

OM »STRINGENT TÆNKNING OG PRÆGNANT UDTRYKSFORM«

DAVID FOG

Foredrag holdt i Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier
i Danmark i oktober 1955 (noget omarbejdet).

I formålsparagraffen for matematikundervisningen i de danske gymnasier står bl. a., at man skal søge at udvikle og skole elevernes evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform. Det er et højt mål at sætte sig, men ikke derfor mindre berettiget. I en videnskab, der er så gennemsyret af logik som matematikken, er det oplagt nødvendigt at lægge vægt på præcision, både i tanke og udtryk. Dog er det min hensigt i det følgende at henlede opmærksomheden på, at den almindelige regel om, at intet er så rigtigt, at det ikke kan overdrives, også har gyldighed her.

Over for fremholdelsen af det nævnte krav vil det være naturligt til en begyndelse at spørge: Hvorledes honoreres dette krav i det daglige liv, i den almindelige omgang mellem mennesker? Svaret er entydigt og lige til: Det sprog, vi taler med hinanden til daglig, er langt fra logisk eller klart. Jeg skal illustrere dette med et par simple eksempler.

Når A har besøgt B under hans sygdom og er ved at bryde op, er det høfligt, om han ved afskeden siger: »Nu håber jeg ikke, at jeg har trættet Dem«. A har hermed formuleret sit ønske helt forkert; han mener: »Nu håber jeg, at jeg ikke har trættet Dem«. De to citerede udtalelser kan i daglig tale nærmest anvendes i flæng og med samme betydning. Hvor stor forskellen i indhold virkelig er, ser man tydeligt, når man erstatte dem med to sætninger, der har samme sproglige opbygning, men hvor indholdet er gjort matematisk, f. eks. »heraf følger ikke, at a er lig b « og »heraf følger, at a ikke er lig b «.

Eller man kan nævne en almindelig benyttet vending som denne:

»Der er 5 minutter mellem hver sporvogn«. Omsat til matematik svarer det f. eks. til, at man om en række ækvidistante punkter på en ret linie sagde: »Der er 5 cm mellem hvert punkt«, hvad der nok ville få de fleste matematiklærere til at reagere.

Disse eksempler er relativt uskyldige og giver kun udtryk for små formuleringsmæssige unøjagtigheder; men hvis man for alvor begynder kritisk at gå efter, hvad der siges og skrives, ikke mindst hvor det har agitatorisk præg, vil man snart opdage, at det absolut ikke er den stringente tænkning eller den prægnante udtryksform, som dominerer. Jeg skal ikke gå ind på en nærmere dokumentation af dette, men blot bemærke, at det som følge heraf er klart, at vanskelighederne må være ganske overordentlig store, når man stiler mod korrekt omgang med det særlige og meget krævende sprog, som er matematikkens.

Jeg skal nu behandle et omfattende område inden for skolematematikken, der stiller særlig store krav til klarhed i tanke og fremstilling, og som vel netop derfor falder eleverne svært; det er spørgsmålet om *geometriske steder*. Jeg vil gerne dvæle udførligt ved den logiske side heraf.

Hvad vil det egentlig sige, at en kurve er geometrisk sted for et punkt, der opfylder en vis betingelse? Vi kan give svaret således: Det vil sige, at samlingen af punkter på kurven er identisk med samlingen af punkter, som opfylder betingelsen. For at uddybe dette vil vi betragte nedenstående skema:

	A	B
1	Når et punkt opfylder betingelsen, ligger det på kurven.	Når et punkt ligger på kurven, opfylder det betingelsen.
2	Når et punkt ikke ligger på kurven, opfylder det ikke betingelsen.	Når et punkt ikke opfylder betingelsen, ligger det ikke på kurven.

Skema 1

Hertil knytter vi følgende bemærkninger:

De to udsagn 1 (de to øverste) er — i sædvanlig forstand — indbyrdes omvendte. Det ene fremgår af det andet ved ombytning af forsætningens indhold (det givne) og indholdet af eftersætningen (det påståede). Analogt for udsagnene 2.

Lad os dernæst betragte to udsagn i samme søjle (to udsagn, der — med dagligsprogets ophøjede sans for logik — står »lodret over hinanden«); det ene fremgår af det andet, når man foruden at foretage den ovennævnte ombytning negerer begge sætningers indhold. Sådanne udsagn er *logisk ensbetydende*, idet hvert af dem kan udledes af det andet. Som eksempel vil vi udlede **A2** af **A1**. Dette sker let indirekte: Idet **A1** antages gyldig, forsøger vi, om et punkt, som ikke ligger på kurven, kan opfylde betingelsen; men dette er umuligt ifølge **A1**. Hermed er **A2** bevist.

Den foran givne definition på begrebet »geometrisk sted« kan nu udtrykkes således, at udsagnene **A** og **B** skal være opfyldt. Med brug af lidt andre ord kan vi sige, at kurven skal indeholde alle de punkter, som opfylder betingelsen, og ingen andre. Det første sikres ved **A**, det sidste ved **B**. For i et konkret tilfælde at dokumentere en kurves egenskab som geometrisk sted skal man altså godtgøre **A1** eller **A2** samt **B1** eller **B2**.

Vi vil nærmere betragte et meget simpelt eksempel, hvor alle fire i skemaet fremsatte påstande er lige lette at efterprøve. Der foreligger en spids vinkel (lm) med toppunkt O ; vi vil bevise, at det geometriske sted for de punkter i vinkelrummet (lm), som ligger lige langt fra vinkelbenene l og m , er vinklens halveringslinie.

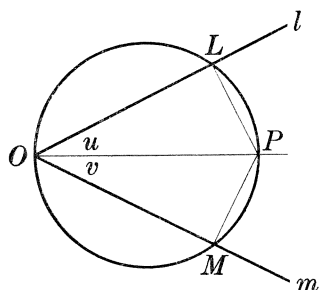


Fig. 1a

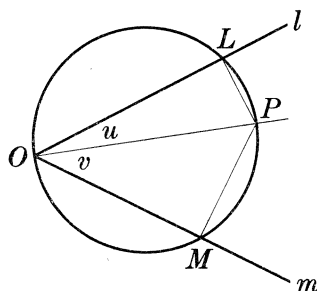


Fig. 1b

Idet vi forudsætter kendskab til måling af periferivinkler, kan beviset føres således:

A1. Lad (fig. 1a) P være et punkt, som opfylder betingelsen. Cirklen over OP som diameter skærer l og m i fodpunkterne L og M for de vinkelrette fra P . Da korderne PL og PM er lige store, gælder det samme om de tilsvarende buer, således at (med figurens betegnelser) $u = v$, d. v. s. P ligger på halveringslinien.

B1. Lad nu (atter fig. 1a) P ligge på halveringslinien. Da $u = v$, bliver

buerne PL og PM lige store, ligeså korderne, d. v. s. P opfylder betingelsen.

Hermed er sætningen om halveringslinien som geometrisk sted bevist. I stedet for **A1** kan vi også godtgøre **A2**. Lad da (fig. 1b) P være et punkt, som ikke ligger på halveringslinien. Cirklen over OP som diameter benyttes atter. Med betegnelser analoge med før bliver nu $u \neq v$; buerne PL og PM bliver derfor ulige store, ligeså korderne, d. v. s. P opfylder ikke betingelsen. På lignende måde kan man, atter med benyttelse af fig. 1b, vise **B2**, der kan træde i stedet for **B1**.

Det kan være nyttigt at sammenligne det foranstående skema 1 med de sædvanlig anvendte beviser for de elementære geometriske steder. Dette vil vi dog her forbigå, men i stedet tage et par andre eksempler på skemaer, der i logisk henseende er ækvivalente med skema 1.

Når noget står i avisen, er det sandt.	Når noget er sandt, står det i avisen.
Når noget ikke er sandt, står det ikke i avisen.	Når noget ikke står i avisen, er det ikke sandt.

Skema 2

Ingen af disse udsagn er jo rigtige for nogen eksisterende avis. Udsagnene til venstre kunne nok tilnærmelsesvis opfyldes; men approksimationen kan ikke i almindelighed siges at være særlig god. Derimod kan udsagnene til højre under ingen omstændigheder opfyldes, end ikke med tilnærmelse; dertil er spalterne i en avis ikke rummelige nok.

Vi tager endnu et eksempel. Der er et gammelt ord, der siger: »Den, der tror, haster ikke«. Den dybe sandhed, der måtte ligge heri, påvirkes ikke af, om vi jonglerer lidt med ordsproget.

Den, der tror, haster ikke.	Den, der ikke haster, tror.
Den, der haster, tror ikke.	Den, der ikke tror, haster.

Skema 3

Et menneske, der helt uforberedt bliver stillet over for dette skema, vil dog vist tøve noget, inden han er fuldt overbevist om, at to udsagn i samme søjle har samme indhold. Derimod ser man ret let, at indholdet

af venstre og højre side er forskelligt. Selv om vi nemlig godkender sandheden af udsagnet til venstre, følger ikke heraf rigtigheden af udsagnet til højre: når en person ikke haster, behøver det ikke at skyldes tro, men kan f. eks. — i al sin trivialitet — skyldes dovenskab.

Hvad er det nu egentlig, der er fælles for disse 3 skemaer? Det er ikke vanskeligt at se. Vi betragter følgende fjerde skema, hvor A og B betyder to udsagn:

Af A følger B	Af B følger A
Af ikke-B følger ikke-A	Af ikke-A følger ikke-B

Skema 4

Dette er den logiske kerne, som her træder klart frem, befriet for alt matematisk eller andet tilbehør. Og godtgørelsen af, at to udsagn i samme søjle er identiske, er derfor mere gennemskuelig end før. Og vi ser samtidig, at denne logiske kerne ikke blot kan anvendes over for den matematiske problemkreds, vi foran har behandlet, de geometriske steder, men overalt i matematikken, hvor det drejer sig om at undersøge en sætning og dens omvendte sætning.

Efter nu udførligt at have omtalt den *logiske* side af matematikken, belyst ved problemet om de geometriske steder, skal jeg gå over til den *pædagogiske*. Hvorledes kan man med udbytte undervise i disse ting? På den ene side har man logikken med dens ideale fordring, på den anden hensynet til elevernes modenhed, deres evne til at optage og fordøje stoffet og i det hele taget at følge en abstrakt tankegang. På gymnasie-niveau vil man efter min mening nødsages til visse modifikationer i forhold til det, man som »voksen« matematiker vil betragte som idealet; dog bør det mere være en renoncieren over for fuldstændighed end over for korrekthed. Man kan godt tale sandhed uden hvert øjeblik at være forpligtet til at sige hele sandheden. Jeg skal nedenfor søge at gøre rede for mine synspunkter i tilknytning til nogle eksempler; de første handler igen om geometriske steder.

Vi vil bestemme det geometriske sted for skæringspunktet mellem to linier l og m , der drejer sig lige hurtigt til modsat side om hver sit faste punkt L og M .

Vi løser opgaven analytisk i et bekvemt koordinatsystem (fig. 2). Begyndelsespunktet vælges i midtpunktet O af LM . Når linierne drejer sig en halv omgang, vil de to gange undervejs blive parallelle; de to

herved bestemte, på hinanden vinkelrette retninger vælges som retninger for koordinataksene. Dersom i dette koordinatsystem $L = (a, b)$, bliver

$M = (-a, -b)$. Vi vil her kun interessere os for det tilfælde, hvor både a og b er $\neq 0$.

For en vilkårlig stilling af linierne, hvor de ikke er parallelle, tilfredsstiller deres skæringspunkt $P = (x, y)$ ligningerne

$$(1) \quad \begin{cases} y - b = \alpha(x - a), \\ y + b = -\alpha(x + a), \end{cases}$$

hvor α betegner hældningskoefficienten for l (og $-\alpha$ derfor hældningskoefficienten for m). Multipliseres de to ligninger med henholdsvis $x + a$ og $x - a$, og adderes, fås

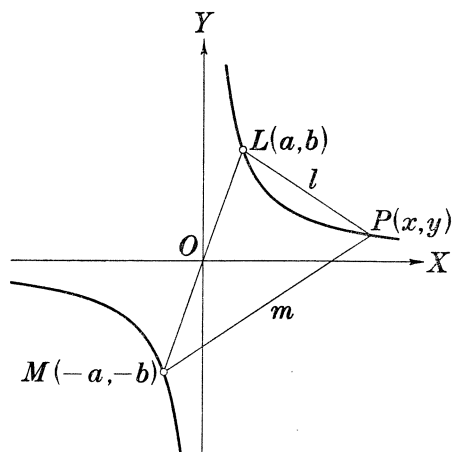


Fig. 2

$$(2) \quad (x + a)(y - b) + (x - a)(y + b) = 0,$$

der reduceres til

$$(3) \quad xy = ab.$$

Denne ligning fremstiller en ligesidet hyperbel, der har koordinataksene som asymptoter og går gennem L og M .

Vi har ovenfor vist, at alle skæringspunkter P ligger på hyperblen (3), svarende til **A1** i skema 1; men vi har endnu ikke godtgjort, at (3) er det søgte geometriske sted, kun at stedet er indeholdt i (3). For at dokumentere, at det geometriske sted virkelig er hele kurven (3), kan vi f. eks. vise **B1** i nævnte skema. Dette kan gøres ved »tilbageregning«: Når (3) og altså den dermed ækvivalente (2) er tilfredsstillet, viser en lille overvejelse, hvis detaljer jeg forbigår, at der altid findes et α , som tilfredsstiller begge ligningerne (1).

Vi kan imidlertid også godtgøre **B1** på en anden og mere anskuelig måde. Når l og m drejer sig en halv omgang om L og M , vil skæringspunktet P ifølge **A1** bevæge sig på hyperblen (3), og når l (og dermed m) ikke springer nogen mellemstilling over, vil P heller ikke kunne springe noget hyperbelpunkt over. Hermed har vi atter bevist **B1**.

Dette sidste bevis benytter, som det vil ses, en ikke skarpt defineret »sammenhængende variation« af figuren, og det er tilladeligheden af en sådan, jeg gerne vil slå til lyd for og forsvare. Den geometri, som dyrkes i skolen, er jo ikke strengt aksiomatisk opbygget — af mange grunde,

som jeg ikke her behøver at komme ind på; men når man alligevel ikke holder sig til den rene aksiomatik, ser jeg ikke, hvorfor eleverne ikke må tage naturligt på tingene og benytte deres medfødte anskuelsesevne — det kan måske endda virke forfriskende på dem at færdes i et terræn, hvor matematikkens natur endnu kan udfolde sig lidt frit og ikke er blevet underlagt civilisationen. Eleverne opnår i hvert fald herved mere forståelse og indleven i de foreliggende problemer end ved en række iøvrigt uangribelige talmanipulationer. Og den her anbefalede metode er ikke logisk underlødigt eller mindre præcis. Den respekterer fuldt ud de logiske grundprincipper, som er udtrykt i skema 1, men erstatter blot visse trivielle regninger med en naturligere og lidt mere frimodig benyttelse af anskuelsen.

Vedrørende nævnte anskuelse vil jeg gerne fremsætte endnu nogle bemærkninger. Efter mit skøn er man i gymnasiekredse — som led i en iøvrigt prisværdig stræben efter præcision — ved at komme ind på at anse enhver brug af anskuelse i geometrien for uvidenskabelig og derfor uønskelig; den betragtes som et forsøg på at smutte over, hvor gærdet er lavest, og som noget, en matematiklærer med respekt for sig selv og sit fag bør se ned på eller i bedste fald bære over med som et nødvendigt onde. Denne indstilling bygger, som jeg skal prøve at klarlægge, på en misforståelse.

Man kan fremstille geometrien som en uangribelig logisk videnskab på to forskellige måder: Enten kan man opstille et fuldstændigt geometrisk aksiomsystem og derefter udelukkende bygge på dette (Hilbert); aksiomsystemet må så bl. a. indeholde elementerne af den normale anskuelse (oplysning om brug af ord som »mellem«, »på samme side af« o. s. v.), og en del af den første opbygning af geometrien kommer da til at bestå i at flikke disse elementer sammen, så den sædvanlige anskuelse bliver til rådighed for det følgende. Eller man kan bygge hele geometrien op på tallene, for plangeometriens vedkommende altså definere et punkt som et talpar, en ret linie som de punkter, der tilfredsstiller en ligning af 1. grad, o. s. v.; man kan da talmæssigt definere de lige omtalte anskuel-seselementer og derefter som før bevise gyldigheden af den sædvanlige anskuelse. I begge tilfælde er der altså foretaget en analyse af vore rent primitive anskuel-sesforestillinger; men denne analyse følges op af en syntese, der lader anskuelsen fremstå påny i lutret og logisk uangribelig form som et yderst virksomt instrument til videre anvendelse. I den videnskabelige geometri er anskuelsen ikke blot en inspirationskilde, som flyder med sætninger, der dog for at opnå anerkendelse først må »bevises ordentligt« med tal. Anskuelsen kan med fuld videnskabelig ret indgå i selve disse beviser. Er det så rimeligt at stille den i skammekrogen

i skoleundervisningen — selv om man ikke i skolen er i stand til fuldt at legalisere dens anvendelse?

Som et nyt eksempel på, hvordan man eventuelt kan drage anskuelsen ind i sagen, vil vi betragte udledelsen af ellipsens og hyperblens ligning. En ellipse tænkes defineret som geometrisk sted for de punkter, for hvilke brændstrålerne har en given sum. Betegnelser og koordinatsystem vælges som sædvanlig. »Fremregningen« udføres efter mit skøn lettest således:

Idet brændstrålernes sum er $2a$, kan de betegnes $r = a + t$ og $r_1 = a - t$. Vi har da

$$(4) \quad (a+t)^2 = (x+ea)^2 + y^2, \quad (a-t)^2 = (x-ea)^2 + y^2.$$

Ved subtraktion fås $t = ex$, som indsat i (4) giver

$$(5) \quad (a+ex)^2 = (x+ea)^2 + y^2, \quad (a-ex)^2 = (x-ea)^2 + y^2.$$

Disse to ligninger, som øjensynlig udtrykker det samme, giver ved omskrivning

$$(6) \quad y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2).$$

Vi har hermed vist, at hvert ellipsepunkt ligger på kurven (6), svarende til **A1** i skema 1. For nu at fuldende beviset for, at (6) er ellipsens ligning, plejer man ved tilbageregning at vise **B1**, altså at ethvert punkt, som tilfredsstiller (6), tilhører ellipsen. Fra (6) kan man umiddelbart vende tilbage til de to ligninger (5). Da $e < 1$ og derfor $|x| \leq a$, er størrelserne $a+ex$ og $a-ex$ begge positive, hvorefter (5) giver

$$r = a+ex, \quad r_1 = a-ex,$$

således at $r+r_1=2a$. Hermed er beviset fuldført.

Selv om denne tilbageregning ikke kan siges at volde principielle vanskeligheder, er den dog lidt besværlig og netop af den art, som ikke ligger for gymnasieelevers psyke. Jeg vil derfor foreslå den erstattet med følgende anskuelige betragtning: Vi tænker os ellipsen beskrevet ved hjælp af en blyant, der glider med spidsen langs en strammet tråd, hvis ender er fastgjort i brændpunkterne. Det er da anskueligt klart, at ellipsen er en sammenhængende, lukket kurve. Da denne ifølge **A1** ligger helt på den lukkede kurve (6), må de to kurver være identiske, og ligning (6) fremstiller derfor ellipsen.

Ved hyperblen ligger forholdene så temmelig analogt. I halvplanen $x > 0$ kan brændstrålerne r og r_1 skrives på formen $t+a$ og $t-a$, og man godtgør da ganske som før, at hyperbelpunktet ligger på kurven

$$(7) \quad y^2 = (e^2-1)(x^2-a^2).$$

Af symmetri Grunde gælder dette også om hyperbelpunkter i halvplanen $x < 0$. Hermed er **A1** bevist. **B1** kan derefter dokumenteres ved tilbage-regning ganske som ved ellipsen.

For også her at give en anskuelig begrundelse for **B1** vil vi betragte fig. 3. Vi tænker os da to (uendelig lange) tråde fastgjort i brændpunkterne F og F_1 . De føres begge strammet langs abscisseaksen hen til top-punktet $A_1 = (a, 0)$, og de resterende stykker klæbes derpå sammen på en sådan måde, at de atter kan skilles ved pres af en blyantspids. Ved en sådan adskillelse, hvor blyanten føres fra A_1 ind i 1. kvadrant, medens begge de frie snorstykker stadig er stramme, vil blyantspidsen beskrive et kurvestykke, som udgør den i 1. kvadrant liggende hyperbelbue. Denne bue er sammenhængende og strækker sig i det uendelige, og da den ifølge **A1** ligger helt på kurven (7), må den være identisk med den bue af (7), som ligger i 1. kvadrant. Da forholdene i de 3 andre kvadranter af symmetri Grunde er analoge, har vi hermed atter bevist **B1** og dermed godtgjort, at (7) fremstiller hyperblen.

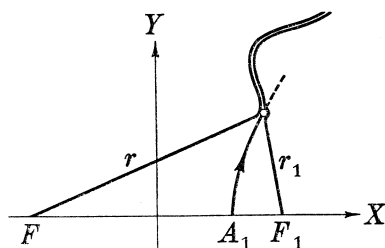


Fig. 3

Nu vil en og anden måske mene, at i ovenstående fremstilling er anvendelsen af anskuelse drevet for vidt. Hertil er først at sige, at de rent materielle ingredienser såsom blyanter, tråde og klister jo mere er at betragte som kulisser, der ikke er nødvendige for selve den matematiske tankegang; men tilbage bliver den realitet, at den her benyttede anskuelse er af lidt mere kompliceret art end i eksemplet s. 182. Alligevel er det kun en yderst simpel figurvariation, det drejer sig om, og jeg skulde tro, at en sådan tilpas primitiv og naturlig anvendelse af »sammenhængende variation« (eller »kontinuert variation«, for at benytte den betegnelse, som alligevel ligger en på læberne) ville være en gevinst for geometriundervisningen og ikke behøve at kolliderer med det i funktionslæren benyttede, skarpt definerede kontinuitetsbegreb.

Der er et andet område, hvor den kontinuerle variation også på naturlig måde kan anvendes, og det er over for spørgsmålet om *særtilfælde*. Det synes mig ofte rimeligere at behandle sådanne tilfælde ved »grænse-overgang« fra det almindelige tilfælde end ved at give dem en særbehandling, der er helt anderledes end behandlingen af hovedtilfældet. Jeg skal atter forklare mig nærmere i tilknytning til et par eksempler.

Vi begynder med bestemmelsen af tangenten til cirklen

$$(8) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Jeg tænker mig dette gennemført elementært, uden differentialregning, men med anvendelse af sætningen om hældningskoefficienterne for to på hinanden vinkelrette linier. Betegnes røringsspunktet (x_0, y_0) , bliver resultatet

$$(9) \quad (x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) = r^2.$$

Ved beviset er der 4 tangenter, som unddrager sig den almindelige betragtning, nemlig de 4, som er parallelle med en af koordinataksene. For disse plejer man at vise direkte — uden kontakt med det almindelige bevis —, at (9) er gyldig. Det forekommer mig dog naturligere at få disse særlige tangenter med ved en kontinuitetsbetragtning, der bygger på følgende:

1) Når (x_0, y_0) uden spring bevæger sig på cirklen, vil tangenten i (x_0, y_0) også bevæge sig uden spring.

2) Når koefficienterne i ligningen

$$(10) \quad ax + by + c = 0$$

varierer uden spring, og (a, b) holder sig $\neq (0, 0)$, så (10) hele tiden fremstiller en ret linie, vil denne linie også variere uden spring.

Disse rent anskuelige ting må efter min mening kunne betragtes som selvfølgelige, og en skarpere formulering synes mig ikke nødvendig. Ud herfra er det klart, at når (9) vides at fremstille tangenten til (8) i (x_0, y_0) undtagen for enkelte isolerede stillinger af dette punkt, da må den også gøre det i disse undtagelsespunkter.

Som et andet eksempel vil vi betragte det system af trigonometriske formler, som gælder for en retvinklet sfærisk trekant. Disse formler bevises sædvanlig først for trekanter med spidse kateter, hvorefter de ved overgang til nabotrekanten let udvides til også at gælde, når den ene katete eller begge er stump. Tilbage står det overgangstilfælde, hvor en eller begge kateter er rette. Dette kan selvfølgelig uhyre let behandles direkte, uafhængigt af det tidligere; men med benyttelse af kontinuert figurvariation kan resultatet naturligt formuleres således, at alle de formler, der i overgangstilfældet har mening, også er gyldige i dette tilfælde, de andre naturligvis ikke.

Dersom den sfæriske trekant ABC er retvinklet ved C , medens alle andre stykker er $\neq 90^\circ$, gælder således f. eks.:

$$\cos c = \cos a \cos b, \quad \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \sin b, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \sin a.$$

Dersom nu b (og dermed også c og B) er rette, vil da de to første formler stadig gælde, derimod ikke den tredje. Skrives denne sidste formel

imidlertid på formen $\cot B = \cot b \sin a$, bevarer den også sin gyldighed i det betragtede særtilfælde.

Jeg skal nøjes med de her nævnte eksempler. Det forekommer mig, at den kontinuerede variation knytter særtilfældene på naturlig måde til hovedtilfældet, så man får fremhævet sammenhængen, og tillige således, at sagens proportioner bliver rigtige, idet hovedtilfældet fremstår som det væsentlige, medens omtalen af særtilfældene får karakter af en afpudsning. Behandler man derimod særtilfældene ved at give helt nye beviser, kommer man let til at fremhæve forskelle, som er betydningsløse, og man risikerer at drage disse specialtilfælde så stærkt i forgrunden hos eleverne, at de overskygger hovedtilfældet. I det hele taget mener jeg, at man skal vogte sig — selv om det sker ud fra et nok så ædelt ønske om præcision — for at gøre for meget ud af særtilfælde og grænsetilfælde; for min skyld kan man godt ofte forbigå dem i stilhed, hvis ikke eleverne selv bringer dem på bane. Tiden, man har til rådighed til sin undervisning, er jo altid begrænset, og det gælder dog mere om at lære eleverne logikkens grundlove og give dem en portion positiv matematisk viden og indsigt end at øve dem i at feje sådan op efter sig, at der ikke ligger et matematisk støvgran — et undtagelsespunkt — tilbage, som de har overset.

Så er der kun een ting, jeg endnu vil nævne, og det er spørgsmålet om præcisionens stilling over for de *skønhedsværdier*, matematikken rummer. Utvivlsomt har præcisionen i sig selv en æstetisk værdi, og der er vel endog matematikere, som vil mene, at præcision og skønhed er uløseligt forbundne og nærmest er to sider af samme sag. Nu drejer det sig imidlertid her om gymnasieelever, hos hvem i mange tilfælde både evner og interesse er begrænset. For sådanne gælder, når man overskrider et vist punkt, sikkert den Bohr'ske komplementaritetsteori i denne specielle form: Jo mere man forøger præcisionen, desto mere dræber man af skønheden og interessen. I formålsparagraffen for gymnasieundervisningen i musik står bl. a., at man må stræbe efter hos eleverne at udvikle »den umiddelbare glæde ved at synge og ved at lytte til eller dyrke musik«. Nu er matematikken jo knap så lyrisk betonet som musikken, men »den umiddelbare glæde« ved faget skulle dog vel ikke være en ren utopi? Jeg vil mene, at når vor formålsparagraf kun fremhæver præcisionen og ikke så meget som antyder dennes komplementære begreb, fagets skønhed og glæden ved at dyrke det, så er denne paragraf ensidigt udformet. Det gælder netop i højeste grad om at finde en fremstillingsform, der kan åbne elevernes øjne for den ophøjede skønhed i de matematiske formler og figurer og på denne måde vække og fastholde

deres interesse for faget, efter den gode gamle regel, at det er lysten, som driver værket. Som illustration skal jeg gennemgå et enkelt eksempel.

I stereometrien beviser man de to formler $F = 4\pi r^2$ og $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, gældende for en kugles overflade og volumen. Den første formel vises sædvanlig ved grænseovergang ud fra en række indskrevne omdrejningskeglestubbe, den sidste ved integration med benyttelse af den almindelige formel for et omdrejningslegemes volumen. Men man omtaler ikke — i hvert fald ikke i flere af de almindeligt brugte lærebøger — formelen $V = \frac{1}{3}rF$, som sammenknytter overflade og volumen, og dennes anskuelige fortolkning ved opdeling af kuglen i en mængde tynde pyramider med fælles toppunkt i kuglens centrum. Og grunden er sikkert den, at den nys nævnte fortolkning svarer til en opfattelse af kugleoverfladen som grænse for et net af polygoner, hvilket ikke stemmer med de tidligere betragtninger, hvor man gik til grænsen på anden måde. For at redde præcisionen har man altså kastet skønheden (= den anskuelige sammenhæng) over bord.

Der er efter min mening adskillige andre punkter i gymnasiepensumet, hvor man også uden skade kunne slække noget på de sædvanlige fremstillingers »præcision« til fordel for en mere naturlig indstilling; men jeg har her holdt mig til geometrien som det område, hvor det mest brænder på. Skolens geometriundervisning har ikke i øjeblikket den samme vitalitet som for en menneskealder siden; den er ligesom trængt op i en krog af principper og nøjagtighedskrav, som passer over for analysen, men anvendt på geometrien virker som en spændetrøje.

Jeg synes, at skolens geometriundervisning trænger til en blodtransfusion, og håber, at det her fremførte kan virke lidt i en sådan retning. Matematikken — og specielt geometrien — lever ikke af præcision og logik alene; skal den trives og blomstre i skoleundervisningen, må der også tages passende hensyn til andre kvaliteter såsom anskuelse og skønhed. Jeg vil slutte med et citat, hvis oprindelse jeg ikke erindrer, men som i sin paradoksale form indeholder en god del sandhed:

Den morsomste matematik er den, som ikke er helt rigtig.

EN SÆTNING OM PARABELDIAMETRE MED ANVENDELSER

SIGURKARL STEFÁNSSON

Lad O være et punkt uden for en parabel. Man kan da fra O trække to tangenter til parabeln. Diametrene igennem disse tangenters røringpunkter vil jeg for at lette fremstillingen kalde *punktet O 's diameterpar med hensyn til parabeln*. Lad dernæst O være et punkt inden for parabeln. Da kan man gennem O trække en korde, som har midtpunkt i O . Her bliver det parabeldiametrene gennem denne kordes endepunkter, som skal kaldes *punktet O 's diameterpar med hensyn til parabeln*.

Der gælder nu følgende sætning:

På en vilkårlig parabelsekant gennem O vil produktet af afstandene til skæringspunkterne med parabeln være numerisk det samme som produktet af afstandene fra O til skæringspunkterne med O 's diameterpar.

I et koordinatsystem, hvor Y -aksen er parallel med parablens akse, kan parablens ligning skrives på formen

$$(x-a)^2 = p(y-b),$$

hvor (a, b) er toppunktet og p parameteren. På fig. 1 ligger begyndelsespunktet O uden for parabeln. Tangenterne fra O har røringpunkterne R og R_1 ; linierne d og d_1 gennem disse punkter og parallelle med Y -aksen er da O 's diameterpar med hensyn til parabeln. En sekant s gennem O og med ligningen $y = \alpha x$ skærer parabeln i punkterne A

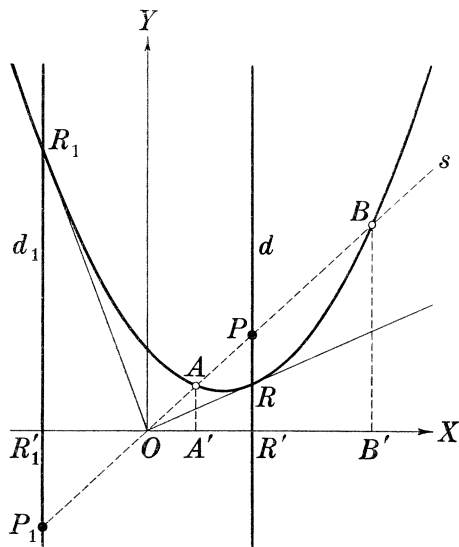


Fig. 1

og B og diameterparret i P og P_1 . Projektionerne af A og B på X -aksen betegnes A' og B' , og diametrenes skæringspunkter med X -aksen kaldes R' og R_1' . Indsættes $y = \alpha x$ i parablens ligning, fås efter ordning med hensyn til x :

$$x^2 - (\alpha p + 2a)x + bp + a^2 = 0.$$

Denne ligning viser, at OA' og OB' har et af α uafhængigt produkt, hvis værdi så må være $OR'^2 = OR_1'^2$. Ved parallelprojektion ses da, at man også må have $OA \cdot OB = OP^2 = OP_1^2$.

Når O ligger inden for parablen, kan man gå frem på samme måde. Vil man bevare parablen og diameterparret på fig. 1, skal O tænkes flyttet til midtpunktet af korden RR_1 . For sekanter gennem dette punkt fås $OA \cdot OB = OP \cdot OP_1$, idet betegnelserne er analoge med før. Hermed er den opstillede sætning bevist.

Fra et projektivgeometrisk synspunkt bliver sætningen indlysende, når man giver agt på, at de vinkelrette projektioner af A og B på akse-normalen gennem O danner en involution med centrum i O .

Med hensyn til anvendelserne giver vi sætningen en anden ordlyd:

Man kan finde punkter på O 's diameterpar ved på en vilkårlig parabel-sekant gennem O udfra dette punkt til begge sider at afsætte mellemproportionalen mellem afstandene fra O til sekantens skæringspunkter med parablen.

Ved hjælp af denne sætning løses let nogle konstruktionsopgaver i forbindelse med parabler, som nok er ret vanskelige at løse ved brug af

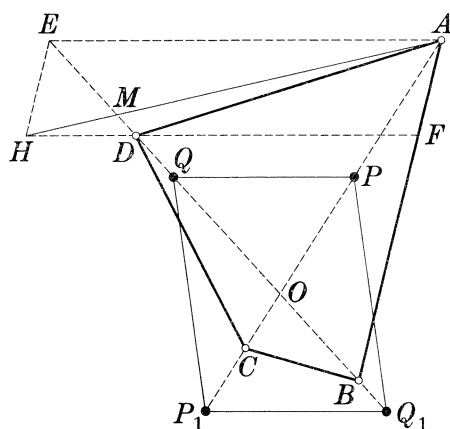


Fig. 2

de parabelsætninger, som almindelig anføres i de elementære lærebøger. Vi skal nedenfor omtale de fem tilfælde af bestemmelsen af en parabel ved fire elementer (punkter eller tangenter). Vi vil overlade analyse, bevis og diskussion til læseren, men kun skitsere konstruktionen i hovedtræk og nævne det maksimale antal løsninger.

1. Af en parabel kendes fire punkter, som er vinkelspidser i en konveks firkant $ABCD$ (fig. 2). Bestem akseretning og brændpunkt.

Firkantens diagonaler skærer hinanden i O . På diagonalen AC bestemmes punkterne P og P_1 , således at $OP^2 = OP_1^2 = OA \cdot OC$. På den anden diagonal bestemmes Q og Q_1 på analog måde. Modstående sider i parallelo-

grammet PQP_1Q_1 er da punktet O 's diameterpar med hensyn til de søgte parabler.¹

Af de to løsninger udfører vi nærmere den, hvor akseretningen er QP . En linie gennem A parallel med akseretningen skærer BD i E , og en linie gennem D med samme retning skærer AB i F . Punktet H bestemmes, så $EAFH$ er et parallelogram. Skæringspunktet mellem EB og AH kaldes M .

Af to par ensvinklede trekanter, der alle har en vinkelspids i M , ses, at

$$\frac{MB}{ME} = \frac{MA}{MH} = \frac{ME}{MD},$$

d. v. s. $ME^2 = MB \cdot MD$. Heraf følger, at E ligger på M 's diameterpar, og MA er derfor parablens tangent i A . Spejlbilledet af AE i denne tangent går gennem brændpunktet, og ved endnu en tangentbestemmelse og påfølgende spejling kan dette punkt derfor bestemmes.²

2. Givet tre punkter A , B og C og en tangent t (fig. 3).

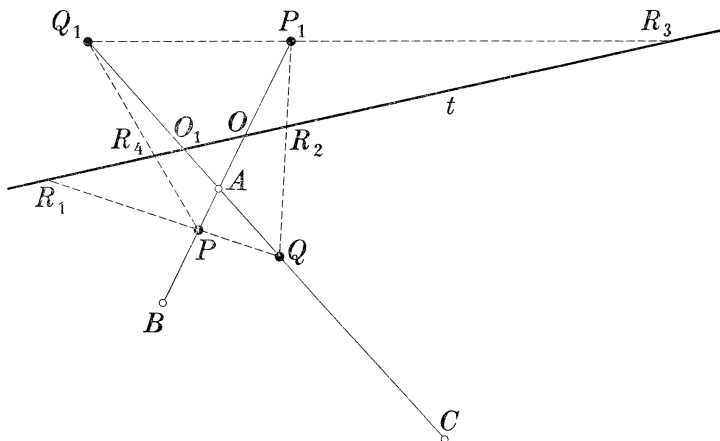


Fig. 3

¹ Er firkanten $ABCD$ indskrivelig i en cirkel, bliver $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ (=punktet O 's potens m. h. t. cirklen), hvorefter følger, at PQP_1Q_1 bliver et rektangel. Er omvendt PQP_1Q_1 et rektangel, bliver $ABCD$ indskrivelig. Heraf fås den velkendte sætning: To parabler, som skærer hinanden i fire punkter, har da og kun da på hinanden vinkelrette akser, når deres skæringspunkter ligger på en cirkel.

² Da tangenten MA går gennem midtpunktet af liniestykket EF , gælder følgende sætning: En parabels tangenter i vinkelspidserne af en i denne indskrevet trekant er midtpunktstransversaler i en anden trekant, hvis vinkelspidser er projektionerne i akseretningen af den indskrevne trekants vinkelspidser på dens modstående sider. Denne sætning giver en yderst simpel bestemmelse af en parabel, af hvilken man foruden tre tangenter enten kender akseretningen eller røringspunktet for en af de givne tangenter.

Linierne AB og AC skærer t i O og O_1 . På AB bestemmes punkterne P og P_1 , således at $OP^2 = OP_1^2 = OA \cdot OB$, og på AC analogt punkterne Q og Q_1 . Da O og O_1 ligger på samme tangent, må diameteren gennem røringsspunktet være fælles for deres diameterpar. Siderne i firkanten PQP_1Q_1 angiver derfor akseretningerne for de søgte parabler og skærer t i de respektive røringsspunkter R_1, R_2, R_3 og R_4 .

Når røringsspunktet er valgt, bestemmes let tangenten i et af de givne punkter, hvorefter brændpunktet kan findes som i opgave 1. Der kan blive 4 løsninger.

3. Givet to punkter A og B og to tangenter t og t_1 (fig. 4).

Lad AB skære t i O og t_1 i O_1 . På AB bestemmes P og P_1 , således at

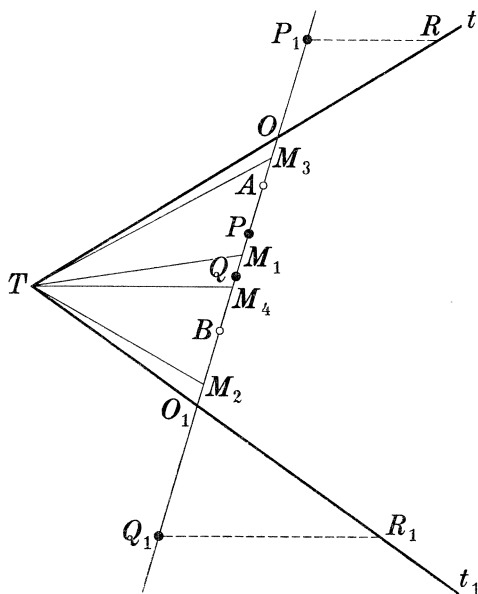


Fig. 4

$OP^2 = OP_1^2 = OA \cdot OB$, og endvidere Q og Q_1 , således at $OQ^2 = OQ_1^2 = OA \cdot OB$. Midtpunkterne M_1, M_2, M_3 og M_4 af PQ, PQ_1, P_1Q og P_1Q_1 bestemmes og forbindes med tangenternes skæringspunkt T ved rette linier. Disse linier angiver da akseretningerne for de søgte parabler, medens linier parallelle med dem gennem de pågældende liniestykkers endepunkter bestemmer parablens røringsspunkter med de givne tangenter. På figuren er kun tegnet røringsspunkterne R og R_1 for den parabel, som har akseretningen TM_4 . Der bliver 4 løsninger.

4. Givet et punkt D og tre tangenter a , b og c (fig. 5).

Det erindres, at når parablen går gennem D , vil dens polarkeglesnit m. h. t. en cirkel med centrum i D være en anden parabel gennem D , med hvis akse den første parabels tangent i D danner en ret vinkel.

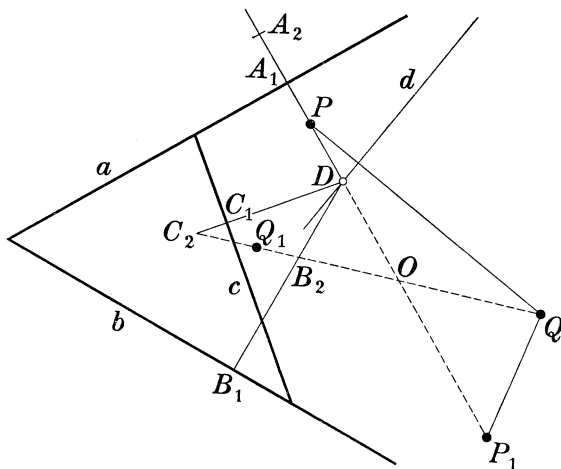


Fig. 5

Lad normalerne fra D på a , b og c skære disse i A_1 , B_1 og C_1 . På DA_1 , DB_1 og DC_1 bestemmes punkterne henholdsvis A_2 , B_2 og C_2 , således at

$$DA_1 \cdot DA_2 = DB_1 \cdot DB_2 = DC_1 \cdot DC_2 = r^2.$$

Punkterne A_2 , B_2 og C_2 bliver da de givne liniers poler m. h. t. en cirkel med centrum i D og radius r . Linien C_2B_2 skærer DA_2 i O . Man bestemmer nu som i opgave 1 O 's diameterpar m. h. t. parablerne gennem A_2 , B_2 , C_2 og D ved punktparrene P , P_1 og Q , Q_1 . Normalerne gennem D på disse diameterpar bliver de søgte parablers tangenter i D . Den ene af disse, d , er vist på figuren.

Akseretningerne bestemmes nu let ved sætningen i fodnote 2.

Brændpunkterne kan iøvrigt bestemmes umiddelbart således: Hver af de mulige tangenter i D tages sammen med de tre givne, og opgaven er hermed omdannet til følgende opg. 5.

Der kan blive to løsninger.

5. Givet 4 tangenter; 5 af deres skæringspunkter er A , B , D , E og H (fig. 6).

Den midterste vinkelspids E i trekanten AEB spejles i midtnormalen for den modstående side AB , hvorved den går over i E_1 . Punkterne D_1 ,

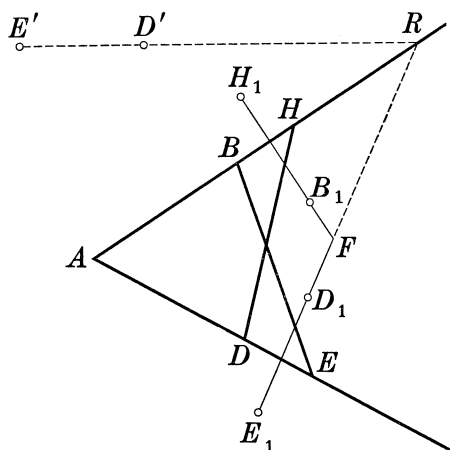


Fig. 6

B_1 og H_1 bestemmes på analog måde ved trekanten ADH , ABE og AHD . Linierne E_1D_1 og B_1H_1 vil da skære hinanden i parablens brændpunkt F .

Spejler man nemlig de samme vinkelspidser i de modstående siders midtpunkter, går f. eks. E og D over i E' og D' , som ifølge sætningen i fodnote 2 begge ligger på diameteren gennem røringspunktet R for tangenten AB , samtidig med at de er spejlbillederne af E_1 og D_1 i denne tangent. Her bliver kun 1 løsning.

Brændpunktet kan også findes ved benyttelse af, at det ligger på de omskrevne cirkler for de ovennævnte trekanter.

Ved løsningen af disse opgaver har vi med undtagelse af nr. 4, hvor der blev anvendt polaritet, udelukkende benyttet almindeligt gymnasie stof i tilknytning til den ovenfor anførte sætning om parabeldiametre.

GAUSS OCH DEN ICKE-EUKLIDISKA GEOMETRIN

ROLF NEVANLINNA

Förkortad översättning av en artikel i Arkhimedes, häfte 2, 1955.

Carl Friedrich Gauss föddes 1777 i Braunschweig som son till en hantverkare. Redan under skoltiden utmärkte han sig genom osedvanlig begåvning, som inte begränsade sig endast till matematiken. Hertigen av Braunschweig fäste sin uppmärksamhet vid detta underbarn och förhjälpste Gauss till fortsatta skol- och högskolestudier. Som aderton-åring inskrevs Gauss 1795 i universitetet i Göttingen. Hans avsikt var då att studera filologi; intresset för språk uppehöll han hela livet igenom. Han behärskade väl grekiskan och latinet, på vilket språk han enligt tidens sed publicerade sina flesta undersökningar. Vid över sextio års ålder började han studera det ryska språket och vann här snart en sådan skicklighet, att han kunde läsa ryskspråkig skönlitteratur och poesi. Så blev det honom möjligt att studera Lobatjevskijs arbeten på originalspråket.

Det oaktat försummade Gauss i Göttingen icke matematiken. På detta område hade han i all stillhet redan under skoltiden nått märkliga resultat. Dessa framgångar fortsatte under hans första studieår, och snart beslöt Gauss att helt ägna sig åt matematiken.

Det förefaller som om undervisningen i Göttingen dock icke i högre grad skulle ha bidragit härtill. Professorn i matematik, Kästner, var känd för sin kvickhet, men som matematiker och lärare värderades han icke högt av Gauss. Under de tre år Gauss studerade i Göttingen levde han isolerad från sin omgivning. Ett närmare förhållande utvecklade sig endast med studiekamraten, ungraren Wolfgang Bolyai, och det är endast genom dennes meddelanden som eftervärlden fått någon liten inblick i Gauss idévärld under dessa studieår. Bolyai omfattade med passionerat intresse frågan om parallellaxiomets ställning i den euklidiska geometrin, och det var kring dessa frågor som de två unga matematikernas diskussioner kretsade.

Men det är tid att kasta en blick på situationen inom den elementärgeometriska forskningen under dessa tider. Frågan om giltigheten av Euklides system har alltsedan antikens tider sysselsatt den geometriska forskningen. Men först på 1700-talet, tvåtusen år efter Euklides, nådde man på detta område resultat, som väsentligt förde över antikens ståndpunkt sådan som den är samlad i Euklides Elementa, detta beundransvärda verk, som alltså representerar det högsta som det mänskliga teoretiska tänkandet frambringat.

Den geometriska grundforskningens huvudproblem kan alltsedan dessa tider koncentreras i två frågor: 1) Är det möjligt att bindande motivera den traditionella uppfattningen, enligt vilken Euklides system representerar den enda logiskt och empiriskt riktiga, ja, till och med den enda möjliga geometriska grunduppfattningen? 2) Är det möjligt att inom ramen för detta system nå längre än Euklides, sålunda att någon tidigare som axiom betraktad sats skulle kunna bevisas med tillhjälp av de andra axiomen?

Fastän den första av dessa frågor är allmännare än den andra, avsluter de sig dock nära till varandra. Bland Euklides axiom har det elffte, parallellaxiomet, genom tiderna förefallit tvivelaktigt: dess giltighet har inte i samma mån framstått som evident som de övriga axiomens (t. ex. satsens: »Genom två punkter kan man lägga en, men blott en rät linje.«). På 1700-talet fortsatte diskussionen om parallellaxiomet's ställning med allt större målmedvetenhet. Särskilt viktiga var Saccheris och Lamberts försök att bevisa detta axiom genom indirekt bevisföring. Resultatet var naturligtvis negativt, men de tankegångar de härvid leddes till blev synnerligen betydelsefulla för geometrins senare utveckling. Förkastandet av parallellaxiomet förde till följsatser vilkas enhetliga, om ock från den euklidiska geometrin helt avvikande innehåll var ägnat att undergräva tron på Euklides system.

Sådana tvivel kunde emellertid endast småningom vinna fotfäste. Newtons och Kants auktoritet var enorm, och det föreföll till en början nästan olämpligt att tänka sig att deras lära angående rymdens euklidiska karaktär skulle innehålla någon svag punkt. Öppna tvivelsmål i denna riktning torde först ha blivit lancerade av Lambert. Men det förflöt mera än ett århundrade, tills den »icke-euklidiska uppfattningen« efter många växlingar kunde bryta fram och vinna full förståelse bland matematikerna. Till denna utveckling har Gauss på ett märkligt sätt bidragit. Vid tiden för hans födelse låg alltså frågan om parallellaxiomet »i luften«. Därtill bidrog förutom Saccheris och Lamberts resultat framför allt det intresse som de franska matematikerna, särskilt d'Alembert och Legendre, visade denna fråga. Betecknande är den förres uttalande

(1767): »Situationen inom parallellteorin är elementargeometris fort-satta skandal.«

Det är mot denna bakgrund man har att betrakta Gauss och Bolyais diskussioner, som emellertid redan 1798 avbröts, emedan Bolyai flyttade till Braunschweig och senare till sitt fosterland Ungern. År 1799 meddelade han Gauss att han äntligen lyckats bevisa parallellaxiomet. I sitt svar (16.12.1799) beklagade Gauss att han under studietiden i Göttingen erfårit för litet angående Bolyais undersökningar, som denne nu trodde sig ha avslutat, och han fortsätter: »Själv har jag i mitt arbete på detta område nått långt, men den väg jag följt leder icke till det resultat som Du enligt Ditt meddelande har funnit, utan tvärtom till att hela geometris giltighet blir tvivelaktig.« Mera yppar Gauss i dessa sammanhang icke om sina tankar. Men i hans dagbok finner man en i september 1799 daterad anmärkning: »Jag har kommit till resultat vilka för de flesta skulle gälla som bevis (Gauss åsyftar försöket att bevisa det Euklidiska systemets giltighet), men vilka i mina ögon icke just utvisar någonting; kunde man t. ex. bevisa att det finns en triangel med godtyckligt stor area, så kunde jag fullkomligt strängt bevisa hela geometris system. De flesta skulle säkerligen uppställa denna sats som axiom, men detta gör icke jag; det vore ju tänkbart att, huru långt från varandra man än skulle välja triangels hörnpunkter, triangels yta dock skulle stanna under en ändlig gräns. Jag är i besittning av flera satser av denna art, men ingen av dem tillfredsställer mig.«

Den här åsyftade möjligheten förverkligas som bekant just i den icke-euklidiska geometrin, och Gauss anmärkning bevisar hur djupt han redan så tidigt, vid 22 års ålder, hade inträngt i geometris grundfrågor.

Under de första åren av 1800-talet fortgick forskningen inom parallellteorin i flera olika riktningar, och det är svårt att avgöra huru stor andel de enskilda forskarna hade i frågornas klargörande. Intressant och lärorikt är att iakttaga huru stora kunskapsteoretiska och matematiska svårigheter hindrade den enkla, men djupt liggande sanningens genombrott inom dessa problem. Gauss anteckningar från åren 1803–04 visar att han fortfarande tog även den möjligheten i betraktande att parallellaxiomet trots allt vore bevisbart. Hans ståndpunkt synes här ha förblivit oklar flera år framåt. Så förhöll det sig åtminstone ännu 1813. Från detta år härrör Gauss ord, som kan jämföras med d'Alemberts ovannämnda uttalande: »In der Theorie der Parallellinien sind wir jetzt noch nicht weiter als Euklid war. Dies ist die partie honteuse der Mathematik, die früh oder spät eine ganz andere Gestalt bekommen muss.«

Astronomen Schumacher, som 1808 studerade i Göttingen under Gauss

ledning, meddelar i sina anteckningar angående sina diskussioner med Gauss bl. a., att denne påvisat att i fall parallellaxiomet vore oriktigt, därav skulle följa existensen av ett absolut längdmått, vilket a priori förefaller »meningslöst», och han tillägger att Gauss själv icke ännu betraktade sina resultat som slutgiltiga. Här kan nämnas att Lambert och Legendre (1794) redan tidigare gjort samma iakttagelse, och den sistnämnde hade just häri velat se ett bevis för parallellaxiomets giltighet.

Denna uppfattning delades dock ej av Gauss. Den ovan nämnda egendomliga iakttagelsen förefaller att under årens lopp i allt högre grad ha rubbat hans tro på parallellaxiomets och därmed hela det euklidiska systemets absoluta giltighet. Detta framgår bl. a. av ett brev till Gerling (1816), där Gauss med anledning av Legendres försök säger att hypotesen beträffande en absolut längdenhet visserligen förefaller »något paradoxal», men att han däri icke kan finna något motsägelsefullt, och han tillägger: »Det vore t. o. m. önskvärt (!) att Euklides geometri icke skulle vara riktig, emedan vi då vore i besittning av en allmänt giltig längdenhet a priori»; en sådan enhet, fortsätter Gauss, vore t. ex. sidan hos en liksidig triangel, vars vinklar äro $59^{\circ} 59' 59''.999$.

Denna anmärkning är synnerligen intressant. Gauss beaktar här att triangelns vinkelsumma enligt den icke-euklidiska geometrin är mindre än 180° och att triangelns storlek (dess yta, eller i en liksidig triangel, sidans längd) bestämmer avvikelserna, den s. k. vinkeldefekten. Denna växer med triangelns dimensioner och i en »oändlig stor» triangel försvinner vinkelsumman, vinkeldefekten är då maximal, lika med 180° . Då nu Gauss såsom längdenhet föreslår sidan hos en sådan liksidig triangel, vars vinkeldefekt är utomordentligt liten, nämligen endast 0.003 vinkelsekunder, så bör man inte betrakta detta enbart som ett skämtsamt infall. Utan tvivel har han därmed just syftat på att Euklides geometri i relativt små figurer säkert är nästan riktig. Även om den icke-euklidiska geometrin skulle gälla i världsrymden, så skulle dock den euklidiska geometrin i så små figurer, som i våra terrestra förhållanden äro mätbara, äga sin giltighet med så stor noggrannhet att man icke kunde vänta sig annat än ytterst små avvikelser från de euklidiska värdena. Gauss anmärkning synes sålunda peka på den möjligheten att avvikelserna i de allra största »till buds stående» trianglarna måhända genom mätningar kunde *empiriskt* påvisas. Vi återvänder i slutet av denna framställning till denna intressanta fråga.

Oberoende av Gauss hade de icke-euklidiska idéerna på annat håll avancerat. Ett märkligt bidrag till frågan lämnade 1807 F. C. Schweikart vid Charkovs universitet; hans namn har kvarstannat i historien

på grund av hans matematiska förtjänster, trots att han till yrket var jurist. Han publicerade en undersökning med den något dramatiskt betonade titeln: »Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlag ihrer Verbannung aus der Geometrie.« Där framhåller han möjligheten att parallellaxiomet vore ogiltigt, men att avvikelserna från Euklides geometri skulle bli märkbara först på mycket stora kosmiska avstånd; därför kallade han den nya geometrin »astralgeometri«. Senare (1818) flyttade Schweikart till Marburgs universitet och fick då genom Gauss vän Gerling höra om dennes idéer. På hans begäran skrev Gerling till Gauss om astralgeometrin, och i sitt svar gav Gauss Schweikart sitt fulla godkännande.

Påverkad av Schweikart ägnade sig dennes systerson F. A. Taurinus (f. 1794), även han jurist till yrket, åt geometrins studium. Han nådde här betydligt längre än Schweikart, och 1824 sände han Gauss ett försök att bevisa parallellaxiomet. Gauss svar var erkännande; av nedanstående utdrag frangår huru långt Gauss själv utvecklat den icke-euklidiska geometrin: »Antagandet att triangelns vinkelsumma är mindre än 180° leder till en egendomlig, från det euklidiska systemet helt avvikande geometri, som är fullt konsekvent och vilken jag för mig utvecklat på rätt tillfredsställande sätt, så att jag däri kan lösa varje problem, förutsatt att en viss konstant är given, som inte kan bestämmas a priori. Ju större denna konstant är, desto mera närmar man sig den euklidiska geometrin, och då konstanten blir oändlig, överensstämmer de båda geometrierna. I fall den icke-euklidiska geometrin vore giltig och konstanten icke vore oproportionerligt stor i förhållande till storheter, vilka kunna nås av våra mätningar, så kunde denna konstant bestämmas a posteriori.«

Fastän Taurinus tydligen förblev övertygad om parallellaxiometets giltighet, undersökte han synnerligen långt de konsekvenser som följer av dess förnekande. Åren 1825 och 1826 publicerade han undersökningar där han på denna bas härledde den icke-euklidiska geometrins »absoluta längd« samt den hyperboliska trigonometrin, till vilken han kom genom att i den sfäriska trigonometrins formler ge sfärens radie ett imaginärt värde (såsom man ännu denna dag brukar förfara). Med dessa hjälpmedel bestämde han längden av perimetern hos en icke-euklidisk cirkel samt dess ytinnehåll, därtill även sfärens area och volym.

Kanske dessa framsteg fick Gauss att bryta sin tystlåtenhet, som han, med undantag av korta skriftliga anteckningar i sin dagbok och i brev, strängt iakttagit så väl i frågan om den icke-euklidiska geometrin som över huvud beträffande sina matematiska undersökningar. Visserligen publicerade han även denna gång ingenting, utan nöjde sig med anteck-

ningar, som man fann efter hans död. I dessa anteckningar, härstammande från åren 1828–31, bevisar han, utan att antaga parallellaxiomet, att triangelns vinkelsumma icke kan överstiga två räta vinklar och visar huru den icke-euklidiska cirkeln med obegränsat växande radie övergår i en kurva, som man numera betecknar som »oricykel». Denna gränscirkel skär ortogonalt en skara likriktade räta linjer och den skiljer som gränsfall åt de ändliga cirklarna från hypercyklerna (orten för de punkter som har ett konstant avstånd från en given rät linje). Vid samma tidpunkt, visserligen fem år senare än Taurinus publikation utkom, meddelade Gauss Schumacher längden av den icke-euklidiska cirkelperimetern och nämnde att figurers likformighet icke förekommer i den icke-euklidiska geometrin. Det han redan 1816 hade framhållit angående existensen av en absolut konstant tyder därpå att denna senaste insikt redan då stått klar för honom.

Jag kommer nu till Bolyai den yngre, med fullt skäl betraktad som en av den icke-euklidiska geometrins grundläggare. Johann Bolyai, son till Gauss vän Wolfgang B., hade följande fadersn fotspår redan tidigt intresserat sig för geometrins grundfrågor. Han ägnade sig åt militärbanan men uppehöll det oaktat fortfarande sitt intresse för geometrin. I november 1823 meddelade han sin far att han lyckats uppbygga ett nytt, från den euklidiska geometrin avvikande system, eller som han entusiastiskt säger: »Jag har ur intet skapat en annan ny värld.» Redan 1820, medan han studerade vid ingenjörakademien i Wien, hade J. Bolyai skrivit om dessa idéer till fadern. Denne, som hela livet igenom dock med rätt ringa framgång hade undersökt parallellteorin, var allt annat än nöjd med att hans son nu ägnade sig åt denna omöjliga uppgift, och han varnade sonen allvarligt för att fortsätta sina försök: »Förlora inte en timmes tid därpå. Det leder till intet resultat utan förgiftar blott hela ditt liv. Under århundraden kommer hundratal av världens bästa geometer få grubbla utan att lyckas bevisa det elfte aksiomet (parallellaxiomet), såframt de inte tar något nytt axiom till hjälp. Jag tror att jag själv här tagit alla tänkbara idéer i betraktande.»

Däri hade Bolyai den äldre säkert rätt, men hans insikter i frågan hade icke fört honom så långt, att han som mål skulle ha ställt sig den systematiska utvecklingen av den *icke-euklidiska* geometrin. Trots alla misslyckanden ville han tydligen hålla fast vid Euklides system.

Oaktat fadersn varningar fortsatte Johann B. sina ansträngningar. Hans ovannämnda resultat (1823) lyckades ej övertyga fadern om den nya teorins betydelse, och de bägge Bolyai beslöto nu lämna frågan till Gauss avgörande. Det förflöt dock många år innan Johann Bolyai fick

sin teori publicerad (»Appendix Scientia Spatii Absolute Veram exhibens«, 1831), och först i februari därpå följande år erhöll Gauss arbetet. En vecka senare var han färdig med lektyren och han skriver i februari 1832 till Gerling: »Jag nämner vidare att jag dessa dagar från Ungern fått mottaga en liten artikel beträffande den icke-euklidiska geometrin, vari jag återfinner alla mina egna idéer och resultat, synnerligen elegant utvecklade, om ock i koncentrerad form, vilket för en obevandrad läsare kan försvåra lektyren. Författaren är en mycket ung österrikisk officer; hans far är min ungdomsvän, med vilken jag 1798 ofta diskuterade frågan, fastän mina idéer då ännu voro långt ifrån det mogna stadium, till vilket denne unge man genom självständiga forskningar nu utvecklat dem. Jag betraktar denne unge geometer v. Bolyai som ett första rangens geni.«

I mars följde sedan Gauss svar till Wolfgang B.: »Nu några ord angående Din sons arbete. Om jag börjat med att säga att jag icke får berömma det känner Du dig säkert förvånad: men jag kan icke annat; beröm skulle nämligen betyda eget beröm, ty hela artikelns innehåll, den väg Din son följer, ävensom resultaten han kommit till, sammanfaller med mina egna meditationer, som jag delvis utfört redan för 30–35 år sedan. I själva verket kommer detta mig som en stor överraskning. Min avsikt var att lämna mina egna arbeten, av vilka endast litet finns upptecknat, för hela min livstid opublicerade. De flesta människor förmå ej uppfatta, vad som här är väsentligt, och jag har endast påträffat få som med intresse skulle ha mottagit vad jag meddelat dem. En förutsättning härför är att man klart uppfattat, vad som egentligen fattas, och detta är för de flesta människor fullkomligt oklart. Däremot var det min avsikt att med tiden anteckna allt, så att det icke skulle försvinna med mig.«

Därtill rekommenderar han Bolyai några speciella problem ur den icke-euklidiska geometrin och ber fadern förmedla sonen hans hjärtliga hälsning och en försäkran om hans särskilda högaktning.

Gauss svar synes i hög grad ha tillfredsställt Wolfgang B. I ett brev till sonen lovordar han det som »synnerligen vackert«, och han anser att det ländrar »vårt fosterland och vårt folk till heder«.

Annorlunda uppfattade emellertid Johann B. saken: han blev kränkt över att Gauss ansåg sig tidigare ha funnit teorin (vilket utan tvivel även var fallet). Även kände Bolyai bitterhet över att Gauss icke offentligt gav erkännande åt hans verk. Bolyais negativa hållning tog senare nästan sjukliga former, då han efter Lobatjevskijs uppträdande miss-tänkte Gauss, för att denne skulle ha arrangerat en intrig för att beröva Bolyai äran av den icke-euklidiska geometrins uppfinnande.

Det har varit skäl att stanna vid denna prioritetsfråga, emedan Johann Bolyais inställning varit ägnad att till eftervärlden förmedla det intrycket att Gauss i denna sak skulle ha handlat inkorrekt, eller åtminstone ovänligt gentemot den unga forskaren. Själv har jag under diskussioner med matematiker kunnat konstatera att Gauss i detta avseende ännu i vår tid ofta strängt kritiseras.

Den som tar del av Gauss egna uttalanden kan föga förena sig om en sådan uppfattning. Gauss erkännande var helt positivt, Bolyais reaktion däremot omotiverat negativ.

Det enda som beträffande Gauss i denna fråga syns problematiskt är att han under årtionden hemlighållit resultat, vilka tydligen av honom utvecklats till ett så moget stadium att han till grund för sin tystlåtenhet föga mera kunde vädja till den princip, som han valt som rättesnöre för publicerandet av sina vetenskapliga resultat: »*Pauca sed matura.*»

Några utdrag av Gauss brev belyser måhända denna fråga. År 1816 hade han i »*Göttinger gelehrte Anzeigen*» refererat tvenne publikationer beträffande parallellteorin. Här hänvisar han till den möjligheten att det elfte axiomat kanske ej alls vore bevisbart, men ansåg, att de förelagda publikationerna icke bidragit till klargörande av denna gamla tvistefråga. Gauss kritik begynner med orden: »*Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfang der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallellinien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgendein Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir redlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständnis scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.*»

Några år senare (1827) nämner Gauss i ett brev till Schumacher att han med anledning av denna kritik blivit föremål för ledsamma angrepp (»*es wurde mit Kot darnach geworfen*«). Och år 1818 skriver han till Gerling: »*Jag gläder mig över att Ni i Er lärobok vågat framföra tankar som peka därpå att parallellteorin, och med den hela vår geometri, kunde vara oriktig, men getingarna, vars bo Ni nu rör i, kommer nog att surra omkring Ert huvud.*» Och i ett brev till Bessel (1829) finner man hans berömda ord (på tal om hans »antieuklidiska geometri« och publicerandet av dessa resultat): »*Kanske detta icke under min livstid kommer att ske, ty jag fruktar bötiernas skrän, om jag fullt skulle uttala min uppfattning.*» I frågan om den icke-euklidiska geometrin iakttog Gauss sålunda

samma tystlåtenhet som över huvud taget vid publicerandet av sina epokgörande matematiska undersökningar. Då man beaktar att Gauss, »princeps mathematicorum«, redan tidigt hos sina samtida åtnjöt en enastående auktoritet, är det icke alltid lätt att förstå den försiktighet som får sitt uttryck i uttalanden av det slag som ovan citerats.

Att tiden var mogen för de icke-euklidiska idéernas frambrytande bevisas på ett särskilt betydelsefullt sätt av J. Lobatjevskijs (1793–1856) framträdande. Som professor vid Kasans universitet behandlade han redan 1815 i sina föreläsningar geometrins grunder på grundvalen av Legendres undersökningar, som han väl kände till. Även Lobatjevskij försökte först bevisa det elfte axiomet, men snart gick det med honom som med de övriga forskarna på detta område: misslyckandet av alla försök i denna riktning fick honom att tvivla på axiomets bevisbarhet. På 1820-talet var han redan övertygad om att uppgiften var omöjlig, och han begynte liksom J. Bolyai (dock utan att känna till dennes eller Gauss försök) konsekvent uppbygga den lära, till vilken parallellaxiomets förkastande leder. Redan 1826 kunde han offentliggöra resultaten av dessa undersökningar. Så har hans namn vid sidan av Bolyais kvarstannat i historien såsom den andre av det icke-euklidiska systemets grundläggare.

Lobatjevskij kände icke till den samtida utvecklingen på sitt forskningsområde, och lika litet visste man om Lobatjevskijs undersökningar i väster. Situationen förändrades först då han 1837 publicerade en framställning av sin nya lära i Tyskland i Crelles Journal. Till Gauss kännedom kom Lobatjevskijs resultat ännu senare (1840), sedan den nämnda undersökningen (»Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien«) hade erhållit en offentlig, men mycket negativ kritik. Med anledning härav skrev Gauss till Encke i februari 1841: »Jag har redan kommit så långt att jag utan större möda kan läsa ryska, vilket bereder mig mycket nöje. Herr Knorre har skickat mig en liten ryskspråkig undersökning, författad av Lobatjevskij i Kasan, och på grund av den och en liten tyskspråkig artikel (om vilken i Gersdorfs Repertorium utkommit en synnerligen tokig (alberne) kritik) skulle jag synnerligen gärna lära känna flera av denne skarpa matematikers arbeten.«

Gauss studerade nu även Lobatjevskijs ryskspråkiga undersökningar, vilket han alltså kunde göra på originalspråket. Lobatjevskijs framställning i dennes tidigare artiklar fann han dock rätt dunkla. Så mycket högre värdesatte han L:s ovannämnda tyskspråkiga publikation, med anledning av vilken han skriver (1844): »Jag minns att jag i Gersdorfs Repertorium om detta verk läste en synnerligen nedsättande kritik, som

hos varje sakkännare väcker det intrycket att den skrivits av en fullkomligt okunnig person. Efter det jag själv fick tillfälle att ta del av denna undersökning, är mitt omdöme därom mycket positivt. Framför allt utmärker den sig genom mycket större konsekvens och precision än Lobatjevskijs större arbeten, som påminner om en tät skog, genom vilken man endast med möda kan finna vägen, så länge man ännu icke lärt känna alla enskilda träd.»

Ur Gauss brev till Schumacher (1846) lånar jag även följande passus: »Jag har åter haft anledning att genomgöra Lobatjevskijs arbete. Den innehåller grunderna till en teori, som kunde vara och bör vara giltig i fall den euklidiska inte är riktig. En viss Schweikart kallade denna geometri astralgeometri, Lobatjevskij benämner den imaginärgeometri. Ni vet att jag redan under 54 års tid alltsedan 1792 (!) har delat samma övertygelse (till den ansluter sig några tillägg, om vilka jag här icke vill tala). Något i materiellt avseende nytt har jag sålunda icke påträffat i Lobatjevskijs arbete, men han utvecklar sin tanke enligt en annan väg än den jag slagit in på, på ett mästerligt sätt, i äkta geometrisk anda. Jag har anledning att fästa Eder uppmärksamhet på detta verk, vars lektyr säkert kommer att bereda Er mycken njutning.»

Man ser att Gauss givit även Lobatjevskij fullt erkännande och all ära.

I det föregående har jag hållit mig till sådana undersökningar där geometrins grundfrågor behandlats elementärt, antingen syntetiskt på euklidiskt vis eller med hjälp av relativt enkla analytiska medel. Det som Gauss nått till på detta område ställer honom, jämsides med Bolyai och Lobatjevskij, som en av den icke-euklidiska geometrins grundläggare. Men Gauss inträngde i geometrin ännu mycket djupare och vidare än någon före honom eller under hans samtid. Hans allmänna ytteori öppnade för den geometriska forskningen helt nya perspektiv, vilka sedan, vidare utvecklade av Riemann, lett den differentialgeometriska forskningen ända till våra dagar.

Gauss ytteori vidgar även på ett synnerligen betydelsefullt sätt hela vår uppfattning om rymdens natur. Endast mot bakgrunden av dessa allmänna perspektiv blev det möjligt att vinna full förståelse i de elementära geometriska systemens (den euklidiska, den icke-euklidiska och den sfäriska geometrins) natur och särställning bland olika möjliga rymdtyper. Det var karakteristiskt för Gauss att han leddes till dessa banbrytande teoretiska insikter på basen av helt praktiska, nämligen geodetiska uppgifter. På initiativ av Schumacher anförtröddes honom 1816 uppdraget att fortsätta det danska geodetiska triangelnätet till det angränsande området i konungadömet Hannover. Gauss antog an-

budet, och så vidtog en verksamhet, som så väl på geodesins som på matematikens område kom att leda utvecklingen in på helt nya banor. Även till sina praktiska uppgifter förhöll sig Gauss med största grundlighet och samtidigt vidsynthet. De geodetiska mättningsarbetena gav honom anledning att klarlägga de buktiga ytornas allmänna matematiska teori, och snart hade han på detta område nått betydligt längre än alla föregångare, av vilka i första rummet bör nämnas Euler, Lambert, Lagrange och Monge.

Gauss teori befattar sig med tvådimensionella ytor i den tredimensionella euklidiska rymden. Det nya momentet i hans betraktelsesätt var framför allt att han konsekvent beaktade ytans *inre egenskaper*, d. v. s. sådana, till vilka man kan nå genom att utföra mätningar på själva ytan, oberoende av den omgivande tredimensionella rymden. Denna tendens har som en ledande princip behärskat den senare geometriska forskningen, inom differentialgeometrin och topologin. I samband med denna princip utvecklade Gauss även en ny »teknik« inom ytteorin: han avstod från det tidigare bruket att framställa ytan med tillhjälp av en ekvation mellan rymdkoordinaterna x, y, z , och införde i stället systematiskt den s. k. parameterframställningen; ytans rymdkoordinater uttrycks såsom funktioner av två parametrar u, v , och i ytteorins fundamentalstorheter förekommer endast dessa »kurvkoordinater« samt funktioner av dem. Endast så blev det möjligt att konsekvent följa den »inre« geometris ståndpunkt.

Den viktigaste storheten i Gauss teori är den s. k. första fundamentalformen, som bestämmer längden ds av ett bägelement på ytan. Om detta linjeelements parameterkoordinater är du och dv så är kvadraten av dess längd:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

en positivt definit kvadratisk form, vars koefficienter E, F, G är funktioner av punkten $P(u, v)$ på ytan. Genom att välja parametrarna u och v i en given punkt lämpligt kan man ernå att $E=G=1$ och $F=0$, och linjeelementet får den pytagoreiska (euklidiska) formen

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

I allmänhet lyckas detta dock endast i en *enskild* punkt P . Ett undantag bildar de ytor, vars »krökning« i Gauss mening försvinner. Dessa ytor äro: planet, de koniska ytorna samt tangentytorna (d. v. s. de regelytor, som alstras av tangenterna till en given rymdkurva). Om de geodetiska (d. v. s. de kortaste) linjerna på ytan tolkas som »räta«, så gäller den euklidiska geometrin på dessa ytor.

Den av Gauss införda krökningen K är ytteorins nyckelstorhet: den bestämmer karaktären av ytans inre geometri. Ett av Gauss huvudresultat, det berömda »theoremata egregium«, utsäger att K kan beräknas med tillhjälp av de tre koefficienterna E , F , G i uttrycket för linjeelementet, alltså enbart med hjälp av den första grundformen.

Krökningens försvinnande är icke endast ett tillräckligt, utan även ett nödvändigt villkor för ytans euklidiska natur. Om däremot K icke försvinner, så kan bägelementet icke framställas i pytagoreisk form på hela ytan, eller ens på en liten tvådimensionell del av denna, och ytans inre geometri avviker då från den euklidiska. En speciellt intressant klass bildas av de ytor vilkas krökning K är konstant, d. v. s. för vilka K har samma värde i alla ytpunkter P . Om denna konstant är positiv, sammanfaller ytans inre geometri med den som gäller på en sfär vars radie $R = 1/\sqrt{K}$. I fall konstanten K är negativ, är ytans inre geometri icke-euklidisk i Bolyai-Lobatjevskijs mening, och konstanten $1/\sqrt{|K|}$ är just den absoluta längd, som i det föregående ofta blivit nämnd. Fastän Gauss icke direkt nämner detta sammanhang, förefaller det svårt att tänka sig att han icke skulle haft detta sakförhållande fullt klart för sig.

Ett av de vackraste resultaten i Gauss teori gäller vinkelsumman i en geodetisk triangel. Om man fixerar tre punkter på ytan, tillräckligt nära varandra, så avviker vinkelsumman i den geodetiska triangel som har nämnda punkter som hörnpunkter från det euklidiska värdet π ($= 180^\circ$). Avvikelsen (d. v. s. π minskad med vinkelsumman), den s. k. vinkeldefekten D , bestäms med tillhjälp av Gauss krökning enligt den enkla formen

$$D = - \int K d\omega ,$$

där $d\omega$ är ytelementet och integrationen utsträcks över triangelns hela yta. *Vinkeldefekten är alltså lika med triangelns totala krökning.* Om detta resultat säger den annars så återhållsamme Gauss (»Disquisitiones generales circa superficies curvas« (1827), paragraf 20): »Denna sats är utan tvivel en av ytteorins elegantaste.«

I fall nu K är konstant, är $D = -KA$, där A är ytinnehållet av den geodetiska triangeln. Om speciellt K är negativ, så som fallet är i Lobatjevskijs geometri, är vinkeldefekten positiv och vinkelsumman alltså mindre än 180° . Defekten är direkt proportionell mot triangelns yta. Då vinkeldefekten å andra sidan självfallet högst är lika med 180° (eller π), så är ytinnehållet av en icke-euklidisk triangel alltid mindre än π : detta är ytan av den största triangeln som kan förekomma i Bolyai-Lobatjevskijs geometri. Mot bakgrunden av denna märkliga sats förstår man vad Gauss åsyftade med sin ovannämnda anmärkning att

han kunde bevisa parallellaxiomet, i fall det skulle finnas trianglar med godtyckligt stort ytinnehåll.

För en yta med positiv krökning överstiger den geodetiska triangelns vinkelsumma det euklidiska värdet π med beloppet

$$D = \int K d\omega .$$

Så förhåller det sig t. ex. med en geodetisk triangel på jordens yta. Emedan defekten är proportionell mot triangelns ytinnehåll, gör den sig märkbar först i trianglar av mycket stora dimensioner. Stort uppseende väckte en av Gauss anställd mätning, som avsåg att bestämma vinklarna i den geodetiska triangel som bestämdes av tre bergtoppar H , B , I (Hohenhagen, Brocken, Inselsberg); dessa bergspetsar befinner sig på ett inbördes avstånd av storleksordningen 100 km. Genom att observera ljussignaler på dessa bergtoppar bestämdes å ena sidan vinklarna H , B , I mellan sträckorna HB , HI , BI , och deras summa befanns vara 180° , i överensstämmelse med den euklidiska geometrin. Å andra sidan bestämde Gauss med hjälp av geodetiska mätningar vinklarna H^* , B^* , I^* av den motsvarande geodetiska triangeln HBI på jordytan. Denna vinkelsumma översteg 180 grader med beloppet $14''.85348$ (jämför Gauss *Disquisitiones*, art. 28), och detta fördelade sig på de enskilda vinklarna på följande sätt:

$$H^* - H = 4''.95113, \quad B^* - B = 4''.95104, \quad I^* - I = 4''.95131 .$$

Om nu jordklotet skulle ha exakt sfärisk form, så borde dessa tre avvikelser alla vara lika ($4''.95116$). De faktiskt förekommande skiljaktigheterna bero på jordens avplattade form. Man ser att de dock icke överstiger $0''.0002$, och Gauss anmärker att dessa avvikelser äro så små att de till och med i de största trianglarna på jordens yta kunna negligeras.

Jag har stannat vid denna fråga, emedan man senare har förmodat att Gauss med sina mätningar även skulle ha strävat till ett annat mål, nämligen till att undersöka, huruvida hans försök för den plana triangelns HBI vinkelsumma $H + B + I$ skulle ge ett resultat avvikande från det euklidiska värdet 180° . Det ovanciterade stället i Gauss text innehåller dock icke någon antydning i en sådan riktning. Detta utesluter självfallet å andra sidan icke den möjligheten att Gauss med sitt försök möjligen *även* velat undersöka giltigheten av den euklidiska geometrin i den tredimensionella världsrymden.

Denna hypotes får stöd av den minnesskrift »Gauss zum Gedächtnis« som ett år efter Gauss död utgavs av Sartorius von Waltershausen. På

tal om Gauss mätningar säger han här följande: »Heliotropen fick genast vid trianguleringsarbetet i Hannover full användning, och en stor triangel, kanske den störste som någonsin blivit mätt, nämligen mellan Brocken, Inselsberg och Hohenhagen, bestämdes med dess hjälp så noggrannt, att summan av de tre vinklarna icke avvek med mera än c:a två tiondedels vinkelsekunder från två rätta vinklar.» Härtill ansluter sig en annan märklig anmärkning i samma skrift: »Enligt Gauss mening är geometrin endast en konsekvent uppbyggd teori, som grundar sig på parallellteorin, vilken postuleras som ett axiom; men han var övertygad om att denna sats är obevisbar; dock vet man på grund av erfarenheten, t. ex. genom försöket angående triangelns Brocken-Hohenhagen-Inselsberg vinklar, att den är aproximativt riktig. Om man däremot icke förutsätter nämnda axiom, följer härav en självständig geometrisk lära, som han (Gauss) tidigare hade utvecklat och benämnt antieuklidisk geometri.»

Även i denna artikel har det hänvisats till uttalanden av Gauss, som på sin sida bevisa att idén angående en *empirisk* icke-euklidisk rymd icke var honom främmande (jämför t. ex. brevet till Taurinus samt Gauss anmärkning beträffande valet av en absolut längdenhet). I Einsteins gravitationsteori har denna tanke på ett överraskande sätt blivit förverkligad.

Gauss idéer, närmast hans ytteori och i anslutning därtill den inre geometrins princip, inspirerade (1854) den unge Riemann till att utveckla sin allmänna differentialgeometri. Denna lära innehöll i två avseenden ett väsentligt framsteg i förhållande till Gauss. För det första ställde sig Riemann från första början genast på den »absoluta» eller den »inre» geometrins ståndpunkt: hans utgångspunkt var alltså icke, såsom hos Gauss, antagandet att den undersökte ytan skulle vara inbäddad i en högre, omgivande euklidisk rymd. För det andra begränsade han icke dimensionstalet av den undersökta rymden utan utvecklade sin teori under förutsättningen att dimensionernas antal kunde vara ett godtyckligt helt tal n .

Det framgår av många uttalanden av Gauss att tanken på en allmän n -dimensionell rymd sysselsatt honom i flere olika sammanhang. Detta synes framför allt ha varit fallet under hans sista levnadsår. På tal om några algebraiska problem säger han t. ex.: »Denna slutlednings egentliga innehåll ansluter sig till en abstrakt storhetslära, oberoende av rymdens egenskaper, ..., en lära som inte ännu utvecklats långt och som icke heller kan behandlas utan att man gör bruk av språkliga begrepp som grundar sig på geometriska bilder.» Under sitt sista levnadsår föreläste Gauss ännu om » n -dimensionella mångfaldar».

Frågan om de olika möjliga elementärgeometriska systemen har fullt klarlagts först av den moderna s. k. »axiomatiska» skolan, sådan som den grundlades av Hilbert i början av detta sekel. Slutgiltig klarhet i dessa spörsmål kunde vinnas endast så att den geometriska teorin som ett *logiskt* system fullständigt avskildes från geometrin uppfattad som ett *empiriskt* system. Den förra teorin avser att genomföra en fullständig logisk analys av geometrins axiom, och dess huvudfråga är undersökningen av axiomens inbördes oberoende och motsägelsefrihet. Däremot är den empiriska geometrin en »naturvetenskap»; den vill klargöra giltigheten av geometrins system i vår empiriska rymd. För att detta problem skall vara meningsfullt, bör man först komma överens om de elementärgeometriska grundbegreppens, särskilt den räta linjens, konkreta fysikaliska motsvarighet. Det står utom allt tvivel att redan Gauss hade insett betydelsen av dessa olika aspekter inom den geometriska problematiken. I olika sammanhang har han framhävt att vår rymduppfattning i avgörande grad grundar sig på erfarenheten, att den sålunda är kunskap a posteriori, och han riktade sin kritik gentemot Kants uppfattning, enligt vilken geometrins grundbegrepp vore givna direkt, a priori, så som tankens nödvändiga »former» («Denkformen a priori»).

Den moderna axiomatiska forskningen har icke inskränkt sig till att betrakta endast parallellteorin, den har fullständigt klarlagt även övriga geometriska grundrelationers och axioms logiska ställning i det elementärgeometriska systemet. I detta sammanhang är det intressant att konstatera att icke heller Gauss begränsat sin kritik endast till parallellteorin. Jag citerar i detta sammanhang vad han nämner i sitt brev till W. Bolyai (1832): »Vill man fullständigt utveckla geometrin bör sådana ord som »emellan« först återföras till klara begrepp, vilket även låter sig göra, men som jag icke någonstans funnit utfört.» Gauss hade sålunda insett att Euklides framställning icke endast i parallellteorin, utan även i samband med begreppet »ordning» (Anordnung) innehåller luckor, som fordrar en djupare behandling.

Även många andra uttalanden av Gauss angående geometrins och de matematiska begreppens natur i allmänhet innehåller överraskande »moderna» insikter. De för tanken osökt till det sätt, på vilket Hilbert åttio år senare i sitt berömda verk angående geometrins grunder utvecklar sin uppfattning om axiomens karaktär. Gauss var även inom den *matematiska kunskapsteorin* en stor föregångare till vår tid. Även i detta avseende har han givit avgörande impulser som fört den exakta forskningen in på de banor som den under de senaste förflutna hundra åren konsekvent har följt.

BOKMELDINGER

BRUCE E. MESERVE: *Fundamental concepts of geometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Cambridge (Mass.), 1955. 9 + 351 pp. \$ 7.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 111.)

Denne bog benyttes sammen med den af samme forfatter tidligere udsendte: »Fundamental concepts of algebra« ved et alment kursus over matematikkens grundbegreber på Illinois University.

Bogens hovedformål er at sætte den sædvanlige euklidiske geometri i relief, idet den fremstilles som et specielt tilfælde af den projektive geometri. Det nås i hovedsagen efter samme retningslinier som i det snart klassiske værk af Veblen & Young: *Projective geometry I-II* (1910–18).

Først opbygges den projektive geometri syntetisk på grundlag af incidensaksiomer, eksistensaksiomer, den såkaldte fundamentalsætning, sætningen om ikke-kollinearitet af en fuldstændig firkants diagonalpunkter og aksiomer om cyklisk ordning af punkterne på en linie, idet disse aksiomer indføres successivt med god belysning af den aksiomatiske metode. Undervejs bevises bl.a. Desargues', Pappus', Pascals og Brianchons sætninger, og ved gentagen konstruktion af det fjerde harmoniske punkt ud fra tre givne punkter eftervises, at der på enhver linie findes et punkt for ethvert rationalt tal og desuden endnu et punkt (svarende til ∞). Det anføres, at man ved yderligere at forudsætte, at der ikke er flere punkter på en linie, ville gøre aksiomsystemet kategorisk, men at man imidlertid også kan opnå dette ved i stedet at postulere, at punktmængden på en linie er isomorf med de reelle tal, suppleret med symbolet ∞ , som man regner med efter visse, nærmere angivne regler. Dermed er man så nået frem til den reelle projektive geometri, og i denne antydes indførelsen af analytisk geometri ved en udførlig redegørelse for inhomogene og homogene punktkoordinater.

Dernæst opbygges den reelle projektive geometri analytisk, idet punkter defineres som klasser af talsæt, punktrækker som punkter, der tilfredsstiller lineære homogene ligninger, projektiviteter som homogene lineære substitutioner, o.s.v., og det klargøres, at syntetisk og analy-

tisk projektiv geometri er to beskrivelser af samme ting. Herefter benyttes fortrinsvis analytiske metoder, f.eks. ved indførelse af polaritet og ved bevis for Steiners sætning.

Den reelle projektive plan specialiseres nu til en affin plan ved udmærkning af en linie som en ideal linie, hvorved parallellisme indføres, og den affine plan specialiseres yderligere til en euklidisk plan ved udvælgelse af en elliptisk involution som absolut involution på den ideale linie, hvorved begrebet normal indføres. De almene affine transformationer og en række specielle affine (herunder euklidiske) transformationer fås ved (geometriske og algebraiske) betingelser på de projektive transformationer. Inden for de enkelte geometriformer benytter forfatteren lejligheden til at illustrere den oprindeligt af Felix Klein foreslåede opfattelse af geometrien som en undersøgelse af de egenskaber, der er invariante under en transformationsgruppe. På det projektive grundlag indføres de ikke-euklidiske geometrier på simpel og naturlig måde, men også de øvrige sædvanlige modeller tages med i billedet af disse.

Før de ikke-euklidiske geometrier behandles, indskydes et afsnit om geometriens historie fra Babylonerne til de moderne regnemaskiner. Parallelteoriens historie lægger op til omtale af ikke-euklidisk geometri.

Det sidste afsnit omhandler topologi, motiveret ved at projektiv geometri kan betragtes som et specielt tilfælde af topologi. Formålet med dette afsnit er at vække interessen for topologi.

Bogen dækker således et stort område. Når det kan gøres på tilfredsstillende måde, skyldes det, at der ikke tilstræbes en helt gennemført behandling af alle herunder hørende problemer. Forfatteren trækker hovedlinierne klart op og belyser de til grund liggende principper på en instruktiv måde. Læseren følges et godt stykke på vej med udførlige beviser, medens beviserne for senere sætninger ofte stilles som opgaver eller udelades, hvis de er for komplicerede inden for bogens rammer. I sidste tilfælde gøres sætningerne plausible ved appel til læserens på forhåndskendskab til euklidisk geometri baserede intuition, eller deres betydning illustreres ved anvendelse af dem. Bogen er opdelt i tilpas korte afsnit, der indledes med en oversigt over, hvad meningen er med det følgende, og afsluttes med et overblik over, hvad der er nået. En pædagog vil glæde sig over hyppige gentagelser og pointeringer.

Mindre indvendinger: Den p. 145 konstruerede involution på en linie ses næppe umiddelbart at være projektiv. Bestemmelsen af fixpunkter ved en homotetisk transformation under udledelsen p. 170 af ligningerne for en parallelforskydning er ikke helt klar. Transformerings af den absolute involution p. 187 er kun halvvejs udført. Det er vanskeligt at se forskellen på opgaverne 3 og 7, p. 189. I opgave 2, p. 191, kan vi også have

$a_{11} = a_{22} = 0$ og k vilkårlig. Hvis de p. 195 betraktede to spejlinger har samme centrum, er $a = a'$ og $b = b'$ (altså $k = 1$).

Bogen er meget at anbefale som en let læselig indførelse i projektiv geometri (den forudsætter kun almindeligt kendskab til reelle tal og euklidisk geometri); den lægger vægt på det principielle og giver samtidig et godt overblik over den projektive geometris almene betydning.

P. O. Neerup

I. M. WINOGRADOW: *Elemente der Zahlentheorie*. (Übersetzung der 6. Auflage des russischen Originals, Moskva 1952.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 8 + 156 S. DM 10.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 161.)

Dette er en usedvanlig klar og velskreven bok. Stoffutvalget er i det store og hele det samme som i en hvilken som helst annen lærebok med et grunnkurs i tallteori som formål, men forfatteren har klart i større grad enn man vanligvis finner det, å gi fremstillingen en knapp men lettforståelig form uten unødvendige utbroderinger. En leser som bare ønsker å få et innblikk i tallteoriens grunnlag kan nøye seg med å lese gjennom bokens tekststoff. For dem som søker en dypere forståelse av tallteorien og som eventuelt har tenkt å arbeide innen denne gren av matematikken, har boken også meget å gi. Til hvert kapittel er nemlig knyttet en lang rekke oppgaver som delvis omhandler problemer som i andre og større lærebøker er tatt med i stoffutvalget. Noen av oppgavene har dessuten tilknytning til forfatterens arbeider om trigonometriske summer og vil være til stor hjelp for en leser som senere vil prøve å trenge inn i dette ikke så helt lett tilgjengelige felt.

Denne tyske utgave av Winogradows bok er oversatt fra den 6te utgave av det russiske originalverk, og er stort sett identisk med den engelske utgave, *An Introduction to the theory of numbers*, som kom ut på Pergamon Press for et år siden.

På et sted har jeg dog funnet en liten forandring fra den engelske utgave. Jeg vil nevne den her idet jeg stusset endel på dette punkt da jeg første gang tok for meg det engelske eksemplar av boken. Oppgave 9(c) under kapitlet om kvadratiske rester er i norsk oversettelse fra den engelske utgave:

La p være av formen $4m + 1$, $(k, p) = 1$,

$$S(k) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x(x^2 + k)}{p} \right).$$

Bevis at (D. S. Gorshkov)

(α) $S(k)$ er like,

(β) $S(kt^2) = \left(\frac{t}{p}\right) S(k)$,

(γ) for $\left(\frac{r}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ er $p = \left(\frac{1}{2}S(r)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}S(n)\right)^2$.

Oversettelsen fra den tyske utgave blir identisk, bortsett fra at man der har sløffet navnet D. S. Gorshkov. Det var også dette navnet som forvirret meg i sin tid, idet de ovennevnte resultater (α), (β), (γ) jo i den vestlige verden er knyttet til navnet E. Jacobsthal.

Sigmund Selberg

DICK WICK HALL — GUILFORD L. SPENCER II: *Elementary topology*. John Wiley & Sons, New York, 1955. 12 + 303 pp. \$ 7.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 159.)

Författarna avser att med denna bok kunna införa topologi på ett så tidigt stadium av universitetsstudierna som möjligt. Boken är avsedd att vara en nybörjarbok i topologi lämpad som kursbok för en elementär kurs vid ett amerikanskt universitet eller college. Den nordiske matematikstuderanden torde få sina första kunskaper i topologi (även om han inte alltid får höra namnet) först inom teorin för en eller flera reella variabler och senare inom teorin för analytiska funktioner och inom Lebesgue-teorin. De enkla topologiska egenskaper hos linje, plan och allmänt n -dimensionellt rum, som han därvid inläär, täckes av ungefär en tredjedel av föreliggande bok. Återstoden av boken innehåller dels de enklaste definitionerna och satserna för metriska och topologiska rum, dels en utförlig och modernt skriven redogörelse för en del djupare egenskaper hos planets topologi, innehållande bl. a. ett mängdteoretiskt bevis för Jordans kurvsats.

En av bokens stora förtjänster är dess grundlighet. Författarna har vinnlagt sig om att skriva en utförlig text. Så t. ex. införes varje svårare begrepp två gånger, först i ett löst resonemang och därefter i en formell definition. Boken torde därför i förhållande till det stoff den innehåller vara lättläst. Åtskilliga exempel och övningsproblem förhöjer ytterligare bokens värde.

Vad som däremot saknas i boken är all form av kombinatorisk topologi. Sålunda saknas en sådan »elementär» sats som Brouwers fixpunktssats. Vad slags topologi som skall kallas elementär är givetvis en smaksak. Men med det innehåll boken har torde en bättre titel ha varit »Elementary point-set topology».

Olof Hanner

BURTON W. JONES: *The theory of numbers*. Rinehart & Co., New York, 1955. 11 + 143 pp. \$ 3.75.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 159.)

Burton W. Jones är professor vid Colorados universitet och gav här-området ut en lärobok i teorien för kvadratiske former. Föreliggande lärobok är närmast avsedd för blivande lärare vid amerikanska secondary och elementary schools, och speciellt de första kapitlen är författade med tanke på detta. Författaren framhåller i förordet, att hans arbete inte är avsett för självstudier utan bör gås igenom under en akademisk lärares ledning. »The text is not supposed to be read like a novel.»

Första kapitlet inledes med en relativt ingående behandling av det naturliga talsystemets axiomatiska uppbyggnad, varvid bl. a. återges Peanos axiomsystem. Här som överallt i arbetet interfolieras framställningen av problem och exempel, som förefaller väl ägnade att hjälpa läsaren att smälta och förstå det just genomgångna avsnittet. Ofta är exemplen hämtade från teorien för periodiska decimalbråk, givetvis med tanke på de blivande lärarna. Speciellt gäller detta kapitel 2, som handlar om kongruenser.

I kapitel 3 behandlas diofantiska ekvationer av första graden, Pells ekvation och pytagoreiska tal. Kap. 4 innehåller de inledande partierna av teorien för kedjebråk, som föres fram t. o. m. bestämningen av fundamentallösningen till en Pells ekvation. Framställningen inledes med ett avsnitt om Fibonaccital. Kapitel 5 omfattar m -te potensrester och primitiva rötter, och i kap. 6 ges teorien för kvadratiske rester. Man lägger här märke till att den kvadratiske restsatsen härledes med hjälp av Eisensteins geometriska bevis. Kapitlet och boken avslutas med ett bevis för satsen att varje primtal av formen $4n + 1$ är en summa av två kvadrattal.

På grund av sin skolmässiga karaktär förefaller Jones' arbete mindre lämpat för universitetsstuderande i de nordiska länderna. Trots varningen att läsa boken som en roman får läsaren ibland ett intryck av att författarens syfte snarare varit att ge läsaren en lättsmält matematisk allmänbildning än de första grunderna av en teori, som kan utbyggas i olika riktningar. I motsats till Winogradows lärobok, som har samma antal sidor och nyligen översatts till tyska och engelska, saknas exempel med vidare syftning. Med hänsyn till sitt ringa omfång är boken dessutom ganska dyr i jämförelse med exempelvis Nagells bekanta lärobok.

Bengt Stolt

MOTTATTE BØKER

Einar Andersen: *Adjustment of observations by the method of least squares*. (Mém. de l'Inst. Géodésique de Danemark, série 3, tome 22.) København, 1955. 51 s.

The general problem of adjustment 10–13 * The solution of the normal equations 14–18 * Evaluation of accuracy 19–21 * The weight of a function of measured and non-measured quantities after the adjustment 22–23 * Special cases 24–26 * Free functions 27–30 * Transformation of functions of observations into free functions 31–35 * Numerical examples 38–48 * References 49–50 * Notations 51.

M. Baldassarri: *Algebraic varieties*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 12.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 9 + 195 S. DM 36.00.

A survey of the foundations 1–17 * The resolution of singularities 17–26 * Linear systems 26–36 * The geometric genus 36–46 * The arithmetic genus 47–64 * Algebraic and rational equivalence 64–83 * The Abelian varieties from the algebraic viewpoint, and related questions 83–102 * Theory and applications of the canonical systems 102–125 * The algebraic varieties as complex-analytic manifolds 125–140 * The applications of stack theory to algebraic geometry 141–162 * The superficial irregularity and continuous systems 162–178 * Bibliography 179–191 * Index 192–195.

Ludwig Bieberbach: *Einführung in die konforme Abbildung*. Fünfte, erw. Aufl. (Sammlung Götschen 768/768a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1956. 180 S., 42 Fig. DM 4.80.

Grundlegung. Lineare Funktionen 5–37 * Rationale Funktionen 37–49 * Prinzip des Randes und Spiegelungsprinzip 49–54 * Weitere Abbildungen durch gegebene Funktionen 54–73 * Abbildung gegebener Gebiete 73–179 * Sachverzeichnis 180.

E. Bodewig: *Matrix calculus*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1956. 10 + 334 pp. Guilders 26.50.

I. Matrix calculus 1–85 * II. Linear equations: Direct methods 86–125 * Iteration methods 125–181 * III. Inversion of matrices: Direct methods 182–199 * Iteration methods 199–206 * Geodetic matrices 206–229 * IV. Eigenproblems: Iteration methods 230–311 * Direct methods 311–327 * Literature 328–331 * Index 332–334.

E. J. Dijksterhuis: *Archimedes*. (Acta historica scientiarum naturalium et medicinalium 12.) Published by the University Library, Copenhagen. Ejnar Munksgaard, København, 1956. 422 pp. Hft. d. kr. 60.00, indb. d. kr. 68.00.

The life of Archimedes 9–32 * The works of Archimedes. Manuscripts and editions 33–49 * The elements of the work of Archimedes 49–141 * On the sphere and cylinder. Book I 141–187 * On the sphere and cylinder. Book II 188–221 * Measurement of a circle 222–240 * On conoids and spheroids 240–263 * On spirals 264–285 * On the equilibrium of planes or centres of gravity of planes. Book I 286–313 * The method of mechanical theorems 313–336 * Quadrature of the parabola 336–345 * On the equilibrium of planes. Book II 346–360 * The sand-reckoner 360–373 * Floating bodies 373–398 * Miscellaneous 398–416 * Bibliography 417–418 * Index of names 419–422.

J. O. Fleckenstein: *Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton*. (Beiheft Nr. 12 zur Zeitschrift »Elemente der Mathematik«.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1956. 27 S. Brosch. SFr. 4.65.

Die ideengeschichtlichen Voraussetzungen der Entdeckung des Infinitesimalkalküls durch Isaac Newton 2–11 * Der Infinitesimalkalkül von Newton 12–19 * Newton im Prioritätsstreit mit Leibnitz 19–26 * Literatur 27.

David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. Achte Auflage, mit Revisionen und Ergänzungen von Paul Bernays. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1956. 7 + 251 S., 124 Fig. Kart. DM 11.40, hln. DM 13.40.

Die fünf Axiomgruppen 2–33 * Die Widerspruchsfreiheit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome 34–50 * Die Lehre von den Proportionen 51–68 * Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene 69–82 * Der Desarguessche Satz 83–103 * Der Pascalsche Satz 104–114 * Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I–IV 115–124 * Schlusswort 124–125 * Anhang I–V 126–240 * Supplement I–III 241–249 * Verzeichnis der Begriffsnamen 250–251.

Lancelot Hogben: *Zahl und Zufall*. Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 484 S., 84 Fig. DM 58.50.

Figurierte Zahlen und Elemente der Näherungsrechnung 11–65 * Kombinatorik 66–116 * Hypothese und Erwartung 117–166 * Die Bestimmung eines geschätzten Unterschiedes 167–226 * Signifikanz und Vertrauen 227–266 * Über die Momentenmethode 267–318 * Die Bestimmung einer mittleren Differenz (für grosse Probenmengen) 319–376 * Korrelation und Unabhängigkeit 377–415 * Das Wesen der konkomitanten Variation 416–454 * Ausblick auf Teilmengensysteme 455–482 * Stichwortverzeichnis 483–484.

Guido Hoheisel: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Fünfte Aufl. (Sammlung Göschen 920.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1956. 129 S. DM 2.40.

Die Differentialgleichung erster Ordnung 5–50 * Differentialgleichungen höherer Ordnung 50–60 * Lineare Differentialgleichungen 60–88 * Randwertaufgaben 88–129.

C. Hyltén-Cavallius — L. Sandgren: *Matematisk analys* (för nybörjarstadiet vid universitet och högskolor). Lunds studentkårs intressebyrå, Lund, 1956. 16 + 467 s. Sv. kr. 55.00, vid rekvisition direkt från Lunds studentkårs intressebyrå sv. kr. 41.50.

Induktion och kombinatorik 1–10 * De reella talen 11–35 * Absolutbelopp, medelvärden och olikheter 36–45 * De komplexa talen 46–67 * Några satser ur talteorin och algebran 68–102 * Funktionsbegreppet och de elementära funktionerna 103–132 * Gränsvärden 133–177 * Kontinuerliga funktioner 178–196 * Derivator 197–241 * Integraler 242–304 * Taylors formel med tillämpningar 305–333 * Oändliga serier 334–379 * Maxima och minima 380–389 * Undersökning av plana kurvor och andra tillämpningar av analysen 390–435 * Historik 436–443 * Svar till övningar 444–460 * Index 461–466 * Symboler 467.

Konrad Knopp: *Infinite sequences and series*. (Translated by F. Bagemihl.) Dover Publ., New York, 1956. 5 + 186 pp. \$ 1.75. cloth \$ 3.50.

Introduction and prerequisites 1–17 * Sequences and series 18–51 * The main tests for infinite series. Operating with convergent series 52–98 * Power series 99–124 * Development of the theory of convergence 125–148 * Expansion of the elementary functions 149–162 * Numerical and closed evaluation of series 163–174 * Bibliography 175–176 * Index 177–186.

Nichtlineare Regelungsvorgänge. (Beihefte zur Regelungstechnik.) Vorträge, gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Darmstadt am 8. September 1955, zusammengestellt von Wolfgang Hahn. Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 107 S., 67 Fig. DM 14.00.

K. Magnus: Das *A*-Kurven-Verfahren zur Berechnung nichtlinearer Regelvorgänge 9–28 * J. M. L. Janssen und J. C. Vermeulen: Behandlung von Regelungsproblemen mit Hysteresis und Reibung nach der Methode der Beschreibungsfunktion 29–50 * W. Hahn: Behandlung zweier Stabilitätsprobleme mit der zweiten Methode von Ljapunov 51–66 * E. Pestel: Anwendung der Ljapunovschen Methode und des Verfahrens von Krylov-Bogoljubov auf ein technisches Beispiel 67–85 * W. Haacke: Untersuchung eines nichtlinearen Regelkreises in einer mehrblättrigen Phasenebene 86–107.

Numerical analysis. Vol. VI: Proceedings of the sixth symposium in applied mathematics of the American Mathematical Society. Edited by John H. Curtiss. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1956 (for the American Mathematical Society). 6 + 303 pp. sh. 73/–.

Richard Bellman: Computational problems in the theory of dynamic programming 1–10 * Stefan Bergman: Some methods for solutions of boundary-value problems of linear partial differential equations 11–29 * R. H. Bruck: Computational aspects of certain combinatorial problems 31–43 * D. R. Clutterham and A. H. Taub: Numerical results on the shock configuration in Mach reflection 45–58 * Joseph W. Fishbach: Some applications of gradient methods 59–72 * S. P. Frankel: Some qualitative comments on stability considerations in partial difference equations 73–75 * Cecil Hastings, Jr., Jeanne Hayward, and James P. Wong, Jr.: Approximations in numerical analysis — A report on a study 77–81 * Magnus R. Hestenes: The conjugate-gradient method for solving linear systems 83–102 * Emma Lehmer: Number theory on the SWAC 103–108 * T. S. Motzkin: The assignment problem 109–125 * P. C. Rosenbloom: The method of steepest descent 127–176 * Arthur Sard: Function spaces and approximation 177–185 * Olga Taussky: Some computational problems in algebraic number theory 187–193 * C. B. Tompkins: Machine attacks on problems whose variables are permutations 195–211 * J. L. Walsh: Best-approximation polynomials of given degree 213–218 * S. E. Warschawski: Recent results in numerical methods of conformal mapping 219–250 * Wolfgang Wasow: On the asymptotic transformation of certain distributions into the normal distribution 251–259 * Helmut Wielandt: Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations 261–282 * David Young: On the solution of linear systems by iteration 283–298 * Index 299–303.

Friedrich O. Ringleb: *Mathematische Formelsammlung*. Sechste, erw. Aufl. (Sammlung Götschen 51/51a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1956. 278 S. DM 4.80.

Arithmetik und Kombinatorik 6–23 * Algebra 23–39 * Zahlentheorie 40–47 * Elementare Reihen 47–53 * Ebene Geometrie 53–74 * Stereometrie 74–82 * Ebene Trigonometrie 82–93 * Sphärische Trigonometrie 93–100 * Mathematische Geographie und Astronomie 100–110 * Analytische Geometrie der Ebene 110–142 * Analytische Geometrie des Raumes und Vektorrechnung 142–174 * Differentialrechnung 174–203 * Integralrechnung 204–227 * Differentialgeometrie 227–259 * Differentialgleichungen 259–276 * Verzeichnis der wichtigsten Begriffe 277–278.

Andreas Speiser: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*. Vierte, erw. Aufl. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, math. Reihe, 22.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1956. 11 + 271 S., 43 Fig. Brosch. SFr. 23.00, ganzl. SFr. 26.00.

Einleitung 1–10 * Die Grundlagen 10–28 * Normalteiler und Faktorgruppen 28–46 * Abelsche Gruppen 46–61 * Konjugierte Untergruppen 61–64 * Sylowgruppen und p -Gruppen 64–75 * Symmetrien der Ornamente 76–97 * Die Krystallklassen 98–104 * Permutationsgruppen 105–119 * Automorphismen 119–136 * Monomiale Gruppen 136–143 * Darstellung der Gruppen durch lineare homogene Substitutionen 143–166 * Gruppencharaktere 166–192 * Anwendungen der Theorie der Gruppencharaktere 193–203 * Arithmetische Untersuchungen über Substitutionsgruppen 204–214 * Gruppen von gegebenem Grade 214–230 * Die allgemeinen

linearen homogenen Substitutionen und ihre Invarianten und Kovarianten 230–240 * Gleichungstheorie 240–256 * Schluss 256–257 * Anhang 258–266 * Namenverzeichnis 267–268 * Sachverzeichnis 269–271.

S. Stoilow: *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*. Deuxième édition augmentée de notes sur les fonctions analytiques et leurs surfaces de Riemann. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions.) Gauthier-Villars, Paris, 1956. 16 + 194 pp. fr. 1700.

Généralités et considérations topologiques préliminaires 1–29 * Les surfaces de Riemann et les fonctions correspondantes 30–62 * Les propriétés topologiques des surfaces de Riemann 63–79 * Les types topologiques des surfaces de Riemann 80–101 * Les transformations intérieures des variétés à deux dimensions et les fonctions analytiques d'une variable complexe 102–121 * Étude topologique des fonctions analytiques et des recouvrements riemanniens 122–146.

Additions au texte de la première édition:

Note I. Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de Riemann ont des frontières totalement discontinues 149–166 * *Note II.* Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de Riemann a sa frontière de mesure harmonique nulle 167–182 * *Note III.* Remarques sur la définition des points singuliers des fonctions analytiques multiformes 183–186 * *Note IV.* Note sur les fonctions analytiques multiformes 187–191.

Bibliographie 192 * Table des matières 193–194.

Michio Suzuki: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 10.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 7 + 96 S. DM 16.50.

Groups with a special kind of subgroup lattice 3–31 * Isomorphisms of subgroup lattices 31–57 * Homomorphisms of subgroup lattices 57–85 * Dualisms of subgroup lattices 85–92 * Bibliography 92–94 * Index 95–96.

B. L. van der Waerden: *Erwachende Wissenschaft*. Aus dem Holländischen übersetzt, mit Zusätzen vom Verfasser. (Wissenschaft und Kultur 8.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1956. 488 S., 180 Fig. Ganzl. SFr. 37.50.

Zur Einführung 13–20 * Ägyptische und babylonische Mathematik: Die Ägypter 23–58 * Zahlensysteme, Ziffern und Rechenkunst 59–99 * Babylonische Mathematik 100–130 * Die Mathematik der Griechen: Das Jahrhundert von Thales und Pythagoras 132–175 * Das goldene Zeitalter 176–242 * Die Zeit Platons 243–330 * Die Alexandrinische Zeit (330–200 v. Chr.) 331–436 * Niedergang der griechischen Mathematik 437–480 * Sachverzeichnis 481–488.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 97–100 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Holmen, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 10. februar 1957.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

97. En kurve K har parameterframstillingen

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s),$$

der s er buelengden, målt fra et punkt P , og der φ og ψ er $n+1$ ganger deriverbare.

La C være en annen kurve som går gjennom P , oppfyller de samme betingelser som K , og dessuten har en berøring av n -te orden ($n \geq 2$) med K i P . Anta at buelengden for begge kurver er orientert i samsvar med en orientert fellestangent i P . Sett av buelengden s fra P langs K til Q_K og fra P langs C til Q_C . Trekk $Q_K Q_C$ til skjæring med kurvenormalen i P , og kall skjæringspunktet T . Vis at

$$\lim_{s \rightarrow 0} PT = \frac{n+2}{n+1} R,$$

der R er den felles krumningsradius for kurvene i P .

Haakon Waadeland

98. Sett, for $|z| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{3n}} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m.$$

La m være et naturlig tall med primtaloppspaltingen

$$m = 2^{\alpha} 3^{\beta} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l},$$

der $p_1, \dots, p_k$ og $q_1, \dots, q_l$ henholdsvis er primtall av formen $6h+1$ og $6h-1$.

Finn en formel for a_m , og utled av den at

1. a_m er positiv, a) dersom $\alpha=0$, og b) dersom $\alpha=1$ og alle β_i er jamne (like) tall.

2. a_m er null, a) dersom $\alpha=1$ og minst ett β_i er odde (ulike), og b) dersom $\alpha=2$ eller 3 og $l=0$ (ingen primdivisorer av formen $6h-1$).

3. a_m er negativ i alle andre tilfelle.

R. Tambs Lyche

99. La $n > 1$ være et naturlig tall. Dersom A og B er fritt valte naturlige tall, setter vi

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{A+i}{n} \right] \cdot \left[\frac{B+i}{n} \right],$$

der $[x]$ som vanlig betyr det største hele tall som ikke overstiger x . Vis at

$$\left[\frac{AB}{n} \right] \leq S \leq \left[\frac{AB}{n} \right] + \left[\frac{n+3}{4} \right].$$

I hvilke tilfelle gjelder likhetstegnet til venstre, resp. til høyre?

R. Tambs Lyche

100. Bevis formelen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \binom{2n}{n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-2)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 3 \ln^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

W. Ljunggren

101. Låt $x_1, x_2, \dots, x_n$ vara givna reella tal. Sätt $s_0 = 1$, $s_1 = \sum x_i$, $s_2 = \sum x_i x_k$, $\dots$, $s_n = x_1 x_2 \dots x_n$. Visa, att

$$\sum \operatorname{arctg} x_i \equiv \frac{s_1 - s_3 + s_5 - \dots}{s_0 - s_2 + s_4 - \dots} \pmod{\pi},$$

och att

$$(s_1 - s_3 + s_5 - \dots)^2 + (s_0 - s_2 + s_4 - \dots)^2 = \prod (1 + x_i^2).$$

Carl-Erik Fröberg

102. Funksjonen

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{\sqrt{|x|}}, \quad f(0) = 0,$$

er deriverbar for alle $x \neq 0$. Vis at den deriverte ikke er begrenset i intervallet $[-1, +1]$, men at kurven $y=f(x)$ likevel har buelengde.

103. Røttene i ligningen

$$(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n) = A$$

er $b_1, b_2, \dots, b_n$. Angi røttene i ligningen

$$(x-b_1)(x-b_2) \dots (x-b_n) + A = 0.$$

104. I rommet er det gitt n forskjellige plan med egenskapene: To plan er aldri innbyrdes parallelle, tre plan er aldri parallelle med samme rette linje, og fire plan går aldri gjennom samme punkt. I hvor mange områder blir rommet delt av disse plan? (Vink: Betrakt skjæringsfiguren i det n -te plan med de øvrige $n-1$.)

105. Den ene fot til en fotgjenger har en horisontal hastighet v bestemt ved formelen

$$v = v_0(\sin \omega t + |\sin \omega t|).$$

Studer bevegelsen, og bestem fotgjengerens gjennomsnittlige marsjfart.

LØSNINGER

90. Med hjelp av setningen om at to polynomer med felles nullpunkter er like på en konstant faktor nær, skal en bevise multiplikasjonssetningen for determinanter.

Helge Tverberg

Løsning: La A og B være to $n \times n$ matriser og λ en variabel skalar, og sett

$$U = A - \lambda E, \quad V = B - \lambda E.$$

Determinantene

$$(1) \quad \begin{aligned} |U| &= U(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \dots + |A| \\ |V| &= V(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \dots + |B| \end{aligned}$$

er da polynomer i λ , og deres nullpunkter er bestemt ved

$$(2) \quad \begin{aligned} U(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \exists x \ \& \ \lambda_i \rightarrow x^* A - \lambda_i x^* = 0^* \\ V(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \exists x \ \& \ \lambda_i \rightarrow Bx - \lambda_i x = 0. \end{aligned}$$

(x er en kolonnevektor og x^* dens transponerte.) Setter vi videre

$$|U \cdot V| = W(\lambda) = \lambda^{2n} + \dots + |A \cdot B|,$$

har vi $W(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \exists x \ \& \ \lambda_i \rightarrow$

$$ABx - \lambda_i(A+B)x + \lambda_i^2 x = (A - \lambda_i E)(Bx - \lambda_i x) = 0$$

(3) eller

$$x^* AB - \lambda_i x^* (A+B) + \lambda_i^2 x^* = (x^* A - \lambda_i x^*) (B - \lambda_i E) = 0^*.$$

Av (1), (2) og (3) følger så umiddelbart

$$|\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}| = |\mathbf{U}| \cdot |\mathbf{V}|.$$

Rolv Rasmussen

91. $\mathbf{A}$ är en reell matris (dvs. en matris med reella element). Visa, att nödvändiga och tillräckliga villkoret för att det skall finnas en positivt definit symmetrisk matris $\mathbf{G}$, sådan att $\mathbf{GA}$ är symmetrisk, är att alla egenvärden till $\mathbf{A}$ är reella och att egenvektorerna spänner upp hela rummen.

Lars Hörmander

Lösning: La $\mathbf{A}$ være en reell $n \times n$ matrise og $\mathbf{G}$ en positiv definit symmetrisk (p. d. s.) matrise, slik at $\mathbf{GA}$ er symmetrisk, $\mathbf{GA} = (\mathbf{GA})^*$ (* betyr at matrisen er transponert). Da $\mathbf{G}$ er p. d. s., finnes det en ikke-singulær matrise $\mathbf{P}$ slik at $\mathbf{G} = \mathbf{P}^* \mathbf{P}$, og vi har

$$\mathbf{P}^* \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \mathbf{P}^* \mathbf{P},$$

hvorav følger at matrisen

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})^* \mathbf{A}^* \mathbf{P}^* = \mathbf{A}$$

er symmetrisk. Følgelig er alle karakteristiske røtter (egenverdier) i $\mathbf{A}$ reelle. Videre eksisterer det en ortogonal matrise $\mathbf{U}$ slik at

$$\mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{\Lambda}$$

er en diagonalmatrise. Følgelig har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{UP})^{-1} = (\mathbf{UP})^{-1} \mathbf{A},$$

hvor $(\mathbf{UP})^{-1}$ er ikke-singulær og sammensatt av $\mathbf{A}$'s karakteristiske vektorer, som altså er lineært uavhengige.

La på den annen side $\mathbf{A}$ være en matrise hvis karakteristiske røtter alle er reelle og hvis karakteristiske vektorer er lineært uavhengige. La videre $\mathbf{V}$ være en matrise sammensatt av $\mathbf{A}$'s karakteristiske vektorer, og $\mathbf{\Lambda}$ en diagonalmatrise med $\mathbf{A}$'s karakteristiske røtter som elementer. Da er

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}^* = \mathbf{V}^* \mathbf{A}^* (\mathbf{V}^{-1})^*,$$

slik at

$$(\mathbf{V} \mathbf{V}^*)^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}^* (\mathbf{V} \mathbf{V}^*)^{-1},$$

hvor $(\mathbf{V} \mathbf{V}^*)^{-1} = \mathbf{G}$ er p. d. s.

Rolv Rasmussen

Også løst av Helge Tverberg.

92. Funksjonen

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

er regulær for $|z| < 1$. Vis at koeffisienten a_m i rekken

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$$

aldri er negativ. Dersom m har primtaloppspaltingen

$$m = 2^{\alpha_1} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l},$$

der $p_1, \dots, p_k$ er primtall av formen $4h+1$, mens $q_1, \dots, q_l$ er primtall av formen $4h+3$, så er

$$a_m = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \cdot \frac{1 + (-1)^{\beta_1}}{2} \dots \frac{1 + (-1)^{\beta_l}}{2},$$

slik at a_m da, og bare da, er null dersom m er delelig med en odde (ulike) potens av et primtall av formen $4h+3$.

R. Tambs Lyche

Løsning: Ved å sammenligne potensrekken

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$$

med dobbeltrekken

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} z^{(2\mu+1)n}$$

framgår det at

$$a_m = \sum_{2\mu+1|m} (-1)^{\mu}.$$

En ulike divisor $2\mu+1$ i m kan skrives

$$2\mu+1 = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} q_1^{b_1} \dots q_l^{b_l}.$$

Ved på alle mulige måter å danne produkter med $0 \leq a_i \leq \alpha_i$, $0 \leq b_j \leq \beta_j$, framkommer alle ulike divisorer i m . En slik divisor er av formen $4h+1$ eller $4h+3$ etter som summen $b_1 + \dots + b_l$ er et like eller ulike tall, og følgelig er

$$(-1)^{\mu} = (-1)^{b_1 + \dots + b_l}.$$

Oppfattes p_i og q_j som tegn for variable størrelser, gjelder identiteten

$$\sum_{\substack{0 \leq a_i \leq \alpha_i \\ 0 \leq b_j \leq \beta_j}} p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} q_1^{b_1} \dots q_l^{b_l} = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{a=0}^{\alpha_i} p_i^a \right) \cdot \prod_{j=1}^l \left(\sum_{b=0}^{\beta_j} q_j^b \right).$$

Ved i denne identitet å sette $p_i = 1$, $q_j = -1$, framkommer

$$a_m = \sum_{2\mu+1|m} (-1)^{\mu} = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \cdot \frac{1 + (-1)^{\beta_1}}{2} \dots \frac{1 + (-1)^{\beta_l}}{2}.$$

Johannes Kvamsdal

Også løst av Anders Bager, L. Carlitz, H. Killingbergtrø, Henrik Meyer, Rolv Rasmussen og Helge Tverberg.

PRISTÄVLING FÖR FINSKA LÄROVERKSELEVER

Finlands matematik- och fysiklärarförbund utlyser en pristävling i matematik, i vilken alla läroverkselever har rätt att delta. Av de sex uppgifterna bör minst fyra lösas. Lösningarna renskrivas med bläck, figurena kan ritas med blyerts eller tusch. Deltagare bör uppge namn, adress, klass och läroverk samt bifoga en försäkran om att han eller hon självständigt har löst uppgifterna.

Två penningpris, ett på 5000 mk och ett på 3000 mk, kommer att utdelas. Extrapris kan komma i fråga.

Lösningarna bör insändas till Pristävlingskommittén före den 15 februari 1957 under adress fil. dr. Inkeri Simola, Rajasaarenk. 5, Helsinki.

1. Cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ samt punkten $A(a; 0)$ på x -axeln är givna. P och Q betecknar två punkter på cirkelns periferi, vilka ligger symmetriskt till y -axeln, och O är origo. Vilken är orten för de räta linjerna AP :s och OQ :s skärningspunkt, då P beskriver cirkelperiferin? Hur beror orten av värdet på a ?

2. För vilka värden på x konvergerar serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x} \right)^n = 1 + \frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x} + \left(\frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x} \right)^2 + \dots ?$$

Framställ grafiskt seriens summa.

3. Lös olikheten

$$2 \log_k x < \log_{1/k}(2x+3), \quad k > 0.$$

4. Undersök om ekvationen

$$\sin [\sin (\sin x)] = \sin [\cos (\cos x)]$$

har några lösningar. (De siner och cosiner, som förekommer som argument, tolkas som måttetal för vinklar, mätta i absolut vinkelmått.)

5. I triangeln ABC skäres sidorna AB och AC samt sidan BC :s förlängning av en rät linje i punkterna C_0 , B_0 och A_0 respektive. Bevisa likheten

$$\frac{A_0 B}{A_0 C} \cdot \frac{C B_0}{B_0 A} \cdot \frac{A C_0}{C_0 B} = 1.$$

6. Pyramiden $P-ABCD$:s basyta är en kvadrat (sidan $= a$). Kanten $PA (= a)$ står vinkelrätt mot basytan. Normalplanet till kanten PC genom punkten A skär kanterna PB , PC och PD i punkterna E , F och G respektive. Bevisa att vinkeln AEF är rät. Bevisa vidare, att man kan omskriva en sfär kring vardera av de polyedrar, i vilka det nämnda normalplanet delar pyramiden. Beräkna dessa sfärers radier.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

Oppgavekonkurranse for 1957, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Til den siste oppgavekonkurransen for norske gymnasiaster kom det ikke inn noen løsninger. Dette kan tyde på at oppgavene har vært for vanskelige, noe vi sterkt beklager. Denne gangen håper vi at oppgavene er lettere, slik at det vil komme mange løsninger. Vi presiserer også at det ikke er nødvendig å ha svart på alle 6 oppgavene for å være med.

Den beste samling besvarelser vil bli tildelt H. K. H. Kronprins Olavs premie på 100 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med. Oppgavene faller inn under reallinjens pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som råd er.

En sender løsninger til rektor Kay Pieni, Skjerstadvn. 2A, Smestad, Oslo, innen 1. 5. 1957, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

1. Gitt en vinkel APB (PA høyre ben). En annen like stor vinkel COD (OC høyre ben) har toppunkt i O på PA . I skjæringspunktet mellom OD og PB er trukket en parallell med PA . Finn den kurve K som beskrives av skjæringspunktet mellom OC og denne parallellen når vinkelen COD dreier seg om O . Drøft kurvene K når vinkelen APB varierer. Vis at toppunktene i disse kurvene ligger på en ellipse gjennom O .

Bestem til slutt vinkelen APB slik at arealet begrenset av K og normalen til PA i O er størst mulig.

2. Et kvadrat $ABCD$ med side a er gitt. Man skal bestemme et linjestykke x som skal være lik fem kanter i et legeme $ABCDEF$ slik at $AE = DE = EF = BF = CF = x$. Bøyningsvinklene mellom kvadratet $ABCD$ og sideflatene $ABFE$ respektive BCF skal være komplementvinkler. Finn x uttrykt ved a og deretter legemets volum uttrykt ved a .

Vis også at man kan bygge opp et dodekaeder av en kubus og et passende antall legemer av ovennevnte type. Finn volumet av dodekaedret uttrykt ved a , deretter ved x .

3. Gitt en sirkel med radius R . Fra et punkt på periferien utgår to korder hvis buer er α og β ($\alpha > \beta$). Beregn radien i en sirkel som berører de to korder og buen mellom dem.

4. Et tetraeder T er gitt. Hjørnene skjæres vekk ved hjelp av plane snitt slik at der fremkommer et polyeder T_1 med 12 hjørner. Deretter gjentas den samme prosess med T_1 , slik at en etter n ganger har fått et polyeder T_n . Finn antall flater, hjørner og kanter i polyedret T_n .

5. Gitt en sirkel med sentrum O og et punkt P utenfor sirkelen. En søker de rette linjer gjennom P som avskjærer buer på 120° av sirkelen. Bevis riktigheten av følgende konstruksjon: Med OP som side konstrueres en regulær trekant OPQ , og sirkelen om Q gjennom O og P skjærer den gitte sirkel i A og B . Linjene PA og PB er da de søkte linjer. — Prøv å generalisere oppgaven.

6. I et plan er gitt to rette linjer l og m som står loddrett på hverandre, og en sirkel med radius r som har sentrum på l og tangerer m .

På l ligger et punkt P . Konstruer gjennom P en sekant slik at $PM = \frac{2}{3}PQ$. Her er M midtpunktet av den avskårne korde og Q er sekantens skjæringspunkt med m . Hvor på l kan P ligge hvis konstruksjonen skal være mulig?

Undersøk så hvor på l punktet P kan ligge hvis det skal eksistere en sekant gjennom P slik at $PM = n \cdot PQ$, hvor n er et gitt tall.

PRISTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Liksom tidligere år anordnar Nordisk Matematisk Tidskrift en pristävling för svenska gymnasister. Var och en av de tre utgivande svenska föreningarna har ställt 50 kr. till disposition, varigenom ett första pris om 100 kr. och ett andra pris om 50 kr. kan utdelas.

För deltagande i tävlingen fordras, att lösningar insändas till minst fyra av nedanstående uppgifter. Gymnasister från övriga nordiska länder kunna delta utom tävlan.

Lösningar, åtföljda av en försäkran att de äro självständigt utarbetade, insändas senast den 15 mars 1957 till: Nordisk Matematisk Tidskrift, Matematiska Institutionen, Lund. Bifoga uppgift om namn, klass och läroverk.

1. I talet N , som består av $2n + 2$ siffror, är de n första siffrorna ettor, de därpå följande $n + 1$ siffrorna tvåor och sista siffran fem. Visa, att N är kvadraten på ett helt tal samt beräkna $\sqrt{N}$.

2. Inuti en given triangel väljes en punkt P , vars avstånd till triangelns sidorna betecknas med d_1 , d_2 och d_3 . Bestäm orten för de punkter P för vilka gäller $d_1 + d_2 + d_3 = a$, där a är en konstant. Angiv också för vilka värden på a som orten existerar.

3. I ett tresidigt rakt prisma är basytan en liksidig triangel med sidan a . Prismat skäres av ett plan, som endast träffar sidoytorna och som med basytan bildar vinkeln v . Visa, att summan av kvadraterna på sidorna i den därvid uppkommande triangeln endast beror på a och v .

4. I ett parallelltrapets är de parallella sidorna a och b . Genom mitt-punkterna på de övriga sidorna drages en parallelltransversal med längden a_1 och genom diagonalernas skärningspunkt en med längden b_1 . Härigenom uppkommer ett nytt parallelltrapets med de parallella sidorna a_1 och b_1 . I det nya trapetset upprepas samma konstruktion, varigenom transversaler med längderna a_2 och b_2 bildas o. s. v. Visa, att talföljderna $a_1, a_2, a_3, \dots$ och $b_1, b_2, b_3, \dots$ har ett gemensamt gränsvärde samt att motsvarande följder av transversaler har som gemensamt gränsläge en transversal, som delar det ursprungliga trapetset i två likformiga delar.

5. Parabeln $ay = x^2$ är given. En punkt är belägen så att man från densamma kan draga två tangenter och tre normaler till parabeln. Längderna av dessa betecknas med t_1, t_2, n_1, n_2 och n_3 . Visa, att $4n_1n_2n_3 = at_1t_2$.

6. Kurvan $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, är given. På kurvan väljes en punkt A utanför origo. Tangenten i A träffar kurvan i en annan punkt B samt y -axeln i punkten P . Visa, att $AP < BP < 2AP$.

RESULTAT AV PRISTÄVLINGEN FÖR FINSKA GYMNASISTER

(Uppgifterna i NMT 3 (1955), s. 179–180.)

Sammanlagt 12 svar insändes. Första priset, 5000 mk, fick Ensio Nieminen, Jämsän yhteiskoulu, Jämsä och andra priset, 3000 mk, Seppo Mustonen, Suomalainen yhteiskoulu, Helsinki. Dessutom utdelades två extrapris i form av en bok till Matti Huovila, Hämeenlinnan lyseo, Hämeenlinna samt Tapani Perko, Someron yhteiskoulu, Somero.

SUMMARY IN ENGLISH

DAVID FOG: »*Stringent thinking and concise mode of expression.*«
(Danish.)

The title is a quotation from the Danish school law, stating one purpose of mathematical education in the high schools. The author is inclined to think that the claim on stringency and conciseness in some domains of mathematics has been carried too far in the Danish schools. He brings forward his ideas by applying the logical scheme

$$\begin{array}{c|c} A \rightarrow B & B \rightarrow A \\ \hline \overline{B} \rightarrow \overline{A} & \overline{A} \rightarrow \overline{B} \end{array}$$

(where the bar denotes negation) to the problem of geometrical loci and—for comparison—to some statements of ordinary conversation.

Concerning the pedagogical presentation, particularly of geometry, the author thinks that more emphasis should be laid on the geometrical intuition, for instance by continuous variation in the generation of geometrical loci. Exceptional cases are also handled more naturally this way, instead of by a separate and often different treatment. Too many details can obscure the beauty of mathematics for an average high school student.

SIGURKARL STEFÁNSSON: *A theorem on the diameters of a parabola, with applications.* (Danish.)

Referring to the parabola of fig. 1 p. 189, it is shown that the relation $OA \cdot OB = OP \cdot OP_1 (= OP^2)$ holds for the distances along an arbitrary chord through O to the parabola. The same relation holds if O is the mid-point of RR_1 . This result is used to perform simple constructions of the focus and axis of a parabola determined by points and/or tangents, in a total number of four.

ROLF NEVANLINNA: *Gauss and the non-euclidean geometry.* (Swedish.)

The article is a mainly historical account of the contributions by Gauss, Bolyai and Lobatjevskij to the development of hyperbolic geometry. As a background, earlier criticism of the parallel-axiom by Lambert and Saccheri is mentioned, together with contributions by Schweikart and Taurinus. The first significant publications on hyperbolic geometry are due to Lobatjevskij (1826) and independently to Bolyai (1831). However, Gauss had reached the same results much earlier, without publishing anything. His notebooks and letters, from which many quotations are given, make this clear.

The article also gives a short account of the differential geometry of Gauss, with particular emphasis on the non-euclidean aspect. Finally, the works of Riemann and Hilbert are mentioned briefly.

INNHOLDSFORTEGNELSE

ANDERS BAGER: Røringscirkler og potenssummer.....	30- 35
VIGGO BRUN: Blomsterstøv og Arkimedespolyeder.....	20- 23
SVEN DANØ: Lineær programmering.....	121-138
FR. FABRICIUS-BJERRE: Nogle sætninger af J. Hjelmslev om plane, vindskæve og sfæriske firkanter.....	139-148
DAVID FOG: Om »stringent tænkning og prægnant udtryksform«.....	177-188
SOLOMON W. GOLOMB: Properties of consecutive integers.....	24- 29
LAMEK HULTHÉN: Vad är operationsanalys?.....	87-101
JOHANNES LOHNE: Anskuelig fremstilling av summeformler.....	85- 86
ROLF NEVANLINNA: GAUSS och den icke-euklidiska geometrin.....	195-209
N. E. NØRLUND: Tanker om tre videnskaber.....	5- 19
ARNE PLEIJEL: Om delning av konvexa figurer.....	149-151
ÅKE PLEIJEL: Ivar Fredholm.....	65- 75
SIGURKARL STEFÁNSSON: En sætning om parabeldiametre med anvendelser.....	189-194
JOHN OLAV STUBBAN: Aksiomatisk grundlag for den euklidiske geometri	76- 84

Bokmeldinger

JOE KENNEDY ADAMS: Basic statistical concepts (ARNLJOT HØYLAND)	102
C. B. ALLENDOERFER — C. O. OAKLEY: Principles of mathematics (LENNART SANDGREN).....	36
ÉMILE BOREL — ANDRÉ CHÉRON: Théorie mathématique du bridge à la portée de tous (ALF GUDBRANDSEN).....	103
D. VAN DANTZIG: The function of mathematics in modern society and its consequences for the teaching of mathematics. — L. N. H. BUNT: The teaching of mathematics to students between 16 and 21 years of age in the Netherlands (KAY PIENE).....	152
DAVID FOG: Matematik for landinspektører og skovbrugere (JOHS. ØSTVOLD).....	104
H. GASK: Ordinära differentialekvationer (ERLING FØLNER).....	104
A. O. GELFOND: Ganzzahlige Lösungen von Gleichungen (ERNST S. SELMER).....	37
WOLFGANG HAACK: Elementare Differentialgeometrie (OTTAR YTREHUS)	152
H. HADWIGER: Altes und Neues über konvexe Körper (W. FENCHEL)...	105
DICK WICK HALL — GUILFORD L. SPENCER II: Elementary topology (OLOF HANNER).....	213
BURTON W. JONES: The theory of numbers (BENGT STOLT).....	214
R. KOCHENDÖRFFER: Einführung in die Algebra (KÅTE FENCHEL).....	154
PAUL LORENZEN: Einführung in die operative Logik und Mathematik (K. E. AUBERT).....	107
BRUCE E. MESERVE: Fundamental concepts of geometry (P. O. NERUP)	210

HOMER E. NEWELL, JR.: Vector analysis (S. BERTIL NILSSON).....	155
W. W. SAWYER: Prelude to mathematics (VIGGO BRUN).....	156
KARL SCHÜTTE: Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen (CARL- ERIK FRÖBERG).....	38
KARL STRUBECKER: Differentialgeometrie, I (LAURI PIMIÄ).....	39
I. M. WINOGRADOW: Elemente der Zahlentheorie (SIGMUND SELBERG)	212
Mottatte bøker.....	40, 109, 157, 215
Oppgaver	
Oppgaver til løsning.....	44, 113, 162, 220
Løsninger.....	46, 114, 163, 222
Eksamensoppgaver.....	169
Nasjonale prisoppgaver for gymnasiaster.....	55, 225
Internordiske prisoppgaver.....	51, 166
Kronikk.....	57, 175
Summary in English.....	63, 119, 175, 229

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

Bind 4 (1956), hefte 1-4.