

LINEÆR PROGRAMMERING

SVEN DANØ

1. Betegnelsen »lineær programmering« (engelsk: *linear programming*) dækker over en særlig teknik, som i den sidste halve snes år er blevet udviklet i U. S. A. ved løsning af en speciel type problemer inden for den lineære algebra, nemlig sådanne problemer, som går ud på at søge maksimum eller minimum af en linearform under et antal lineære bibetingelser, idet de variable kun må antage ikke-negative værdier.¹

Det typiske programmeringsproblem ser således ud:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = f = \text{maksimum},$$

eller på matrixform

$$(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0},^2 \mathbf{C}^*\mathbf{X} = f = \text{maksimum},$$

hvor matricen $\mathbf{A}$ har dimensionen $m \times n$ ($m < n$), og $\mathbf{C}^*$ betegner den transponerede vektor (en rækkevektor) til søjlevektoren $\mathbf{C}$, medens $\mathbf{0}$ er nulvektoren.³

¹ Blandt de matematiske arbejder, der har haft betydning for udviklingen af teorien for lineær programmering, bør nævnes T. Bonnesen—W. Fenchel: *Theorie der konvexen Körper*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3, Nr. 1. Julius Springer, Berlin 1934, og Chelsea Publishing Co., New York 1948. — I øvrigt henvises til litteraturfortegnelsen.

² At en vektor er $\geq \mathbf{0}$ (resp. $> \mathbf{0}$), skal betegne, at alle dens koordinater er ≥ 0 (resp. > 0).

³ I den specielle faglitteratur kaldes de enkelte søjlevektorer i matricen $\mathbf{A}$ ofte »aktiviteter« eller »processer«, en terminologi, der knytter sig til visse (økonomiske) anvendelser; x 'erne kaldes da »aktivitetsniveauer« (*activity levels*) eller »procesintensiteter«.

Det gør ingen principiel forskel, om man i (1) skal søge *minimum* af linearformen f , idet dette er ensbetydende med at bestemme maksimum af $-f = (-C)^*X$.

I mange praktiske anvendelser har betingelserne form af lineære *uligheder*, således at (1) bliver erstattet af

$$(2a) \quad AX \leq B, X \geq 0, C^*X = f = \text{maksimum}.$$

Dette tilfælde reduceres let til ovenstående type (1), idet man supplerer de »strukturelle variable« $x_1, x_2, \dots, x_n$ med m »restvariable«¹ $x_1', x_2', \dots, x_m'$, som repræsenterer differenserne mellem den største og den mindste side i de respektive uligheder. Når bibetingelserne skrives på vektorform, bliver der altså til de n »strukturelle vektorer« (søjlevektorerne i A) føjet m »restvektorer«² som koefficienter til de indførte restvariable. Hvis ulighederne har formen $\leq$ som i (2a), bliver restvektorerne de m enhedsvektorer, medens de bliver disse enhedsvektorer med negativt fortegn, hvis ulighedstegnene vender den modsatte vej. Man kan komme ud for problemstillinger, hvor de restvariable indgår med koefficienter $\neq 0$ i linearformen f , men sådanne problemer vil vi ikke medtage i den følgende fremstilling.

Et problem af typen (2a) kan altså skrives som

$$(2b) \quad AX + EX' = B, X \geq 0, X' \geq 0, C^*X + 0^*X' = f = \text{maksimum},$$

medens problemet

$$(3a) \quad AX \geq B, X \geq 0, C^*X = f = \text{minimum}$$

kan omformes til

$$(3b) \quad AX - EX' = B, X \geq 0, X' \geq 0, (-C)^*X + 0^*X' = -f = \text{maksimum},$$

hvor E er enhedsmatricen med dimension $m \times m$. I begge tilfælde er opgaven ført tilbage til et problem af typen (1), og ethvert lineært programmeringsproblem kan derfor formuleres på følgende måde: Til et system af lineære ligninger at finde en ikke-negativ løsning, som maksimerer en linearform i de i ligningerne indgående variable.

2. Maksimumsproblemer af denne karakter kan åbenbart ikke løses ved traditionelle metoder. Det, som gør, at der overhovedet kan blive tale om et (endeligt) maksimum for linearformen, er kravet om, at de variable — herunder også de restvariable — kun må antage ikke-

¹ engelsk: *slack variables, pseudovariables*.

² engelsk: *slack vectors, disposal activities*.

negative værdier; men et sådant maksimum lader sig ikke bestemme på sædvanlig vis ved benyttelse af partiel differentiation.

Problemstillingen kan illustreres ved det simplest mulige tilfælde, hvor der er 2 variable og kun 1 bibetingelse:

$$(4) \quad \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = b \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 = f = \text{maksimum} , \end{cases}$$

og hvor a_1 , a_2 og b samt mindst et af c 'erne er $\neq 0$. Lad os her antage, at de alle er positive. Det gælder da om blandt de mulige løsninger¹ — dvs. de talsæt (x_1, x_2) , der tilfredsstiller betingelsesligningen og samtidigt er ikke-negative — at finde en, som giver maksimum af f (en *optimal løsning*²). En mulig løsning er f. eks.

$$(5) \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{b}{a_2};$$

en anden er

$$(6) \quad x_1 = \frac{b}{a_1}, x_2 = 0.$$

Desuden vil enhver linearkombination af disse to med positive koefficienter, der har summen 1, være en løsning, altså

$$(7) \quad x_1 = \frac{\theta b}{a_1}, x_2 = \frac{(1-\theta)b}{a_2} \quad (0 < \theta < 1),$$

og andre muligheder er der ikke.

Den optimale løsning kan nu bestemmes ved, at man tager udgangspunkt i et af mulighedsområdets endepunkter, f. eks. i løsningen (6), og undersøger, hvorvidt det vil give en større værdi for f , om man fra dette punkt bevæger sig ud gennem mulighedsområdet (dvs. gør $x_2 > 0$ på bekostning af x_1). Vi løser da betingelsesligningen m. h. t. x_1 :

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2,$$

og indsætter i linearformen:

$$(8) \quad f = \frac{c_1 b}{a_1} + \left(c_2 - \frac{c_1 a_2}{a_1} \right) x_2.$$

Denne bliver herved udtrykt som funktion af x_2 . For $x_2 = 0$ får vi den løsning (6), vi tog som udgangspunkt. Det afgørende for, om vi kan få

¹ engelsk: *feasible solutions*.

² også kaldet »et optimalt program«; deraf navnet »programmering«.

en »bedre« løsning ved at gøre x_2 positiv, vil nu være fortegnet for koefficienten til x_2 i (8). Hvis denne er negativ, vil enhver positiv værdi for x_2 give lavere værdi for f ; dette betyder, at f er størst for $x_2=0$, eller med andre ord, at løsningen

$$x_1 = \frac{b}{a_1}, x_2 = 0, f = \frac{c_1 b}{a_1}$$

er en optimal løsning (og den eneste sådanne). Er den nævnte koefficient $=0$, vil f være konstant, når x_2 varierer, og enhver mulig løsning (x_1, x_2) vil være optimal. Er endelig koefficienten til x_2 positiv, vil f vokse, når x_2 øges på bekostning af x_1 ; såfremt x_2 kunne vokse i det uendelige, ville f ikke have noget endeligt maksimum, men kravet om, at x_1 ikke må blive negativ, sætter en grænse for væksten. Denne grænse nås, som man ser af betingelsesligningen, for $x_2=b/a_2$, og den optimale løsning bliver altså i dette tilfælde

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{b}{a_2}, f = \frac{c_2 b}{a_2}.$$

Disse resultater kan man let anskueliggøre ved grafisk afbildning (fig. 1). Bibetingelsen fremstiller i et x_1x_2 -diagram en ret linje, men kravet

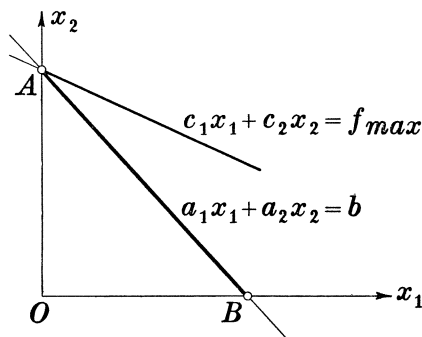


Fig. 1

om ikke-negativitet begrænser mulighedsområdet til at være den del af linjen, som ligger i 1. kvadrant (inklusive akserne), dvs. linjestykket AB . Linearformen fremstiller en skare parallelle rette linjer med hældningskoefficient $-c_1/c_2$, en linje for hver værdi af f ; gennem hvert punkt på AB går der en af disse linjer, og den, som ligger længst »mod nordøst« i diagrammet, repræsenterer den maksimale værdi af f .

Svarende til de 3 førnævnte tilfælde,

hvor koefficienten til x_2 i (8) var negativ, 0 eller positiv, vil linjeskaren være stejlere end AB , parallel med AB eller mindre stejl end denne linje, og optimum vil i overensstemmelse hermed henholdsvis indtræffe i B , være ubestemt på AB eller indtræffe i A . Det sidste tilfælde er vist på fig. 1.

Hvis bibetingelsen i stedet havde været en ulighed af formen

$$(9) \quad a_1x_1 + a_2x_2 \leq b,$$

ville mulighedsområdet have været hele trekanten ABO på fig. 1, men for det optimale punkt ville der foreligge nøjagtig de samme 3 muligheder som før. Erstatte vi (9) med

$$(10) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + x_1' = b,$$

hvor x_1' er en restvariabel, vil — med den beliggenhed, der er vist på figuren — den optimale løsning blive

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{b}{a_2}, x_1' = 0, f = \frac{c_2b}{a_2}.$$

Først når der optræder flere bibetingelser i problemet, kan man få en optimal løsning, hvor en restvariabel er $\neq 0$.

Fig. 1 illustrerer, hvorledes den optimale løsning fremkommer som et »hjørnemaksimum«, både når bibetingelsen er en ligning, og når den er en ulighed; i begge tilfælde har man et konvekst mulighedsområde (linjestykket AB resp. trekanten ABO), og det optimale punkt bliver et af områdets hjørner — bortset fra det specielle tilfælde, hvor løsningen ikke var entydig og ethvert punkt på AB var optimalt.

Hvad der ovenfor er sagt om tilfældet med én ulighed mellem x_1 og x_2 , udvides let til et hvilket som helst antal ulighedsbetingelser, der måtte være pålagt disse variable; på fig. 2 nedenfor, svarende til 3 sådanne uligheder, er mulighedsområdet den konvekse polygon $ABCD O$, og det optimale punkt vil alt efter forholdet mellem c_1 og c_2 blive et af hjørnerne A , B , C eller D (i specielle tilfælde med flertydig løsning dog ethvert punkt på et af linjestykkerne AB , BC eller CD).

3. Vi skal nu i det følgende se, hvorledes man kan nå frem til en numerisk løsning af det generelle lineære programmeringsproblem.

Fig. 1 omhandler, når bibetingelsen har formen (9), og en restvariabel er indført som i (10), et problem i 3 variable x_1 , x_2 og x_1' . I punkterne A , B og O er to af de variable $= 0$, i alle andre punkter derimod højst én af de variable. Fig. 2 repræsenterer på lignende måde et problem i 5 variable, nemlig 2 strukturelle (x_1 og x_2) og 3 restvariable:

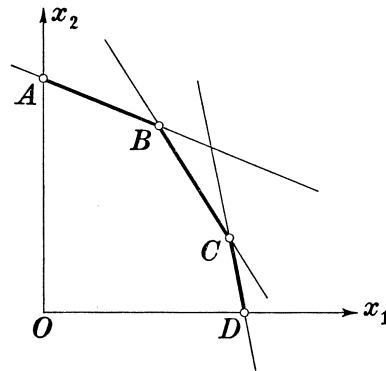


Fig. 2

$$(11) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_1' & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + x_2' = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 & + x_3' = b_3. \end{cases}$$

For henholdsvis $x_1' = 0$, $x_2' = 0$ og $x_3' = 0$ fremstiller de tre bibetingelser linjen gennem A og B , linjen gennem B og C og linjen gennem C og D . I punkterne A , B , C , D og O er to af de variable $= 0$, i A f. eks. x_1 og x_1' , medens de 3 andre er $\neq 0$. I alle andre punkter af polygonen (mulighedsområdet) $ABCD O$ er højst én variabel $= 0$.

I begge de betragtede eksempler med restvariable er således et hjørne karakteriseret ved, at der er lige så mange af de variable $\neq 0$, som der er bibetingelser, dvs. 1 på fig. 1, 3 på fig. 2. Efter det foran omtalte indtræffer maksimum i de nævnte tilfælde — hvis det er entydigt — i et hjørnepunkt, således at *det optimale punkt må søges blandt de mulige løsninger, som netop indeholder m variable $\neq 0$, hvor m er antallet af bibetingelser*. Selv når den optimale løsning ikke er entydig, kan der dog altid findes et hjørnepunkt, der er optimalt.

Det ovenfor fremhævede kan — med en lille nuancering — udvides til at gælde generelt, idet vi kan vise følgende for vort formål vigtige sætning:

TEOREM 1. *Når et lineært programmeringsproblem med m betingelsesligninger i n variable (struktur- og eventuelle restvariable), hvor $m < n$, har (mindst) en optimal løsning, vil der altid findes en sådan løsning, hvor højst m af de variable er $\neq 0$.*

Lad linearformen antage sin maksimale værdi for r af de variable $\neq 0$, medens de øvrige $n - r$ variable alle er 0. Dersom $r \leq m$, er teorem 1 opfyldt »af sig selv«; lad os dernæst antage $r > m$. Vi kan altid nummerere x 'erne således, at den forelagte optimale løsning bliver

$$(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0),$$

hvor alle $\lambda_j > 0$. Vi har da, idet $A_1, A_2, \dots, A_r$ er de tilsvarende søjlevektorer fra den til problemet hørende matrix A ,

$$A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \dots + A_r\lambda_r = B$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_r > 0$$

$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_r\lambda_r = f_{\max}.$$

Idet antallet r af vektorer A_j er større end deres dimension m , vil de være lineært afhængige, dvs. der eksisterer et egentligt talsæt $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ således, at

$$A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + \dots + A_r\gamma_r = 0,$$

og vi kan yderligere opnå, at mindst et af γ 'erne er > 0 .

Vi danner nu forholdene

$$\frac{\gamma_1}{\lambda_1}, \frac{\gamma_2}{\lambda_2}, \dots, \frac{\gamma_r}{\lambda_r};$$

det største af disse — der vil være > 0 — betegnes θ . Man indser da let, at

$$A_1\left(\lambda_1 - \frac{\gamma_1}{\theta}\right) + A_2\left(\lambda_2 - \frac{\gamma_2}{\theta}\right) + \dots + A_r\left(\lambda_r - \frac{\gamma_r}{\theta}\right) = B,$$

dvs. at talsættet

$$(12) \quad \lambda_j - \frac{\gamma_j}{\theta} \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

tilfredsstiller ligningssystemet (bibetingelserne). Idet

$$\frac{\gamma_j}{\lambda_j} \leq \theta, \quad \lambda_j > 0 \text{ og } \theta > 0,$$

har vi

$$\lambda_j - \frac{\gamma_j}{\theta} \geq 0,$$

og ifølge definitionen af θ er mindst ét af disse tal $= 0$.

Vi har med andre ord fundet en ikke-negativ løsning (12) til bibetingelserne, som indeholder færre end r variable $\neq 0$. Det skal nu yderligere vises, at denne løsning er optimal (ligesom den, vi gik ud fra), altså at

$$\begin{aligned} c_1\left(\lambda_1 - \frac{\gamma_1}{\theta}\right) + c_2\left(\lambda_2 - \frac{\gamma_2}{\theta}\right) + \dots + c_r\left(\lambda_r - \frac{\gamma_r}{\theta}\right) \\ = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_r\lambda_r \quad (= f_{\max}) \end{aligned}$$

eller

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r = 0.$$

Antag, at dette ikke var tilfældet; vi kunne da finde et tal μ således, at

$$\mu(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r) = c_1(\mu\gamma_1) + c_2(\mu\gamma_2) + \dots + c_r(\mu\gamma_r) > 0$$

eller, idet vi adderer $\sum_{j=1}^r c_j\lambda_j$ på begge sider af ulighedstegnet,

$$c_1(\lambda_1 + \mu\gamma_1) + c_2(\lambda_2 + \mu\gamma_2) + \dots + c_r(\lambda_r + \mu\gamma_r) > c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_r\lambda_r.$$

Idet $(\lambda_j + \mu\gamma_j)$ ses at tilfredsstille bibetingelserne for ethvert μ , og man altid kan vælge $|\mu|$ så lille, at $(\lambda_j + \mu\gamma_j)$ bliver ikke-negativ for alle j ,

vil dette sige, at der eksisterede en mulig løsning, der gav en større værdi for f end vor oprindelige, optimale løsning. Dette er åbenbart en modsigelse, og hermed er optimaliteten af (12) godtgjort.

Vi har altså i (12) fundet en optimal løsning, som indeholder færre end r variable $\neq 0$. Da vi kan fortsætte med denne reduktion, så længe A' 'erne er lineært afhængige, ender vi med en optimal løsning, hvor højst m variable er $\neq 0$. Hermed er teorem 1 bevist.

4. Vi er nu i princippet i stand til numerisk at løse det i teorem 1 omtalte lineære programmeringsproblem — hvis det vides at have en løsning. Vi sætter på alle tænkelige måder $n - m$ af de variable lig med 0 i betingelsesligningerne, løser de $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$ systemer af m ligninger med m ubekendte, som derved fremkommer, og indsætter hver af disse »basisløsninger« i linearformen, der skal maksimeres. De af systemerne, der ikke har en ikke-negativ løsning, behøver vi ikke at bekymre os om (en del af dem kan i øvrigt ofte udskilles på forhånd ved inspektion), men vi ved fra teorem 1, at hvis problemet har en optimal løsning, må en af basisløsningerne også være optimal. Det er, som vi har set, muligt, at den optimale løsning indeholder færre end m variable $\neq 0$, men sådanne »degenererede« tilfælde vil automatisk komme frem under proceduren, idet der vil fremkomme et eller flere nuller i basisløsningen. (For $m=2$ vil dette kunne ske, når højre side af ligningssystemet er proportional med en af søjlevektorerne i systemets venstre side.)

Fremgangsmåden kan illustreres ved følgende simple eksempel:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_1' \geq 0, \quad x_2' \geq 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = g = \text{minimum} \end{array} \right. \quad \text{eller} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_3 - x_1' = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_2' = 4 \end{array} \right.$$

Vi sætter først $x_3 = x_1' = x_2' = 0$ og kalder dette at vælge de to andre variable x_1 og x_2 — eller de dertil svarende søjlevektorer i koefficientmatricen A — som *basis*. Vi får herved ligningssystemet

$$2x_1 = 5, \quad 2x_1 + 3x_2 = 4,$$

der har løsningen

$$x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{3};$$

denne er ikke en mulig løsning til programmeringsproblemet, eftersom x_2 er negativ, og den kan derfor lades ude af betragtning. Benytter vi i stedet x_1 og x_3 (første og tredje søjlevektor) som basis, dvs. sætter vi $x_2 = x_1' = x_2' = 0$, får vi

$$2x_1 + 4x_3 = 5, \quad 2x_1 + x_3 = 4;$$

heraf findes

$x_1 = \frac{11}{6}, \quad x_3 = \frac{1}{3},$
 som indsat i linearformen giver $g = \frac{25}{3}.$

På denne måde finder vi alle tænkelige basisløsninger; der er ialt 10 ligningssystemer at løse. Resultatet fremgår af følgende oversigt:

Basis	Løsning	g	Basis	Løsning	g
(x_1, x_2)	$(\frac{5}{2}, -\frac{1}{3})$	—	(x_2, x_1')	$(\frac{4}{3}, -5)$	—
(x_1, x_3)	$(\frac{11}{6}, \frac{1}{3})$	$\frac{25}{3}$	(x_2, x_2')	ingen løsning	—
(x_2, x_3)	$(\frac{11}{2}, \frac{5}{4})$	$\frac{67}{2}$	(x_3, x_1')	$(4, 11)$	12
(x_1, x_1')	$(2, -1)$	—	(x_3, x_2')	$(\frac{5}{4}, -\frac{11}{4})$	—
(x_1, x_2')	$(\frac{5}{2}, 1)$	10	(x_1', x_2')	$(-5, -4)$	—

Værdien af linearformen g er kun beregnet for de positive løsninger. Den laveste værdi af g ses at fremkomme for basis (x_2, x_3) :

$$(14) \quad x_2 = \frac{11}{2}, \quad x_3 = \frac{5}{4}, \quad g = \frac{67}{2};$$

forudsat at en optimal løsning eksisterer, udgør (14) en sådan løsning.

5. Når m og n vokser, bliver denne procedure hurtigt uoverkommelig; der bliver for mange og for store ligningssystemer at løse. Man har udviklet forskellige metoder, der formindsker regnearbejdet væsentligt; den hyppigst anvendte — den såkaldte *simplex-metode* — er en generalisering af den, vi benyttede ovenfor til at løse det trivielle problem (4), hvor der kun var 2 variable og 1 bibetingelse. Princippet i simplex-metoden er, at man tager udgangspunkt i en vilkårlig basisløsning og undersøger, hvorvidt man kan forbedre denne ved at gå videre til en anden basis, og så fremdeles, indtil man når en basisløsning, hvor linearformen antager sin optimale værdi.

Vi vil betragte det generelle programmeringsproblem (1) og begynder da med en opdeling af matricen A i en basis A_1 , bestående af m lineært uafhængige søjlevektorer, og A_2 , der består af de øvrige $n-m$ søjlevektorer. Der kan være såvel strukturelle som restvektorer i både A_1 og A_2 . Vektorene X og C opdeles tilsvarende. Vi kan da skrive (1) på formen

$$(15) \quad \begin{cases} A_1 X_1 + A_2 X_2 = B \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0 \\ C_1^* X_1 + C_2^* X_2 = f = \text{maksimum.} \end{cases}$$

Løser vi betingelsesligningerne m. h. t. X_1 — hvilket er muligt, da basisvektorerne er antaget lineært uafhængige —, får vi

$$(16) \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{X}_2,$$

der indsat i linearformen giver f som funktion af $\mathbf{X}_2$:

$$(17) \quad f = \mathbf{C}_1^* \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B} + (\mathbf{C}_2^* - \mathbf{C}_1^* \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) \mathbf{X}_2.$$

Medens den i det foregående afsnit beskrevne procedure svarede til, at vi i (17) på forhånd satte $\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ og derved fandt den til basen $\mathbf{A}_1$ hørende basisløsning $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}$ (og gennemførte beregningen for alle tænkelige baser), betragter vi nu $\mathbf{X}_2$ som variabel. Vi antager, at $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}$ er en mulig løsning ($\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$). Er nu

$$(18) \quad \mathbf{C}_2^* - \mathbf{C}_1^* \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 \leq \mathbf{0},$$

vil f antage sin maksimale værdi for $\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$, således at løsningen

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}, f = \mathbf{C}_1^* \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}$$

er optimal.

Betingelsen (18) for optimalitet i en basisløsning kaldes »simplex-kriteriet«. (Hvis linearformen skal minimeres, må ulighedstegnet i (18) naturligvis vendes.)

Hvis man har held til straks at slå ned på en basis, for hvilken (18) er opfyldt, er problemet dermed løst, og vi slipper for at løse flere af de $\binom{n}{m}$ ligningssystemer. Lad os dernæst antage, at simplex-kriteriet ikke er tilfredsstillet for den betragtede basis, altså at der findes en positiv koordinat i (18); den tilsvarende variabel i $\mathbf{X}_2$ kaldes x_j . Dersom nu $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B} > \mathbf{0}$ (og altså ikke blot $\geq \mathbf{0}$), kan vi — idet de andre variable i $\mathbf{X}_2$ forbliver lig 0 — give x_j en så lille positiv værdi, at $\mathbf{X}_1$ i (16) stadig er $> \mathbf{0}$. Herved bliver værdien af linearformen større¹. Hvis f har et endeligt maksimum, kan x_j imidlertid ikke vokse ubegrænset; før eller senere når man et punkt, hvor en af de variable i $\mathbf{X}_1$ kommer ned på 0. (Hvilken der først bliver 0, fremgår ved inspektion af (16).) Dette punkt repræ-

¹ Om simplex-kriteriet (18) har vi hermed bevist følgende: Dersom basisløsningen $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, er betingelsen (18) tilstrækkelig til at sikre, at der foreligger maksimum af linearformen f . Dersom $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B} > \mathbf{0}$ (og ikke blot $\geq \mathbf{0}$), er den nævnte betingelse også nødvendig.

Er derimod en eller flere koordinater i $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}$ lig med 0, således at basisløsningen indeholder færre end m variable $\neq 0$, kan ræsonnementet ovenfor ikke føres igennem, og man viser let ved eksempler, at der godt kan foreligge maksimum for f , selv om nogle af simplex-koefficienterne i (18) er positive.

Vi ser i det følgende bort fra problemer med sådanne »degenererede« løsninger (hvor simplex-metoden må modificeres for at kunne anvendes). Det betyder da ingen yderligere indskrænkning, at vi har antaget de m vektorer i $\mathbf{A}_1$ lineært uafhængige (således at $\mathbf{A}_1$ kunne inverteres); thi da vi har forudsat, at ligningssystemet $\mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}$ kan løses, ville en lineær afhængighed mellem de nævnte vektorer medføre eksistensen af en degenereret løsning.

senterer en ny basis, fremkommet af A_1 ved, at en af dennes søjlevektorer er blevet erstattet med en søjlevektor fra A_2 . Den nye basis undersøges nu ved hjælp af simplex-kriteriet; er dette ikke tilfredsstillende, fortsætter man på samme måde til en tredje basis, og så fremdeles. Da f bliver større, for hver gang man skifter basis, vil man aldrig under denne procedure kunne komme tilbage til en basis, der er blevet forladt på et tidligere stadium af beregningerne; da endvidere antallet af mulige baser er endeligt, følger heraf, at metoden vil føre frem til en optimal løsning (forudsat at en sådan eksisterer) i et endeligt antal trin.

Det er klart, at dette indebærer en enorm lettelse af det praktiske regnearbejde, sammenlignet med den procedure, der går ud på at beregne samtlige $\binom{n}{m}$ basisløsninger. Simplex-metoden gør det muligt for os at arbejde os systematisk igennem dem uden at behøve at regne dem alle ud, og man vil ofte være i stand til — ved inspektion eller ud fra specielt kendskab til det konkrete problem — at vælge en udgangsbasis, der ligger så »nær ved« den optimale løsning, at man kan nå frem til målet i løbet af meget få trin. Man skal heller ikke, hver gang der skiftes basis, begynde forfra med at løse et helt ligningssystem; man kommer fra den ene basisløsning til den næste ved simpelt hen at benytte en af ligningerne i den første løsning til at udtrykke den variabel, der skal ind i basen, ved den, der skal kastes ud (og dem, der skal forblive uden for basen), og indsætte det fundne i de andre ligninger og i linearformen.

Til illustration skal vi regne os gennem taleksemplet (13) ovenfor ved hjælp af simplex-metoden¹. Problemet var

$$(19) \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_3 - x_1' = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_2' = 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_1' \geq 0, \quad x_2' \geq 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = g = \text{minimum} . \end{cases}$$

Lad os vælge x_1 og x_2' som udgangsbasis; vi skal da løse ligningssystemet m. h. t. disse to variable og indsætte resultatet i linearformen. Vi får

$$(20) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - 2x_3 + \frac{1}{2}x_1' \\ x_2' = 1 + 3x_2 - 3x_3 + x_1' \\ g = 10 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_1' , \end{cases}$$

der for $x_2 = x_3 = x_1' = 0$ giver den positive basisløsning $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2' = 1$.

Simplex-kriteriet er ikke opfyldt, idet x_3 har negativ koefficient i den sidste ligning (20). Man vil altså kunne gøre g mindre ved at gøre x_3 positiv. Imidlertid

¹ Ved numerisk løsning af større lineære programmeringsproblemer står man sig ved at anvende de særlige regneskemaer, der er konstrueret til formålet («the simplex tableau»); se f. eks. litteraturfortegnelsen [2].

ser man af de to første ligninger (20), at (for $x_2 = x_1' = 0$) vil både x_1 og x_2' aftage for voksende x_3 og blive 0, først x_2' (for $x_3 = \frac{1}{3}$) og derpå x_1 (for $x_3 = \frac{5}{4}$). Vi kaster derfor x_2' ud af basen til fordel for x_3 , således at den nye basis kommer til at bestå af x_1 og x_3 . Af den mellemste ligning (20) findes

$$(21a) \quad x_3 = \frac{1}{3} + x_2 + \frac{1}{3}x_1' - \frac{1}{3}x_2',$$

og indsætning heraf i de to andre ligninger (20) giver

$$(21b) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{11}{6} - 2x_2 - \frac{1}{6}x_1' + \frac{2}{3}x_2' \\ g = \frac{25}{3} - 3x_2 + \frac{1}{3}x_1' + \frac{5}{3}x_2' \end{cases}$$

Heller ikke her er simplex-kriteriet opfyldt, idet x_2 har negativ koefficient i den nederste ligning (21b). Lader vi (for $x_1' = x_2' = 0$) x_2 vokse ud fra 0, vokser x_3 også, men x_1 aftager og bliver 0 for $x_2 = \frac{11}{6}$. Vi udskifter derfor x_1 med x_2 . Af den øverste ligning (21b) findes

$$(22a) \quad x_2 = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{12}x_1' + \frac{1}{3}x_2',$$

som ved indsætning i de to andre ligninger (21) giver

$$(22b) \quad \begin{cases} x_3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_1' \\ g = \frac{67}{12} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{7}{12}x_1' + \frac{2}{3}x_2' \end{cases}$$

Her er simplex-kriteriet tilfredsstillet, og vi finder for $x_1 = x_1' = x_2' = 0$ den optimale løsning

$$(23) \quad x_2 = \frac{11}{6}, \quad x_3 = \frac{5}{4}, \quad g = \frac{67}{12}.$$

Dersom vi — ved et tilfælde eller ud fra visse formodninger — havde valgt x_2 og x_3 som udgangsbasis, var vi straks i første skridt kommet til ligningerne (22) og dermed til løsningen (23).

6. Lineære programmeringsproblemer af typerne (2) og (3) har den interessante egenskab, at der til ethvert problem af den ene slags svarer et problem af den anden, der i en vis forstand kan betragtes som det førstes spejlbillede, både hvad opbygning og løsning angår. Dette forhold kaldes *dualitet*, og de to problemer siges at være *dualer* (eller dualproblemer). Dersom det ene problem indeholder n strukturelle variable og m betingelsesuligheder:

$$(24a) \quad AX \leq B, \quad X \geq 0, \quad C^*X = f = \text{maksimum},$$

vil dualproblemet bestå af m strukturelle variable med n betingelsesuligheder:

$$(25a) \quad A^*Y \geq C, \quad Y \geq 0, \quad B^*Y = g = \text{minimum}.$$

For at give en præcis formulering af den *dualitetssætning*, der gælder om disse to problemer, omskriver vi (24a) og (25a) ved indførelse af restvariable til

$$(24b) \quad \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{E}_1\mathbf{X}' = \mathbf{B}, \quad \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}' \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}^*\mathbf{X} = f = \text{maksimum}$$

og

$$(25b) \quad \mathbf{A}^*\mathbf{Y} - \mathbf{E}_2\mathbf{Y}' = \mathbf{C}, \quad \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y}' \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}^*\mathbf{Y} = g = \text{minimum},$$

hvor $\mathbf{E}_1$ og $\mathbf{E}_2$ er enhedsmatricer af henholdsvis m 'te og n 'te orden. Til enhver strukturel variabel x_i i det første problem svarer da en betingelsesligning med restvariabel y_i' i det andet, og til en strukturel variabel y_j i det sidste problem svarer analogt en betingelsesligning med restvariabel x_j' i det første. De to problemers variable bliver på denne måde parret sammen, således at hvert par består af to variable, der både tilhører modsatte problemer og er af modsat art. Dualitetssætningen kan nu formuleres på følgende måde:

TEOREM 2. *De to duale problemer (24) og (25) korresponderer således, at*
 1° *den optimale basis i det ene problem udgøres af de variable, hvis tilsvarende variable ikke tilhører den optimale basis i det andet problem;*
 2° *værdien for en variabel i den optimale basisløsning for det ene problem er numerisk lig simplex-koefficienten for den tilsvarende variabel i det andet problem;*
 3° *den maksimale værdi af linearformen f er lig den minimale værdi for linearformen g .*

Har man løst det ene problem, er dermed også løsningen til det andet givet; de to problemer udgør et samhørende par. Når man skal løse et programmeringsproblem, kan man derfor vælge, om man vil behandle selve dette problem eller dets dual; det vil i regelen være mest praktisk at vælge det, der har færrest bibetingelser.

Før vi går over til et almindeligt bevis for teorem 2, vil vi betragte dets anvendelse på taleksemplet (13) ovenfor; dette har som dual maksimumsproblemet

$$(26) \quad \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \leq 4 & 2y_1 + 2y_2 + y_1' = 4 \\ 3y_2 \leq 2 & \text{eller} & 3y_2 + y_2' = 2 \\ 4y_1 + y_2 \leq 3 & 4y_1 + y_2 + y_3' = 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1' \geq 0, y_2' \geq 0, y_3' \geq 0 \\ 5y_1 + 4y_2 = f = \text{maksimum} . \end{cases}$$

I minimumsproblemet udgjorde x_2 og x_3 den optimale basis; ifølge 1° skal da den optimale basis for (26) bestå af y_1 , y_2 og y_1' . Løses betingelsesligningerne m. h. t. disse 3 variable, får vi

$$(27) \quad \begin{cases} y_1 = \frac{7}{12} + \frac{1}{12}y_2' - \frac{1}{4}y_3' \\ y_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y_2' \\ y_1' = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y_2' + \frac{1}{2}y_3' , \end{cases}$$

og linearformen bliver

$$(28) \quad f = \frac{6}{1} \frac{7}{2} - \frac{1}{1} \frac{1}{2} y_2' - \frac{5}{4} y_3'.$$

Det ses, at simplex-kriteriet er tilfredsstillet, og for $y_2' = y_3' = 0$ får vi den optimale løsning

$$(29) \quad y_1 = \frac{7}{12}, \quad y_2 = \frac{2}{3}, \quad y_1' = \frac{3}{2}, \quad f = \frac{6}{1} \frac{7}{2}.$$

I overensstemmelse med 2° er værdierne for y_1 , y_2 og y_1' i (29) lig med koefficienterne til x_1' , x_2' og x_1 i den nederste ligning (22b), og værdierne for x_2 og x_3 i (23) er numerisk lig koefficienterne til y_2' og y_3' i (28). Endelig er, stemmende med 3°, den maksimale værdi af f i (29) lig med den minimale værdi af g i (23).

Vi skal nu give et almindeligt bevis for dualitetsteoremet¹. Den til (24b) hørende matrix (A, E_1) spaltes ganske som i afsnit 5 i matricerne A_1 og A_2 , hvor A_1 er den optimale basis (af dimension $m \times m$), og A_2 består af de øvrige, her n , søjlevektorer. Som tidligere kan der forekomme både strukturelle vektorer og restvektorer i såvel A_1 som A_2 , og søjlevektorerne i A_1 kan antages lineært uafhængige. Problemet (24) kan da skrives på den tidligere benyttede form

$$(30) \quad \begin{cases} A_1 X_1 + A_2 X_2 = B \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0 \\ C_1^* X_1 + C_2^* X_2 = f = \text{maksimum}, \end{cases}$$

og som dengang får man

$$(31) \quad X_1 = A_1^{-1} B - A_1^{-1} A_2 X_2$$

og

$$(32) \quad f = C_1^* A_1^{-1} B + (C_2^* - C_1^* A_1^{-1} A_2) X_2.$$

Da basen A_1 er antaget optimal, vil den ved (31) bestemte basisløsning $A_1^{-1} B$ være positiv (smlgn. fodnoten) og koefficienten til X_2 i (32) ikke-positiv (smlgn. fodnoten side 130).

Det til (24) svarende dualproblem (25) kan med de betegnelser, der er benyttet ovenfor, skrives

$$(33) \quad \begin{cases} A_1^* Y - E_1 Y_1' = C_1 \\ A_2^* Y - E_2 Y_2' = C_2 \\ Y \geq 0, \quad Y_1' \geq 0, \quad Y_2' \geq 0 \\ B^* Y = g = \text{minimum}, \end{cases}$$

¹ Vi gør dog, som hidtil, den indskrænkende forudsætning, at den optimale basisløsning indeholder netop m variable $\neq 0$, altså at løsningen ikke er »degenereret«; ellers ville vi ikke kunne føre beviset med anvendelse af simplex-kriteriet. — Det følger ikke heraf, at sætningen kun gælder, når den nævnte forudsætning er opfyldt.

hvor $\mathbf{Y}_1'$ og $\mathbf{Y}_2'$ er vektorer bestående af restvariable, og $\mathbf{E}_1$ og $\mathbf{E}_2$ er enhedsmatricer af henholdsvis m 'te og n 'te orden. Vi har her ikke blot — i overensstemmelse med (25b) — skrevet betingelsesligninger op svarende til de n strukturelle vektorer i $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{A}_2$, men også for de m restvektorer, der er indeholdt heri. Dette ændrer dog ikke problemet; thi da koefficienterne til de restvariable $x_1', x_2', \dots, x_m'$ i linearformen f er nul, vil de sidstnævnte ligninger have formen

$$(34) \quad 1 \cdot y_j - 1 \cdot y_k' = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

og disse ligninger identificerer blot $y_1, y_2, \dots, y_m$ med m af de $n+m$ indførte restvariable y_k' . Dette medfører imidlertid, at vi kan lade $\mathbf{Y}$ gå helt ud af spillet og betragte (33) som et problem vedrørende vektorerne $\mathbf{Y}_1'$ og $\mathbf{Y}_2'$ alene. For gennemførelsen af beviset er det mest praktisk at finde $\mathbf{Y}$ af den første ligning (33), hvilket giver

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A}_1^*)^{-1} \mathbf{C}_1 + (\mathbf{A}_1^*)^{-1} \mathbf{Y}_1',$$

og indsætte dette i den anden ligning og i linearformen g . Herved fås

$$(35) \quad \begin{cases} \mathbf{Y}_2' = -(\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_2^*(\mathbf{A}_1^*)^{-1} \mathbf{C}_1) + \mathbf{A}_2^*(\mathbf{A}_1^*)^{-1} \mathbf{Y}_1' \\ g = \mathbf{B}^*(\mathbf{A}_1^*)^{-1} \mathbf{C}_1 + \mathbf{B}^*(\mathbf{A}_1^*)^{-1} \mathbf{Y}_1' \end{cases}$$

Formen af disse sidste ligninger svarer til, at vi i problemet (33) i dets reducerede form har valgt $\mathbf{Y}_2'$ som basis og derfor udtrykt såvel denne som g ved $\mathbf{Y}_1'$. Da $\mathbf{B}^*(\mathbf{A}_1^*)^{-1} = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B})^*$, ser man, at koefficienten til $\mathbf{Y}_1'$ i linearformen g — efter transposition — er lig den optimale løsning for $\mathbf{X}_1$ i (31), altså positiv, således at simplex-kriteriet for minimum af g for $\mathbf{Y}_1' = \mathbf{0}$ er opfyldt. Den minimale værdi for g bliver

$$g_{\min} = \mathbf{B}^*(\mathbf{A}_1^*)^{-1} \mathbf{C}_1 = (\mathbf{C}_1^* \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B})^* = f_{\max}.$$

Omvendt er den optimale løsning for $\mathbf{Y}_2'$ i (35), svarende til $\mathbf{Y}_1' = \mathbf{0}$, lig med koefficienten til $\mathbf{X}_2$ i (32) med modsat fortegn (og transponeret), altså ikke-negativ.

Der er således etableret en sammenparring af koordinaterne for $\mathbf{X}_1$ og $\mathbf{Y}_1'$ samt for $\mathbf{X}_2$ og $\mathbf{Y}_2'$. Ifølge ligningerne (34) kan nu m af koordinaterne i $\mathbf{Y}_1'$ og $\mathbf{Y}_2'$ — nemlig de, der svarer til de m restvariable i $\mathbf{X}_1$ og $\mathbf{X}_2$ — ombyttes med koordinaterne i $\mathbf{Y}$; hvis den k 'te variabel i $\mathbf{X}_1$ eller $\mathbf{X}_2$ er en restvariabel x_j' , svarer dertil den k 'te variabel i $\mathbf{Y}_1'$ resp. $\mathbf{Y}_2'$, og denne variabel vil ifølge (34) netop være lig med y_j . Sammenparringen bliver altså den, der er omtalt i teorem 2, og idet de tre påstande 1°, 2° og 3° er godtgjort ovenfor, er teorem 2 hermed bevist.

Vi vil illustrere den benyttede fremgangsmåde ved et eksempel. Antag, at vi har problemet

$$(36) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_1' = 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_2' = 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1' \geq 0, \quad x_2' \geq 0 \\ 5x_1 + x_2 = f = \text{maksimum} . \end{cases}$$

Den optimale basis udgøres af x_1 og x_1' ; vi får nemlig ved løsning m. h. t. disse to variable:

$$(37) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_2' \\ x_1' = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_2' \\ f = \frac{15}{2} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_2' . \end{cases}$$

Dualproblemet bliver, når det skrives på formen (25b):

$$(38a) \quad \begin{cases} y_1 + 4y_2 - y_1' = 5 \\ 2y_1 + y_2 - y_2' = 1 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_1' \geq 0, \quad y_2' \geq 0 \\ 2y_1 + 6y_2 = g = \text{minimum} . \end{cases}$$

Fremstillet med 4 bibetingelser, svarende til (33), bliver det samme problem

$$(38b) \quad \begin{cases} y_1 + 4y_2 - y_1' = 5 \\ 2y_1 + y_2 - y_2' = 1 \\ y_1 - y_3' = 0 \\ y_2 - y_4' = 0 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_1' \geq 0, \quad y_2' \geq 0, \quad y_3' \geq 0, \quad y_4' \geq 0 \\ 2y_1 + 6y_2 = g = \text{minimum} , \end{cases}$$

hvor den 1. og den 3. bibetingelse svarer til $A_1^* Y - E_1 Y_1' = C_1$, den 2. og den 4. til $A_2^* Y - E_2 Y_2' = C_2$. I henhold til bevisførelsen ovenfor skal vi da finde $Y = (y_1, y_2)$ af den 1. og den 3. ligning, hvilket giver

$$y_1 = y_3', \quad y_2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}y_1' - \frac{1}{4}y_3' .$$

Indføres dette i den 2. og den 4. ligning samt i linearformen, fås

$$(39) \quad \begin{cases} y_2' = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y_1' + \frac{7}{4}y_3' \\ y_4' = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}y_1' - \frac{1}{4}y_3' \\ g = \frac{15}{2} + \frac{3}{2}y_1' + \frac{1}{2}y_3' . \end{cases}$$

I det foreliggende eksempel havde det dog været naturligare at indsætte $y_1 = y_3'$ og $y_2 = y_4'$ i de to øverste og den sidste ligning (38b), hvorfra man let kommer videre til (39).

Ligningerne (39) svarer — bortset fra betegnelserne y_3' og y_4' for y_1 og y_2 — til, at vi i (38a) vælger y_2 og y_2' som basis og udtrykker disse — samt g — ved y_1 og y_1' . Sammenparringen af de variable i (36) og (38) bliver (x_1, y_1') , (x_2, y_2') , $(x_1', y_1 = y_3')$ og $(x_2', y_2 = y_4')$, og det ses, at de i teorem 2 nævnte påstande er opfyldt.

Vi har ovenfor udelukkende betragtet dualproblemer af formen (24) og (25), hvor alle bibetingelserne — før indførelsen af restvariable — havde karakter af uligheder. Også når dette ikke er opfyldt, kan man tale om dualproblemer; men der kan da ikke etableres fuldstændig symmetri mellem dem, idet der ikke gælder ligninger svarende til (34). Vi skal ikke gå nærmere ind herpå.

7. Den problemstilling, som karakteriserer lineær programmering, og de metoder, der er blevet udviklet til løsning af sådanne problemer, har vist sig at have meget stor praktisk betydning på en række forskellige områder. Navnlig kan et stort antal *økonomiske* problemer formuleres og løses ved hjælp af lineær programmering. Dette hænger sammen med, at det generelle problem, som er den økonomiske videnskabs genstand, principielt går ud på at søge et optimum under bibetingelser, idet al økonomiseringen består i at finde frem til den bedst mulige udnyttelse af knappe ressourcer under givne teknologiske og andre vilkår. Kriteriet på optimalitet kan f. eks. være, at profitten er maksimal, eller at omkostningerne er mindst mulige. Der er normalt mere end én måde at udnytte ressourcerne på; hvor de forskellige muligheder fremtræder som alternative løsninger til et system af lineære relationer mellem et antal variable, der skal være ikke-negative for at have mening (f. eks. de producerede mængder af et antal varer, eller de produktive indsatser, der medgår ved fremstillingen), og profit eller omkostninger kan udtrykkes som en lineærform i disse variable (med priserne som koefficienter), kan den økonomiske model udtrykkes som et lineært programmeringsproblem.¹

Programmeringsanalysen har da også sine rødder dels i visse lineære modeller inden for den økonomiske teori, dels i militært forskningsarbejde med løsning af organisationsproblemer, og den er i de senere år blevet anvendt til løsning af et ret stort antal praktiske opgaver, fra den enkelte virksomheds eller husholdnings økonomiske problemer² til økonomisk planlægning for et helt samfund³.

¹ Det er interessant at bemærke, at dualproblemet i de fleste sådanne modeller har vist sig at have en ganske bestemt, økonomisk relevant tolkning.

² En række litteraturhenvisninger findes i [4] I, p. 116.

³ I sidste tilfælde kan man komme ud for programmeringsproblemer af et ganske anseeligt omfang, med flere hundrede variable og et stort antal bibetingelser; det kan da være hensigtsmæssigt at bruge andre metoder end simplex-metoden ved den numeriske løsning. Den enkelte virksomheds økonomiske problemer er oftest af mere beskeden størrelse; i et problem, som er behandlet af forf. (S. Danø: *Linear Programming in Ice Cream Making*, Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi nr. 43 (1955)), forekommer der således 14 variable (alle strukturelle) med 7 bibetingelser.

LITTERATUR

- [1] A. BORDIN (ed.): *La programmazione lineare nell' industria*. Edizioni della Unione Industriale di Torino, Torino 1954.
- [2] A. CHARNES—W. W. COOPER—A. HENDERSON: *An Introduction to Linear Programming*. John Wiley & Sons, New York 1953.
- [3] J. CHIPMAN: *Computational Problems in Linear Programming*. Review of Economics and Statistics 35 (1953), pp. 342–349.
- [4] S. DANØ: *Linear programming i produktionsteorien, I–III*. *Nationalekonomisk Tidsskrift* 93 (1955), pp. 94–117 og 205–233; 94 (1956), pp. 47–61.
- [5] R. DORFMAN: *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm*. University of California Press, Berkeley 1951.
- [6] R. FRISCH: *Principles of Linear Programming*. Memorandum fra Universitetets sosialøkonomiske Institutt, Oslo, 18 October 1954. (Desuden et stort antal andre stencilerede memoranda fra instituttet.)
- [7] D. GALE—S. DANØ: *Linear Programming: An Introduction to the Problems and Methods*. *Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi* nr. 40 (1954), pp. 5–32.
- [8] T. C. KOOPMANS (ed.): *Activity Analysis of Production and Allocation*. Cowles Commission Monograph no. 13. John Wiley & Sons, New York 1951.
- [9] N. NIELSEN: *Lineær programmering*. *Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi* nr. 42 (1955), pp. 107–138.

NOGLE SÆTNINGER AF J. HJELMSLEV OM PLANE, VINDSKÆVE OG SFÆRISKE FIRKANTER

FR. FABRICIUS-BJERRE

For en del år siden overgav professor J. Hjelslev mig et gammelt manuskript og opfordrede mig til at se nærmere på enkelthederne deri. Manuskriptet indeholdt nogle sætninger om to plane firkanter $ABCD$ og $A_1B_1C_1D_1$, der har samme omkreds, og hvor summen af tilsvarende sider er konstant. Tillige fandtes udvidelser af disse sætninger til vindskæve og til sfæriske firkanter. I den følgende fremstilling af Hjelslevs sætninger handler de tre første afsnit om plane firkanter, de to sidste om henholdsvis vindskæve og sfæriske firkanter.

1. Lad der i en plan være givet 4 punkter A, B, C og D , af hvilke ikke tre ligger på samme rette linie (fig. 1). Ved firkanten $ABCD$ skal i det følgende forstås den figur, der dannes af de 4 liniestykker AB, BC, CD og DA . Disse liniestykker kaldes firkantens sider og betegnes henholdsvis a, b, c og d . Liniestykkerne $AC=e$ og $BD=f$ kaldes firkantens diagonaler. Firkanten kan være konveks eller ukonveks, og modstående sider kan skære hinanden.

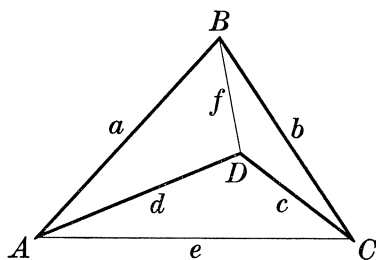


Fig. 1

Mellem de 6 længder $a, b, \dots, f$ gælder forskellige uligheder. Således tilfredsstiller diagonalen e trekantsulighederne for trekanterne ABC og ADC , d.v.s.

$$(1) \quad |a-b| < e < a+b, \quad |c-d| < e < c+d,$$

og analoge uligheder gælder for f .

Har man omvendt givet 5 liniestykker a, b, c, d og e , for hvilke ulighederne (1) gælder, vil man kunne konstruere trekanterne ABC og ADC med den fælles side AC , og der vil da i almindelighed være to firkanter $ABCD$ med siderne a, b, c, d og diagonalen e , idet de to trekanter kan

lægges på hver sin side eller på samme side af AC^1 . Ulighederne (1) er således nødvendige og tilstrækkelige for eksistensen af (mindst) en firkant $ABCD$.

Af (1) udledes for siderne ulighederne

$$(2a) \quad |a-b| < c+d, \quad |c-d| < a+b.$$

Indføres for firkantens omkreds betegnelsen $2s$, ses disse uligheder at være ækvivalente med

$$(2b) \quad s-a > 0, \quad s-b > 0, \quad s-c > 0, \quad s-d > 0.$$

Har man omvendt givet 4 længder a, b, c og d (med summen $2s$), der tilfredsstiller ulighederne (2), vil de to intervaller $(|a-b|, a+b)$ og $(|c-d|, c+d)$ have et interval I fælles, hvis nedre grænse er det største af tallene $|a-b|$ og $|c-d|$, og hvis øvre grænse er det mindste af tallene $a+b$ og $c+d$. Vælges e i dette interval, vil samtlige uligheder (1) være opfyldt, og a, b, c og d kan da være sider i en firkant (med diagonalen e). Betingelserne (2) er således nødvendige og tilstrækkelige for eksistensen af firkanter med siderne a, b, c og d .

Når e gennemløber intervallet I , vil der fremkomme uendelig mange firkanter med de givne sider. En enkelt af disse betegnes i det følgende med F , hele samlingen med (F) . Man kan let danne samlingen ud fra en enkelt firkant F , idet denne tænkes at være en leddet stangfigur.

2. Vi vil nu gå over til at undersøge de i indledningen omtalte firkanter. Lad F være en firkant med siderne a, b, c og d og omkredsen $2s$ og F_1 en firkant med siderne a_1, b_1, c_1 og d_1 og omkredsen $2s_1$. For de to firkanter skal der gælde ligningerne

$$(3a) \quad a+a_1 = b+b_1 = c+c_1 = d+d_1, \quad 2s = 2s_1.$$

Af disse ligninger ses, at de tilsvarende sider har summen $s=s_1$, således at

$$(3b) \quad a_1 = s-a, \quad b_1 = s-b, \quad c_1 = s-c, \quad d_1 = s-d.$$

Omvendt kan (3a) afledes af (3b), således at de to ligningssystemer er ækvivalente.

Det er nu let at se, at dersom F er en *vilkaarlig firkant* med siderne a, b, c og d , og man af (3b) danner stykkerne a_1, b_1, c_1 og d_1 , vil disse altid kunne være sider i en firkant F_1 . Thi stykkerne er ifølge (2b) positive, og endvidere er

¹ I det tilfælde, hvor trekant ABC er kongruent med trekant ADC , altså hvor $a=d$ og $b=c$, fremkommer kun een firkant.

$$(4) \quad s_1 - a_1 = s - a_1 = a > 0,$$

d. v. s. de til (2b) svarende betingelser er opfyldt.

Adderes og subtraheres de to første ligninger i (3b) og ligeledes de to sidste, kommer man til et nyt system af ligninger, der er ækvivalent med (3a) og (3b), nemlig

$$(3c) \quad \begin{aligned} a_1 + b_1 &= c + d, & c_1 + d_1 &= a + b, \\ a_1 - b_1 &= b - a, & c_1 - d_1 &= d - c. \end{aligned}$$

Af disse ligninger følger, at det interval I_1 , som gennemløbes af diagonalen e_1 i firkant F_1 , er det samme som det interval I , som gennemløbes af diagonalen e i firkant F .

Til en given værdi k i intervallet $I = I_1$ svarer to firkanter F og to firkanter F_1 , for hvilke diagonalerne $e = e_1 = k$. Lader man nu den firkant F , der deles (ikke deles) af diagonalen e , svare til den firkant F_1 , der deles (ikke deles) af e_1 , har man dermed oprettet en enetydig forbindelse mellem firkanterne i samlingerne (F) og (F_1) . To firkanter F og F_1 siges at være *tilsvarende*, hvis de hører sammen i denne korrespondance.

3. Vi skal nu opstille nogle sætninger om tilsvarende firkanter.

SÆTNING 1. *I tilsvarende firkanter F og F_1 er de to andre diagonaler BD og B_1D_1 også lige store, altså $f = f_1$.*

For denne sætning anfører vi to beviser, det første uden, det andet med anvendelse af analytisk geometri.

Sætningen bevises først ved anvendelse af den (bekendte) relation, der findes mellem de 6 afstande mellem 4 punkter i en plan, altså mellem de 6 længder $a, b, \dots, f$ i firkant F . Relationen kan udledes på følgende måde. Lad os betegne vinklerne BAC , CAD og DAB (fig. 1) med henholdsvis α , β og γ . Disse vinkler tilfredsstiller en af ligningerne

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad \beta = \gamma + \alpha, \quad \gamma = \alpha + \beta, \quad \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ.$$

Af disse ligninger findes $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma \pm \sin \beta \sin \gamma$, der atter kan omskrives til

$$(5) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = 0.$$

Udtrykker man nu $\cos \alpha$, $\cos \beta$ og $\cos \gamma$ ved siderne i de tre trekanter BAC , CAD og DAB , altså benytter formelen $\cos \alpha = (a^2 + e^2 - b^2)/2ae$ og analoge, og indsætter i (5), fås efter reduktion den søgte relation

$$(6) \quad \begin{aligned} e^2 f^2 (e^2 + f^2) - e^2 f^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + e^2 (b^2 - c^2)(a^2 - d^2) \\ + f^2 (a^2 - b^2)(d^2 - c^2) + (a^2 c^2 - b^2 d^2)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) = 0. \end{aligned}$$

Ligning (6) kan siges at fremstille forbindelsen mellem diagonalerne e og f i en firkant med givne sider a , b , c og d . Har man tillige givet diagonalen e , finder man af (6) to værdier for f (f^2), hvoraf den mindste, henh. største svarer til det tilfælde, hvor trekkanterne ABC og ADC ligger på samme, henh. hver sin side af diagonalen AC .

Ligning (6) har nu den egenskab, at den også udtrykker forbindelsen mellem diagonalerne e_1 og f_1 i firkanterne F_1 , idet man kan vise, at hver enkelt af koefficienterne i (6), der er funktioner af a , b , c og d , er lig med det tilsvarende udtryk i a_1 , b_1 , c_1 og d_1 . Således ser man, at

$$(7) \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

når man benytter formlerne (3b). For at vise det tilsvarende for koefficienterne til e^2 og f^2 er det lettest at opløse dem i faktorer og anvende (3c). For det sidste leds vedkommende viser man let ved (3b), at

$$(8) \quad a_1c_1 + b_1d_1 = ac + bd,$$

og derefter kan man ved (3b) eller (3c) vise, at

$$(a_1c_1 - b_1d_1)(a_1^2 + c_1^2 - b_1^2 - d_1^2) = (ac - bd)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2).$$

For firkanterne F og F_1 er yderligere forudsat, at $e_1 = e$, hvoraf følger, at f og f_1 bestemmes af samme ligning. Da firkanterne desuden er tilsvarende, således at de begge enten deles eller ikke deles af de ligestore diagonaler, må man også have $f = f_1$. Dermed er sætningen bevist.

Vi går derefter over til det andet bevis. Da $e_1 = e$, kan vi flytte firkant F_1 således, at A_1 falder i C og C_1 i A . Tillige sørger vi for, at D_1 kommer til at ligge på samme side af AC som B . Da firkanterne er tilsvarende, vil punkterne B_1 og D enten begge ligge på samme side af AC som B og D_1 eller begge på den modsatte side (fig. 2).

Af formlerne (3c) ses nu, at B og D_1 ligger på en ellipse med A og C som brændpunkter, og at det samme gælder B_1 og D . Af (3c) fremgår videre, at B og B_1 ligger på samme hyperbel (hyperbelgren) med A og C som brændpunkter, og at det samme gælder D og D_1 . Den krumlinede firkant BD_1DB_1 begrænses da af dele af konfokale ellipser og hyperbler, der skærer hinanden under ret vinkel, og det gælder nu om at vise, at i dette »krumlinede rektangel« er diagonalerne BD og B_1D_1 lige lange.

Vi indfører et retvinklet koordinatsystem XY med X -aksen på diagonalen AC og begyndelsespunktet O i diagonalens midtpunkt. I dette

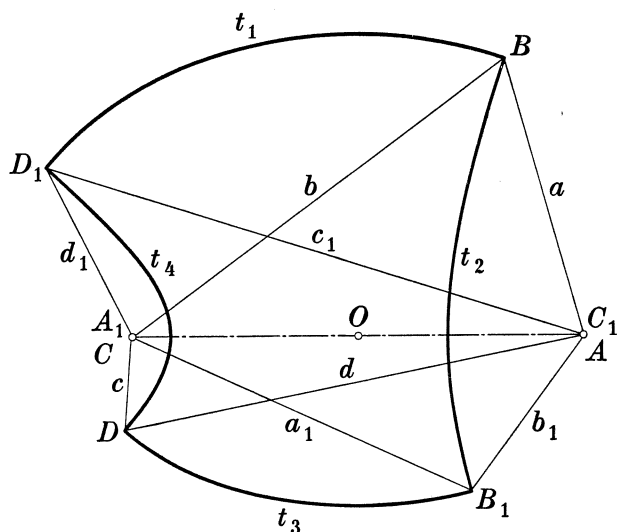


Fig. 2

koordinatsystem kan de 4 konfokale keglesnit fremstilles ved ligninger af formen

$$(9) \quad \frac{x^2}{p^2 - t} + \frac{y^2}{q^2 - t} = 1,$$

hvor $p^2 - q^2 = OA^2$, og hvor de til ellipserne gennem B og D_1 , henh. B_1 og D svarende parameterværdier t_1 , henh. t_3 ligger i intervallet $(-\infty, q^2)$, mens de til hyperblerne gennem B og B_1 , henh. D og D_1 svarende parameterværdier t_2 , henh. t_4 ligger i intervallet (q^2, p^2) . Koordinaterne til punktet B betegnes (x_{12}, y_{12}) , idet B er bestemt ved de såkaldte »elliptiske koordinater« t_1 og t_2 , og på analog måde betegnes koordinaterne til de tre andre vinkelspidser B_1 , D og D_1 (smlgn. fig. 2).

For at bestemme koordinaterne til B indsættes t_1 og t_2 i ligning (9), hvorefter man ved løsning af ligningerne finder

$$(10) \quad x_{12}^2 = \frac{(p^2 - t_1)(p^2 - t_2)}{p^2 - q^2}, \quad y_{12}^2 = \frac{(q^2 - t_1)(q^2 - t_2)}{q^2 - p^2}.$$

Analoge udtryk findes for koordinaterne til de andre punkter. Derefter fås til bestemmelse af diagonalen BD :

$$(11) \quad BD^2 = (x_{12} - x_{34})^2 + (y_{12} - y_{34})^2 = OB^2 + OD^2 - 2(x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34}).$$

Af (10) fås

$$OB^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2 = p^2 + q^2 - t_1 - t_2,$$

således at $OB^2 + OD^2$ er symmetrisk i de 4 parametre t_1, t_2, t_3, t_4 . Idet man kommer fra B og D til D_1 og B_1 ved ombytning af indices 2 og 4, har man

$$(12) \quad OB^2 + OD^2 = OB_1^2 + OD_1^2.$$

Endvidere ses af (10) og analoge, at såvel $x_{12}^2 x_{34}^2$ som $y_{12}^2 y_{34}^2$ er symmetrisk i de 4 parametre. Da punkterne B og B_1 ligger på samme hyperbelgren, må x_{12} og x_{32} have samme fortegn, og det tilsvarende må gælde for x_{14} og x_{34} . Da punkterne B og D_1 er placeret på samme side af AC , vil y_{12} og y_{14} have samme fortegn, og det tilsvarende vil gælde for y_{23} og y_{43} . Mellem abscisserne og ordinaterne for de 4 punkter B, B_1, D og D_1 må da gælde ligningerne

$$(13) \quad x_{12}x_{34} = x_{14}x_{23}, \quad y_{12}y_{34} = y_{14}y_{23}.$$

Af ligningerne (11), (12) og (13) følger nu, at $BD = B_1D_1$, hvorved sætning 1 påny er bevist.

Med den på fig. 2 angivne beliggenhed af de givne firkanter F og F_1 , hvor det kommer an på at bevise ligestorheden af diagonalerne i et krumlinet rektangel, begrænset af dele af konfokale ellipser og hyperbler, er sætning 1 velkendt under navnet *Ivory's sætning*¹ (for konfokale ellipser og hyperbler). Det kan bemærkes, at ethvert sådant krumlinet rektangel i forbindelse med brændpunkterne bestemmer to firkanter, der er tilsvarende i samlingerne (F) og (F_1). Thi med figurens betegnelser gælder ligningerne (3c), diagonalerne AC og A_1C_1 er lige lange, og de to firkanter har samme beliggenhed i forhold til den fælles diagonal.

Ved hjælp af de ovenfor anførte formler kan man vise andre sætninger om tilsvarende firkanter F og F_1 . Således bestemmes medianen m i trekant $OB D$ fra punktet O ved den bekendte formel

$$4m^2 = 2(OB^2 + OD^2) - BD^2.$$

Da nu ligning (12) gælder, og $BD = B_1D_1$, må medianen i trekant OB_1D_1 også have længden m . Idet O er midtpunktet af den fælles diagonal $AC = A_1C_1$, har man dermed bevist

SÆTNING 2. *I tilsvarende firkanter F og F_1 er afstanden mellem diagonalernes midtpunkter den samme.*

Sætningen kan også vises ud fra formlen

$$(14) \quad 4m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2,$$

¹ Se f. eks. W. Blaschke: *Analytische Geometrie*, Basel 1954, s. 112.

der udtrykker afstanden mellem midtpunkterne af diagonalerne i en firkant med siderne a, b, c, d og diagonalerne e, f . Ifølge (7) er kvadratsummen af siderne den samme i firkanterne F og F_1 , og da tillige $e = e_1$ og $f = f_1$, er sætningens rigtighed bevist.

Ordinaterne y_{12} og y_{34} er højder i trekanten ABC og ADC med den fælles grundlinie AC . Betegner man med T og T' arealerne af disse trekanten og med T_1 og T_1' arealerne af de tilsvarende trekanten $A_1B_1C_1$ og $A_1D_1C_1$, følger af anden ligning i (13), at

$$(15) \quad TT' = T_1T_1',$$

altså gælder

SÆTNING 3. *Produktet af arealerne af de to trekanten i firkanten F , der har en diagonal fælles, er lig med produktet af arealerne af de tilsvarende trekanten i firkanten F_1 .*

For tilsvarende firkanten F og F_1 gælder ligning (8). Da desuden $e = e_1$ og $f = f_1$, har man ved anvendelse af Ptolemæus' sætning og dens omvendte:

SÆTNING 4. *Dersom to tilsvarende firkanten er konvekse, vil de enten begge være indskrivelige eller begge ikke indskrivelige i en cirkel.*

4. Vi betragter herefter *vindskæve firkanten*, d. v. s. firkanten, hvis vinkelspidser ikke ligger i samme plan. Lad F og F_1 være to vindskæve firkanten, hvis sider a, b, c, d og a_1, b_1, c_1, d_1 tilfredsstiller ligningerne (3), og hvor desuden diagonalerne $AC = e$ og $A_1C_1 = e_1$ er lige lange. Dersom det yderligere gælder, at kantvinklerne v og v_1 langs de lige lange diagonalen er lige store, siges firkanten at være *tilsvarende*. Man kan åbenbart danne tilsvarende vindskæve firkanten af tilsvarende plane firkanten ved at dreje trekanten ACD og $A_1C_1D_1$ samme vinkel ud fra deres udgangsstilling om henholdsvis AC og A_1C_1 .

Vi viser nu først, at *sætning 1 gælder for tilsvarende vindskæve firkanten*. Firkant F tænkes anbragt i et retvinklet koordinatsystem XYZ således, at diagonalen AC falder på X -aksen med midtpunktet O i koordinatsystemets begyndelsespunkt, og punktet B ligger i XY -planen. Koordinaterne til B betegnes $(x_{12}, y_{12}, 0)$. For kantvinklen $v = 0$ betegnes koordinaterne til punktet D (som ovenfor) med $(x_{34}, y_{34}, 0)$. Nu drejes trekant ACD vinklen v om AC , hvorved D får koordinaterne

$$(x_{34}, y_{34} \cos v, y_{34} \sin v).$$

Diagonalen BD i den vindskæve firkant $ABCD$ bestemmes nu ved

$$BD^2 = (x_{12} - x_{34})^2 + (y_{12} - y_{34} \cos v)^2 + (y_{34} \sin v)^2,$$

eller

$$(16) \quad BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2(x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34} \cos v).$$

Derefter flyttes firkant F_1 således, at A_1C_1 falder i CA og punktet D_1 i XY -planen til samme side for AC som punktet B . Opstilles nu den til (16) svarende formel for B_1D_1 , og anvendes de i nr. 3 opstillede formler (12) og (13), er det klart, at dersom kantvinklerne v og v_1 er lige store, har man $BD = B_1D_1$. Dermed er sætning 1 bevist for tilsvarende vindskæve firkanter.

Tillige fremgår heraf, at dersom $BD = B_1D_1$, vil omvendt $v = v_1$. Der gælder da den sætning, at dersom siderne i to vindskæve firkanter tilfredsstiller ligningerne (3) og tilsvarende diagonaler er lige store, vil kantvinklerne langs tilsvarende diagonaler også være lige store.

Sætningerne 2 og 3 kan uden videre overføres, hvorimod sætning 4 ikke har nogen tilsvarende for vindskæve firkanter. Derimod kan man om disse vise en anden egenskab. En vindskæv firkant med siderne a, b, c, d og diagonalerne e, f bestemmer et tetraeder med modstående kanter a og c, b og d samt e og f . Idet højden i tetraedret fra D og højden i sidefladen ACD , også fra D , har forholdet $\sin v$, ser man, at tetraedrets volumen kan findes af formlen

$$(17) \quad V = \frac{2}{3} \frac{TT' \sin v}{e},$$

hvor T og T' som tidligere betegner arealerne af trekkanterne ABC og ADC . Med anvendelse af (15) følger da, at *tilsvarende vindskæve firkanter bestemmer tetraedre med samme volumen*. Sætningen følger også deraf, at venstre side af (6) for det nævnte tetraeder er lig med $-144V^2$, og denne funktion af de 6 kanter er uforandret ved overgang til firkanten F_1 .

5. Vi vil til sidst undersøge, i hvilket omfang de opstillede sætninger kan overføres til *sfæriske firkanter*.

Med sædvanlige betegnelser gælder for sfæriske firkanter ulighederne (1), hvor man forudsætter de sfæriske afstande mindre end 180° . Disse betingelser er nødvendige, men ikke tilstrækkelige for eksistensen af en sfærisk firkant med siderne a, b, c, d og diagonalen e , idet man tillige må kræve, at summen af siderne i hver af de to trekkanter ABC og ADC er mindre end 360° . På kuglen får man da, at betingelserne

$$(18) \quad e < 360^\circ - (a + b), \quad e < 360^\circ - (c + d)$$

i forbindelse med (1) udgør de ønskede nødvendige og tilstrækkelige betingelser.

Mellem siderne finder man derefter, at der foruden ulighederne (2a) må gælde

$$(19) \quad |a-b| < 360^\circ - (a+b), \quad |a-b| < 360^\circ - (c+d)$$

og analoge for $|c-d|$. Den første af ulighederne (19) er ensbetydende med, at a og b begge er mindre end 180° , hvilket er forudsat, mens den anden ulighed, i forbindelse med den tilsvarende for $|c-d|$, taget sammen med (2b) giver

$$(20) \quad 0^\circ < s-a < 180^\circ$$

og de analoge.

Omvendt ser man nu — som i nr. 1 —, at ulighederne (20) og analoge giver tilstrækkelige betingelser for, at der findes en sfærisk firkant med siderne a, b, c og d . Det interval I , som diagonalen e kan gennemløbe, har uforandret som nedre grænse det største af tallene $|a-b|$ og $|c-d|$, mens øvre grænse er det mindste af tallene $a+b, c+d, 360^\circ - (a+b), 360^\circ - (c+d)$; denne øvre grænse er højst 180° .

Vi vil herefter vise, at hvis F er en sfærisk firkant med siderne a, b, c og d , kan man af stykkerne a_1, b_1, c_1 og d_1 , bestemt ved ligningerne (3), altid danne en anden sfærisk firkant F_1 med disse stykker som sider. Thi ifølge (20) ligger de 4 stykker mellem 0° og 180° , og da $s_1 - a_1 = a$ også ligger i dette interval, vil de til (20) svarende betingelser for firkant F_1 være opfyldt. Af ligningerne (3c) følger som tidligere, at diagonalerne e og e_1 i firkanterne F og F_1 gennemløber samme interval I .

Med hensyn til gyldigheden af de i nr. 3 beviste sætninger for sfæriske firkanter har man, at *sætning 1 gælder for tilsvarende sfæriske firkanter*, idet den som nævnt s. 144 er ensbetydende med Ivory's sætning, der vides at gælde også for konfokale sfæriske keglesnit. Man kan også opskrive et bevis, hvor man benytter den til (6) svarende relation mellem de 6 sfæriske afstande mellem 4 punkter på en kugle. Denne relation fås af (5), idet man i den sfæriske trekant ABC har

$$\cos \alpha = \frac{\cos b - \cos a \cos e}{\sin a \sin e}.$$

Indsætter man dette og de analoge udtryk for $\cos \beta$ og $\cos \gamma$ i (5), fremkommer den søgte relation. Beviset forløber derefter ganske som i planen.

Sætning 2 gælder i almindelighed ikke på kuglen. Til bestemmelse af afstanden m mellem midtpunkterne af diagonalerne i firkant F har man den til (14) svarende formel

$$(21) \quad 4 \cos m = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + \cos d}{\cos \frac{e}{2} \cos \frac{f}{2}}.$$

Vælger man nu en (nødvendigvis ukonveks) firkant F med omkredsen

$2s = 360^\circ$, og hvor summen af sidernes cosinusser er forskellig fra nul, vil tilsvarende sider i F og F_1 have summen 180° , og dette vil ifølge (21) også gælde de tilsvarende afstande m og m_1 . Da man ikke kan have $m = m_1 = 90^\circ$, gælder sætning 2 således ikke for firkanterne F og F_1 .

Sætning 3 kan ikke umiddelbart overføres til kuglen, men man kan dog opstille en sætning, der udtrykker en lignende egenskab ved tilsvarende sfæriske firkanter, som sætning 3 udtrykker for de plane. Med betegnelserne på fig. 1 udtrykker formel (15), at produktet af udtrykkene $ab \sin B$ og $cd \sin D$ er uforandret ved overgang til firkant F_1 . Det viser sig nu, at på kuglen vil produkterne af de »tilsvarende udtryk« $\sin a \sin b \sin B$ og $\sin c \sin d \sin D$ være uforandret ved overgang til F_1 . Beviset gennemføres derved, at man efter kvadrering udtrykker $\cos B$ og $\cos D$ og derved også $\sin^2 B$ og $\sin^2 D$ ved siderne i de to sfæriske trekanter ABC og ADC . Man kommer da til et trigonometrisk udtryk i a, b, c, d og e , hvor man ved anvendelse af ligningerne (3c) let ser, at det ikke ændres ved overgang til F_1 . — Man kan give dette en geometrisk fortolkning, idet man indfører kuglens centrum O og dens radius r . Volumenet af pyramiden (tetraedret) $O-ABC$ kan da udtrykkes ved $\frac{1}{6}r^3 \sin a \sin b \sin B$. Sætning 3 kan herefter overføres, idet man erstatter de indgående arealer med volumenerne af de ved trekanterne og kuglens centrum bestemte tetraedre.

Endelig viser vi, at *sætning 4 gælder på kuglen*. Ved beviset i planen har vi benyttet, at betingelsen $ac + bd = ef$ er nødvendig og tilstrækkelig, for at en konveks firkant med siderne a, b, c, d og diagonalerne e, f er indskrivelig i en cirkel. Til denne betingelse svarer på kuglen

$$(22) \quad \sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2} = \sin \frac{e}{2} \sin \frac{f}{2},$$

der kan omskrives til

$$(23) \quad -\cos \frac{a+c}{2} + \cos \frac{a-c}{2} - \cos \frac{b+d}{2} + \cos \frac{b-d}{2} = 2 \sin \frac{e}{2} \sin \frac{f}{2}.$$

Ifølge (3b) er $a_1 + c_1 = b + d$, $a_1 - c_1 = c - a$, og analogt for $b_1 \pm d_1$; altså vil venstre side af (23) ikke forandres ved overgang til firkant F_1 , og da $e = e_1$ og $f = f_1$, gælder sætning 4 også for sfæriske firkanter.

Hermed har vi vist, i hvilken udstrækning de i nr. 3 opstillede sætninger kan overføres til sfæriske firkanter. Der kan også være tale om andre generalisationer. Således kunne man betragte vindskæve sfæriske firkanter beliggende i et tredimensionalt sfærisk rum (en hyperkugle), eller man kunne undersøge, hvorvidt sætningerne kan overføres til firkanter i en hyperbolsk plan eller i et hyperbolsk rum. Vi vil dog ikke gå ind på overvejelser vedrørende disse nye generalisationer.

OM DELNING AV KONVEXA FIGURER

ARNE PLEIJEL

I ett tidigare arbete (Über die Teilung von ebenen konvexen Bereichen durch Sehnen, Math. Scand. 2:1 (1954)) har jag visat följande sats: *Om ett plant konvext område av en rät linje delas i två delar så, att förhållandet mellan ytans delar är k och förhållandet mellan omkretsens delar q , så gäller olikheten*

$$1 + 2k - q \geq 0,$$

och konstanten 0 kan här icke ersättas med något aldrig så litet positivt tal.

I föreliggande uppsats vill jag visa följande enklare sats: *Delar man ett plant konvext område medelst en rät linje l så, att avståndet mellan med l parallella stödlinjer till området av nämnda linje delas i ett uppgivet förhållande m , så gäller följande olikheter för förhållandena k och q mellan ytans och omkretsens delar:*

$$\frac{m^2}{2m+1} \leq k \leq m^2 + 2m$$

$$\frac{m}{m+2} < q < 2m+1.$$

Vidare vill jag visa följande sats: *Om en tredimensionell konvex kropp delas av ett plan E så, att avståndet mellan med E parallella stödplan till kroppen av E delas i förhållandet m , så gäller för förhållandena k och q mellan volymens och ytans delar följande olikheter:*

$$\frac{m^3}{3m^2+3m+1} \leq k \leq m^3 + 3m^2 + 3m$$

$$\frac{m^2}{2m^2+4m+1} < q < m^2 + 4m + 2.$$

För att bevisa den första satsen betecknar jag de två stödlinjer, som är parallella med l , med l_1 och l_2 . Den punkt (ev. en av de punkter), som l_1 har gemensam med området, betecknas med Q samt skärnings-

punkterna mellan l och områdets begränsning med P_1 och P_2 . Konstruerar jag nu en triangel QR_1R_2 så, att ett hörn ligger i Q , sidan R_1R_2 utefter l_2 och sidorna QR_1 och QR_2 går genom P_1 resp. P_2 så är det tydligt, att för denna triangel storheten m har samma värde som för den ursprungliga figuren medan både k och q minskats (om man i förhållandena sätter delen på samma sida som l_1 i täljaren). Detta gäller oberoende av figurens utseende, om punkterna Q , P_1 och P_2 samt linjen l_2 är givna. För triangeln är det emellertid lätt att uttrycka k och q i m och jag får för triangeln:

$$k_t = \frac{m^2}{2m+1},$$

och detta uttryck är tydligen undre gränsen för k för godtyckliga konvexa områden. Den övre gränsen för k får jag genom att utbyta k mot $1/k$ och m mot $1/m$ så att olikheterna

$$\frac{m^2}{2m+1} \leq k \leq m^2 + 2m$$

gäller.

Vidare gäller för triangeln:

$$q_t = \frac{P_1Q + P_2Q}{P_1R_1 + P_2R_2 + R_1R_2} > \frac{P_1Q + P_2Q}{P_1R_1 + P_2R_2 + QR_1 + QR_2}.$$

Nu är $P_1Q = m \cdot P_1R_1$ och $P_2Q = m \cdot P_2R_2$, vilket insatt i ovanstående ger olikheten

$$q > \frac{m}{m+2}.$$

Genom att utbyta q mot $1/q$ och m mot $1/m$ får jag den omvända olikheten

$$q < 2m + 1.$$

Gränserna för k uppnås tydligen för alla trianglar, som skärs av en parallelltransversal. Gränserna för q kan inte uppnås, men man kan komma dem hur nära som helst genom att låta vinkeln Q i triangeln växa mot π .

För att bevisa den andra satsen betraktar jag en sluten konvex kropp K , vars begränsningsyta är O och som innesluter volymen V . Ett plan E skär kroppen längs en (plan) konvex kurva C och delar avståndet mellan de med E parallella stödplanen E_1 och E_2 i förhållandet m (från E_1 räknat). Låt Q vara en punkt i den gemensamma delen av O och E_1 . Nu konstruerar jag en kon med basytan i E_2 , toppen i Q och mantelytan

gående genom C . För konen är k och q mindre än för den ursprungliga kroppen medan m behåller sitt värde. För konen har jag

$$k_{\text{kon}} = \frac{m^3}{3m^2 + 3m + 1} \leq k.$$

Genom att utbyta k mot $1/k$ och m mot $1/m$ får jag alltså för den ursprungliga kroppen:

$$k \leq m^3 + 3m^2 + 3m.$$

Vidare har jag för konen:

$$q_{\text{kon}} = \frac{Y}{\frac{Y(m+1)^2}{m^2} - Y + \frac{B(m+1)^2}{m^2}},$$

där B är den av C inneslutna ytan och Y den avskurna toppkonens mantelyta. Nu är $B < Y$, vilket ger

$$q \geq q_{\text{kon}} > \frac{m^2}{m^2 + 4m + 2},$$

och motsvarande övre gräns $q < 2m^2 + 4m + 1$.

Likhetstecknen i olikheterna för k gäller för alla koner, som skärs med plan, parallella med basytan. Gränserna för q kan aldrig uppnås, men man kan komma dem hur nära som helst, om rymdvinkeln i konens topp närmar sig 2π .

Nu ger olikheten för k omedelbart $m < 1 + 3k$. Sättes detta in i den andra olikheten för q , får jag

$$q < 18k^2 + 24k + 7.$$

Detta är säkerligen icke den bästa möjliga olikheten, men den visar, att q är begränsad, när k är givet.

BOKMELDINGER

D. VAN DANTZIG: *The function of mathematics in modern society and its consequences for the teaching of mathematics*. 15 pp. P. Noordhoff N. V., Groningen, 1956.

L. N. H. BUNT: *The teaching of mathematics to students between 16 and 21 years of age in the Netherlands*. 11 + 98 pp. J. B. Wolters, Groningen, 1956.

En amerikansk kollega beskriver Nederland som landet der matematikklæreren er konge. Det er sikkert ikke mange land der vårt fag har en så sterk posisjon, det være seg i skole, universitet og samfunnet i det hele. Her blir det stilt store krav til elever og lærere. La oss bare minne om at det i Amsterdam fins et »Matematisk Sentrum« med ca. 80 medarbeidere, som påtar seg oppdrag av forskjellig slag, gir undervisning og som i det hele prøver å bygge bro mellom matematikerne og fagets forbrukere.

Om dette og mye annet forteller de to skriftene nevnt ovenfor, som utgjør 1. og 2. hefte i en serie utgitt av den nederlandske underkomité av den internasjonale matematikkundervisningskommisjon (CIEM). van Dantzig's fengslende oversikt er forresten også trykt i L'Enseignement Mathématique I, 1-3. I Bunts skrift finner vi pensa og tallrike eksamensoppgaver fra forskjellige skoler og høyskoler som i høy grad vil interessere nordiske matematikklærere.

Kay Piene

WOLFGANG HAACK: *Elementare Differentialgeometrie*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, math. Reihe, 20.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1955. 8 + 239 S., 12 Fig. Brosch. SFr. 18.70, ganzl. SFr. 22.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 110.)

Forfatteren gir i denne boka en framstilling av differensialgeometrien for kurver og flater i det tredimensjonale euklidiske rom. Han foretar ikke noen generalisering i retning av riemannsk geometri eller større dimensjonstall. Heller ikke bruker han noe annet koordinatsystem enn

det rettvinklede kartesiske. Framstillingen blir derfor først og fremst anskuelig, og jeg tror det skal være vanskelig å finne en enklere og klarere innføring i dette emnet, enn den som her er gitt.

Innenfor denne avgrensing (boka er bare på vel 200 s.) har forfatteren valgt å følge to hovedlinjer:

På den ene side utvikler han kurve- og flateteorien på den måten som vi nå vel kan kalle klassisk, etter mønster av Gauss og Monge, og kommer da fram til slikt som Meuniers sats, krumningslinjene, Dupins indikatrixe, asymptotiske linjer osv. Til dette er gjort konsekvent bruk av vektorregning, og derfor åpner boka med et lite kapittel om vektorer. Forresten har en vel nå lov til å gå ut i fra at vektorregning på forhånd er kjent av en leser som søker til en bok som denne.

Når det gjelder de Gaussiske derivasjonslikninger i flateteorien og likningene for de geodetiske linjer, ville jeg personlig foretrekke å skrive Christoffelsymbolene med ett tall oppe og to nede, slik f. eks.:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix},$$

i stedet for den vanlige måten som også forf. følger:

$$\begin{Bmatrix} 1 \ 2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

fordi det første er mere tilpasset til formalismen i tensorregningen med dens kovariante og kontravariante indekser. Dette er et pedagogisk spørsmål, og naturligvis bare en bagatell, særlig i denne sammenhengen, fordi tensorbegrepet jo overhodet ikke innføres hos forf.

Av hensyn til den praktiske nytten ved kartprojeksjoner o. l. er det tatt med et noe utførligere kapittel om konform avbildning.

Parallellitet etter Levi-Civita innføres ved behandlingen av geodetiske linjer. Så en skjønner at flateteorien er framstilt så fullstendig som en kan forlange.

Etter dette får vi så det hele om igjen, i det forf. gjennomfører Cartans tanke med »das begleitende Dreibein«, og viser at denne siste metoden kan yte det samme som den første, ja mer. Denne parallellføring av begge metodene er det verdifulleste ved boka, det er dens egentlige idé. Og det er gjort på en meget klar og inspirerende måte. Derfor har boka mye å gi også til den som kjenner den elementære differensialgeometri på forhånd.

Ved utviklingen av denne siste teorien innføres som hjelpemiddel begrepet Pfaffske former, og et lite kapittel gir det nødvendige om hvordan en regner med dem. Dette var vel i og for seg ikke påkrevet for å

komme fram til vilkårene for integrerbarhet i flateteorien, men det er vel verd å ta umaken med å tilegne seg dette først, fordi det betyr en stor forenkling av de regninger en ellers måtte gjøre.

I tilslutning til denne Cartanske metoden ender boka så med noen kapitler som fører ut over det elementære. Det er eksistenssetningen og mulighetene av å bøye en flate uten at den strekkes eller skrumper sammen. Disse er skrevet mere som et oversyn over de problemer en der kan arbeide med, enn som kapitler i en lærebok. De virker som en avsluttende oppfordring til leseren om å gjøre seg kjent med noe av innholdet i den lange litteraturlista, som boka er forsynt med.

Tilsist må nevnes at boka ikke inneholder en eneste oppgave, og det må en vel beklage, særlig om den skal brukes til selvstudium.

Ottar Ytrehus

R. KOCHENDÖRFFER: *Einführung in die Algebra*. (Hochschulbücher für Mathematik 18.) Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955. 12+316 S. DM 47.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 159.)

Forfatteren har sat sig det mål at gøre studerende fortrolig med de af algebraens grundlæggende begreber og resultater, som på den ene side må regnes som en matematikers uundværlige værktøj, og hvis beherskelse på den anden side er forudsætningen for en dybere indtrængen i den højere moderne algebra. I sin udmærkede fremstilling har han valgt en form, der ligger mellem den klassiske behandling af stoffet og den helt moderne »Bourbaki-stil«. Han forudsætter kun kundskaber fra gymnasiet, elementerne af den lineære algebra og fortrolighed med de reelle tals opbygning. De abstrakte begreber som gruppe, ring, legeme, »Bewertung« indføres i tilslutning dertil som udvidelser af kendte begreber og eksempler. Gennemregnede eksempler illustrerer sætningerne og uddyber teorien. En række opgaver til løsning er tilføjet i slutningen. Skønt bogen i det væsentlige følger kendte forbilleder, både hvad stofvalg og beviser angår, er den på grund af den valgte fremstillingsmåde meget lettere læst end andre nyere bøger på samme område.

De behandlede emner fremgår af indholdsfortegnelsen. Skønt det kun drejer sig om en »indledning i algebraen«, får læseren kendskab til de fleste af algebraens grene. Og det er forbavsende, hvor meget forfatteren får sagt om hver enkelt på bogens godt 300 sider. At idealteorien ikke er behandlet, skyldes, som forfatteren nævner i forordet, at der forventes en bog om denne i samme serie.

Man savner måske i bogen en lidt mere fyldig litteraturfortegnelse over både bøger og originalafhandlinger, der kan føre læseren videre i studiet af de omhandlede teorier. F. eks. burde vel Burnside's gruppeteori og Jacobson's bøger om algebra nævnes. Endvidere bemærkes, at den tilføjede trykfejlfortegnelse er ret ufuldstændig. Bortset fra disse mindre mangler kan bogen anbefales på det bedste.

Käte Fenchel

HOMER E. NEWELL, JR.: *Vector analysis*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 11+216 pp. sh. 41/6.

(Innehållsförtegnelse i NMT, denne årgång, s. 41.)

Huvuddelen av denna lärobok upptas av en till omfånget tämligen ordinär kurs i tredimensionell vektoralgebra och vektoranalys, däri inbegripet elementär potentialteori. Särskilt utförligt behandlas krokliniga koordinater, varvid också reciproka basvektorsystem införes; man kommer här praktiskt taget in på tensorskalkyl. Steget över tas dock aldrig, och transformationsegenskaper förbigås så gott som helt i boken. I stället lägges vikt vid att understryka en vektors karaktär av fysikalisk eller geometrisk storhet.

Bokens sista tredjedel ägnas åt tillämpningar, delvis i form av en systematisk men koncentrerad genomgång av det elektromagnetiska fältet, utgående från Maxwells ekvationer. Ett sådant kapitel tycks i många vektorläroböcker ha blivit något av en tradition, som väl nästan överlevt sig själv nu när alla moderna framställningar av elektrodynamiken utnyttjar vektoranalys. Kapitlet är emellertid liksom boken i övrigt välskrivet och kan vara nyttigt.

Det framgår av denna summariska översikt — och påpekas i förordet — att innehållet är tillrättalat för fysikern och teknikern snarare än för den rena matematikern. Detta är ingen ovanlig målsättning för en lärobok i vektoranalys, eftersom ämnet hör till de delar av matematiken som är eller borde vara förtrogen mark inte minst för en fysiker. En fråga som läroboksförfattaren då har att ta ställning till skall här dras fram, nämligen den om den matematiska stringensen. Vid fysikaliska tillämpningar är det framför allt av vikt att ha vant sig vid räkning med vektorer och att ha fått en känsla för den åskådliga innebörden av bildningar som div och rot. Det är inget tvivel om att ett ingående sysslande med matematiska detaljer kan skymma sikten och verka onödigt avskräckande på icke-matematikern, medan exempelvis en universitetsstudent med matematikundervisningens krav i färskt minne lätt finner mera lösliga resonemang otillfredsställande.

Författaren har här valt en, som det synes, rimlig medelväg. Efter ett bevis av den typ som är vanlig i teoretisk fysik underlåter han inte att tillmötesgå matematikern genom att påpeka de punkter där beviset behöver kompletteras för att bli matematiskt strängt. Detaljerna lämnas ofta som övning åt läsaren, vilken bl. a. har ett 20-sidigt kapitel med repetition av begrepp, metoder och satser i differential- och integral-kalkyl att falla tillbaka på.

Utvägen att komplettera framställningen med övningsexempel användes också i andra fall flitigt; texten är i gengäld ganska koncis. En ambitiös läsare får därför bereda sig på en viss självverksamhet — en fördel för den som verkligen vill lära sig något. Ibland kunde man dock önska större fyllighet, som när ett virvelfritt fält skall visas ha vissa andra egenskaper och utan kommentar förutsättes ha kontinuerliga derivator i ett enkelt sammanhängande område. Det välkända mot-exemplet då förutsättningen inte är uppfyllt skulle här vara instruktivt. Ett par liknande obetydliga anmärkningar: integraluttrycket (5.1) kan lätt missförstås, och en formulering på sid. 162 tycks innebära att den fullständiga induktionslagen inte skulle följa ur de grundläggande fält-ekvationerna. Det bestående intrycket är emellertid avgjort positivt, vartill i hög grad bidrar den rediga uppställningen och utstyrslsen. En bra sak är att de talrika övningsuppgifterna är försedda med svar, tyvärr dock endast i bokens huvuddel och inte när det gäller bevis.

S. Bertil Nilsson

W. W. SAWYER: *Prelude to mathematics*. An account of some of the more stimulating and surprising branches of mathematics, introduced by an analysis of the mathematical mind, and the aims of the mathematician. (Pelican Books A327.) Penguin Books Ltd., Harmondsworth, 1955. 214 pp. sh. 2/6.

(Innehållsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 112.)

For å gi et inntrykk av hva forfatteren har villet gi i denne boken, skal jeg forsøke å la ham selv fortelle det ved en del karakteristiske sitater:

»When we generalize a result, we make it more useful. It may strike you as strange that generalization nearly always makes the result simpler too.«

»Very often, one of the greatest difficulties of learning is not a logical difficulty at all. One sees every step, and admits that the proof is logical, but one is left with an obstinate feeling of not really knowing what the new result is, what it is all about.«

»How are we to look for functions that will do what we want? In such cases, it is usually wise to take the simplest possible example and examine it carefully for hints of what happens in the more complicated cases.«

»The main difficulty in many modern developments of mathematics is not to learn new ideas but to forget old ones.«

»In a good proof, an illuminating proof, the result does not appear as a surprise in the last line; you can see it coming all the way.«

Jeg tror disse sitatene er tilstrekkelige til å vise bokens tendens. Forfatteren har stått overfor den vanskelighet at han har ønsket å gjøre boken lettlest og elementær, samtidig som han har villet gi viderekomne visse vink, særlig slike som fører fram til nyere tanker i matematikken. Disse vinkene kan kreve ganske store kunnskaper, som når forfatteren hevder at over 95 prosent av de funksjoner som idag studeres av fysiske, tekniske og endog matematiske studenter, kan dekkes av symbolet $F(a, b; c; x)$, symbolet for den hypergeometriske rekke. Likeså når han påstår at symbolet $\Delta^2 V$ inngår i minst et dusin forskjellige vitenskapsgrener, gravitasjon, lys etc. Men stort sett vil boken kunne leses også av folk med små matematiske forkunnskaper. Såvidt jeg kan forstå vil svært mange kunne ha glede av å lese boken.

Viggo Brun

MOTTATTE BØKER

Ross A. Beaumont — Richard W. Ball: *Introduction to modern algebra and matrix theory*. Rinehart & Co., New York, 1954. 12 + 331 pp. \$ 6.00.

Matrices and determinants 6–53 * Groups of transformations 54–94 * Vector spaces 95–122 * Groups 123–162 * Properties of number systems 163–201 * Polynomials and the algebraic theory of fields 202–252 * Matrices with polynomial elements 253–275 * Canonical forms for groups of matrix transformations 276–323 * Index 325–331.

Ludwig Bieberbach: *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 83.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 8 + 281 S., 9 Fig. DM 29.80, ganzl. DM 32.80.

Einleitung 1–15 * Existenzsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen 15–71 * Berechnung der Lösungen 71–101 * Stationäre und nahezu stationäre Differentialgleichungen 101–179 * Randwertaufgaben 179–237 * Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung 237–279 * Namen- und Sachverzeichnis 280–281.

W. Blaschke — R. H. Müller: *Ebene Kinematik*. (Blaschke, Math. Einzelschriften 5.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 269 S., 100 Fig. DM 26.80.

Zwangsläufige Bewegungsvorgänge im Kleinen 9–112 * Zwangsläufige Bewegungsvorgänge im Grossen 113–143 * Flächenläufige Bewegungsvorgänge 144–176 * Die kinematische Abbildung 177–258 * Literaturverzeichnis 259–261 * Namenverzeichnis 262–263 * Sachverzeichnis 264–269.

C. Carathéodory: *Mass und Integral und ihre Algebraisierung*. Herausgegeben von P. Finsler, A. Rosenthal und R. Steuerwald. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, math. Reihe, 10.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1956. 337 S., 12 Fig. Brosch. SFr. 34.30, ganzl. SFr. 38.50.

Die Somen 9–44 * Mengen von Somen 45–71 * Die Ortsfunktionen 72–98 * Das Rechnen mit Ortsfunktionen 99–141 * Die Massfunktionen 142–170 * Das Integral 171–199 * Anwendung der Theorie des Integrals auf Grenzprozesse 200–231 * Die Berechnung von Massfunktionen 232–245 * Die regulären Massfunktionen 246–263 * Gleichartige reguläre Massfunktionen 264–283 * Die Inhaltsfunktionen 284–316 * Die Somen als Elemente von teilweise geordneten Mengen 317–333 * Verzeichnis früherer Veröffentlichungen 334 * Namen- und Sachregister 335–337.

Alonzo Church: *Introduction to mathematical logic, I*. Princeton University Press, Princeton, 1956. 10 + 376 pp. \$ 7.50.

Introduction 1–68 * The propositional calculus 69–118 * The propositional calculus (continued) 119–167 * Functional calculi of first order 168–217 * The pure functional calculus of first order 218–294 * Functional calculi of second order 295–356 * Index of definitions 357–372 * Index of authors cited 373–376.

Fabio Conforto: *Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie*. Aus dem Nachlass bearbeitet und herausgegeben von W. Gröbner, A. Andreotti und M. Rosati. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 84.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 11 + 276 S., 8 Fig. DM 38.60, ganzl. DM 41.80.

I. Die intermediären Funktionen und das Existenztheorem für die ABELSchen Funktionen: Die Perioden meromorpher Funktionen. RIEMANNSche Matrizen 5–25 * Die intermediären (oder JACOBISchen) Funktionen 25–56 * Das Existenztheorem der ABELSchen Funktionen 56–136 * II. Die ABELSchen Mannigfaltigkeiten: Die PICARDSche Mannigfaltigkeit 138–221 * Algebraische Korrespondenzen zwischen PICARDSchen Mannigfaltigkeiten 221–244 * Anhang über analytische und meromorphe Funktionen von mehreren komplexen Variablen 245–271 * Literaturverzeichnis 271 * Namen- und Sachverzeichnis 272–276.

Dansk tidsskrift-index. 40. årg., 1954. Udgivet af Statens Bibliotekstilsyn. Dansk Bibliografisk Kontor, København, 1955. 31 + 370 s.

Skrifter af almindeligt og blandet indhold 1-12 * Filosofi 12-15 * Religion 16-25 * Samfundskundskab. Pædagogik. Folkeminder 25-73 * Geografi og rejser 73-84 * Naturvidenskab og matematik 84-118 * Praktiske fag. Lægekunst 119-130 * Praktiske fag 130-225 * Kunst og sport 226-242 * Litteratur og sprog 242-248 * Historie 249-338 * Forfatterregister 339-370.

Dick Wick Hall — Guilford L. Spencer II: *Elementary topology*. John Wiley & Sons, New York, 1955. 12 + 303 pp. \$ 7.00.

Introductory set theory 1-23 * The real line 24-51 * Topological spaces 52-86 * Metric spaces 87-149 * Arcs and curves 150-261 * Partitionable spaces 262-273 * The axiom of choice 274-292 * List of special symbols 293-294 * Index 295-303.

E. Richard Heineman: *Plane trigonometry*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1956. 12 + 167 pp. sh. 24/6.

The trigonometric functions 1-12 * Trigonometric functions of an acute angle 13-28 * Trigonometric identities 29-41 * Related angles 42-46 * Radian measure 47-54 * Graphs of the trigonometric functions 55-62 * Functions of two angles 63-77 * Trigonometric equations 78-82 * Logarithms 83-98 * Right triangles 99-106 * Oblique triangles 107-128 * Inverse trigonometric functions 129-134 * Complex numbers 135-144 * Appendix 145-150 * Answers to problems 151-163 * Index 165-167.

Burton W. Jones: *The theory of numbers*. Rinehart & Co., New York, 1955. 11 + 143 pp. \$ 3.75.

The development of the number system 1-37 * Repeating decimals and congruences 38-61 * Diophantine equations 62-75 * Continued fractions 76-104 * Non-linear congruences 105-118 * Quadratic residues 119-135 * Bibliography 137-138 * Index 139-143.

R. Kochendörffer: *Einführung in die Algebra*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955. 12 + 316 S. DM 47.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 154.)

I. Grundbegriffe: Mengen. Abbildungen. Algebraische Strukturen 1-10 * Ganze rationale Zahlen 11-24 * Gruppen 25-70 * Ringe. Integritätsbereiche. Körper 71-101 * Polynome 102-136 * II. Theorie der Körper und der algebraischen Gleichungen: Körpererweiterungen 137-153 * Endliche Körpererweiterungen 154-186 * Auflösung von Gleichungen 187-204 * Bewertungen 205-235 * III. Moduln. Algebren. Darstellungen: Moduln 236-262 * Algebren 263-283 * Darstellungen 284-303 * Aufgaben 304-309 * Literaturverzeichnis 310-311 * Sachregister 313-316.

Almar Næss: *Plan geometri og trigonometri for sjømannsskoler*. 4. utg. Grøndahl & Sønns forlag, Oslo, 1956. 11 + 123 s., 183 fig. N. kr. 12.00.

I. Plan geometri: Linjer, vinkler, trekkanter 1–12 * Anvendelse på konstruksjoner. Stedlinjer. 4-kanter 12–27 * Mer om sirkler 28–35 * Forhold og proporsjoner 35–41 * Beregning av flateinnhold 42–52 * Litt analytisk geometri 53–64 * II. Plan trigonometri: Sinus, cosinus, tangens og cotangens i rettvinklede trekkanter 65–79 * Mer om trigonometriske funksjoner. Interpolasjon. Kurstrekant 79–88 * Trigonometriske funksjoner for vinkler mellom 0° og 360° 88–94 * Formler og uttrykk 95–101 * Setninger om trekkanter 101–115 * Tillegg 116–123.

Hans-Heinrich Ostman: *Additive Zahlentheorie*. Teil II: Spezielle Zahlenmengen. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 11.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 6 + 136 S. DM 22.00.

Einige Dichterelationen. Rationale und pseudorationale Mengen 1–12 * Multiplamengen, erzeugende Mengen 12–29 * Durch multiplikative zahlentheoretische Funktionen definierte Mengen 29–45 * Die Primzahlen und verwandte Mengen 45–77 * Die Mengen der k -ten Potenzen 77–96 * Weitere spezielle Ergebnisse 97–101 * Literaturverzeichnis 102–129 * Autorenverzeichnis 130–133 * Sachregister 134–136.

Carl Ludwig Siegel: *Vorlesungen über Himmelsmechanik*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 85.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 9 + 212 S. DM 29.80, ganzl. DM 33.00.

Das Dreikörperproblem 1–69 * Periodische Lösungen 69–157 * Das Stabilitätsproblem 157–209 * Literatur 210–212.

Wilhelm Specht: *Gruppentheorie*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 82.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 7 + 457 S. DM 66.00, ganzl. DM 69.60.

I. Einführung: Die Grundlagen 1–24 * Die Untergruppen einer Gruppe 24–67 * Homomorphie und Isomorphie 67–107 * Gruppen mit Operatoren 107–147 * II. Freie und direkte Zerlegung: Die freien Gruppen 148–181 * Freie Zerlegungen 182–219 * Direkte Zerlegung 220–275 * Theorie der abelschen Gruppen 275–311 * III. Allgemeine Strukturtheorie: Theorie der Normalfolgen 312–372 * Theorie der p -Gruppen 372–406 * Erweiterungstheorie 406–441 * Bemerkungen und Hinweise 442–452 * Namenverzeichnis 453 * Sachverzeichnis 454–457.

Halfrid Stenmark: *Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer*. (Skrifter utgivna av Sveriges yngre läroverkslärares förning, 15.) C. W. K. Gleerups Förlag, Lund, 1956. 326 s. Sv. kr. 13.50, inb. Sv. kr. 17.50.

R. W. Weitzenböck: *Der vierdimensionale Raum*. (Wissenschaft und Kultur 10.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1956. 223 S., 54 Fig. Ganzl. SFr. 19.55.

Die Grundlagen 9–30 * Das Feenreich der Geometer 31–87 * Raum und Zeit 88–116 * Der R_4 und andere Wissensgebiete 117–184 * Der R_4 in der phantastischen Literatur 185–201 * Literatur 202–216 * Namen- und Sachregister 217–223.

Selecta Hermann Weyl. Herausgegeben zu seinem siebzigsten Geburtstag von der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich und vom Institute for Advanced Study in Princeton. Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1956. 592 S. Ganzl. SFr. 48.90.

Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen 9–58 * Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers 59–110 * Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins 111–147 * Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement 148–178 * Gravitation und Elektrizität 179–192 * Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter 193–210 * Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik 211–248 * Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung 249–261 * Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen (Teil I, II, III und Nachtrag) 262–366 * Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen 367–386 * Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe (Mit F. Peter) 387–404 * Über das Pick-Nevanlinnasche Interpolationsproblem und sein infinitesimales Analogon 405–430 * Spinors in n dimensions (With R. Brauer) 431–454 * The method of orthogonal projection in potential theory 455–486 * On the differential equations of the simplest boundary-layer problems 487–514 * On Hodge's theory of harmonic integrals 515–520 * Fundamental domains for lattice groups in division algebras (Part I and II) 521–553 * Elementary algebraic treatment of the quantum mechanical symmetry problem 554–567 * Die natürlichen Randwertaufgaben im Aussenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges 568–581 * Verzeichnis der Veröffentlichungen von Hermann Weyl 582–592.

I. M. Winogradow: *Elemente der Zahlentheorie.* (Übersetzung der 6. Auflage des russischen Originals, Moskva 1952.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 8+156 S. DM 10.50.

Teilbarkeitslehre 1–14 * Die wichtigsten zahlentheoretischen Funktionen 15–28 * Kongruenzen 29–40 * Kongruenzen mit einer Unbekannten 41–54 * Quadratische Kongruenzen 55–71 * Primitive Wurzeln und Indizes 72–89 * Lösungen der Aufgaben 90–139 * Lösungen der Zahlenbeispiele 140–142 * Tafeln der Indizes 143–149 * Tafeln der Primzahlen unter 4000 und ihrer kleinsten primitiven Wurzeln 150–151 * Sachregister 152–153 * Literaturhinweise der Herausgeber 154–156.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 90–93 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Holmen, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. november 1956.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

90. Med hjelp av setningen om at to polynomer med felles nullpunkter er like på en konstant faktor nær, skal en bevise multiplikasjonssetningen for determinanter.

Helge Tverberg

91. A är en reell matris (dvs. en matris med reella element). Visa, att nödvändiga och tillräckliga villkoret för att det skall finnas en positivt definit symmetrisk matris G , sådan att GA är symmetrisk, är att alla egenvärden till A är reella och att egenvektorerna spänner upp hela rummen.

Lars Hörmander

92. Funksjonen

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

er regulær for $|z| < 1$. Vis at koeffisienten a_m i rekken

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$$

aldri er negativ. Dersom m har primtaloppspaltingen

$$m = 2^v p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l},$$

der $p_1, \dots, p_k$ er primtall av formen $4h+1$, mens $q_1, \dots, q_l$ er primtall av formen $4h+3$, så er

$$a_m = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \cdot \frac{1 + (-1)^{\beta_1}}{2} \dots \frac{1 + (-1)^{\beta_l}}{2},$$

slik at a_m da, og bare da, er null dersom m er delelig med en odde (ulike) potens av et primtall av formen $4h+3$.

R. Tambs Lyche

93. Beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{2^n}.$$

C.-E. Fröberg

94. Idet s_n betegner siden i en regulær n -kant indskrevet i en cirkel med radius 1, skal man vise nedenstående to formler:

$$s_{2 \cdot 2^p} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}, \quad p \geq 2,$$

hvor der på højre side ialt er p to-taller, og

$$s_{3 \cdot 2^p} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}, \quad p \geq 2,$$

hvor der på højre side er eet tre-tal og $(p-1)$ to-taller.

Fr. Fabricius-Bjerre

95. Vis at

$$\sum_{v=0}^n (n-2v)^2 \binom{n}{v} = n \cdot 2^n.$$

96. Vis at

$$\sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \frac{i}{n+i} \binom{p}{i} = \binom{n+p}{p}^{-1}.$$

LØSNINGER

82. Beräkna värdet av determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin \varphi & \sin 2\varphi & \dots & \sin(n-1)\varphi \\ \sin \varphi & 0 & \sin \varphi & \dots & \sin(n-2)\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin \varphi & 0 & \dots & \sin(n-3)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(n-1)\varphi & \sin(n-2)\varphi & \sin(n-3)\varphi & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

A. Pleijel

Lösning: For brevity put

$$f_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}, \quad x = 2 \cos \varphi,$$

and define

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & f_0 & f_1 & \dots & f_{n-1} \\ f_0 & 0 & f_0 & \dots & f_{n-2} \\ f_1 & f_0 & 0 & \dots & f_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1} & f_{n-2} & f_{n-3} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Let C_r denote the r -th column of D_n ; replace C_n by $C_n - xC_{n-1} + C_{n-2}$ and operate similarly on the n -th row. Making use of the formula

$$(*) \quad f_n = xf_{n-1} - f_{n-2},$$

we find that

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & f_0 & \dots & f_{n-2} & 0 \\ f_0 & 0 & \dots & f_{n-3} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-2} & f_{n-3} & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -2x \end{vmatrix}.$$

Expanding the determinant in the right member with respect to the n -th row, we get

$$D_n = -2xD_{n-1} - 4D_{n-2}.$$

If we put $D_n = (-1)^n 2^{n-1} u_{n-1}$ and replace n by $n+1$, this relation becomes

$$(**) \quad u_n = xu_{n-1} - u_{n-2}.$$

Since $D_1 = -1$, $D_2 = 2x$, we have $u_0 = 1$, $u_1 = x$. Thus comparing (**) with (*) it is clear that $u_n = f_n$. Consequently it follows that

$$D_n = (-1)^n 2^{n-1} f_{n-1}.$$

Finally it is clear that

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin \varphi & \sin 2\varphi & \dots & \sin n\varphi \\ \sin \varphi & 0 & \sin \varphi & \dots & \sin (n-1)\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin \varphi & 0 & \dots & \sin (n-2)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin n\varphi & \sin (n-1)\varphi & \sin (n-2)\varphi & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ = (-1)^n 2^{n-1} \sin^n \varphi \sin n\varphi.$$

In particular note that

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n 2^{n-1} n.$$

L. Carlitz

Også løst av Rolv Rasmussen.

84. La p og q være to gitte positive tall. For $u > 0$ defineres en tallfølge $\{c_n\}$ av positive tall ved

$$c_1 = u, \quad c_{n+1}^2 = pc_n + \frac{q}{c_n}.$$

Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \xi,$$

hvor ξ er den positive rot i likningen

$$\xi^3 = p\xi^2 + q.$$

R. Tambs Lyche

Løsning: Polynomiet $P(x) = x^3 - px^2 - q$ har maximum for $x=0$, minimum for $x = \frac{2}{3}p$:

$$P(0) = -q = P(p) > P(\frac{2}{3}p).$$

Ligningen $x^3 = px^2 + q$ har derfor præcis én positiv rod $\xi > \max(p, \sqrt[3]{q})$. Det er da umiddelbart klart, at dersom $\lim c_n$ eksisterer, er den netop denne rod. Opgaven er derfor at påvise iterationens konvergens.

Vi viser først eksistensen af et positivt tal N med den egenskab, at $c_n > p$ for $n > N$. Lad os antage $c_i \leq p$; da er

$$c_{i+1}^2 = pc_i + \frac{q}{c_i} \geq c_i^2 + \frac{q}{p}.$$

Er nu også $c_{i+1}^2 \leq p^2$, får man

$$c_{i+2}^2 \geq c_{i+1}^2 + \frac{q}{p} \geq c_i^2 + \frac{2q}{p} \text{ etc.}$$

Heraf følger eksistensen af et sådant N , at $c_N^2 > p^2$, og så er $c_{N+1}^2 > pc_N > p^2$ etc., q. e. d.

Vi beviser nu iterationens konvergens ved eksistensen af et tal N , for hvilket

$$\left| \frac{c_{n+1} - c_n}{c_n - c_{n-1}} \right| < k < 1 \quad \text{for } n-1 > N.$$

Lad først n være så stor, at $c_{n-1} > p$; da er

$$\frac{c_{n+1} - c_n}{c_n - c_{n-1}} = \frac{c_{n+1}^2 - c_n^2}{(c_{n+1} + c_n)(c_n - c_{n-1})} = \frac{p - \frac{q}{c_n c_{n-1}}}{c_{n+1} + c_n} < \frac{p}{2p} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\frac{c_{n+1} - c_n}{c_n - c_{n-1}} > \frac{-q}{c_n c_{n-1} c_{n+1} + c_{n-1} c_n^2} = \frac{-q}{c_n c_{n-1} c_{n+1} + p c_{n-1}^2 + q} > \frac{-q}{q + 2p^3} > -1.$$

Det valgte n er derfor tilstrækkelig stort.

Henrik Meyer

Også løst av H. Killingbergtrø, Rolv Rasmussen og Helge Tverberg.

Oppgave 43 (Bind 2, s. 182) er blitt løst av H. Killingbergtrø, men da løsningen er temmelig vidløftig, ville den ta for stor plass i tidsskriftet.

INTERNORDISK PRISOPPGAVE

NMT bringer her den annen felles prisoppgave for gymnasiaster i alle nordiske land. Oppgaveteksten er gitt både på norsk og svensk, med en dansk forklaring til en enkelt gløse i den norske tekst. Besvarelser kan selvsagt innsendes på dansk, norsk eller svensk. Det kreves løsning på minst 4 av oppgavene.

Det vil bli delt ut en 1. premie på 150 og en 2. premie på 75 n. kr., eller tilsvarende beløp i vinnerens egen valuta.

Besvarelsene vil bli bedømt av en komité innen NMT's redaksjon. Et utvalg av de beste oppgaveløsninger blir offentliggjort i tidsskriftet.

Fristen for innlevering av besvarelser er 15. februar 1957. Oppgi navn, klasse og skole. Løsninger sendes til redaksjonssekretæren, lektor E. Selmer, Mat. Inst., Blindern, Oslo, ledsaget av en erklæring om at besvarelsen er selvstendig arbeid.

Vi henstiller til de nordiske gymnasielærere å gjøre flinke elever oppmerksom på prisoppgaven.

Norsk tekst:

1. P er et punkt på en ellipse, og Q er sentrums projeksjon på tangenten i P . Vis at den største verdi av avstanden PQ er lik forskjellen mellom ellipsens halvaksler.

2. ABC er en gitt trekant og P et vilkårlig punkt i rommet. Vis at

$$3(PA^2 + PB^2 + PC^2) \geq AB^2 + BC^2 + CA^2.$$

For hvilken beliggenhet av P gjelder likhetstegnet?

3. En trekant ABC er gitt. På siden BC ligger et punkt A_1 og på sidene CA og AB analogt punktene B_1 og C_1 , slik at

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \alpha, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \beta, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \gamma.$$

Linjene AA_1 , BB_1 og CC_1 begrenser en mindre trekant inne i den gitte. Beregn forholdet mellom den lille og den gitte trekants areal, uttrykt ved α , β og γ . Resultatet reduseres mest mulig.

4. Vis at funksjonen

$$y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

er voksende for x mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$. Beregn også $\lim_{x \rightarrow 0} y$.

5. En rekke tall er definert ved:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, \dots, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \dots$$

Summen av de n første tall i rekken kalles S_n .

a) Beregn S_n uttrykt ved ett av leddene i rekken.

b) Vis at $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

c) Beregn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

6. Det er gitt en konveks n -kant med følgende egenskaper:

a) To diagonal er aldri parallelle.

b) Tre diagonaler går aldri gjennom samme punkt, når dette ikke er et hjørne¹.

Hvor mange diagonalskjæringspunkter finnes det innenfor henholdsvis utenfor polygonens omkrets?

Svensk text:

1. P är en punkt på en ellips, och Q är medelpunktens fotpunkt på tangenten genom P . Visa, att maximum av sträckan PQ är lika med skillnaden mellan ellipsens halvaxlar.

2. ABC är en given triangel och P en godtycklig punkt i rymden. Visa, att

$$3(PA^2 + PB^2 + PC^2) \geq AB^2 + BC^2 + CA^2.$$

För vilket läge av P gäller likhetstecknet?

3. En triangel ABC är given. På sidan BC ligger en punkt A_1 och på sidorna CA och AB analogt punkterna B_1 och C_1 så att

¹ Dansk: en vinkelspids.

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \alpha, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \beta, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \gamma.$$

Linjerna AA_1 , BB_1 och CC_1 begränsar en mindre triangel inuti den givna. Beräkna förhållandet mellan den lilla och den givna triangelns yta uttryckt i α , β och γ . Resultatet skall reduceras så långt som möjligt.

4. Visa, att funktionen

$$y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

är växande, då x ligger mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$. Beräkna även $\lim_{x \rightarrow 0} y$.

5. En serie tal är definierad genom:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, \dots, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \dots$$

Summan av de n första talen i serien betecknas med S_n .

a) Beräkna S_n uttryckt i en av termerna i serien.

b) Visa, att $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

c) Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

6. En konvex n -hörning är given och har följande egenskaper:

a) Två diagonaler är aldrig parallella.

b) Tre diagonaler går aldrig genom samma punkt, utom då denna är ett hörn.

Hur många diagonalskärningspunkter finnas innanför resp. utanför polygonen?

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1956 på de matematiske gymnasielinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. P er et vilkårligt punkt på parablen $y^2 = px$. Parabeltangenten i P skærer X -aksen i punktet A . PA forlænges ud over A til punktet B således, at $AB = PA$. Parabelnormalen i P skærer X -aksen i punktet C .

Find ligningen for det geometriske sted for midtpunktet af BC , når P gennemløber parablen.

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

2. Af en forsamling på 9 personer: A, B, C, D, E, F, G, H og I skal vælges et udvalg bestående af 4 medlemmer.

På hvor mange forskellige måder kan udvalget sammensættes,

1) når der kan vælges frit mellem de 9 personer?

2) når H og I ikke samtidig må være medlemmer af udvalget?

3) når H og I ikke samtidig må være medlemmer, men A skal være medlem af udvalget?

3. Konstruer en trekant ABC af vinkel A og siden BC , når det tillige er givet, at $v_A:AB = p:q$, hvor p og q er givne liniestykker. (v_A betegner vinkel A 's halveringslinje).

Angiv mulighedsbetingelse.

Beregn trekantens ubekendte vinkler og sider, når vinkel $A = 103^\circ, 12'$, $BC = 3,218$, $p = 2$ og $q = 5$.

Matematik II.

1. Løs ligningssystemet

$$x + y = i$$

$$2(x^3 + y^3) = 3ix^2y^2 + 4i.$$

De komplekse værdier af x og y skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = 2x - \frac{6x}{x^2 + 3}.$$

Find ligningerne for de kurvetangenter, der er parallelle med linien

$$5x - 4y + 10 = 0.$$

Find endvidere arealet af den i 1. kvadrant beliggende lukkede figur, der begrænses af kurven, linien $x=3$ og den af de fundne tangenter, hvis røringspunkt har positiv abscisse.

3. Et kvadrat $ABCD$ med siden a er grundflade i en pyramide med toppunkt O . Sidekanten OA , der er lig med $a\sqrt{2}$, er højde i pyramiden.

Gennem diagonalen BD i grundfladen lægges en plan, som er parallel med pyramidens højde OA . Denne plan skærer sidekanten OC i punktet E .

Find overflade og rumfang af det konvekse polyeder, hvis hjørnespidser er A, B, D, E og O .

Find endvidere afstanden d (den korteste afstand) mellem linierne BE og OA , og angiv beliggenheden af d 's endepunkter, idet der tillige ønskes forklaring på, hvorledes d bestemmes.

FINLAND

Längre kursen.

1. Skillnaden mellan två positiva tal a och b är p % mindre än deras summa. Hur många % är a större än b ?

2. För vilka värden på x konvergerar den oändliga geometriska serien

$$1 + \frac{x-1}{x+1} + \dots + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n + \dots,$$

och vilken är då dess summa $S(x)$? Framställ grafiskt funktionen $y=S(x)$.

3. Bestäm a så, att lösningen till ekvationssystemet

$$(a^2 - a - 6)x + (a^2 - 8)y = 2, \quad 2(a^2 - a - 6)x + (8 - a^2)y = 1$$

satisfierar även ekvationen

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Kontrollera resultatet.

4. Härled ekvationerna för de cirklar, vilkas medelpunkter falla på linjen $2x + 3y = 4$ och som tangera koordinataxlarna. Rita figur.

5. Bevisa det utvidgade pytagoreiska teoremet.

6. AB är basen i en rektangel $ABCD$ med höjden h . Punkten P ligger på AB :s medelnormal och på andra sidan om CD än AB . Sträckorna PA och PB samt sidorna BC , CD och DA begränsa tre trianglar. Bestäm P :s avstånd från AB så, att summan av dessa trianglars areor blir så liten som möjligt.

7. Bissektrisen till en spetsig vinkel i en rätvinklig triangel delar den motstående sidan i förhållandet 2:3. Bestäm förhållandet mellan areorna av den i triangeln inskrivna och den kring densamma omskrivna cirkeln. (Exakt värde och närmevärde med 3 decimaler.)

8. Från en punkt på ytan av en sfär äro dragna tre lika långa, mot varandra vinkelräta kordor i sfären. Beräkna längden av dessa, då sfärens radie $= r$.

9. Den i en triangel inskrivna cirkelns radie utgör fjärdedelen av en av triangelns höjdlinjer och denna i sin tur fjärdedelen av triangelns perimeter. Beräkna triangelns vinklar.

10. Visa, att funktionen $\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 2x$ alltid har samma värde, oberoende av värdet på x .

ÍSLAND

I.

1. Gennem et fast punkt $P(m, n)$ trækkes en ret linie, som skærer parablen $y^2 = px$ i punkterne $R(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$. Parablens tangenter i R og Q skærer hinanden i punktet S .

Bestem koordinaterne for punktet S og find dets geometriske sted, når den rette linie gennem P , R og Q drejer sig om P , medens R og Q bevæger sig på parablen.

2. Skitser kurven

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Bestem ligningerne for kurvens tangenter i dens skæringspunkter med Y -aksen og med linien $x = \frac{3}{4}$.

Beregn arealet af det område, som begrænses af disse tangenter og kurven.

3. Af et regulært oktaeder med kanten a afskæres 6 regulære pyramider ved plane snit gennem midtpunkterne af de i hver hjørnespids sammenstødende kanter. Af en terning med kanten b afskæres alle hjørner på analog måde.

Beregn volumen og overflade af de resterende polyedre.

Afgør, om forholdet a/b kan bestemmes således, at resultaterne bliver identiske.

II.

1. Find den fuldstændige løsning til ligningen

$$3(1 + \operatorname{tg} x) = 5 \cos 2x.$$

2. P er et punkt på hyperblen

$$y = \frac{1}{x},$$

beliggende i tredje kvadrant. Q er et punkt på den samme hyperbel beliggende i første kvadrant, således at differensen mellem disse to punkters abscisser er lig en konstant $2k$. Længden af liniestykket PQ betegnes med d .

Bestem koordinaterne for P og Q udtrykt ved k , når d er minimum.

Hvorledes skal k vælges, for at minimumsværdien af d skal blive mindst mulig?

Afgør ved en geometrisk betragtning, om d kan have et ekstremum, når P og Q begge ligger på samme gren af hyperblen, idet deres abscissedifferens skal være konstant som før.

3. a) Rødderne i ligningen

$$iz^2 + 3(1-i)z - 6 = 0$$

er α og β . Beregn

$$t = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 4 \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

b) Ligesom før er α og β rødder i ligningen ovenfor. Man setter $\alpha + \beta = p$. Bestem q og r således, at p , q og r kan være rødder i en algebraisk ligning af tredje grad med reelle koeffisienter, samtidig med at de tilfredsstiller betingelsen

$$q = pr.$$

Skriv derefter denne trediegradsligning på formen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

NORGE

Reallinjen.

1. Skriv ned de forbindelser som vi har mellom røttene og koeffisientene i den ordnede trediegradsligning $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Bruk disse forbindelser til å vise at når de tre røtter i likningen danner tre ledd som følger etter hverandre i en geometrisk rekke, er den ene av røttene alltid lik $-\sqrt[3]{c}$, og at den samme roten også er lik $-\frac{b}{a}$.

Som eksempel velger vi $c = -64$. Hvor stor er da den nevnte roten, og hva blir de to andre røtter når de uttrykkes ved a ? Hvilke verdier kan a ha når røttene skal være reelle?

2. I en halvkule med radius r er innskrevet en trekantet pyramide $ABCT$. Pyramidens grunnflate ABC er en likebent trekant med grunnlinje BC . Grunnflaten ligger i den sirkelflate som begrenser halvkulen, og slik at dens hjørner ligger i sirkelens periferi. Toppunktet T ligger i normalen på sirkelflaten gjennom midtpunktet av BC .

Kall avstanden fra A til BC for x , og regn ut volumet av pyramiden uttrykt ved r og x .

Når r er konstant, har dette volum en maksimumsverdi for en viss verdi av x . Bestem denne maksimumsverdi og den tilhørende verdi av x . Påvis at den funne verdi av volumet virkelig er en maksimumsverdi.

I det tilfelle at $x = \frac{2}{3}r$, blir det lagt to plan gjennom den radien i halvkulen som står vinkelrett på halvkulens sirkelflate. Det ene av disse plan går gjennom B , det andre går gjennom C . Beregn flateinnholdet — uttrykt ved r — av den del av halvkulens krumme overflate som ligger mellom disse to plan og det plan som inneholder sideflaten BCT .

3. Ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 36$ og den rette linje $x = 3$ er gitt. Et punkt P på den rette linjen har ordinaten q . Hva er likningen for polaren til P med hensyn til ellipsen? Vis at polaren går gjennom et fast punkt A , når P flytter seg på linjen, og angi koordinatene til A .

Punktet $M(m, 0)$ er også gitt. Finn likningen for det geometriske sted for skjæringspunktet mellom polaren til P og den rette linje gjennom M og P , når P be-

veger seg langs den rette linje $x = 3$. De kurvene som en får for forskjellige verdier av m , går alle gjennom A og M . Forklar hvordan en på forhånd kan innse at dette er tilfelle.

Det geometriske sted får likningen:

$$4x^2 + 3(3-m)y^2 - 4(m+3)x + 12m = 0.$$

Gjør greie for hva slags kjeglesnitt denne likning framstiller for forskjellige endelige verdier av m ; en nevner da bare kurvens art uten å finne sentrum, akser, akselengder o. l. Hva for geometrisk betydning får likningen når en setter inn $m = 3$?

SVERIGE

Realgymnasiet, allmän kurs.

1. I ett likbent parallelltrapets $ABCD$ är sidorna AD och BC parallella. Hörnen A , B och C är belägna i punkterna $(0; 1)$, $(0; 6)$ respektive $(7; 7)$. Bestäm koordinaterna för hörnet D .

2. I en parallelogram $ABCD$ bildar mätetalen för sidorna AB och BC samt diagonalerna BD och AC i nämnd ordning en geometrisk serie. Bestäm parallelogrammens vinklar.

3. Konstruera kurvan $y = x^3 - 3x^2$ i dess huvuddrag. Genom origo går två tangenter till kurvan, av vilka den ena är x -axeln. Ange ekvationen för den andra. Finns det någon tangent, som är parallell med den sistnämnda tangenten? Ange i så fall även dennas ekvation.

4. Basytan i en pyramid är en kvadrat med sidan 6 cm. Två sidokanter är 5 cm och två 7 cm långa. Vilka vinklar bildar pyramidens sidoytor med basytan?

5. Vilket eller vilka villkor skall vinklarna A och B uppfylla, för att likheten $\sin A + \sin B = \sin(A + B)$ skall gälla?

6. Genom origo i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rät linje L , som bildar en vinkel v — räknad i positiv led — med positiva x -axeln. Från punkten $A_0(a; 0)$, där a är en positiv konstant, fälles normalen L' mot L . Från punkten A_0 drages vidare parallellt med y -axeln en linje, som skär linjen L i punkten A_1 . Från punkten A_1 drages parallellt med x -axeln en linje, som skär linjen L' i punkten A_2 . På detta sätt fortsätter man och erhåller en serie punkter $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, så belägna att varannan ligger på linjen L' , varannan på linjen L , och att av sammanbindningslinjerna mellan två på varandra följande punkter varannan är parallell med y -axeln, varannan med x -axeln. Undersök för olika värden på vinkeln v mellan 0° och 180° , hur den brutna linjen $A_0A_1A_2A_3 \dots A_n$ är beskaffad, när n växer obegränsat. Ange speciellt, om punkten A_n närmar sig till en bestämd punkt. Bestäm i så fall också koordinaterna för denna punkt.

7. Ett klotsegments kalott är 16π cm². Vilken form skall segmentet ha, för att dess volym skall vara så stor som möjligt, och hur stor är då volymen? Undersök därjämte och åskådliggör grafiskt, hur segmentets volym varierar, när dess höjd ändras.

8. Hörnet A i triangeln ABC ligger i punkten $(a; 0)$, där a är en konstant. Hörnet B ligger i punkten $(0; 1)$, medan hörnet C genomlöper x -axeln. Den kring

triangeln ABC omskrivna cirkelns medelpunkt är D . Bestäm ytan av triangeln ADC som funktion av abskissan för punkten C , och undersök densamma för olika värden på konstanten a med angivande av eventuella maxima och minima. Åskådliggör slutligen, hur den nämnda ytan varierar, genom att i olika koordinatsystem och i stora drag upprita motsvarande kurva i de huvudfall, som kan särskiljas.

Specialkurs.

1. Två rektanglar har lika stora ytor. Den enas diagonaler ligger utefter asymptoterna till en viss hyperbel, och ett par motstående sidor tangerar denna hyperbel. I den andra rektangeln utgöres ett par motstående sidor av samma hyperbels parametrar. Bestäm vinkeln mellan hyperbelns asymptoter.

2. En parabels vertex ligger i punkten $(2; -4)$, och dess axel är parallell med y -axeln. Parabeln tangerar den rätta linjen $x + y = 0$. Bestäm dess ekvation.

3. Bestäm konstanterna a och b i funktionen

$$y = \frac{ax^2 + 3x + b}{ax - b},$$

så att den motsvarande kurvan får asymptoterna $x + 3 = 0$ och $x - y + 4 = 0$. Upprita därefter kurvan.

4. Två punkter, A och B , på jordytan är belägna diametralt motsatt varandra på samma nordliga latitud. Visa, att för den som skall flyga från A till B blir vägen kortare, om han följer storcirkeln över nordpolen, än om han följer parallellcirkeln. Ange även, på vilken latitud A och B skall ligga, för att skillnaden i flygväg skall vara så stor som möjligt. Jordytan antages vara sfärisk. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man grafiskt åskådliggör, hur den nämnda skillnaden varierar, när latituden ändras.

5. En triangel har två av sina hörn i brännpunkterna till en ellips och det tredje i en punkt P på ellipsen. Bestäm geometriska orten för den i triangeln inskrivna cirkelns medelpunkt, när P beskriver ellipsen.

6. Visa, att kurvan $y = x \sin \frac{1}{x}$ skär x -axeln oändligt många gånger samt att det mellan två successiva skärningspunkter finns en punkt, där kurvan tangerar endera av linjerna $y = x$ och $y = -x$. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man uppritar kurvan i dess huvuddrag och särskilt att man därvid studerar densamma, när $x \rightarrow 0$ och $x \rightarrow \pm \infty$.

7. I en sfär med medelpunkten O och radien 1 längdenhet är AB en diameter. Utefter AB lägges en koordinataxel med O som origo, så att punkten A får koordinaten $x = 1$. En rät cirkulär dubbelkon med toppvinkeln 60° lägges med axeln utefter AB , så att dubbelkonens spets faller i en punkt P med koordinaten x på AB eller dess förlängning. Uttryck som funktion av x den del av den koniska ytan, som faller inom sfären. Studera denna funktion, och bestäm speciellt dess eventuella maxima och minima. Upprita slutligen den motsvarande kurvan. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man närmare undersöker funktionen och dess kurva för värdena $x = \pm 1$.

KRONIKK

UTNEVNELSER

Til professor i matematikk ved Norges Tekniske Høgskole, Trondheim:
Dr. philos. J. O. Stubban.

Til lektor i matematik ved Københavns Universitet: Dr. phil. O. Schmidt.

Til amanuensis i matematik ved Aarhus Universitet: mag. scient. E. Thue
Poulsen.

Til laborator i numerisk analys vid Lunds Universitet: Fil. dr. C.-E. Fröberg.

Til laborator i mekanik vid Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm: Fil. dr.
S. Hjalmar.

Til docent i matematik vid Uppsala Universitet: Fil. dr. E. Y. Domar.

DØDSFALD

Lektor E. Rønnau, der fra 1947 var faglig medhjælper i matematik hos under-
visningsinspektøren for de danske gymnasieskoler, er 10/7 1956 afgået ved døden.

PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

I prisopgavekonkurrencen for 1956, arrangeret af den danske matematiklærer-
forening, indkom 26 besvarelser. 1. præmie (kr. 150) er tildelt Peder Kirkegaard,
Metropolitanskolen, 2. præmie (kr. 100) Niels Kjær-Pedersen, Metropolitanskolen,
og 3. præmie (kr. 75) Gerd Grubb, Øregaard Gymnasium.

Foreningen har haft den glæde at modtage en gave på 150 kr. af rektor for
Danmarks tekniske Højskole, professor, dr. techn. Anker Engelund, og en gave
på 25 kr. af lektor ved Metropolitanskolen K. Asker Larsen. Gaverne er ydet
som en støtte til forøgelse af præmiernes størrelse og antal.

Opgavernes tekst findes i NMT, denne årgang, s. 55-56.

SUMMARY IN ENGLISH

SVEN DANØ: *Linear programming*. (Danish.)

The general problem of "linear programming" can be formulated as follows:
Find a set of non-negative numbers $x_1, x_2, \dots, x_n$, which satisfy a system of linear
equations

$$(1) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

and for which the linear function

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

has a maximum (or minimum). The case of inequalities in (1) can be reduced to
the above form, by introducing the non-negative differences between the sides of
the inequalities as new "slack variables".

After a geometrical treatment of the simple case $m=1$, $n=2$, the following theorem is proved: *If the general problem (with $m < n$) has an optimal solution, then there exists such a solution with at most m of the variables $\neq 0$.* One procedure for finding a solution is consequently to solve all possible systems of equations with $n-m$ of the variables $=0$, and calculate the form f for the resulting non-negative solutions.

For actual problems, however, this procedure is extremely time-consuming. The article also describes the so-called "*simplex method*", which is a systematic procedure for improving the result obtained by solving only one set of m equations in m unknowns. Depending on the size of certain coefficients, one of the variables is systematically replaced by another until an optimal value of f is reached.

To each maximizing problem in linear programming, there exists a "*dual*" minimizing problem, where the structural variables of the former correspond to the slack variables of the latter and vice versa. There is a close connection between the optimal solutions of the two problems. The principle of duality is proved by means of the simplex method.

FR. FABRICIUS-BJERRE: *Some theorems of J. Hjelmslev on plane, skew, and spherical quadrangles.* (Danish.)

The article is based on an unpublished manuscript by J. Hjelmslev. With the notation of fig. 1 p. 139, two plane quadrangles $ABCD$ and $A_1B_1C_1D_1$ are said to be mutually corresponding if

$$a + a_1 = b + b_1 = c + c_1 = d + d_1, \quad a + b + c + d = a_1 + b_1 + c_1 + d_1, \quad e = e_1,$$

and if neither or both of the quadrangles are divided by the diagonals AC and A_1C_1 . The following theorems are proved for *plane* corresponding quadrangles:

1° The other two diagonals are also equal, that is $f=f_1$. (Essentially equivalent to the theorem of Ivory.)

2° The distances between the midpoints of the diagonals are equal.

3° If T and T' denote the areas of the triangles ABC and ADC , then $TT' = T_1T_1'$.

4° Either both or neither of the quadrangles can be inscribed in a circle.

Skew corresponding quadrangles are defined in the same way, but with the additional condition that the dihedral angles along the corresponding diagonals $e=e_1$ are also equal. The theorems 1°–3° still hold. Further, the tetrahedra defined by the vertices have the same volume.

Spherical corresponding quadrangles are also defined similarly, provided that the sides are $< 180^\circ$. The theorems 1° and 4° still hold, but not 2°. Theorem 3° can be modified to hold in the spherical case, by replacing the areas of the triangles by the volumes of the corresponding tetrahedra with a common vertex at the centre of the sphere.

ARNE PLEIJEL: *On the partitioning of convex domains.* (Swedish.)

A convex curve C between two parallel tangents is divided by a third intermediate parallel, with a given ratio m between the distances to the tangents. If the ratios between the two arcs of C and between the two parts of the area are q and k respectively, then q and k are limited in terms of m . Similar inequalities for surface and volume are given when a convex body is divided by a plane section.