i college-undervisningen. Selv er jeg noe mer optimistisk enn anmelderen her i NMT. På den andre

siden må jeg slutte meg til professor F. L. Wren [25] når han hevder at det på dette trinn skal være »bona fide« matematikk og ikke bare beskrivelser og diskusjoner av matematikkens natur, og det er mulig at det hos A. & O. er for mange ubeviste påstander eller for løst behandlede emner.

Undervisningen på college-nivået er vel noe mer skolemessig enn i våre universitetsforelesninger. Det er ofte oppgaver, det blir stilt spørsmål (fra lærer og fra studenter), det er diskusjoner, gruppearbeid blir referert, det blir hyppig delt ut stensilert materiale og det blir holdt flere prøver med korte spørsmål.

(Fortsettes i neste hefte.)

LITTERATUR

- [1] *The reorganization of mathematics in secondary education*. A report by The National Committee on Mathematical Requirements. The Mathematical Association of America, 1923.
- [2] *Mathematics in general education*. D. Appelton-Century Co., New York 1940.
- [3] *The place of mathematics in secondary education*. The National Council of Teachers of Mathematics fifteenth yearbook. Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, New York 1940.
- [4] H. F. FEHR: *Teaching high-school mathematics*. National Education Association, Washington D. C. 1955.
- [5] *Reports of the Commission on Post-War Plans*. The Mathematics Teacher 37 (1944), pp. 226–232; 38 (1945), pp. 195–221.
- [6] J. D. WILSON: *Trends in geometry*. The Mathematics Teacher 46 (1953), pp. 67–70.
- [7] C. V. NEWSON: *Articulation of secondary mathematics and college mathematics*. Bull. of the Nat. Ass. of Secondary-School Principals 38 (1954), pp. 62–66.
- [8] K. E. BROWN: *Mathematics in public high schools*. U. S. Dept. of Health, Education and Welfare. Bull. 1953, No. 5.
- [9] I. B. ADKINS: *Goals in algebra*. Bull. of the Nat. Ass. of Secondary-School Principals 38 (1954), pp. 10–13.
- [10] W. D. REEVE: *Mathematics for the secondary schools*. Henry Holt & Co., New York 1954.
- [11] *Education for the talented in mathematics and science*. U. S. Dept. of Health, Education and Welfare. Bull. 1952, No. 15.
- [12] *Guidance pamphlet in mathematics for high school students*. Nat. Education Ass., Washington D. C.
- [13] M. F. ROSSKOPF: *Technical mathematics for grades 9, 10 and 11*. School Science and Mathematics 54 (1954), pp. 594–600.
- [14] H. F. FEHR: *Teaching for appreciation of mathematics*. School Science and Mathematics 52 (1952), pp. 19–24.
- [15] H. F. FEHR: *A proposal for a modern program in mathematics education in the secondary schools*. School Science and Mathematics 49 (1949), pp. 723–730.
- [16] H. F. FEHR: *The goal is mathematics for all*. School Science and Mathematics 56 (1956), pp. 109–120.
- [17] M. F. ROSSKOPF—H. D. ATEN—W. D. REEVE: *Mathematics, a first course*. McGraw-Hill, New York 1951. *A second course*, 1952. *A third course*, 1955.

- [18] W. S. BRACE: *An English schoolmaster looks at American mathematics teaching*. The Mathematical Gazette 39 (1955), pp. 89-97.
- [19] S. MACLANE: *The impact of modern mathematics*. Bull. of the Nat. Ass. of Secondary-School Principals 38 (1954), pp. 66-70.
- [20] K. E. BROWN: *Why teach geometry?* The Mathematics Teacher 43 (1950), pp. 103-106.
- [21] F. L. WREN—H. B. McDONOUGH: *Development of mathematics in secondary schools of U. S.* The Mathematics Teacher 28 (1935), pp. 117-127, 190-198, 215-224, 287-295.
- [22] *Fundamental mathematics*, 1-3. Prepared for the General course mathematics 1 in the College. The University of Chicago, Chicago.
- [23] *Universal Mathematics*. Part I: Functions and limits. 1954 Summer working group, University of Kansas. Lawrence, Kansas 1954.
- [24] C. B. ALLENDOERFER—C. O. OAKLEY: *Principles of mathematics*. McGraw-Hill, New York 1955.
- [25] F. L. WREN: *Merits and content of a freshman mathematics course*. School Science and Mathematics 52 (1952), pp. 515-603.
- [26] J. W. A. YOUNG: *The teaching of mathematics in the elementary and secondary schools*. Longmans, Green and Co., New York 1924.
- [27] W. SIMS—A. OLIVER: *The laboratory approach to mathematics*. School Science and Mathematics 50 (1950), pp. 621-627.
- [28] D. JOHNSON: *Are films and filmstrips effective in teaching geometry?* School Science and Mathematics 50 (1950), pp. 570-574.
- [29] R. A. BAUMGARTNER: *A mathematics program of the gifted*. School Science and Mathematics 53 (1953), pp. 207-213.
- [30] *Mathematics*. College Entrance Examination Board, Princeton, New Jersey 1954.
- [31] H. F. FEHR: *Secondary mathematics*. D. C. Heath & Co., Boston 1951.
- [32] *The National Council of Teachers of Mathematics. Yearbooks 1-22*. 1201 Sixteenth Street, N. W., Washington 6, D. C.
- [33] C. H. BUTLER—F. L. WREN: *The teaching of secondary mathematics*. McGraw-Hill, New York 1941.
- [34] *Problems in mathematical education*. Educational Testing Service, Princeton 1956.

OM ELLIPSOGRAFER

E. J. NYSTRÖM

Man kan i dagligt tal höra orden ellips resp. elliptisk användas om *ovaler* i allmänhet, t. o. m. om sådana utan symmetriaxlar. I matematisk mening är emellertid en *ellips* icke vilken oval som helst utan en kurva som motsvarar någon av vissa, sinsemellan ekvivalenta, definitioner. I det följande är det bara tal om sådana kurvor.

Vid illustration av matematiska, astronomiska, geodetiska, tekniska o. a. arbeten förekomma ellipser och ellipsbågar ofta, och de böra vara ritade med omsorg emedan de i annat fall verka störande, i synnerhet om betraktaren har någon kännedom om geometriska figurer. Det är å andra sidan ej alldeles lätt att rita ellipser som tillfredsställa ett kritiskt öga.

Vi ingå i det följande ej på några ellipskonstruktioner punkt för punkt, och ej heller på sådana vid vilka man genom optisk projektion åstadkommer ellipser och därpå ritar kurvan genom att med en penna följa den mer eller mindre skarpa gränslinjen.

Så kallade »korgbågellipser«, för vilkas uppritande det finns anvisningar flerstädes, äro approximationer medelst cirkelbågar. Sådana konstruktioner ge lätt tillfredsställande resultat för ellipser med *liten* excentricitet, d. v. s. för cirkelliknande ellipser. Bågarna böra ansluta sig väl till varandra och ingen avvikelse från en verklig ellips bör kunna förmärkas. I gynnsamt fall kommer man tillrätta med fyra cirkelbågar, men till exempel de rätt ofta förekommande ellipserna med axelförhållandet 1:3 kunna ej approximeras med endast fyra bågar.

Det är helt naturligt att man sökt mekaniska hjälpmedel, *ellipsografer*, för kontinuerlig och noggrann uppritning av ellipser. Men även utan tanke på den praktiska användningen kan det ha sitt intresse att försöka omsätta någon av ellipsens geometriska egenskaper i en mekanism. Uppfinnaren av en sådan bör självfallet övertyga sig om att de ovaler hans apparat ritar, faktiskt äro ellipser. Författaren vet två fall då de ej varit det.

En ellipsograf som motsvarar höga anspråk borde, förutom att den skall fungera lätt och tillförlitligt, vara i stånd att rita även tämligen excentriska ellipser, åtminstone sådana med axelförhållandet 1:4. Då det i praktiken mycket ofta i samma figur förekommer sinsemellan likformiga ellipser, d. v. s. med givet axelförhållande, bör det vara lättare att med ellipsografen rita sådana än av varandra helt oberoende. Man borde m. a. o. med *en* inställning kunna ändra ellipsens storlek med bibehållande av dess form. Dessutom är det önskvärt att en ellips med givna mått bekvämt kan ritas även i tusch och på bestämd plats, samt naturligtvis koaxiala ellipser utan att instrumentet behöver lyftas. Någon ellipsograf fullt motsvarande alla dessa fordringar har man hittills ej lyckats konstruera.

I avsikt att klassificera kända ellipsografer kan man anföra principen för deras konstruktion, men man bör beakta, att ett visst resultat kan tänkas vara uppnått på olika sätt. Därför är nedanstående gruppering icke den enda möjliga. Dessutom kunna vissa allmänna slag av mekanismer på olika sätt bringas att fungera som ellipsografer.

Vi betrakta åtta kategorier av mekanismer för uppritning av en ellips:

- I. P. g. a. fokalegenskaper.
- II. Som plant snitt av cylinder eller kon.
- III. Som affin bild av en cirkel.
- IV. Genom dubbel rätlinjig glidning.
- V. Som hypocykloid.
- VI. Genom mekaniskt realiserad parameterframställning.
- VII. Medelst ledmekanismer.
- VIII. Av bestämd given form (excentricitet).

I. Allmänt känd är ellipsens *trådkonstruktion* (fig. 1), på tyska ofta kallad »Gärtnerkonstruktion», som emellertid till följd av ringa noggrannhet är föga användbar vid ritarbete. Man kan likväl därmed draga gränsen bl. a. för fotografier eller för bordsskivor som skola göras ovala. Den medelst en penna spända tråden behöver givetvis icke vara fästad vid brännpunkterna, den kan utgöras av en kring desamma lagd sluten ögla.

II. 1. En, som man i första ögonblicket kunde tycka genialt enkel ellipsograf erhåller man genom att hålla en *nollecirkels* (*»jungfrucirkels»*) axel i oförändrat snett läge mot ritplanet, ty nollecirkeln dragstift rör sig på ytan av en rotationscylinder och dess spets ritar snittkurvan mellan cylinderytan och ritplanet, alltså en ellips. Någon skrapning av pappret förekommer ej därvid. Teoretiskt sett kan man lätt rita både koaxiala och likformiga ellipser, vilket är värdefullt, men i praktiken fungerar

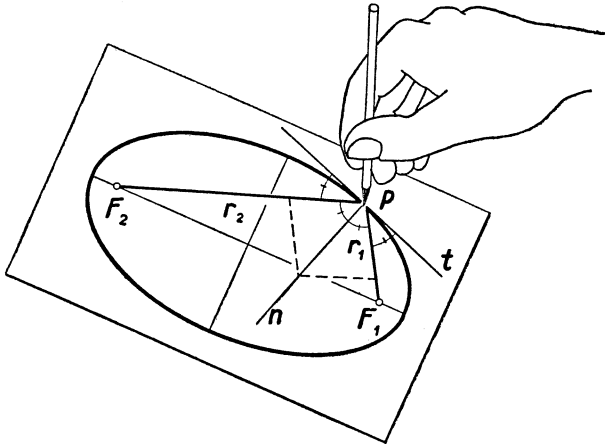


Fig. 1

instrumentet dåligt och desto sämre, ju större den genom axelns lutning bestämda excentriciteten är. Dessutom är ju metoden begränsad till små ellipser och man kan knappast förmoda att ett i stor skala utfört instrument skall fungera nämnvärt bättre.

2. En tekniskt mera fullkomnad apparat, ävenså grundad på *parallellprojektion av en cirkel*, är angiven av Lothar Ruisz. Författaren har tyvärr ej varit i tillfälle att prova den.

3. Åtminstone som demonstrationsmodell är en av Hildebrandt konstruerad apparat av intresse:

På ett plant underlag (fig. 2) vilar ett massivt klot k genom vars centrum går en med underlaget parallell axel a . Kring denna kan en mot klotets centrum riktad tapp t vridas i det mot axeln a vinkelräta planet och fastgöras i önskat läge, varvid tappen kommer att utgöra axeln för en tangentkon till klotet. Vid tappen kan en kring den samma vridbar hylsa hh fastgöras så att en i hylsan glidande metallstav s tangerar klotet medan den skär ovannämnda tapp eller förlängningen därav i en bestämd punkt Y . Vrider man hylsan jämte den däri glidande staven, kommer den sistnämnda att beskriva manteln av en till klotet lagd tangentkon med spetsen Y och genom stavens tyngd kommer dess spets P att på underlaget rita en ellips, parabel eller

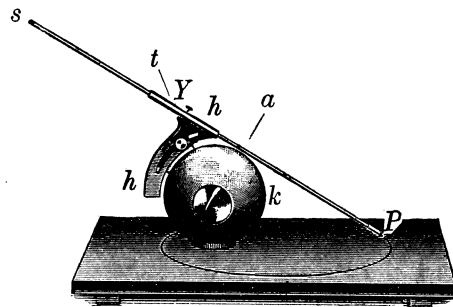


Fig. 2

hyperbel (beroende på inställningen), för vilken kurva klotets tangeringspunkt på underlaget enligt Dandelins kända sats är en brännpunkt.

III. Varje *affinograf* eller apparat för utförande av affina transformationer av plana figurer kan med jämförelsevis gott resultat användas

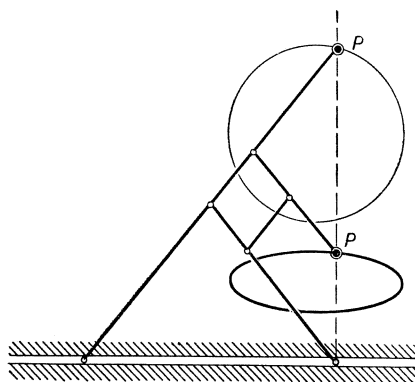


Fig. 3

som ellipsograf. Man har endast att låta farstiftet rita en cirkel och får som affin bild därav en ellips. Ju mer förhållandet mellan den ursprungliga och den transformerade figurens ordinator kan variera, desto större användningsmöjlighet har en affino-ellipsograf (fig. 3).

IV. 1. Vi komma nu till de åtminstone för närvarande mest använda typerna av ellipsografer.

Låter man en sträcka (fig. 4a) röra sig så, att dess ändpunkter A och

B glida utmed tvenne mot varandra vinkelräta linjer x och y , så beskriver en punkt P på sträckans förlängning eller på sträckan själv en ellips med halvaxlarna $\overline{BP}=a$ och $\overline{AP}=b$. Betecknar man nämligen sträckans föränderliga lutningsvinkel mot x -axeln med u , så framgår det omedelbart att ekvationerna $x=a \cos u$, $y=b \sin u$ representera en ellips i koordinatsystemet x, y med u som parameter. Detta resultat, som väl finnes i varje lärobok i analytisk geometri, ligger till grund för ett flertal

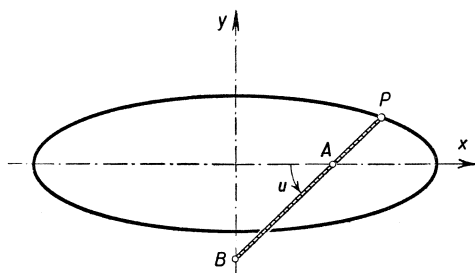


Fig. 4a

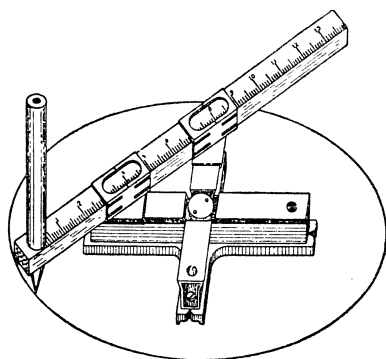


Fig. 4b

ellipsografkonstruktioner vid vilka linjerna eller skenorna x og y kunna ligga i samma plan eller i parallella plan. En sådan ellipsograf i rätt

primitivt utförande synes i fig. 4 b. De kvantiteter man vid användningen bör inställa, äro i regel halva lillaxeln b och halvaxlarnas skillnad $a - b$. Sistnämnda storhet, vars skala i allmänhet icke sträcker sig längre än till 4 cm och ofta ej så långt, är bestämmande för instrumentets förmåga att rita stora excentriska ellipser. En ellips med givna halvaxlar a och b kan även åstadkommas så att den rörliga sträckan ges längden $a + b$ och punkten P får avstånden $\overline{AP} = a$ och $\overline{PB} = b$ från dess ändpunkter. Det förstnämnda fallet, då P ligger på sträckans AB förlängning, synes dock i praktiken vara det viktigare.

Vanligen kan man genom att insätta ett dragstift rita ellipser direkt i tusch. Därvid rör sig dragstiftet som sådant i riktningen av ellipsens tangent, men dess käkar äro parallella med tangenten endast i axlarnas ändpunkter medan deras rörelseriktning i övrigt har en mot dem själva vinkelrät komponent och de därför i viss mån skrapa ritpappret. Det är en intressant uppgift att söka de punkter i vilka skrapningen är störst.

2. Icke på långt när lika allmänt känd som ovannämnda egenskap är att de båda styrlinjerna x och y , d. v. s. ellipsografens skenor, icke behöva bilda en rät vinkel. Ej heller behöva punkterna A , B och P ligga i rät linje. Det visar sig att även en sådan »felaktig ellipsograf«, vid vilken vinkeln mellan x och y är sned och ABP icke är en rät linje, ritat ellipser. Dock är inställningen av en sådan för givna mått något mer komplicerad. Det bör observeras att styrlinjerna i allmänhet icke äro konjugatdiametrar i ellipsen.

Man kan utsäga det anförda resultatet i allmän form så, att om två punkter A och B (fig. 5) av en plan figur röra sig rätlinjigt, en godtycklig punkt P i det rörliga planet beskriver en *ellips* med undantag av punkterna på periferin av cirkeln genom styrlinjernas skärningspunkt och punkterna A och B , vilka sistnämnda punkter röra sig längs räta linjer. Beviset utföras lättast med hjälp av rörelsens polkurvor (jfr. V).

Resultatet kan till och med utsträckas till rymden men vi ingå ej därpå.

3. Rörelse med i allmänhet elliptiska bankurvor uppstår även om man låter sträckan eller planet ABP vara fast, medan skenor x och y samt ritpappret eller underlaget få röra sig. Man har i detta fall en *ovalsvarv*, en apparat som redan Leonardo da Vinci († 1519) skall ha använt.

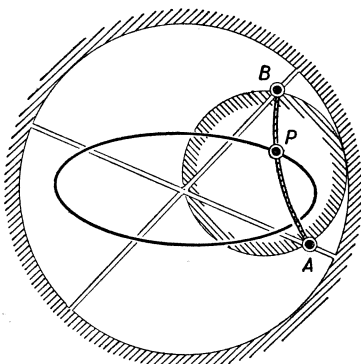


Fig. 5

V. Såväl vid den normala som vid den »felaktiga» ellipsografen och vid ovalsvarven kan man fråga sig, vilka de *polkurvor* äro, genom vilkas glidningsfria rullning den elliptiska rörelsen uppkommer, ty ett par sådana polkurvor existera vid varje plan rörelse. Med förbigående av den f. ö. alldeles lätta härledningen nämna vi här endast att (de icke materiellt förefintliga) polkurvorna äro cirklar, av vilka den ena har dubbelt så stor radie som den andra och omsluter denna (fig. 5). Vid ellipsografen är den större cirkeln fast medan den mindre rullar längs insidan av den störres periferi. Vid ovalsvarven är förhållandet omvänt, d. v. s. den mindre cirkeln är fast. Varje punkt i den rörliga cirkeln plan, även med godtyckligt stort avstånd från centrum, beskriver därvid en ellips, i undantagsfall en rät linje. Man kan därför säga att ellipsen är en speciell *hypocykloid*. Vid ovalsvarven kan man använda ordet *pericykloid*. Det är tänkbart att direkt på ifrågavarande egenskaper grundade ellipsografer med materialiserade polkurvor kunde konkurrera med de vanligen använda.

VI. Principen för en av Fowler i Amerika nyligen konstruerad och i handeln befintlig ellipsograf framgår av fig. 6.

Inom en på ritpappret π liggande fast ram ρ glider i riktningen av en vald x -axel en metallskiva σ . På denna rotera två på yttersidan med

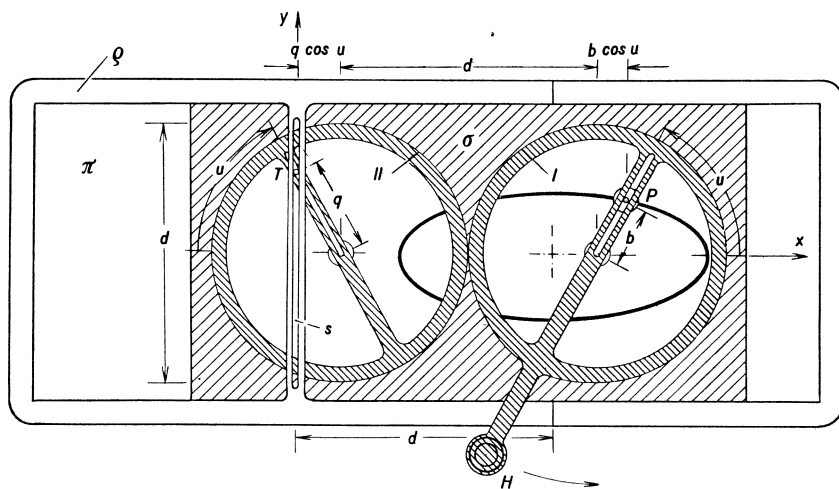


Fig. 6

kuggar försedda ringar med diametern d i motsatta riktningar då den högra ringen I vrides medelst ett handtag H . Vardera ringen har en slitsad radie som i utgångsläget sammanfaller med x -axeln och som bildar vinkeln $\pm u$ med denna. En inom slitsen på I fastgjord penna P

befinner sig på det ställbara avståndet b från ringens centrum. I slitsen inom ringen II och på det likaså ställbara avståndet q från dess centrum finnes en tapp som glider i en med ramen ϱ fast förbunden, mot x -axeln vinkelrät skära s och därigenom förskjuter skivan σ jämte kuggringarna I och II i förhållande till ramen ϱ och ritpappret π .

Låta vi skåran s sammanfalla med y -axeln i ett rätvinkligt fast koordinatsystem och betrakta vinkeln u som *parameter*, så äro koordinaterna för pennan P :

$$\begin{aligned} x &= q \cos u + d + b \cos u = d + (q + b) \cos u, \\ y &= b \sin u, \end{aligned}$$

där såsom nämnt d är en given konstant = kuggringarnas diameter, q och b ställbara kvantiteter. Vi finna att P beskriver en ellips med halvaxlarna $q + b$ och b . För att halva storaxeln skall ha en given längd a , bör man välja $q = a - b$. Vi se således att även vid denna ellipsograf skillnanden mellan de av apparaten ritade ellipsernas halvaxlar spelar en viktig roll. Största värdet av denna skillnad är omkring 45 mm.

Vissa konstruktioner av Hoecken och Dearing höra till den nu behandlade kategorin av ellipsografer och ha beröringspunkter med den Fowlerska, men det är ej bekant, huruvida de fullkomnats till praktiskt användbara instrument.

VII. 1. I avsikt att undvika den vid ellipsografer med rakföring förekommande *glidningen* kan man försöka göra bruk av *ledmekanismer*, vid vilka enbart rotationer äga rum. Enligt Kempe är det i princip möjligt att ange ledmekanismer för att (styckvis) rita vilken på förhand given *algebraisk* kurva som helst.

Enklast vore det om en ledad fyrhörning $ABCD$ kunde tjäna som ellipsograf då en av dess sidor AD hålles fast. Så är emellertid icke fallet. En med motstående sida fast förbunden punkt P ritas i regel en kurva av sjätte graden. I det symmetriska specialfallet (fig. 7) och i vissa andra fall äro bankurvorna av fjärde graden men någon ellips uppstår ej ens om bankurvan sönderfaller. Ledfyrhörningen i fig. 7 är en s. k. antiparallelogram, och bankurvorna äro då sådana att de genom »inversion» eller transformation med reciproka radier kunna överföras i kurvor

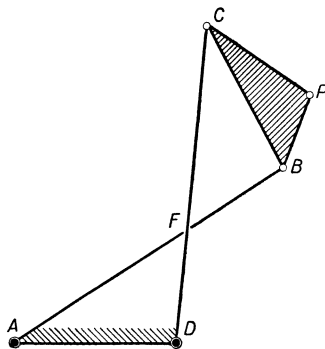


Fig. 7

av andra graden. Man kan realisera en inversion medelst en annan anti-parallellogram och har därför möjlighet att låta en ledmekanism bestående av 7 rörliga stavar fungera som ellipsograf. Att mekanismen blir så pass komplicerad är ej förvånande om man betänker att led-

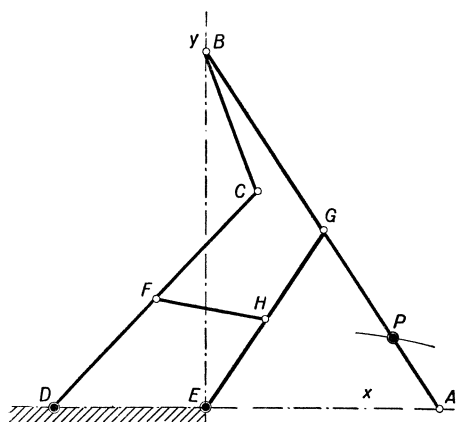


Fig. 8

mekanismer i allmänhet alstra »cirkulära» kurvor och att ellipsen ju ej är en sådan.

2. Man kan å andra sidan utgå från ellipsografen i fig. 4a och försöka åstadkomma de nödiga rakföringarna medelst ledmekanismer. Det räcker med *en* rakföring, ty om mittpunkten G av en sträcka AB (fig. 8) hålles på avståndet $\frac{1}{2}AB$ från en fast punkt E , och A rör sig på en rät linje x genom E , så rör sig B på normalen från E mot linjen x .

En ledmekanism för rakföring

består av minst 5 rörliga stavar, och med hjälp av en sådan kan man bilda en av 7 rörliga stavar bestående ellipsograf.

Överraskande nog kan dock enligt Hart den ifrågavarande rakföringen jämte den elliptiska rörelsen av en punkt P på staven AB realiseras medelst endast 5 rörliga stavar, vilket enligt det föregående är det minsta möjliga antalet. Teorin för apparaten är föga överskådlig, och vi nöja oss med att betrakta ett exempel på en sådan ellipsograf (fig. 8). Därvid har man med p som konstant:

$$\begin{aligned} \overline{HG} &= \overline{HE} = \overline{HF} = p, & \overline{GA} &= \overline{GB} = \overline{GE} = 2p, \\ \overline{BC} &= \overline{CF} = \overline{FD} = \overline{DE} = p\sqrt{2}. \end{aligned}$$

För praktisk användning lämpar sig Harts ellipsograf ej då, som det visat sig, den ej fungerar tillräckligt noggrannt. Men den har onekligen teoretiskt intresse.

3. Vid de senast behandlade ellipsograferna förekommer ingen glidning. Sådan uppträder däremot vid en av Baum angiven ellipsograf bestående av en ledmekanism, nämligen den i fig. 7 avbildade antiparallelogrammen $ABCD$ då sidan AD hålles fast. Den föränderliga och glidande skärningspunkten F mellan antiparallelogrammens längre sidor AB och CD har nämligen egenskapen att summan av avstånden FA och FD är konstant. Om man medelst lämpliga glidstycken anbringar en penna i

punkten F , ritar den en ellips med de fasta punkterna A och D som brännpunkter. Praktiskt användbar torde denna ellipsograf icke vara. Den hade för övrigt kunnat hänföras till kategorin I.

VIII. Vid åskådlig avbildning, i synnerhet av tekniska objekt, och vid illustrationer i avhandlingar och läroböcker använder man som känt ofta vissa standardprojektioner¹. Gäller det då att avbilda cirklar parallella med något av koordinatplanen — vilket ofta är fallet — har man att rita ellipser av bestämd given form eller bågar av sådana. För att bekvämt kunna göra detta, kan man begagna i handeln förekommande *schabloner* med utskurna ellipser.

Vill man rita en sådan ellips men finner att ingen av schablonkurvorna har precis önskad storlek, ligger det nära till hands att lägga närmast större öppning koaxialt med den önskade ellipsen och draga kurvan med en tjockare penna än den för användning av schablonerna avsedda. Om ock metoden kan vara till nytta i vissa fall, är den *oriktig*. Den erhållna kurvan är nämligen ingen ellips utan en *parallellkurva* till en sådan. Endast vid ritning av cirklar är resultatet exakt.

Vi betrakta figur 9a och en parallellprojektion därav, fig. 9b. De mindre cirkarna i fig. 9a kunna föreställa den tjocka pennans tvärsnitt. I fig. 9b synes detta ej som en cirkel utan som en ellips, gli-

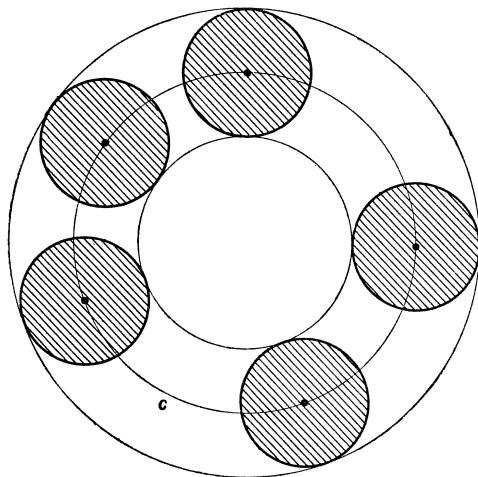


Fig. 9a

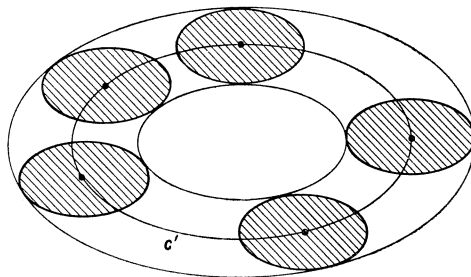


Fig. 9b

¹) Vanligast är *kavaljerperspektiv* och *ortogonalaxonometrisk avbildning*. Den senare kan man t. ex. välja *isometrisk* (lika stor förkortning på alla koordinataxlarna), *dime-trisk* (förkortningsförhållandena 1:2:2) eller, som ofta i Amerika, *trimetrisk* med vinklar om 105°, 120°, 135° mellan projektionerna av koordinataxlarna.

dande längs en fast sådan, nämligen schablonens rand som den beständigt tangerar, varvid axlarnas riktning förblir oförändrad. Den rörliga ellipsen förändras ej under omloppet och bankurvan för dess centrum är en parallellprojektion c' av den i fig. 9a med c betecknade cirkeln och är således en ellips. Det är därför ej riktigt att använda en vanlig penna utan man bör ha en med *elliptiskt tvärsnitt*. Sådana pennor eller holkar av olika storlek finnas till salu i Amerika.

Samma holkar med storaxlarna $a_1, a_2, \dots$ kan man använda för att rita ellipser, vilkas storaxlar skilja sig från vilka som helst av schablonellipsernas med just nämnda kvantiteter.

Ingenting hindrar att man i stället för utskurna elliptiska hål använder elliptiska skivor, då sådana stå till förfogande. De ellipser eller holkar man låter glida längs randen av en skiva eller en öppning, behöva givetvis ej vara små. Det finns i själva verket ingen annan begränsning än deras på förhand givna excentricitet.

Man ser ytterligare, att enveloppen för var och en av de rörliga ellipserna sönderfaller i en inre och en yttre ellips, båda likformiga med c' .

Det finns således flera möjligheter att bekvämt rita ellipser av bestämd form men olika storlek och allt detta framgår omedelbart genom betraktande av figur 9b som parallellprojektion av 9a.

Metoden förutsätter som nämnt, att den glidande ellipsen föres längs den fasta med bibehållen riktning av axlarna. Det torde vid praktisk användning vara fullt tillräckligt för nämnda ändamål att förse den rörliga ellipsen med ett handtag som tydligt anger dess storaxel. Men man kan säkra parallellföringen med en vanlig ritmaskin eller med en speciell för ändamålet konstruerad mekanism som jämte schablonerna förekommer i handeln.

NÅGOT OM DIFFERENTIAL-DIFFERENSEKVATIONER¹

TORE HERLESTAM

Den lineära homogena ekvationen. I en del tillämpade vetenskaper uppträder problem, där ett visst förlopp inte kan beskrivas adekvat med enbart förhållandena i *en* rum-tid-punkt och dess omedelbara omgivning. Det fordras dessutom information om tillståndet i andra punkter på ändligt avstånd från den aktuella. Som exempel må nämnas spridningen av en epidemi, där man i en första grov approximation kan tänka sig, att antalet insjuknade är proportionellt mot antalet smittade vid en föregående tidpunkt, detta beroende på att sjukdomen har en viss latenstid. Problemet skulle då leda till en ekvation av formen

$$y'(x) = k \cdot y(x-h).$$

Denna ekvation får tänkas svara mot ett idealförlopp, vilket i praktiken oftast är orealiserbart.

Liknande problem kunna uppträda i ekonomisk teori t. ex. i samband med produktionsstyrning och i fysiken t. ex. vid användning av Geiger-räknaren, vilken är behäftad med en viss tröghet, d. v. s. den har en okänslighetsperiod efter varje impulsgivning. I många fall leder problemen till en ekvation av formen

$$y'(x) = F[y(x-h)].$$

Vi kommer här att uteslutande syssla med det allra enklaste fallet, nämligen då h är konstant $=1$ och $F(u)=u$, d. v. s.

$$(1) \quad y'(x) = y(x-1).$$

Denna funktionalekvation är

- a) lineär och homogen,
- b) invariant under derivation, och
- c) invariant under translation.

¹ Den siste del av denne artikkel ligger vesentlig over det nivå som NMT vanligvis forsøker å holde. Redaksjonen har likevel villet publisere artikkelen, da den inneholder nye resultater av stor interesse.

Detta innebär, att

- a) om y_1 och y_2 är lösningar och c_1 och c_2 är tal, så är $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ också en lösning,
- b) om y_0 är en två gånger deriverbar lösning, så är $y = y_0'$ också en lösning, och
- c) om $y = y(x)$ är en lösning, så är också $y_a = y(x+a)$ en lösning.

Den karakteristiska ekvationen. En lösning av formen $u(x) = e^{sx}$ till ekvationen (1) kallas *partiallösning*. För att e^{sx} skall vara partiallösning är det tydligen nödvändigt och tillräckligt att

$$(2) \quad s = e^{-s}.$$

Denna transcendent ekvation är alltså den karakteristiska ekvationen till problemet (1) och dess rötter bestämmer partiallösningarna. Som för ordinära differentialekvationer användes vid behov samma benämning på lösningarna $x^k e^{sx}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, om s är en karakteristisk rot av multipliciteten m . I fallet (1) blir dock inte detta aktuellt.

I ekvationen (2) sätter vi $s = \sigma + it$, separerar real- och imaginärdelar och får

$$(3) \quad \sigma = e^{-\sigma} \cos t, \quad t = -e^{-\sigma} \sin t.$$

Härav drar man genast följande slutsatser: Bortsett från reella rötter ($\sigma = e^{-\sigma}$, $t = 0$), så uppträder de karakteristiska rötterna parvis konjugerade. Vi kan alltså begränsa oss till halvplanet $t \geq 0$. Vidare måste $\sin t$ och t ha motsatt tecken så att rötterna med $t > 0$ ligger i intervallen $(2n-1)\pi < t < 2n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. För att närmare undersöka rötternas fördelning inom dessa intervall omformar vi ekvationerna (3) till

$$\sigma = \log(-t^{-1} \sin t) = -t \cot t,$$

och bildar funktionen

$$f(t) = \log(-\sin t) - \log t + t \cot t, \quad (2n-1)\pi < t < 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nu är

$$f'(t) = -t - (t^{1/2} \cot t - t^{-1/2})^2 < 0,$$

så att f avtar i varje intervall. Eftersom vidare $f((2n-1)\pi + \varepsilon) \rightarrow +\infty$ och $f(2n\pi - \varepsilon) \rightarrow -\infty$, då $\varepsilon \rightarrow +0$, så har f exakt ett enkelt nollställe t_n i varje intervall. Motsvarande realdelar bestämmas ur

$$\sigma_n = -t_n \cot t_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tillfogas den enda reella roten σ_0 till ekvationen $\sigma = e^{-\sigma}$ och sättes

$s_n = \sigma_n + it_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $s_0 = \sigma_0$ och $s_{-n} = \bar{s}_n$, så blir $\{s_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ den fullständiga sviten av karakteristiska rötter, alla med multipliciteten 1.

Man verifierar ganska lätt följande egenskaper: Följden $\{t_n\}_1^\infty$ är växande, medan $\{\sigma_n\}_N^\infty$ avtar, och

$$\begin{aligned} t_n &= (2n - \tfrac{1}{2})\pi - (2\pi n)^{-1} \log(2\pi n) + O(n^{-2} \log n) \\ \sigma_n &= -\log(2\pi n) + O(n^{-1} \log n). \end{aligned}$$

Dessa uppskattningar är av betydelse bl. a. när det gäller att avgöra konvergens hos serier av formen $\sum a_n e^{s_n z}$, $z = x + iy$. Antag t. ex. att serien $\sum_{n>0} a_n e^{s_n z_0}$ är konvergent. Eftersom för $n > 0$ och $y > y_0$

$$|e^{s_n(z-z_0)}| = e^{\sigma_n(x-x_0) - t_n(y-y_0)} = O(e^{-n(y-y_0)}),$$

så följer att serien $\sum_{n>0} a_n e^{s_n z}$ konvergerar i halvplanet $\text{Im}(z) > \text{Im}(z_0)$.

Konvergens blir ju dessutom likformig i varje begränsat, slutet delområde av detta halvplan.

Ensidiga lösningar. I fortsättningen kommer vi att behandla några olika slag av lösningar till funktionalekvationen (1). Först betraktar vi det reella fallet, d. v. s. då variabeln x är reell, och intresserar oss naturligtvis då företrädesvis för reella lösningar. En funktion $y(x)$ som är minst en gång deriverbar på en halvaxel $x \geq x_0$ och där uppfyller ekvationen (1), kallas en *ensidig* lösning. En *tväsidig* lösning har dessa egenskaper på hela axeln. För ensidiga lösningar skall vi bevisa existens- och entydighetssatser.

Helt kortfattat skall vi också beröra det komplexa fallet och ge exempel på hur man kan konstruera *analytiska* lösningar med vissa uppgivna egenskaper samt redogöra för några tämligen färska resultat på detta gebit.

Betrakta följande begynnelsevärdesproblem för ensidiga lösningar på halvaxeln $x \geq 1$:

$$(4) \quad \begin{cases} y'(x) = y(x-1), & x \geq 1 \\ y(x) = f(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Av funktionen f fordrar vi endast *kontinuitet*, ej deriverbarhet.

ENTYDIGHETSSATS: Problemet

$$\begin{cases} y'(x) = y(x-1), & x \geq 1 \\ y(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

har enda ensidiga lösningen $y(x) = 0$, $x \geq 0$.

BEVIS: Om $y(x)$ är en ensidig lösning med begynnelsevärdena 0, $0 \leq x \leq 1$, så måste tydligen $y'(x) = 0$, $1 \leq x \leq 2$, varav $y(x) = 0$, $1 \leq x \leq 2$, eftersom $y(1) = 0$. Nu föreligger samma problem på halvaxeln $x \geq 2$ som det ursprungliga på $x \geq 1$, alltså är $y(x) = 0$, $x \geq 0$.

EXISTENSSATS: Man kan bestämma tal $A_1, A_2, A_3, \dots$ sådana att

$$(5) \quad \begin{cases} F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_{n-k}}{k!} (x-n)^k \\ \quad + \frac{1}{(n-1)!} \int_n^x (x-t)^{n-1} f(t-n) dt, \text{ för } n = [x] \geq 1, \\ F(x) = f(x), \text{ för } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

blir ensidig lösning till problemet (4). — Här betecknar som vanligt $n = [x]$ det största heltal n , som uppfyller $n \leq x$.

BEVIS: För godtyckliga tal $A_1, A_2, A_3, \dots$ löser F ekvationen (1) på den punkterade halvaxeln $x \geq 1$, $x \neq$ heltal, ty då $1 < x < 2$ är

$$F(x) = A_1 + \int_1^x f(t-1) dt,$$

så att $F'(x) = f(x-1)$ och $F(x-1) = f(x-1) = F'(x)$, och för $1 < n \leq x < n+1$ är

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_{n-k}}{(k-1)!} (x-n)^{k-1} + \frac{1}{(n-2)!} \int_n^x (x-t)^{n-2} f(t-n) dt$$

och

$$\begin{aligned} F(x-1) &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{A_{n-1-k}}{k!} (x-n)^k \\ &\quad + \frac{1}{(n-2)!} \int_{n-1}^{x-1} (x-1-t)^{n-2} f(t-n+1) dt = F'(x). \end{aligned}$$

Det räcker därför att bestämma $A_1, A_2, A_3, \dots$ så att F blir kontinuerlig i heltalspunkterna. Nu är emellertid

$$F(m+0) = F(m) = A_m$$

och

$$\begin{aligned} F(m-0) &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{A_{m-1-k}}{k!} + \frac{1}{(m-2)!} \int_{m-1}^m (m-t)^{m-2} f(t-m+1) dt \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{A_{m-1-k}}{k!} + \frac{1}{(m-2)!} \int_0^1 (1-t)^{m-2} f(t) dt, \text{ för } m = 2, 3, 4, \dots; \end{aligned}$$

då $m=1$ gäller i stället

$$F(1+0) = F(1) = A_1 \quad \text{och} \quad F(1-0) = f(1-0) = f(1).$$

Existenssatsen är alltså bevisad så snart man har funnit en lösning till rekursionen

$$(6) \quad \begin{cases} A_1 = f(1), \\ A_m = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{A_{m-1-k}}{k!} + \frac{1}{(m-2)!} \int_0^1 (1-t)^{m-2} f(t) dt, \quad m = 2, 3, 4, \dots, \end{cases}$$

vilken som synes är trivial.

Ansatsen (5) är inte så artificiell som den vid första påseende kan förefalla. Om nämligen $y(x)$ är en ensidig lösning till (4), så följer att $y(x)$ är 1 gång kontinuerligt deriverbar i $1 \leq x < 2$, 2 gånger kontinuerligt deriverbar i $2 \leq x < 3$, ..., n gånger kontinuerligt deriverbar i $n \leq x < n+1$, och vidare att $y^{(n)}(x) = y(x-n) = f(x-n)$, $n \leq x < n+1$, samt $y^{(k)}(n) = y(n-k)$, $k=0, 1, 2, \dots, n$. Ansatsen är alltså hämtad från *Taylors formel*:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(n)}{k!} (x-n)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_n^x (x-t)^{n-1} y^{(n)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y(n-k)}{k!} (x-n)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_n^x (x-t)^{n-1} f(t-n) dt, \quad n \leq x < n+1. \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis har vi härmed bevisat följande

SATS: Till varje given kontinuerlig funktion $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, finns en entydigt bestämd funktion $F(x)$, $x \geq 0$, som är deriverbar för $x \geq 1$ och som har egenskaperna

$$F'(x) = F(x-1), \quad x \geq 1, \quad \text{och} \quad F(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ty existenssatsen ger en sådan funktion F , och om det till samma f finnes två, F_1 och F_2 , så skulle $y = F_1 - F_2$ vara en ensidig lösning med begynnelsevärdena 0, men då visar entydighetssatsen att $y=0$, d. v. s. $F_1 = F_2$.

Exempel:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x-1), \quad x \geq 1 \\ y(x) &= f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Då finner man lätt $A_1=1$, $A_2=\frac{3}{2}$, $A_3=\frac{8}{3}$, ... Vidare blir

$$\begin{aligned} \text{för } 1 \leq x \leq 2: \quad y(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2; \\ \text{för } 2 \leq x \leq 3: \quad y(x) &= \frac{3}{2} + (x-2) + \frac{1}{6}(x-2)^3 \text{ o. s. v.} \end{aligned}$$

Analytiska lösningar. Begynnelsevärdesproblemet (4) kan naturligtvis också behandlas med Laplace-transformen $\bar{y}(p) = \int_0^\infty e^{-px} y(x) dx$. Man finner

$$(p - e^{-p}) \bar{y}(p) = p \int_0^1 e^{-px} f(x) dx + e^{-p} f(1) = g(p),$$

och en formell inversion ger

$$y(z) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (p - e^{-p})^{-1} g(p) e^{zp} dp \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{s_n z}.$$

I fallet $y'(x) = a \cdot y(x-1)$, vilket ju som specialfall innehåller vårt problem, har O. Polossuchin [4] visat att Fourier-serien $\sum a_n e^{s_n z}$ konvergerar, vilket medför att inversionen ger en i åtminstone något område »riktig» lösning.

Dixon [1, p. 249] har konstruerat liknande integrallösningar på följande sätt: Betrakta integralen

$$\varphi_a(z) = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} (e^{-s} - s)^{-1} e^{zs} ds, \quad a \neq \text{samtliga } t_n \text{ och } a \neq (2n + \frac{1}{2})\pi,$$

som existerar i vertikalbandet $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$ och där framställer en analytisk funktion. I halvplanet $\operatorname{Re}(z) > -1$ gäller emellertid

$$\int_{ia-\infty}^{ia} e^{(z+1)s} ds = (z+1)^{-1} e^{ia(z+1)},$$

så att

$$\varphi_a(z) = \int_{ia}^{ia+\infty} (e^{-s} - s)^{-1} e^{zs} ds + \int_{ia-\infty}^{ia} \{e^{zs}(e^{-s} - s)^{-1} - e^{(z+1)s}\} ds + (z+1)^{-1} e^{ia(z+1)}.$$

Här är den första integralen analytisk i halvplanet $\operatorname{Re}(z) < 0$ och den andra i halvplanet $\operatorname{Re}(z) > -2$. Vi har alltså fortsatt φ_a till bandet $-2 < \operatorname{Re}(z) < 0$ och därvid upptäckt en pol i $z = -1$ med residu 1. I halvplanet $\operatorname{Re}(z) < -1$ gäller vidare

$$\int_{ia}^{ia+\infty} e^{(z+1)s} ds = -(z+1)^{-1} e^{ia(z+1)},$$

så att man kan i bandet $-2 < \operatorname{Re}(z) < -1$ framställa φ_a på formen

$$\varphi_a(z) = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \{e^{zs}(e^{-s} - s)^{-1} - e^{(z+1)s}\} ds = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} (e^{-s} - s)^{-1} s e^{(z+1)s} ds.$$

Där gäller följaktligen $\varphi_a(z) = \varphi_a'(z+1)$ d. v. s. φ_a löser vår funktional-ekvation. Tydligen kan φ_a succesivt fortsättas på analogt sätt.

Funktionen φ_a kan också framställas som en seriesumma $\sum C_n e^{s_n z}$. Betrakta den nämligen först i halvbandet $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$, $\operatorname{Im}(z) > 0$. Om $a < t_k < a + 2\pi$, så ger residusatsen

$$\varphi_a(z) - \varphi_{a+2\pi}(z) = -2\pi i (s_k + 1)^{-1} e^{s_k z},$$

eftersom $\int_{ia-N}^{i(a+2\pi)-N} (e^{-s} - s)^{-1} e^{zs} ds \rightarrow 0$, och vidare följer av enkla uppskattningar att $\varphi_{a+2n\pi}(z) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. I sagda halvband är alltså

$$\varphi_a(z) = -2\pi i \sum_{t_n > a} (s_n + 1)^{-1} e^{s_n z}.$$

Eftersom serien uppenbarligen konvergerar likformigt i varje begränsat, slutet delområde av halvplanet $\operatorname{Im}(z) > 0$, så framställer tydligen dess summa $\varphi_a(z)$ i hela detta halvplan.

Väljer man i stället från början halvbandet $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$, $\operatorname{Im}(z) < 0$, så är det klart att man på detta sätt får

$$\varphi_a(z) = 2\pi i \sum_{t_n < a} (s_n + 1)^{-1} e^{s_n z}, \quad \operatorname{Im}(z) < 0.$$

Härigenom har vi skaffat oss en tämligen fullständig bild av φ_a .

Denna funktion kan nu användas vid konstruktion av analytiska lösningar med uppgivna rationella singulariteter, såvitt dessa står i överensstämmelse med funktionalekvationen. Exempelvis är

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k C_k}{k!} \varphi_a^{(k)}(z - z_0 - 1)$$

en analytisk lösning med en pol av ordning m i $z = z_0$ och singulära delen

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_k (z - z_0)^{-k-1}.$$

Med förhållandevis komplicerad metodik har mot slutet av 1940-talet Leontev [3] bevisat en del karakteristiska satser om analytiska lösningar till en generell ekvation, som omfattar den här behandlade. Hans resultat kan i vårt fall formuleras i följande tre satser:

SATS 1: Varje lösning som är regulär i ett horisontalband $B: -\infty < a \leq \operatorname{Im}(z) \leq b < +\infty$, kan där entydigt skrivas

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n A_k(n) e^{s_k z}$$

med konstanta $A_k(n)$. Konvergensen är likformig i varje begränsat, slutet delområde av B .

SATS 2: F kan uppdelas: $F(z) = G(z) + H(z)$, där

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n A_k(n) e^{s_k z} \quad \text{och} \quad H(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n A_{-k}(n) e^{s_{-k} z}$$

är regulära i halvplanen $\text{Im}(z) \geq a$ resp. $\text{Im}(z) \leq b$.

SATS 3: Gränsvärdena $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k(n) = A_k$ existerar, och

$$G(z) = \sum_0^\infty A_k e^{s_k z}, \quad H(z) = \sum_1^\infty A_{-k} e^{s_{-k} z}$$

i halvplanen $\text{Im}(z) \geq a$ resp. $\text{Im}(z) \leq b$.

Bevisen ligger helt utom ramen för vår orientering. Vi får nöja oss med att hänvisa till originalarbetet.

Materialet till denna högst summariska framställning är till mycket stor del hämtat från Wolfgang Hahns ypperliga översikt [2]. Denna är emellertid icke begränsad till det speciella problem som berörs här, utan är lagd på avsevärt bredare bas och behandlar mycket vida klasser av differential-differensekvationer. För mera detaljerad information om tillämpningar, stabilitetsfrågor etc. hänvisar vi därför till detta arbete.

LITTERATUR

- [1] A. C. DIXON: *On the solving nuclei of certain integral equations whose nuclei are homogeneous and of degree -1 , and the solution of a class of linear functional equations*. Proc. London Math. Soc. (2) 27 (1928), pp. 233–272.
- [2] W. HAHN: *Bericht über Differential-Differenzengleichungen mit festen und veränderlichen Spannen*. Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 57 (1954), S. 55–84.
- [3] A. F. LEONTEV: *Differential-differensekvationer*. Mat. Sbornik (nya serien) 24 (66) (1949), sid. 347–374 (på ryska).
- [4] O. POLOSSUCHIN: *Über eine besondere Klasse von differentialen Funktionalgleichungen*. Diss., Zürich 1910, 52 S.

BOKMELDINGER

E. BODEWIG: *Matrix Calculus*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1956. 10+334 pp. Guilders 26.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 4 (1956), s. 215.)

Det er ikke noget nyt at anvende matrixregning som hjælpemiddel ved numeriske problemer, og der findes i forvejen en række udmærkede fremstillinger af emnet. Men da der også er skrevet en del, der ikke er så godt, må man hilse en ny og god bog som den foreliggende velkommen.

Den er snarere en håndbog end en lærebog. Den indeholder i alt fald en sådan mangfoldighed af metoder og synspunkter, at en læser uden forudviden nemt vil tabe pusten. Men bogen vil mere end blot hobe kendsgerninger sammen. I forordet fremhæver forfatteren, at det er lykkedes ham at gøre matrixlæren til en »calculus«. Et citat vil vise, hvad han mener:

Take, for instance, the simple operation of displacing row i of A so that it becomes row k . The old notation makes no provision for expressing this, while we write $e_k A_i$ or $E_{ki} A$.

Or take column k of the inverse of AB . In the usual notation it reads

$$((AB)^{-1})_{ik}, \quad i = 1, \dots, n,$$

which is useless for further calculation. For example, suppose it is to be premultiplied by B . We should have to write

$$B((AB)^{-1})_{ik}, \quad i = 1, \dots, n,$$

a result that is completely unclear and can be simplified only by thinking, not by calculating. In our calculus, however, the former expression is written simply as

$$(AB)^{-1} e_k \quad \text{or} \quad B^{-1} A^{-1} e_k,$$

and the latter as

$$BB^{-1} A^{-1} e_k = A^{-1} e_k,$$

that is, column k of A^{-1} , a result which is produced automatically by the calculus itself, thus leaving thought free for other purposes.

Man kan spørge, om der er noget nyt i dette — slige formler er set før. Men efterhånden som man arbejder sig igennem bogen, bliver man klar over, at den konsekvente anvendelse, som forfatteren overalt gør af det nævnte synspunkt, betyder en virkelig lettelse, når man skal operere med mere komplicerede matrixudtryk. I bogens første del, der kort og godt er kaldt Matrix Calculus, og som er en teoretisk gennemgang af matrix-teorien i sædvanligt omfang, fortæller forfatteren gentagne gange, hvor elegant hans »calculus« virker. Som regel har han ret, men det hænder også, at elegancen — med eller uden overlæg — er ofret til fordel for konsekvensen, som når det skal vises, at $Sp(A'A) = \sum a_{ik}^2$. Dette er umiddelbart indlysende, når man tænker, men kræver anvendelsen af 6 linier, 3 henvisninger og 11 summationstegn, når man tager skyklapper på og bare regner.

Efter denne teoretiske begyndelse følger så i kapitel 2, der kan læses uafhængigt af det foregående, en klar, praktisk og grundig gennemgang af de forskellige metoder til løsning af systemer af lineære ligninger. Man kan på visse punkter være uenig med forfatteren, man kan undertiden blive irriteret over hans temmelig subjektive syn på andre forfattere, selv om hans sprog er meget afdæmpet i forhold til det, han har brugt i tidligere arbejder. Men i det store og hele er fremstillingen fortrinlig. Disse bemærkninger gælder måske i endnu højere grad det næste kapitel, Inversion of Matrices, der nødvendigvis må knytte sig meget nær til kapitlet om ligninger. Et særligt afsnit er helliget, hvad forfatteren kalder geodætiske matricer, hvorved han åbenbart mener matricer, der indeholder en særlig simpel delmatrix. Her er — som mange andre steder i bogen — gjort rede for anvendelsen af hulkortmaskiner, men udviklingen er i nogen grad løbet fra forfatteren, der ikke helt synes at være klar over moderne hulkortanlægs muligheder. Det er f. eks. ikke rigtigt, at en hulkortmaskine ikke kan dividere. Men bortset fra, at denne fejlagtige opfattelse gør visse vurderinger misvisende, er afsnittet lærerigt og læseværdigt.

I bogens sidste kapitel, Eigenproblems, ligger hovedvægten stadig på det numeriske. Her må man dog i højere grad end i de andre kapitler støtte sig til de teoretiske resultater, der er nået i kapitel 1.

Det er efterhånden sædvane at anvende fede typer som betegnelse for matricer, man kan så mene om denne betegnelse, hvad man vil. Men det giver anledning til et meget uroligt skriftbillede, der stiller ganske særlige krav til den øvrige sats, krav, der kun sjældent imødekommes, og i alt fald slet ikke i den foreliggende bog. Overskrifter og fremhævelser tyranniseres så brutalt af de fede matrixsymboler, at ethvert overblik går tabt. Det er synd, for det forringer i nogen grad bogens

iøvrigt fine håndbogskarakter. En skønsom anvendelse af et par farveblyanter vil dog hurtigt kunne rette denne ulempe, og bogen bør ikke savnes nogen steder, hvor numerisk regning dyrkes.

Henry Jensen

WOLFGANG GRÖBNER: *Matrizenrechnung*. (Blaschke, Math. Einzelschriften 4.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 249 S., 9 Fig. DM 23.00.

(Innehållsförteckning i NMT 4 (1956), s. 109–110.)

Gröbners framställning av matriskalkylen vilar på helt elementär grund och är tänkt som lärobok på högskolestadiet men också för självstudier och komplettering av gängse föreläsningar. Den utgår från translationer i planet som enklaste exempel på tvådimensionella vektorer och för läsaren fram till problemet om transformation på huvudaxlar — med tillhörande kongruensbegrepp.

Det första kapitlet ger alltså en elementär introduktion av vektorer och matriser. I kapitel 2 införes och behandlas determinanter med hjälp av Grassmanska yttre produkter, vilket tycks ha möjliggjort en genomskinlig klarhet som inte är så vanlig i dessa sammanhang. Även i övrigt avviker framställningen här från traditionen, bl. a. genom ett flertal intressanta detaljer för symmetriska och skevsymmetriska matriser och genom att funktionaldeterminanterna fått ett eget avsnitt i denna rent algebraiska miljö. Så börjar den lineära algebran på allvar i kapitel 3 med tillämpningar i affin och projektiv geometri, varefter fjärde kapitlet ägnas åt fortsatt determinantteori, bl. a. Laplace-utveckling, övermatriser, adjungerade matriser och Hadamards determinantuppskattning. Här finns också inskjutet ett utjämningsproblem: lösning av överbestämde ekvationssystem med minsta-kvadrat-metoden.

Rationella funktioner av en kvadratisk matris, främst naturligtvis polynom, behandlas i femte kapitlet, där man återfinner alla de välkända resultaten om minimalpolynomet, sekulärekvationen och egenvärdena, Cayley-Hamiltons sats (två goda bevis) m. m. Dessutom tillkommer några avsnitt om brutna rationella matrisfunktioner och Frobenius' kovarianter. De två sista kapitlen slutligen är ägnade åt ekvivalens- och kongruensbegrepp, en aning elementardelarteori, transformation på normalform och huvudaxelproblemet. I det sammanhanget fäster man sig kanske särskilt vid en generell sats om hermiteskt automorfa transformationer, vilken delvis går tillbaka på Wedderburn och innehåller mycket kända satser av Cayley och Euler (fixpunktsatsen).

Gröbners »Matrizenrechnung« är enligt anmälarens uppfattning en pedagogiskt välskriven lärobok, som gott försvarar sin plats i litteraturen

på sitt gebit. Særskild styrka synes den ha fått genom omsorgsfullt valda beteckningar och kanske framförallt genom att varje kapitel avslutas med kompletteringar och övningsuppgifter. Som ett exempel återfinner man bland kommentarerna till andra kapitlet Weierstrass' alternativ till definition av determinanter.

Tore Herlestad

KONRAD KNOPP: *Infinite sequences and series*. (Translated by F. Bagemihl.) Dover Publ., New York, 1956. 5 + 186 pp. \$ 1.75, cloth \$ 3.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 4 (1956), s. 217.)

I første kapitel gjør forfatteren greie for de forkunnskaper som forutsettes hos leseren: Fortrolighet med reelle og komplekse tall og rudimentært kjennskap til differensial- og integralregningen. Forfatteren tar likevel opp igjen konstruksjonen av den komplekse tallkropp helt fra grunnen (de naturlige tall). Fremstillingen er her riktignok konsentrert. Den reelle tallkropp konstrueres ved Dedekindske snitt. I en bok om følger og rekker ville det kanskje være mer naturlig å utføre denne konstruksjonen ved Cauchyfølger.

Hovedvekten er lagt på å gjøre leseren kjent med konvergenskriterier, utvikle i rekker, regne med rekker. Forfatteren gjennomgår med stor dyktighet en mengde konvergenskriterier, både de vanlige og de mer spesielle. Operasjoner med følger og rekker blir grundig og systematisk drøftet. Boka inneholder også et avsnitt om uendelige produkter og behandler også noen rekketransformasjoner. Fremstillingen er klar og lett-fattelig, men likevel stringent. En rekke gode eksempler og bemerkninger belyser teorien fortrinlig. Oppgaver fins det derimot ikke i boka, og det må vel være en mangel ved en bok av denne typen.

Av spesielle rekker har forfatteren bare funnet plass til potensrekker. Fourierrekker er f. eks. ikke nevnt. Teorien for potensrekker er solid og ganske omfattende.

Et kapitel i boka er viet rekkeutvikling av elementære funksjoner. Familien av elementære funksjoner definerer forfatteren som den minste funksjonskropp som inneholder alle konstante funksjoner, z og e^z samt er lukket med hensyn på sammensetning og inversjon. Kanskje det kan være en oppgave for tidsskriftets lesere å klarlegge hvilke algebraiske funksjoner som er elementære?

I NMT er det ofte oppgaver som går ut på å finne summen av uendelige rekker. Siste kapitel i denne boka gir en kort men god innføring i denne spesielle disiplin.

Denne boka er en oversettelse av et tysk manuskript, altså ikke en oversettelse av samme forfatters bok med samme emne i Grundlehren-

serien. (Sistnevnte inneholder atskillig mer stoff.) Knopps amerikanske bok skulle egne seg godt som supplerende lesning for studenter på bifagstrinnet.

Kåre Dalen

POUL MOGENSEN: *Differential- og Integralregning*. En vejledning for begyndere. Gyldendal, København, 1957. 80 s. D. kr. 11.85.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 45-46.)

Nærværende lærebog bør modtages med interesse. Den tager hovedsagelig sigte på en — i øjeblikket ikke eksisterende — regulær matematikundervisning i det sproglige gymnasium samt på matematikundervisningen ved en endnu ufødt biologisk linie. Dens anvendelsesområder er altså temmelig usikre; desto mere må man være forfatteren taknemlig for en så vægtig indsats i den øjeblikkelige situation.

Kapitel 1 handler om funktionsgrænseværdier og kontinuitet. Den ledende tanke er begrebet »forsvindende størrelser«, der bringer indledningen til J. Hjelmslev: *Elementær Geometri IV* i erindring. Dette begreb er dog her definert på $\varepsilon\delta$ -maner: $f(x)$ siges at forsvinde med x , når — kort uttrykt — $|f(x)| < \varepsilon$ for $0 \leq |x| < \delta$. Det vises, at når $f(x)$ og $g(x)$ begge forsvinder med x , gjelder dette også $f(x) \pm g(x)$ og $f(x) \cdot g(x)$. Idet » $f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow x_0$ « defineres derved, at $f(x) - a$ forsvinder med $x - x_0$, vises de sædvanlige sætninger om grænseværdi for sum, differens, produkt og kvotient. Beviserne bygger på den indførte statiske $\varepsilon\delta$ -definisjon, men selve glosevalget leder tanken hen på den kinematiske opfattelse (bevægelige punkter, der nærmer sig ubegrenset til faste), der jo er mere anskuelig og også sikkert mere naturlig for elevene. Kontinuitet af $y=f(x)$ defineres selvfølgelig ved, at Δy forsvinder med Δx . Kapitlet slutter med omtale af sætningerne om kontinuerte funksjoner i et lukket interval (uden beviser, men med vejledende kommentarer) samt om omvendt funksjon.

Kapitel 2 giver differentialregningen i delvis tradisjonell form, men dog med noget mere elementært tilsnit. Differensialer spiller en større rolle end sædvanlig. Som eksempel kan fremdrages ligningen

$$(1) \quad \Delta y = dy + \varphi(dx) \cdot dx,$$

hvor produktet på høyre side er »en forsvindende størrelse af høyere orden end dx «. Middelværdisætningen (og Rolles sætning) omtales ikke og savnes ikke. Derimod fremheves — hvad der må betraktes som særdeles verdifuldt — differentialregningens anvendelsesmuligheter på områder uten for den egentlige matematik (fysik, kemi, biologi).

I kapittel 3 følger integralregningen. Sætningen om, at to ubestemte

integraler af samme funktion har konstant differens, godtgøres ved henvisning til det anskueligt plausible, at en kurve, som i alle sine punkter har vandret tangent, må være en vandret linie. Ingen sproglig elev kan tænkes at føle mangler ved denne betragtning. Eksistensen af et ubestemt integral til en kontinuert funktion samt forbindelsen med begrebet bestemt integral godtgøres ved benyttelse af arealforestillinger, som ikke diskuteres. Kapitlet slutter med nogle generelle betragtninger om »bortkastelse af led af højere orden« (smlgn. (1)), hvorved det muliggøres uden for meget besvær at anvende integralregningen på andre foreteelser end arealer, som f. eks. volumen, arbejde og inertimoment. Også opfattelsen af det bestemte integral som grænseværdi for en sum berøres.

Kapitel 4 giver en kort fremstilling af logaritmer og potens, bygget på definitionen

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x}, \quad 0 < x < \infty,$$

og i femte og sidste kapitel indføres de trigonometriske funktioner (for vilkårlige vinkler). Disses differentialkvotienter findes ved en anskuelig betragtning. Additionsformler eller anvendelse på trekanter omtales ikke, så elevernes forståelse af de trigonometriske funktioners betydning kan næppe blive dybtgående.

Ved læsningen af bogen glæder man sig over alle de steder, hvor man kan kende den erfarne pædagog, i ordvalg eller i sagens drejning. Det har været forfatterens hensigt at give en fremstilling, der uden at tabe væsentlig i grundighed og korrekthed dog blev lettere tilgængelig end den, der sædvanlig benyttes i det matematiske gymnasium. Forf. er nået et godt stykke frem i denne retning; men jeg tror, at der også i denne bog er adskilligt, som en sproglig hjerne vil have svært ved at kapere og heller ikke burde udsættes for. Forf. har til en vis grad imødekommet denne indvending ved med stjerner at markere stykker, som man eventuelt kan forbigå. Anmelderen kunne dog godt tænke sig at gå betydeligt mere radikalt til værks, men en detaljeret fremstilling heraf hører ikke hjemme i en anmeldelse. I stedet vil jeg slutte med at ønske, at forf. må få glæde af sin bog, både inden for gymnasieskolen og — som det antydes i forordet — muligvis også ved specialelæsningen på seminarierne.

David Fog

R. W. WEITZENBÖCK: *Der vierdimensionale Raum*. (Wissenschaft und Kultur 10.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1956. 223 S., 54 Fig. Ganzl. SFr. 19.55.

(Innholdsfortegnelse i NMT 4 (1956), s. 160-161.)

Författaren strävar i sitt arbete att klargöra den fjärde dimensionens begrepp. Därom har ju mycket skrivits, både mer eller mindre vetenskapliga arbeten och enbart fantastiska utläggningar. Författaren har tagit till sin uppgift att kritiskt granska dessa, de mest olikartade skrifter. Härvid har han tack vare sin utomordentligt klara och konsekventa framställning uppenbart lyckats giva läsaren en klar föreställning om den fyrdimensionala rymden R_4 . Det har varit nödvändigt att göra framställningen mer filosofisk än rent matematisk.

Den analytiska geometrin i R_4 skiljes från den egentliga syntetiska fyrdimensionala geometrin. I den fysiska världen konstateras en fjärde dimension vara omöjlig om man icke som sådan betraktar tiden på det sätt den införts i relativitetsteorin. De hithörande betraktelserna ha hänförs till 3. kapitlet i vilket det konstateras att tiden icke kan anses utgöra en reell, med de tre andra likvärdig, fjärde dimension. Dessförinnan har läsaren i 2. kapitlet blivit införd i »den fjärde dimensionens underland» (Feenland der Geometer), varav en relativt lättfattlig och klargörande bild givits med hjälp av reguljära polytoper, speglingar och knutar.

Förutom relativitetsteorin, d. v. s. fysiken, betraktar författaren andra vetenskaper och områden bl. a. kemin, astronomin, religionen samt t. o. m. sådana som spiritism och metafysik i avseende å beröringspunkter med läran om den fjärde dimensionen. Läsaren får därvid inblick i psyko-logiska, allmänt kunskapsteoretiska frågor, till och med i mystiken. Det utförda s. a. s. kritiska korståget ända in i den mänskliga själens dunkla vrår är verkligen intressant.

Slutligen ges en nöjsam och levande bild av jämväl litteraturen om tvådimensionala existenser och därmed ett försök att befria läsaren från tvångströjan i form av föreställningen om att antalet dimensioner måste vara tre. Till sist få de kvasivetenskapliga romaner (science fiction), i vilka tiden eller den fjärde dimension utnyttjas, sträng kritik.

Det refererade arbetet har betydande förtjänster i fråga om klarläggning av den fyrdimensionala rymdens begrepp. Det kan även läsas med verklig spänning som en god förströelseroman. Men redan framställningens knappa form omöjliggör en fullständig redogörelse för den fyrdimensionala rymden. Knappheten uppvägs emellertid av en utmärkt litteraturförteckning. Boken förtjänar bli allmänt känd i kretsen av matematiker och fysiker.

Lauri Pimiä

MOTTATTE BØKER

N. H. Abel: *Mémoire sur les équations algébriques*, où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Groendahl, Christiania, 1824. Faksimil utgave ved Bibliotekskontoret, Universitetet, Blindern, Oslo. 8 s. N. kr. 16.65. (Begrenset opplag.)

Edwin F. Beckenbach: *Modern mathematics for the engineer*. (University of California engineering extension series.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1956. 20 + 514 pp. sh. 56/6.

Solomon Lefschetz: Linear and nonlinear oscillations 7-29 * Richard Bellman: Equilibrium analysis: The stability theory of Poincaré and Liapunov 30-35 * John W. Green: Exterior ballistics 36-58 * Magnus R. Hestenes: Elements of the calculus of variations 59-91 * Richard Courant: Hyperbolic partial differential equations and applications 92-109 * Menahem M. Schiffer: Boundary-value problems in elliptic partial differential equations 110-144 * Ivan S. Sokolnikoff: The elastostatic boundary-value problems 145-161 * Norbert Wiener: The theory of prediction 165-190 * H. Frederic Bohnenblust: The theory of games 191-210 * Gilbert W. King: Applied mathematics in operations research 211-242 * Richard Bellman: The theory of dynamic programming 243-278 * George W. Brown: Monte Carlo methods 279-303 * Louis A. Pipes: Matrices in engineering 307-345 * John L. Barnes: Functional transformations for engineering design 346-360 * Edwin F. Beckenbach: Conformal mapping methods 361-388 * Charles B. Morrey, Jr.: Nonlinear methods 389-427 * George E. Forsythe: What are relaxation methods? 428-447 * Charles B. Tompkins: Methods of steep descent 448-479 * Derrick H. Lehmer: High-speed computing devices and their applications 480-497 * Name index 499-502 * Subject index 503-514.

R. Creighton Buck: *Advanced calculus*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1956. 8 + 423 pp. sh. 64/-.

Elementary topology 1-18 * Functions 19-48 * Integration 49-104 * Convergence 105-164 * Differentiation 165-233 * Applications to geometry and analysis 234-299 * Elements of differential geometry 300-385 * Appendix: Foundations of the number system 387-393 * Answers and hints 395-414 * List of symbols 415 * Index 417-423.

John Charles Burkill: *The theory of ordinary differential equations*. (University mathematical texts.) Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1956. 9+102 pp. sh. 8/6.

Existence of solutions 1-11 * The linear equation 12-24 * Oscillation theorems 25-32 * Solution in series 33-46 * Singularities of equations 47-58 * Contour integral solutions 59-69 * Legendre functions 70-76 * Bessel functions 77-86 * Asymptotic series 87-96 * Solutions of examples 97-100 * Bibliography 101 * Index 102.

Ulf Grenander — Murray Rosenblatt: *Statistical analysis of stationary time series*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1956. 300 pp. Sv. kr. 56.00.

Stationary stochastic processes and their representations 21-60 * Statistical questions when the spectrum is known (least squares theory) 61-90 * Statistical analysis of parametric models 91-116 * Estimation of the spectrum 117-157 * Applications 158-178 * Distribution of spectral estimates 179-225 * Problems in linear estimation 226-259 * Assorted problems 260-277 * Problems 278-287 * Appendix on complex variable theory 288-293 * Bibliography 294-298 * Index 299-300.

Helmut Hasse: *Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung*. (Schriftenreihe zur Mathematik 1.) Otto Salle Verlag, Frankfurt a. M., 1955. 8+103 S. DM 6.80.

Über Primzahlen 1-13 * Einige Maximumaufgaben 14-28 * Inkommensurabilität, Irrationalität, Transzendenz 28-55 * Vierfarbenproblem und Eulerscher Polyeder-satz 55-101 * Sach- und Namenverzeichnis 102-103.

A. Khintchine: *Kettenbrüche*. Übersetzung der 2. russischen Auflage. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek 3.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1956. 6+97 S. Geb. DM 5.40.

Die Eigenschaften des Kalküls 1-16 * Darstellung von Zahlen durch Kettenbrüche 17-54 * Metrische Theorie der Kettenbrüche 55-96 * Sachverzeichnis 97.

Harry Lass: *Elements of pure and applied mathematics*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 11+491 pp. sh. 58/6.

Linear equations, determinants, and matrices 1-36 * Vector analysis 37-80 * Tensor analysis 81-121 * Complex-variable theory 122-171 * Differential equations 172-236 * Orthogonal polynomials, Fourier series, and Fourier integrals 237-276 * The Stieltjes integral, Laplace transform, and calculus of variations 277-297 * Group theory and algebraic equations 298-336 * Probability theory and statistics 337-372 * Real-variable theory 373-480 * Index 481-491.

Poul Mogensen: *Differential- og Integralregning*. En vejledning for begyndere. Gyldendal, København, 1957. 80 s. D. kr. 11.85.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 41.)

Grænseovergang. Kontinuitet 1–14 * Differentialregning 15–40 * Integralregning 41–57 * Logaritmer og potenser 58–69 * De trigonometriske funktioner 70–80.

Ivan Niven: *Irrational numbers*. (Carus mathematical monographs 11.) John Wiley & Sons, New York, 1956. 12 + 164 pp. \$ 3.00.

Rationals and irrationals 1–14 * Simple irrationalities 15–27 * Certain algebraic numbers 28–41 * The approximation of irrationals by rationals 42–50 * Continued fractions 51–67 * Further diophantine approximations 68–82 * Algebraic and transcendental numbers 83–93 * Normal numbers 94–116 * The generalized Lindemann theorem 117–133 * The Gelfond-Schneider theorem 134–150 * List of notation, glossary, reference books, index of topics, index of names 151–164.

Fritz Oberhettinger: *Tabellen zur Fourier Transformation*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 90.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 10 + 214 S. DM 35.80, ganzl. DM 39.50.

Fourier-Kosinus-Transformationen $(g(y) = \int_0^\infty f(x) \cos(xy) dx)$ 1–109 * Fourier-Sinus-Transformationen $(g(y) = \int_0^\infty f(x) \sin(xy) dx)$ 110–200 * Exponentielle Fourier-Transformationen $(g(y) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{ixy} dx)$ 201–206 * Abkürzungen und Definitionen 207–213 * Literatur 214.

E. M. Patterson: *Topology*. (University mathematical texts.) Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1956. 8 + 128 pp. sh. 8/6.

Introduction 1–15 * Topological spaces 16–48 * Particular types of topological spaces 49–68 * Homotopy 69–88 * Simplicial complexes 89–101 * Homology 102–124 * Bibliography 125 * Index 126–128.

Paul K. Rees — Fred W. Sparks: *Intermediate algebra*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 10 + 306 pp. sh. 29/6.

The formula, fundamental operations, and simple equations 1–24 * The four fundamental operations 25–43 * Special products and factoring 44–58 * Fractions and fractional equations 59–92 * Functions and graphs 93–107 * Simultaneous linear equations 108–131 * Exponents and radicals 132–159 * Quadratic equations 160–186 * Systems of quadratic equations in two variables 187–213 * Ratio, proportion, and variation 214–230 * Logarithms 231–255 * The progressions 256–274 * The binomial theorem 275–280 * Answers 281–298 * Appendix 300–302 * Index 303–306.

Hans Richter: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 86.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 12 + 435 S., 14 Fig. DM 66.00, ganzl. DM 69.60.

Masstheoretische Grundlagen 2–41 * Der Wahrscheinlichkeitsbegriff 41–57 * Die Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie 57–154 * Elemente der Integrationstheorie 154–202 * Zufällige Grössen auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsfeldern

202–325 * Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen 326–368 * Die Konvergenz zufälliger Größen 368–417 * Lösungen der Aufgaben 418–429 * Literaturverzeichnis 430–431 * Namen- und Sachverzeichnis 432–435.

Ian N. Sneddon: *Elements of partial differential equations*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1957. 11 + 327 pp. sh. 56/6.

Ordinary differential equations in more than two variables 1–43 * Partial differential equations of the first order 44–87 * Partial differential equations of the second order 88–140 * Laplace's equation 141–208 * The wave equation 209–273 * The diffusion equation 274–308 * Appendix: Systems of surfaces 309–314 * Solutions to the odd-numbered problems 315–322 * Index 323–327.

H. A. Thurston: *The number-system*. Blackie & Son, London, Glasgow, 1956. 8 + 134 pp. sh. 15/–.

I. Explanatory treatment: Counting, whole numbers, the laws of arithmetic, fractions, negative numbers, fields, irrational numbers, powers, complex numbers, verification of the axioms, alternative treatments 3–47 * II. Systematic treatment: Whole numbers, hemigroups and groups, integers, fields, rational numbers, ordered fields, the order-relation for rationals, exponentiation, Cauchy numbers, real numbers, complex numbers 51–122 * Bibliography 122 * Key to the exercises 123–131 * Index 133–134.

B. L. van der Waerden: *Mathematische Statistik*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 87.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957. 11 + 360 S., 39 Fig. DM 46.00, ganzl. DM 49.60.

Allgemeine Grundlagen 3–21 * Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten 22–51 * Mathematische Hilfsmittel 51–65 * Empirische Bestimmung von Verteilungsfunktionen, Mittelwerten und Streuungen 65–86 * Fourier-Integrale und Grenzwertsätze 87–105 * Gaussische Fehlertheorie und Students Test 105–123 * Die Methode der kleinsten Quadrate 124–147 * Schätzung unbekannter Konstanten 148–182 * Auswertung von beobachteten Häufigkeiten 182–209 * Bio-Auswertung 209–221 * Prüfung von Hypothesen durch Tests 221–262 * Anordnungstests 262–295 * Korrelation 295–331 * Tafeln 332–350 * Beispiele 351–352 * Übersetzung englischer Fachausdrücke 353–354 * Namen- und Sachverzeichnis 355–360.

M. V. Wilkes: *Automatic digital computers*. Methuen & Co., London, 1956. 10 + 305 pp. sh. 42/–.

The development of automatic digital computers 1–38 * The principles of logical design 39–85 * The principles of programme construction 86–132 * Relay computers 133–151 * Storage 152–209 * Electronic switching and computing circuits 210–256 * The design and operation of digital computers 257–288 * Appendix: Machinery and intelligence 289–293 * Annotated bibliography 294–300 * Index 301–305.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 106–108 og 110 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Holmen, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. mai 1957.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

106. I en assosiativ halvgruppe (uten forkortningsregel) er to elementer a og b knyttet sammen ved relasjonene

$$aba = a, \quad bab = b, \quad ab = ba.$$

Vis at hvis a kommuterer med et tredje element c , $ac = ca$, så vil også b kommutere med c .

Th. Skolem

107. (Etter en idé av Viggo Brun.) Av den naturlige tallrekke stryker en først hvert annet tall, så bare de odde (ulike) tall står igjen; av den fremkomne tallrekke stryker en så hvert tredje tall, av den nye hvert fjerde, osv. Av den opprinnelige tallrekke står da igjen en tallrekke som begynner med

$$(1) \quad 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, \dots$$

La x være et naturlig tall og $\nu(x)$ antallet av tall $\leq x$ i tallrekken (1). Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\nu(x)^2} \geq \frac{1}{2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\nu(x)^2} \leq 1.$$

Det antas at $x/\nu(x)^2$ for voksende x nærmer seg en grense med en verdi av ca 0,79. Om mulig ønskes denne formodning bekreftet.

R. Tambs Lyche

108. Siderne i en sfærisk firkant er a, b, c og d , diagonalerne e og f , medens φ er den af vinklerne mellem e og f der ligger overfor a eller c . Bevis at φ kan bestemmes ved formelen

$$\sin e \sin f \cos \varphi = \cos a \cos c - \cos b \cos d.$$

Vilhjálmur Ögmundsson

109. La det være gitt en firkant og la oss danne en ny firkant med hjørner i midtpunktene av den førstes sider. Vis at flateinnholdet av den siste er halvparten av flateinnholdet av den første.

I. Johansson

110. Formuler og bevis en generalisering av påstanden i forrige oppgave for andre delingsforhold enn halvering.

I. Johansson

111. På en kuleformet globus trekkes en kurve K fra et punkt P på ekvator, slik at kurven alltid har retning mot nordost. Kurven fortsettes til den neste gang treffer meridianen gjennom P i et punkt Q . Finn arealet F av den del av kuleflaten som ligger nord for K og begrenses av denne kurven og meridianstykket PQ . Vis at F med god tilnærming kan settes lik

$$r^2(\ln 2 - e^{-4\pi}),$$

når r er kulens radius.

H. Killingbergtrø

112. Bevisa likheten

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n-\nu}{\nu} x^\nu = \frac{(1 + \sqrt{1+4x})^{n+1} - (1 - \sqrt{1+4x})^{n+1}}{2^{n+1} \cdot \sqrt{1+4x}}$$

för $x \neq -\frac{1}{4}$.

Bernt Lindström

LØSNINGER

83. La

$$f(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n \quad (a_0 = 1)$$

være et polynom med nullpunktene $r_1, r_2, \dots, r_n$. Vis at polynomet

$$F(x) = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n A_n$$

vil ha nullpunktene $r_1^3, r_2^3, \dots, r_n^3$, dersom

$$A_r = \sum_{\substack{i+j+k=3r \\ i \leq j \leq k \leq n}} A_{ijk} a_i a_j a_k, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

For $i < j < k$ er $A_{ijk} = 6$ hvis $i \equiv j \equiv k \pmod{3}$, mens $A_{ijk} = -3$ i de øvrige tilfelle. Videre er $A_{iik} = 3$, $A_{iii} = 1$.

R. Tambs Lyche

Løsning: Af hensyn til den anvendte metode bruges andre betegnelser end i opgaven. Man vil dog let finde de anførte resultater ved overgang til de reciproke ligninger og de nødvendige fortegnsskifter.

Lad x være en vilkårlig rod i ligningen

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0.$$

I de følgende udregninger vil n ikke explicit optræde, men de anvendte summationsindices skal variere mellem sådanne grænser, at de tilsvarende indices på a_i -erne ligger i $0 \leq i \leq n$. Vi sætter nu $y = x^3$ samt

$$(2) \quad A = \sum_i a_{3i+2} y^i, \quad B = \sum_i a_{3i+1} y^i, \quad C = \sum_i a_{3i} y^i.$$

Af (1) og (2) ses, at $(t_1, t_2, t_3) = (x^2, x, 1) \neq (0, 0, 0)$ opfylder:

$$At_1 + Bt_2 + Ct_3 = 0$$

$$Bt_1 + Ct_2 + At_3 = 0$$

$$Ct_1 + At_2 + Bt_3 = 0.$$

Man har derfor

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & Ay \\ C & Ay & By \end{vmatrix} = 0,$$

der reduceres til

$$(3) \quad A^3 y^2 + (B^3 - 3ABC)y + C^3 = 0.$$

Indsættes i (3) værdierne (2), fås en ligning i y , der for enhver rod x_i i (1) har x_i^3 som rod. Man ser let — og dette vil også fremgå af slutresultatet — at dens grad er n . At det er den søgte ligning, fremgår dog kun umiddelbart, hvis alle rødder i (1) er simple. Da det, der skal vises, i realiteten er visse algebraiske (symmetriske) relationer mellem x_i -erne, kan man blot under beviset opfatte disse som ubestemte, da resultatet så også er gyldigt ved enhver specialisation.

Ved indsætning af A , B og C i (3), udregning og sammenfatning af analogt byggede led finder man let, at koefficienten til y^r bliver

$$(4) \quad A_r = a_r^3 + 6 \sum_{\substack{i \equiv j \equiv k \pmod{3} \\ i+j+k=3r \\ i < j < k}} a_i a_j a_k + 3 \sum_{\substack{i \equiv j \pmod{3} \\ 2i+j=3r \\ i \neq j}} a_i^2 a_j - 3 \sum_{\substack{i \neq j \neq k \neq i \pmod{3} \\ i+j+k=3r}} a_i a_j a_k.$$

Hvis $a_n = 1$, viser (4), at også $A_n = 1$. Man vil også let til kontrol bemærke, at andre muligheder for kongruens modulo 3 end de anførte ikke er forenelige med betingelsen $i+j+k \equiv 0 \pmod{3}$.

Anders Bager

Også løst av Rolv Rasmussen.

93. Beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{2^n}.$$

C.-E. Fröberg

Lösning: Idet $\zeta(n) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{-n}$, kan summationen i den søgte sum foretages »på den anden led«. Herved fås

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{2^n} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^1 \lambda^2} + \frac{1}{2^2 \lambda^3} + \frac{1}{2^3 \lambda^4} + \dots \right) = 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda-1)2\lambda} = 2 \ln 2.$$

Hans-Otto Tønder

Også løst av Anders Bager, H. Killingbergtrø, Johannes Kvamsdal, Henrik Meyer, Rolv Rasmussen, Hans Rischel, Ragnar J. Solvang og Helge Tverberg.

98. Sett, for $|z| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{3n}} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m.$$

La m være et naturlig tall med primtaloppspaltingen

$$m = 2^{\alpha} 3^{\beta} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l},$$

der $p_1, \dots, p_k$ og $q_1, \dots, q_l$ henholdsvis er primtall av formen $6h+1$ og $6h-1$.

Finn en formel for a_m , og utled av den at

1. a_m er positiv, a) dersom $\alpha=0$, og b) dersom $\alpha=1$ og alle β_i er jamne (like) tall.

2. a_m er null, a) dersom $\alpha=1$ og minst ett β_i er odde (ulike), og b) dersom $\alpha=2$ eller 3 og $l=0$ (ingen primdivisorer av formen $6h-1$).

3. a_m er negativ i alle andre tilfelle.

R. Tambs Lyche

Løsning: En finner $a_m = \sum_{3\mu+1|m} (-1)^{\mu}$, jfr. oppg. 92. For jamne μ er

$3\mu+1$ av form $6h+1$, og antallet av slike divisorer i m kalles A . For odde μ er $3\mu+1$ produkt av 2^{2^v} og en divisor av form $6h+1$, $v=1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor$,

eller produkt av 2^{2^v-1} og en divisor av form $6h-1$, $v=1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{\alpha+1}{2} \right\rfloor$. Antallet av divisorer av form $6h-1$ kalles B . Etter dette er

$$a_m = A \left(1 - \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor \right) - B \left\lfloor \frac{\alpha+1}{2} \right\rfloor,$$

som umiddelbart bekrefter de oppsatte bestemmelsene av $a_m \geq 0$, da en vet (oppg. 92) at $A > B$ dersom alle β_i er jamne, og $A = B$ dersom minst ett β_i er odde.

En kan uttrykke A og B ved $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$. En utleder

$$A + B = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)(\beta_1 + 1) \dots (\beta_l + 1),$$

og vet fra før at

$$A - B = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \frac{1 + (-1)^{\beta_1}}{2} \dots \frac{1 + (-1)^{\beta_l}}{2}.$$

Av dette finner en A, B og

$$a_m = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \left\{ (\beta_1 + 1) \dots (\beta_l + 1)(1 - \alpha) \right. \\ \left. + \frac{1 + (-1)^{\beta_1}}{2} \dots \frac{1 + (-1)^{\beta_l}}{2} \cdot \frac{3 - (-1)^\alpha}{2} \right\}.$$

H. Killingbergtrø

Også løst av Anders Bager, Johannes Kvamsdal og Otto Marstrander.

99. La $n > 1$ være et naturlig tall. Dersom A og B er fritt valte naturlige tall, setter vi

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{A+i}{n} \right] \cdot \left[\frac{B+i}{n} \right],$$

der $[x]$ som vanlig betyr det største hele tall som ikke overstiger x . Vis at

$$\left[\frac{AB}{n} \right] \leq S \leq \left[\frac{AB}{n} \right] + \left[\frac{n+3}{4} \right].$$

I hvilke tilfelle gjelder likhetstegnet til venstre, resp. til høyre?

R. Tambs Lyche

Løsning: Sett $A = nh_1 + a$, $B = nh_2 - b$, der a og b er null eller positive og mindre enn n . Ved eventuelt å bytte A og B kan vi oppnå at

$$(1) \quad a + b \leq n.$$

Dette gir

$$S = bh_1(h_2 - 1) + (n - a - b)h_1h_2 + a(h_1 + 1)h_2 = nh_1h_2 + ah_2 - bh_1,$$

og

$$\left[\frac{AB}{n} \right] = \left[\frac{n^2h_1h_2 + n(ah_2 - bh_1) - ab}{n} \right] = S + \left[\frac{-ab}{n} \right].$$

De oppsatte relasjonene kan da skrives som

$$S + \left\lfloor \frac{-ab}{n} \right\rfloor \leq S \leq S + \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-ab}{n} \right\rfloor,$$

eller

$$(2) \quad \left\lfloor \frac{-ab}{n} \right\rfloor \leq 0 \leq \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-ab}{n} \right\rfloor.$$

Etter dette er venstre relasjon riktig og har likhet dersom minst det ene av A og B er multiplum av n :

$$ab = 0.$$

Dersom $ab (> 0)$ er delelig med n , kan høyre relasjon i (2) skrives som

$$(3) \quad \frac{ab}{n} \leq \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor.$$

Skulle venstre side i (3) være større enn høyre, måtte en ha

$$\frac{ab}{n} \geq \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor + 1 > \frac{n+3}{4} > \frac{n}{4},$$

eller $ab > \frac{n^2}{4}$, som etter (1) er umulig. Likhet i (3) får en dersom

$$(4) \quad \frac{ab}{n} = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor.$$

Dersom ab ikke er delelig med n , kan høyre relasjon i (2) skrives som

$$(5) \quad \left\lfloor \frac{ab}{n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor - 1.$$

Skulle venstre side i (5) være større enn høyre, måtte en ha

$$\frac{ab}{n} > \left\lfloor \frac{ab}{n} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor \geq \frac{n}{4},$$

eller $ab > \frac{n^2}{4}$, som er umulig. Likhet i (5) får en dersom

$$(6) \quad \frac{ab}{n} > \left\lfloor \frac{ab}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor.$$

Etter (4) og (6) gjelder høyre likhetstegn i de oppsatte relasjonene alltid og bare dersom

$$ab > n \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor.$$

H. Killingbergtrø

Også løst av Anders Bager, Otto Marstrander og Arne Sandum.

100. Bevis formelen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \binom{2n}{n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-2)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 3 \ln^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

W. Ljunggren

Lösning: Formlerna

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n} dx \quad \text{och} \quad \frac{1}{(2n+1) \binom{2n}{n}} = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$$

ger

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \binom{2n}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (-1)^n x^{2n} t^n (1-t)^n dx dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} t^n (1-t)^n dx dt. \end{aligned}$$

Den sista likheten gäller emedan $|xt(1-t)| \leq \frac{1}{4} < 1$ och serien alltså är likformigt konvergent.

$$S = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2 t(1-t)} = -4 \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{2} (\sqrt{4+x^2} - x)}{x \sqrt{4+x^2}} dx.$$

Sätt nu $\frac{1}{2}(\sqrt{4+x^2} - x) = y$, dvs. $x = \frac{1}{y} - y$, och $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = b$. Då blir

$$S = -4 \int_b^1 \frac{\ln y dy}{1-y^2}.$$

Gör substitutionen $y = \frac{1-x}{1+x}$ och sätt $\frac{1-b}{1+b} = \sqrt{5}-2 = a < 1$.

$$S = 2 \int_0^a \ln \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = 4 \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Den sista likheten gäller på grund av att serien är likformigt konvergent för $0 \leq x \leq a$. Vi har alltså visat att

$$S = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-2)^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Nu har man om man utnyttjar $\frac{1}{b} = 1 + b$ två gånger:

$$\begin{aligned}\int_b^1 \frac{\ln x dx}{1-x} &= \int_1^{1/b} \frac{\ln x dx}{x(1-x)} = - \int_0^b \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} dx \\ &= \frac{1}{2}(\ln b)^2 - \int_0^b \frac{\ln(1+x)}{x} dx.\end{aligned}$$

Alltså gäller

$$\int_b^1 \frac{\ln x dx}{1-x} + \int_0^b \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln b)^2.$$

Vidare gäller

$$\int_b^1 \frac{\ln x dx}{1+x} + \int_b^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = [\ln x \cdot \ln(1+x)]_b^1 = (\ln b)^2,$$

och

$$- \int_b^1 \frac{\ln x dx}{1-x} - \int_b^1 \frac{\ln x dx}{1+x} = -2 \int_b^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} S.$$

Addition av dessa likheter ger

$$\frac{1}{2}S + \frac{3}{2}\ln^2 b = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12},$$

dvs.

$$S = \frac{\pi^2}{6} - 3 \ln^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

Bernt Lindström

Også løst av L. Carlitz, Otto Marstrander og Ragnar J. Solvang.

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1956 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 13.2 E. A. Coddington, Los Angeles: *Maximal symmetric ordinary differential operators.*
- 5.3 A. Weinstein, Maryland: *Singular partial differential equations.*
- 26.3 V. Th. Jørgensen: *Om en ulighed for det hyperbolske mål og dens funktions-teoretiske anvendelser.*
- 30.4 P. Kristensen: *Et nyt variationsprincip i den analytiske dynamik.*
- 7.6 F. Wolf, Berkeley: *Perturbation of eigenvalues of an ordinary differential equation by change of boundary conditions.*
- 24.9 A. Erdélyi, California: *The method of stationary phase for the asymptotic evaluation of integrals.*
- 29.10 A. J. Hoffman, London: *Linear inequalities and combinatorial problems.*
- 12.11 F. Handest: *Om konstruktioner i hyperbolsk geometri.*
- 26.11 B. Fuglede: *En geometrisk anvendelse af teorien for integration i grupper.*
- 10.12 F. Bachmann, Kiel: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

Forelæsningsrække for matematiklærere (forårssemestret):

W. Fenchel: *Elementær topologi.*

Møder 16. og 17.10:

B. Jessen: *Målteori.*

T. Bang: *Træk af den additive talteori.*

D. Fog og M. Pihl: *Om muligheden af at indføre sandsynlighedsregning, herunder statistikkens elementer, i gymnasieundervisningen (forhandling).*

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 18.1 I. Louhivaara: *Differentiaal yhtälön $u_{xx} + u_{yy} + qu = 0$ ensimmaisestä reunaravotehtävästä [Om den första randvärdeuppgiften för differentialekvationen $u_{xx} + u_{yy} + qu = 0$].*
- 1.2 A. J. Lohwater, Michigan: *Zum Spiegelungsprinzip und der Wertverteilung beschränkter analytischer Funktionen.*
- 22.2 P. J. Myrberg: *Korkeamman kertaluvin automorfisista theta-funktioista [Om automorfa theta-funktioner av högre ordning].*

- 28.3 T. Nieminen: *Unitäaristen transformaatioiden spektraaliesityksestä* [Om spektralframställning av unitära transformationer].
- 25.4 P. J. Myrberg: *Automorfisista theta-funktioista* [Om automorfa theta-funktioner].
- 12.9 E. Stiefel, Zürich: *Erfahrungen über elektronische Rechenanlagen in der Schweiz*.
- 19.9 K. Bleuler, Zürich: *Der Gruppenring in der Quantenmechanik*.
- 10.10 R. Nevanlinna: *Funktionaalilyhtälöstä* [Om funktionalekvationen] $f(x+y) = f(x)f(y)$.
- 7.11 G. af Hällström: *Semipermutabla polynom*.
- 21.11 O. Lehto: *Harmonisten funktioiden reuna-arvotekävistä* [Om randvärdeuppgiften för harmoniska funktioner].
- 12.12 P. J. Myrberg: *Differenssiyhtälöiden sovellutuksista automorfifunktioiden teoriaan* [En tillämpning av differensekvationer på teorin för automorfa funktioner].

FINLANDS MATEMATIK- OG FYSIKLÄRARFÖRBUND.

- 4.2 Årsmöte. Styrelsens sammansättning förblev oförändrad. Arbetet utom klass behandlades i ett föredrag. Diskussion om matematiken i studentexamen.
- 3-6.7 Föreläsnings- och exkursionsdagar i St. Michel. Två föredrag över matematiska ämnen: Inträdesförhören och Behandlingen av talbegreppet i gymnasiet.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

Þorbjörn Sigurgeirsson: *Om magnetohydrodynamik*.
 Leifur Ásgeirsson: *Om Huygens princip i partielle differentiaalligninger*.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 21.2 Th. Skolem: *Litt om de såkalte bikropper*.
- 12.3 A. Selberg, Princeton: *Diskontinuerlige grupper og harmonisk analyse*.
- 6.4 A. Tarski, Berkeley: *On primitive notions of Euclidean geometry*.
- 15.5 E. S. Selmer: *Om irreduktibilitet av visse polynomer*.
- 9.10 O. Schmidt, København: *Om regning med brøker i den ægyptiske matematik*.
- 6.11 Th. Skolem: *Om en viss ordnet mengde av aritmetiske funksjoner*.
- 11.12 W. W. Boone, Princeton: *Turing machines and group theory. The unsolvability of the word problem*.

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

Om disse foredragene foreligger det melding fra de forskjellige kretser:

- 12.4 Møte med lærere fra folke- og framhaldsskolen om fellesproblemer i undervisningen i regning og naturfag. (Oslo.)
- 15.4 K. Piene: *Matematikkundervisningen i de høyere skoler i U. S. A.* (Trondheim.)
- 9.8 A. Gjelsvik: *Terminologien i matematikk og naturfag*. (Lom og 4.11 Hamar.)
- 9.8 E. Bøhn: *Regning med tilnærmede tall*. (Lom.)
- 22.9 J. Frøshaug: *Regning med avrundede tall*. (Molde.)
- 17.10 J. Andersen: *Matematikken på naturfaglinjen*. (Bergen.)

- 18.10 L. Wethe: *Feilregning, regning med tilnærmede tall.* (Oslo.)
- 24.5 K. Piene: *Die Prüfungsaufgaben in der Mathematik in Norwegen.* Arbeitskreis: Wissenschaftliche Grundlagen der Schulmathematik. (Münster, Westfalen.)

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

24.3 Möte i Stockholm:

- H. Rådström: *Cauchys problem på Möbiusbandet.*
- L. Gårding: *Spektralsatsen för differentialoperatorer av en variabel.*
- B. Stolt: *Om en speciell halvgrupp.*
- Å. Pleijel: *Svängande membranets nodlinjer.*
- O. Hanner: *Homologi med ordnade kedjor.*

9-10.6 Möte i Lund:

- H. Rådström: *Karakterisering av slutna konvexa mängder.*
- G. Kjellberg: *Olika slag av oberoende.*
- S. Lyttkens: *Om begränsade lösningar till vissa integralekvationer.*
- H. Rudberg: *Relativistisk diffusion.*
- F. Wolf, Berkeley: *The continuous spectrum of elliptic boundary problems.*
- W. Fenchel, København: *En anvendelse af de konvekse legemers teori på et specielt randværdiproblem.*
- H. Bergström: *Om en viss typ av norm.*
- Y. Domar: *Om trång konvergens.*
- L. Gårding: *Cauchys problem för hyperboliska differentialekvationer.*
- J. Wermer, Yale: *Problems in polynomial approximation.*

24.11 Möte i Stockholm:

- B. Andersson: *En virveltråds bana i ett enkelt sammanhängande område.*
- E. Asplund: *Om relationsregulära transformationer.*
- H. Riesel: *Några printalsberäkningar på BESK.*
- T. Ganelius: *Ett approximationsproblem.*
- G. Nordlander: *Om konvexitetsmodulen för Banachrymder.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I LUND.

- 15.4 Årsmöte. Till ny sekreterare efter lektor B. Adell, som av sagt sig, valdes lektor S. Andersson. Föredrag:

- M. Johansson: *Några synpunkter på kursplanerna för matematik i realskolan.*
- A. Reiz: *Radioastronomi.*
- N. Hansson: *Nyutkomna läroböcker i astronomi.*

- 24-25.11 Höstmöte, vilket ägnades helt åt kemin.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM.

- 4-5.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 4, s. 60.

FORENINGSNYTT

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND.

Under året har förbundets styrelse avgivit utlåtande om de föreslagna nya matematikkurserna i mellanskolan samt uppgjort ett förslag till nya matematikkurser för gymnasiets allmänna linje. Inom förbundet har de lokala klubbarna arbetat såsom hittills.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM

avhöll sitt årsmöte den 4-5 januari 1957 i Kungl. Tekniska Högskolans lokaler i Stockholm. Styrelse och arbetsutskott återvaldes. Under årsmötet hölls följande föredrag och demonstrationer:

G. Holmström: *Demonstration av fysikförsök.*

E. Ingelstam: *Några drag i nutida optisk forskning.*

B. Hallert: *En presentation av fotogrammetrin.*

R. Kiessling: *Energiproducerande atomreaktorer samt kemiska metallurgiska metoder för framställning av uranmetall.*

S. Sikjær, København: *Relativitetsteorien i skolen.*

E. Knave: *Några försök med transistor.*

Rundvandring företogs genom Institutet för optisk forskning och Fotogrammetriska institutionen på Tekniska Högskolan. Slutligen avlades besök vid AB Atomenergi, Stockholm.

Den 8-11 aug. 1956 anordnade Kungl. Skolöverstyrelsen, Svenska Nationalkommitten för matematik samt Föreningen för mat.-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm en kurs i funktionslära för gymnasielärare. Kursen var förlagd till Tekniska Högskolan. I densamma deltog c:a 60 läroverkslärare samt omkring 10 universitetsrepresentanter.

AVSKJEDER

Rektor A. Dickmeiss er pr. 31/7 1956 fratrådt som rektor ved Aurehøj Statsgymnasium, Danmark.

Rektor L. Willesen er pr. 31/8 1956 fratrådt som rektor ved Nykøbing Katedralsskole, Danmark.

UTNEVNELSER

Til professor i matematikk ved Universitetet i Bergen: Dr. philos. E. S. Selmer.

Til professor i matematik vid Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm: Fil. dr. B. Kjellberg.

Til professor i matematik vid Stockholms Högskola: Fil. dr. L. Hörmander.

Til biträdande professor i matematik vid Helsingfors Universitet: Fil. dr. O. Lehto.

Til biträdande professor i statistik vid Finska Handelshögskolan, Helsingfors: Fil. dr. S. Mattila.

Til laborator i matematik vid Lunds Universitet: Fil. dr. T. Ganelius.

Til rektor ved Nykøbing Katedralsskole, Danmark: Lektor Arne Østergaard.

DEN 13. SKANDINAVISKE MATEMATIKERKONGRESS

vil bli avholdt i Helsingfors 18–23 august 1957. De fleste foredrag skal begrenses til 20 min., men det vil bli holdt noen få lengre oversiktsforedrag. Foredrag som skal publiseres i kongressberetningen må innleveres senest på kongressens siste dag.

Organisasjonskomitéen består av F. Nevanlinna (formann), G. Elfving, O. Lehto og L. Myrberg. Dens adresse er Matematiska inrättningen, Regeringsg. 11–13, Helsingfors.

I forbindelse med kongressen vil det, i samarbeid med den internasjonale matematiske union (IMU), bli avholdt et internasjonalt kollokvium om funksjonsteori. Kollokviet holdes i Helsingfors i dagene 12–18 august, under ledelse av professor R. Nevanlinna.

DEN 3. NORDISKE LÆRERKONGRESS

i matematikk, fysikk og kjemi (LMFK) vil bli avholdt i Stockholm og Uppsala 4–8 august 1957. Alle opplysninger om kongressens program, samt meldingsblanketter, kan fåes hos:

Adjunkt Henrik Meyer, Bakkedraget 15, Birkerød, Danmark.

Lektor E. Nordahl Svendsen, Storgade 17, Sorø, Danmark.

Lektor B. L. Stara, Särkiniementie 29, Helsinki, Finland.

Lektor Sigurkarl Stefánsson, Barónsstígur 24, Reykjavík, Ísland.

Norsk Lektorlag, Kr. Augustsgt. 19, 7 tr., Oslo, Norge.

Lektor Bror Gustaver, Nyodlingsvägen 7, Bromma, Sverige.

RESOLUSJON NR. 43 TIL UNDERVISNINGSMINISTERIENE

OM MATEMATIKKUNDERVISNINGEN I DE HØYERE SKOLER

Hvert år blir det i Genève holdt en konferanse i Unescos og det internasjonale undervisningsbyrås (BIE) regi med representanter fra de aller fleste av jordens land.

På konferansen i 1956 var det faglige hovedemne: Matematikkens plass i den høyere skole. En lang resolusjon ble vedtatt. Den inneholder atskillig som vi matematikklærere i de nordiske land finner nokså selvfølgelig. I det følgende skal det gis et referat av innholdet, omfattende det som må antas å ha særlig interesse eller aktualitet hos oss.

Innledningen gir motiver for fagets plass i skolen, sier at faget er et gode og en rett for hvert menneske, uansett rase, kjønn, stand og virke, hevder at psykologien erkjenner at alle kan makte en viss mengde av faget, piker så vel som gutter, og at matematisk pedagogikk stadig blir mer vitenskapelig og mer virkningsfull. Derneft følger selve resolusjonen i 36 punkter.

Det første avsnittet handler om *fagets formål*. Det skal skape rasjonelle tankevaner; utvikle logisk tenkning, evnen til å se i rommet, utholdenhet og evne til å arbeide regelmessig; og fremelske en vitenskapelig innstilling. Videre blir det pekt på at det tekniske, økonomiske og sosiale liv krever stadig mer kunnskaper i matematikk. Faget er også et vesentlig moment i det moderne menneskes almen dannning, og spiller en viktig rolle i tidens vitenskapelige og filosofiske oppfatninger. Til dette kommer at faget er nødvendig i en rekke studier.

Det neste avsnittet behandler *fagets plass*. Her blir det anbefalt at på de linjer

der faget ikke er med, bør det organiseres en (valgfri) matematikkundervisning med kulturell tendens, ikke teknisk betont.

I avsnittet *Leseplaner* merker vi oss en anbefaling av disipliner som statistikk, sannsynlighetsregning, funksjonslære og vektorlære. Det betones at en må ta hensyn til elevenes forutsetninger, og anbefales at det bør undersøkes om den moderne matematikks strukturer kan tjene til å forbedre undervisningen.

Avsnittet *Metoder* betoner elevaktiviteten, rår til gjennom virkelig, figurlig eller fantasimessig eksperimentering å lede klassen mot en definisjon eller et bevis, betoner de konkrete utgangspunkter, ikke å påtvinge elevene noe som alt er ferdigskapt, ikke å innføre formalismer eller mekaniske prosesser før de er tilegnet og forstått. Det anbefales å studere elevenes feil for å bli klar over deres tenkemåte, å innøve kontrollvaner (overslag), å premiere refleksjon og resonnement snarere enn drill og pugg. Avsnittet ender med å fremheve samspillet mellom matematikken og de fag som bruker den, og peker på at en må fremme en presis, klar og konsis språkbruk samt bevare kontakten mellom matematikken og den levende og konkrete verden.

Avsnittet *Læremidler* bringer ikke egentlig noe nytt. *Lærerne* må nyte den respekt og den sosiale anseelse som tilkommer dem etter deres vitenskapelige utdanning og pedagogiske misjon. Det er nødvendig å sikre rekruttering av et tilstrekkelig antall kvalifiserte lærere som et nødvendig vilkår for hele menneskehetens vitenskapelige, tekniske, økonomiske og sosiale utfoldelse. Ellers blir det stilt vide krav som vel mer eller mindre er oppfylt i Norden. Et unntak er nok kravet om øvelse i å observere og eksperimentere i matematikkundervisningen.

Lærerne må holde seg à jour med utviklingen i faget og i dets didaktikk. De må få lett adgang til videreutdanning på forskjellig vis. Endelig blir det i siste avsnitt, *Internasjonalt samarbeid*, pekt på hvordan matematikklærerne i alle land kan utveksle idéer.

K. P.

KASSELER LEHRPLAN 1953

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts nedsatte i 1950 et utvalg som i 1953 la fram et forslag til leseplan for matematikkundervisningen i den høyere skole (gjengitt i *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, Bd. VI, s. 285–87, Frankfurt 1953/54). Det er en rammeplan som forutsetter minst 4 uketimer.

I slutten av innledningen blir det pekt på at matematikken har sitt utspring i praktiske problemer, men vokser siden til en egen åndsvitenskap med uomstridelig gyldige utsagn. Den gjør det mulig for eleven selv å kontrollere resultatet av sitt arbeid uten å ty til noen ytre autoritet. Dermed vil eleven umerkelig bli ledet fra å bli oppdradd til å oppdra seg selv.

De følgende avsnitt er uforkortete oversettelser. Siste avsnitt (*Die Formen des schriftlichen Rechnens*) er ikke tatt med her.

Metodiske merknader.

Generelt: Eleven skal nå matematiske kunnskaper mest mulig gjennom selvaktivitet. — Læreren skal derfor sørge for å tilpasse undervisningen til elevenes åndelige nivå og utvikling. Vanligvis velger han den induktive vei som fører fra anskuelse til begrep. — Forståelse for slutninger og bevismetode er viktigere enn

kjennskap til regler og formler. — Redelig omgang med begreper, klar tankegang og pleie av språkbruken er forutsetningen for all framgang i undervisning. — Ekte sakoppgaver som eleven forstår er verdifullere enn virkelighetsfremmede. Er undervisningen livsnær, vil elevenes interesse styrkes. — På alle alderstrin må en pleie evnen til å se i rommet, til å forestille seg og framstille rommet. — Sikkerhet i å bruke de matematiske hjelpemidler som er tilgjengelige for skoler, må styrkes. — Grunnleggende begreper i den moderne matematikk som mengde, avbilding, dualitet og gruppe skal forklares ved enkle og anskuelige eksempler. — Ved hjelp av problemer på passende steder fra det kulturelle, spesielt det vitenskapelige liv, som lar seg angripe med matematikk, vil matematikkens ordnende kraft kunne påvises. — Historiske betraktninger skjerper blikket for den innflytelse som matematikken har hatt i avgjørende epoker av åndsutviklingen; de skal gjennomføres på passende måte på alle klassetrin. — En vesentlig bestanddel av matematikkundervisningen er en innordning av lesestoffet som også fører til filosofisk fordypelse i hele det området av matematikken som behandles i skolen.

Regning, aritmetikk, algebra og analyse: Regneundervisningen må oppfattes som propedeutisk. Den går den induktive vei fra anskuelse til begrep. Funksjonal tenkning må øves ved hjelp av passende eksempler som tallrekker og tabeller med tegninger. Hoderegning må øves særskilt. De første kvadrattall læres utenat. — På alle klassetrin skal overslag og målinger praktiseres. Sansen for størrelsesorden må tidlig vekkes. Elevene skal venns til å gjøre overslag for hver større regning og omtale nøyaktigheten i svaret. — Behandlingen av lineære ligninger med flere ukjente kan avsluttes ved hjelp av innføring av determinanter. — Regnestav kan alt bli tatt i bruk før innføringen av logaritmer. — Forut for infinitesimalregningen kommer en innvendingsfri, men likevel propedeutisk behandling av grenseverdien for tallfølger. Differensial- og integralregning skal mest mulig behandles som en enhet. Også grafiske metoder i differensiasjon og integrasjon kan tas med. En må unngå en alt for inngående inntrengen i integrasjonsteknikken. — Den tallteoretiske tenkning krever særlig omsorg og pleie. — På egnede steder på alle klassetrin skal en bruke vektoriell skrivemåte.

Geometri: Trangen til et bevis må først utvikles gradvis. I begynnerundervisningen er Euklids form lite egnet. — Behandling av plane figurer må på alle klassetrin mest mulig forbindes med betraktninger av legemer. — Det er gunstig ved betraktning av enkeltfigurer å utlede figurskarer ved å forandre enkelte stykker og anstille funksjonelle undersøkinger av figurskarene. — Oppbygningen av geometriundervisningen skal være bestemt av gruppebegrepet og minst nå til affinitetsgruppen. — Det må legges vekt på at tegneverktøyet blir brukt som det skal og på sobre, anskuelige tegninger.

Stoff-fordeling.

(Rekkefølgen av stoffet i hver klasse ikke nødvendigvis som her angitt.)

5. skoleår: De fire grunnregningsarter med naturlige tall. Mynt, mål og vekt. Desimal skrivemåte. Delelighet, faktorisering. Slutning fra enhet til flerhet og omvendt. Enkle brøker fra det daglige liv. — Anskuelig behandling av firkantet prisme og rektangel, terning og kvadrat. Deres forbindelse til plane og romlige gitter. Geometriske grunnbegrep.

6. skoleår: Regning med alminnelige brøker og desimalbrøker. Slutningsregning med direkte og omvendt forhold, også med tegninger. — Sylinder, sirkel, vinkel, søyle og regulær polygon, pyramide og trekant, kule og kjegle i anskuelig framstilling.

7. skoleår: Prosentregning. Enkle oppgaver fra den enkeltes liv og samfunnet. Bearbeidelse av tabeller. Begynne regning med alminnelige tall. — Symmetri, geometriske grunnoppgaver, parallellforskyvning og dreining, innføring i trekantslæren.

8. skoleår: De 4 regningsarter i den rasjonale tallkropp; dermed forbundne lineære ligninger med en ukjent. Anvendelser. Empiriske funksjoner. Den lineære funksjon. Proporsjonalitetsfaktor. — Avslutning av trekantslæren. Firkantslære. Areal av figurer avgrenset av rette linjer. Rette prizmer: tegning, beregning av rominnhold og overflate. Rette linjer og vinkler ved sirkelen.

9. skoleår: Lineære ligninger med flere ukjente. Anvendelser. Kvadratroten: begrep og utregning (ikke den tidligere brukte algoritme). Innføring i tallregning. Funksjoner og ligninger av 2. grad (reelle løsninger tilstrekkelig). Potenser med positive og negative eksponenter. — Pytagoras' setningsgruppe. Strålesetninger. Likedannethetslære. Likedan beliggende plane og romlige figurer.

10. skoleår: Potenser med brudne eksponenter. Eksponensialfunksjon, logaritmisk funksjon. Logaritmer. Bruk av regnestav og logaritmetabell. — Sirkelberegning, tallet π , volum og overflate av sylinder, pyramide, kjegle, kule, framstilling av legemer i loddrett og skjev parallellprojeksjon. — Vinkelfunksjoner med anvendelse på enkle begreper. Landmålingsøvinger.

11. skoleår: Aritmetiske og geometriske følger og rekker. Anvendelser fra økonomi og forsikring. Tallfølger. Grensebegrep. Den uendelige geometriske rekke. Innføring i differensialregning på enkle rasjonale funksjoner. Integralbegrepet. Betydningen av infinitesimale begrep og bruken av dem i geometri og fysikk. — Vinkelfunksjonene: periodisitet, addisjonsteoremene, funksjonen $y = a \sin(bx - c)$.

12. og 13. skoleår: Videreføring av infinitesimalregningen: brudne rasjonale funksjoner, rotfunksjoner, vinkelfunksjoner, eksponensialfunksjon, logaritmisk funksjon, anvendelse på kurveundersøkinger og fysikalske problem. Feilregning. Tilnærmelsesmetoder til løsning av ligninger. Arealberegninger. Volum av omdreiningslegemer. — Den rette linje og sirkelens analytiske geometri. Kjeglesnittslære i regnemessig, elementærgeometrisk og deskriptiv-geometrisk behandling, idet en tar hensyn til metriske, affine og projektive synspunkter. Geometri på kulen med anvendelser på geografi og astronomi. — Overblikk over utvidelsen av tallbegrepet fra det naturlige til det komplekse tall idet en tar hensyn til tallkroppegenskapene. — Tilbakeblikk og utsyn til kulturhistoriske og filosofiske synspunkter.

Valgfrie stoffområder.

For matematisk-naturvitenskapelige linjer (skoleformer) og for arbeidsgrupper ved alle høyere skoler anbefales bl. a. disse emnene: Utvalte kapitler fra tallteorien. Kombinatorikk. Statistikk og sannsynlighetsregning. Første innføring i gruppeteori. Enkle problemer i mengdelære. Uendelige rekker. Vektoralgebra. Nomografi. Utvalte algebraiske og transcendent kurver. Enkle differensialligninger. Matematisk behandling av fysikalske og tekniske spørsmål. Analytisk romgeometri. Flater av 2. orden. Enkle konforme avbildninger. Utvalte kapitler av den deskriptive geometri. Kartskisser. Fotogrammetri. Matematikk og astronomi. Matematikk og kunst. Filosofiske problemer i matematikken. Matematiske problemer i historisk utvikling. Lesning av egnete (også fremmedspråklige) originalarbeider.

K. P.

SUMMARY IN ENGLISH

KAY PIENE: *The place of mathematics in American education and teacher training, I.* (Norwegian.)

The article is based on the author's studies during a 5 months' stay in U. S. A. in 1955, with a Smith-Mundt grant. The following topics are discussed in part I:

1° The place of mathematics in the schools (junior and senior high school, with pupils of the age from 12 to 17): The subjects taught are general mathematics, algebra, geometry in 2 and 3 dimensions, and trigonometry. The differences between American and Scandinavian schools are stressed. In the former, there is a great freedom in the selection of the subjects; this may be a main reason for the serious lack of students with a sufficient mathematical background. In the American schools, there is less fusion between the different disciplines. The problem of satisfactory teaching both of the ablest and of the average students is more accentuated in U. S. A., where a much greater percentage of the youth attends high school.

2° Textbooks in mathematics are usually more detailed in U. S. A. than in Scandinavia, with more applications, especially from daily life, and more emphasis is laid on the logical aspects. A particular textbook by Rosskopf, Aten and Reeve is analyzed as an example.

3° Junior College, which corresponds approximately to the last year of school and the first year of university education in Scandinavia. Courses from the universities of Chicago and Kansas are mentioned as examples.

E. J. NYSTRÖM: *On ellipsographs.* (Swedish.)

The author describes eight categories of mechanisms for drawing ellipses: 1° Using focal properties. 2° As a plane section of a cylinder or a cone. 3° As an affine transform of a circle. 4° By double rectilinear sliding. 5° As a hypocycloid. 6° By mechanical realization of a parametric representation. 7° By link-mechanisms. 8° By stencils.—Typical ellipsographs of the different kinds are illustrated by figures.

TORE HERLESTAM: *On differential-difference equations.* (Swedish.)

The article treats the linear homogeneous equation of the simple form $y'(x) = y(x-1)$. The complex roots of the characteristic equation $s = e^{-s}$ are studied. By a Taylor-expansion, it is shown that the initial value problem

$$y'(x) = y(x-1), \quad x \geq 1; \quad y(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

has a unique one-sided solution $y = F(x)$ for $x \geq 0$, when $f(x)$ is a given continuous function (formulas (5) and (6) pp. 32–33).

Analytic solutions, given by complex integrals or Fourier series, are mentioned briefly, and results of Polossuchin, Dixon and Leontev are quoted.