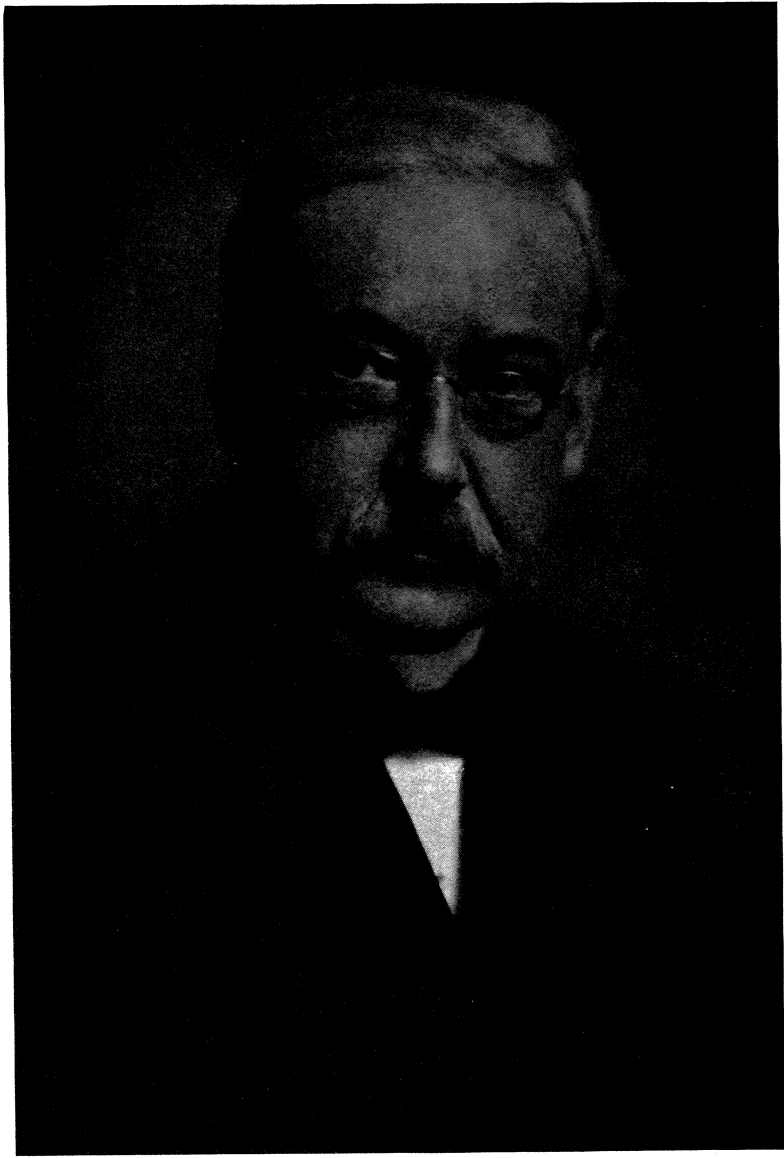




Wartredholm

IVAR FREDHOLM

ÅKE PLEIJEL

Denna biografi har sammanställts med hjälp av Nils Zeilons nekrolog i *Acta Mathematica* 54 och med användning av de anteckningar av Erik Holmgren, som finns deponerade på Institut Mittag-Leffler. Stora partier har praktiskt taget oförändrade överförts från Zeilons artikel.

Fredholms samlade verk har nyligen utgivits av Mittag-Leffler-institutet. Volymen inleds med Zeilons biografi över Fredholm.

»C'est là une des découvertes les plus remarquables qui aient été faites en mathématique« skriver Henri Poincaré i ett uttalande om Fredholms fundamentala upptäckt på integralekvationernas område. Och sällan har en matematisk upptäckt blivit så snabbt berömd inom fackkretsar och framför allt så snabbt utnyttjad för ämnets vidareutveckling som Fredholms. Få år efter sin tillkomst har den en given plats bland de stora händelserna i matematikens historia.

Stilla och tillbakadragen, allvarlig till sin läggning och ständigt mån om att utvidga sitt vetande i olika riktningar var Fredholm fullständigt likgiltig för yttre ära. Utanför kretsen av matematiker och matematikintresserade förblev han också okänd även i hemlandet. Genom yttre omständigheter och genom sina vida intressen engagerades han tidigt i arbete på olikartade uppgifter. Detta i förening med hans utpräglade strävan efter fulländning gjorde att andra ofta före honom själv kom att skörda resultat av hans grundläggande och fruktbärande initiativ.

Erik Ivar Fredholm föddes i Stockholm den 7 april 1866. Fadern var affärs- och industriman känd bl. a. genom införandet av den första elektriska gatubelysningen i Stockholm och var även initiativtagare till vår första elektromekaniska verkstad, som blev moderbolag till ASEA. Det ligger nära till hands att förmoda att Fredholm av sin far ärvde sitt starka intresse för tekniska problem och mekaniska konstruktioner. Modern, som var född Stenberg, tillhörde en familj med rika konstnärliga och litterära intressen, och från henne ärvde Fredholm sin inneboende konstnärliga smak och denna strävan efter fullkomlighet, som var så märkbar i allt han företog sig, inte minst i hans vetenskapliga arbete.

Efter studentexamen blev han först elev vid Teknologiska institutet i Stockholm, men de tekniska studierna blev kortvariga. Redan följande år, 1886, inskrevs han som student vid Uppsala universitet. Stockholms högskola, vars mest berömda elev han skulle bli, var vid denna tid under Mittag-Lefflers ledning matematikens högborg i Sverige. Men den var ännu ett rent forskningsinstitut utan rätt att utdela akademiska examina.

Till den fridfulla världen i Uppsala trängde ryktet om Poincaré. »Teorien för de fuchsiska funktionerna är en av de vackraste upptäckter som någonsin gjorts. Poincaré är utan tvivel en av vår tids mest framstående matematiker. Man kan ännu vänta mycket av honom — han är endast 34 år — förutsatt att hans produktion inte sinar.» Dessa rader skrevs 1888, och samma år återvände Fredholm som nybliven magister till sin hemstad för att fortsätta sina studier vid Stockholms högskola. Matematiken kom i första rummet, men Fredholms intresseinriktning gjorde att han också fortsatte sina studier i fysik. Under experimental-fysikern Knut Ångströms ledning deltog han i övningslaborationer och från höstterminen 1889 finns bevarade anteckningar från bolometrisk mätningar, som han då utförde. Studierna i fysik avbröts emellertid, vilket Fredholm senare vid flera tillfällen beklagade. Då han 1893 blev licentiat i Uppsala ingick dock fysiken som tredje ämne i hans examen.

I kretsen av elever, som samlades kring Mittag-Leffler, tilldrog sig Fredholm snart uppmärksamhet. Bland hans kamrater från denna tid märktes Edvard Phragmén, Ivar Bendixson, Helge von Koch, och från Finland Ernst Lindelöf m. fl. Redan från början intog Fredholm en särställning genom sitt utpräglade intresse för den teoretiska fysiken. Den första matematiska avhandling som han redigerade under julferierna 1889, bär också spår av hans dubbla intresseinriktning. I detta förstlingsarbete ges ett intressant exempel på en potensserie, vars konvergenscirkel är naturlig gräns för den analytiska funktion serien representerar. Genom en transformation överfördes studiet av serien på ett problem rörande värmeledningsekvationen, och det var sambandet med den teoretiska fysiken, som särskilt intresserade Fredholm. Det transformerade problemet löstes med en sats av Sonja Kovalevski, som för övrigt vid denna tid var professor vid högskolan.

Redan omedelbart efter återkomsten till Stockholm tycks Fredholm ha haft tjänstgöring vid livförsäkringsbolag, vilket förmodligen får ses mot bakgrunden av den förändring i familjens ekonomiska ställning som orsakades av faderns konkurs. Under en tid tycks Fredholm ha haft för avsikt att ge sig in på lärarbanan. Han genomgick sålunda provår 1896.

Det ena av de stora problemkomplex som Fredholm skulle komma att ägna sig åt angrep han för första gången i doktorsavhandlingen, som ventilerades i Uppsala 1898 och två år senare publicerades i *Acta Mathematica* under titeln »Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique». W. Voigts arbeten hade aktualiserat intresset för kristallernas egenskaper och gjort det tydligt att studiet av dessa borde leda till en väsentligt fördjupad kännedom om de elastiska krafternas natur. Redan långt tidigare hade Kelvin matematiskt behandlat inverkan av en kraft anbringad i en punkt av ett isotropt medium. Fredholm ställde sig uppgiften att på liknande sätt studera anisotropa medier. Det gällde då speciellt att finna singulära integraler motsvarande dem, som i Kelvins undersökningar spelade samma roll som funktionen $1/r$ i potentialteorien. Doktorsavhandlingen inleds med en elegant härledning av homogena singulära lösningar av graden -1 till en lineär differentialekvation med konstanta koefficienter av formen

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u = 0,$$

där $f(\xi, \eta, \zeta)$ är ett homogent polynom. Med hjälp av dessa singulära lösningar studeras sedan elasticitetsteoriens randvärdesproblem.

Med hänsyn till Fredholms kommande matematiska verksamhet är det intressant att i ett första utkast till doktorsavhandlingen läsa: »Jag har försökt utvidga Neumanns metod för att visa existensen av en lösning till jämviktsekvationerna, men utan att lyckas bevisa konvergensen av de erhållna serierna.»

Året efter doktorsdisputationen publicerar Fredholm i *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* en artikel där den ovan angivna differentialekvationen är självändamål och polynomet $f(\xi, \eta, \zeta)$ antas definit. Han observerar, att de singulära integralerna är lineärt sammanstatta av derivatorna till en fundamentallösning. I utförlig form trycktes denna artikel först 1908 i *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* och innehåller utom konstruktionen av fundamentallösningen också vackra samband mellan denna och vissa Abelska integraler.

Året efter doktorsdisputationen och utnämningen till docent vid Stockholms högskola skulle i Fredholms liv och i matematikens historia bli ett av de mest betydelsefulla. Han tillbringar våren i Paris tillsammans med studiekamraten från Stockholm, Ernst Lindelöf. Denna hans första och i egentlig mening enda studieresa gav möjligheter till personlig och värdefull kontakt med den matematiska krets, till vilken han länge känt

sig dragen. Han följde Poincarés, Picards och Hadamards föreläsningar. Hans franska, som från början var föga flytande, tycktes honom snart tillräckligt bra för att han skulle kunna göra visit hos den matematiker han beundrade mest. Han berättar att Lindelöf, som redan avlagt detta besök, hade funnit Poincarés fåordighet pinsam. Men, tillägger han, »eftersom jag var beredd på möjligheten att få prata mest själv, lyckades visiten ganska bra». Man kan inte förneka att de som senare kom att besöka Fredholm ibland måste beklaga att de inte förberett sig på samma sätt.

Hans brev hem till familjen talar också om hans otvungna och hjärtliga relationer till unga kolleger, Painlevé som han kände från konferensen i Stockholm 1895, Borel, Hadamard och andra. Året 1899 var allt annat än lugnt i Paris och de matematiska diskussionerna fick säkert många gånger ge plats för dispyter om dagshändelser av brännande aktualitet. För en man så nyfiken på kulturens olika aspekter som Fredholm saknade Paris inte heller andra intressen. Bland de 7000 tavlorna i »le Salon» lyckades visserligen endast »några violetta karlar på gröna hästar» väcka hans beundran, men musiken intresserade honom mera. I Châtelet firade man femtioårsjubileet av Chopins död och vid regelbundna musikaftnar hos den gamle matematikern Lemoine lyssnade Fredholm till kammarmusik och Bach-concertos. Men trots att han inte heller glömde vare sig kabaréer eller Sarah Bernhardt i Kameliadamen, kom dock matematiken i första rummet och i Paris »står den på en högre nivå än någon annanstans». Då han den 19 maj 1899 skriver att han »under den sista tiden icke sett eller hört mycket (i Paris), men att han framför allt funderat över matematiska problem» så kan man förutskicka att han avser de så viktiga frågor inom teorien för integralekvationer, över vilka han slutligen hade kommit till klarhet. Visserligen avslutades Parisvistelsen med inlämnandet av den förut omnämnda Comptes Rendus-artikeln, men bland Fredholms efterlämnade papper finns en första redogörelse för hans upptäckt på integralekvationernas område och denna är daterad »Paris, våren 1899».

Den 8 augusti samma år skrev han, omedelbart efter återkomsten till Sverige, ett brev till Mittag-Leffler där han meddelar sin upptäckt.

»Jag är för närvarande sysselsatt med några undersökningar, som äro af ganska stor betydelse för alla med Dirichlets problem analoga uppgifter inom den matematiska fysiken.

Som vissa resultat äfven från matematisk synpunkt äro af intresse ber jag här att få meddela några af dem.

Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion af de reella variablerna x, y definierad t. ex. för sådana x och y som ligga mellan 0 och 1. Det problem, som jag då behandlar är i sin enklaste form följande.

ekvationer, visste han, att determinantsatsen, som blivit så bekant genom sin betydelse för Fredholms teori, hade bevisats första gången av Hadamard 1893.

De sju små oktavsidor, som upptas av avhandlingen från 1900, »*Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*«, Öfversikt af Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 57, innehåller redan det väsentliga av teorien för Fredholms ekvation däri inbegripet alternativsatsen liksom även tillämpningen på det (två-dimensionella) potentialteoretiska problem, som var dess utgångspunkt.

I brev till Fredholm tackar Lindelöf för separat av arbetet: »Till en början vill jag tacka dig för din senaste uppsats om Dirichlets problem, hvilken synes mig vara en perla. Jag har blott emot den att du alldeles för mycket koncentrerat densamma . . .« Lindelöfs kritik är förklarlig ty i avhandlingen finner man ingen anvisning om den slutledningsprocess, som lett fram till Fredholms formler som gränsfall av lösningsformlerna för lineära ekvationssystem med ändligt många obekanta. Efter två korta Comptes Rendus-noter publicerades det slutgiltiga arbetet tre år senare i Abelbandet av Acta Mathematica. Framställningen är här på samma sätt syntetisk, men teorien är kompletterad i vissa viktiga avseenden. Analogien med ändliga lineära ekvationssystem har gjorts fullständig genom införandet av motsvarigheterna till underdeterminanter av högre ordning. Vidare behandlas det för användningarna och speciellt för Dirichlets problem i tre dimensioner viktiga fallet då kärnan $f(x, y)$ blir oändlig av viss ordning på diagonalen $x = y$.

Senare, vid den första skandinaviska matematikerkongressen i Stockholm 1909, uttalade sig Fredholm om den tankegång som lett fram till hans upptäckt. Efter att ha talat om Fouriers och Abels inversionsformler och Sonines och Hankels arbeten, som anslöt sig till dessa, övergick han till Dirichlets problem och påminde om de tre klassiska lösningsmetoderna till detta. Särskilt framhöll han Neumanns metod som den »som hade syntts honom ha de största möjligheterna att kunna tillämpas på allmännare problem«. Och övergående till det betydelsefulla arbete i Acta Mathematica 20, där Poincaré gjort det troligt att Neumannserien var en meromorf funktion av λ , säger han: »Då jag funderade över dessa resultat frågade jag mig om det faktum att φ är en meromorf funktion av λ inte måste vara en följd av den lineära formen av den ekvation som definierade φ . Det förhållande att utvecklingen av φ konvergerar för alla värden på λ i fallet med Volterras ekvation gav ett starkt stöd åt tanken att teorien för funktionalekvationen II (Fredholms integral-ekvation) borde vara ett gränsfall av den vanliga teorien för lineära ekvationssystem. Sedan jag en gång fått denna idé, underlättades mina under-

sökningar mycket genom min kollega Helge von Kochs arbeten om oändliga determinanter.»

Både av det ovan citerade brevet till Mittag-Leffler och av anteckningar bland Fredholms efterlämnade papper synes framgå att han redan våren 1899 hade riktlinjerna klara för den behandling av icke-begränsade kärnor, som han framlade först 1902 i den andra av nyssnämnda Comptes Rendus-artiklar. Dröjsmålet med det slutliga utarbetandet sammanhänger säkerligen med de ogynnsamma omständigheter under vilka han arbetade efter återkomsten från Frankrike.

I ett brev från Paris förhör han sig om möjligheterna till någon anställning, som kunde ge honom tid att vidareutveckla sin teori. Speciellt tänkte han förmodligen på professuren efter Fogelmarck vid Tekniska högskolan, som emellertid Bendixson senare fick. Platsen skulle ha passat Fredholm utmärkt med tanke på hans intresse för matematikens tillämpningar och för tekniska problem. Senare uppmanades han av Mittag-Leffler att speciminera för en professur i Kristiania. Men Fredholm var då redan djupt engagerad i den organisation av det svenska livförsäkringsväsendet, som han skulle komma att ägna en så stor del av sitt liv. Efter återkomsten från Paris hade han blivit amanuens i civildepartementet med uppgift att förbereda inrättandet av riks-försäkringsanstalten, där han senare, 1905, blev byrådirektör, vilket dock knappast minskade hans arbetsbörda. Efter att ha lämnat denna befattning blev han 1905 livförsäkringsbolaget Skandias aktuarie. Lindelöf skriver samma år till honom: »Det är nu så att »vita brevis, ars longa« och jag tycker försäkringsväsendet kunde reda sig med en mindre duktig karl än Du«. Fredholms intresse för försäkringsväsendets problem upphörde emellertid icke och han har på detta område utfört ett banbrytande arbete framför allt då det gällde att ställa livförsäkringsverksamheten på en vederhäftig matematisk bas. Han utarbetade viktiga dödlighetstabeller för de skandinaviska länderna och hans anmärkningsvärt enkla formel för det s.k. återköpsvärdet är ofta citerad och allmänt använd.

Det har redan nämnts att Fredholms intresse tidigt riktades mot den matematiska fysiken. Han gav tydligt uttryck åt sin förkärlek i detta avseende då han vägrade delta i konkurrensen om en professur i ren matematik vid Lunds universitet 1905. I brev till Mittag-Leffler motiverar han sitt ställningstagande genom att påpeka att han icke önskade befattningen ifråga »då jag ständigt haft till mitt förnämsta mål att söka bidraga till utvecklingen af mekaniken och den matematiska fysiken«. År 1906 erhöll han den professur i rationell mekanik och matematisk fysik vid Stockholms högskola varifrån han sedan skulle verka.

Fredholms teori för integralekvationerna blev snabbt känd. Det första

föredraget i utlandet om den hölls våren 1901 av Erik Holmgren i det matematiska seminariet i Göttingen, som då leddes av Hilbert. »Dieser Tag war entscheidend für eine lange Periode in Hilberts Leben und einen beträchtlichen Teil seines Ruhmes« skriver Otto Blumenthal i Hilberts *Gesammelte Werke*, band 3. Och i ett brev till Fredholm berättar Lindelöf från Göttingen: »... Holmgren föredrog nyss på matematiska seminariet din metod att lösa Dirichlets problem och Hilbert blev så förtjust att han genast bad att få låna din uppsats ... samt därefter lät Holmgren nästa seminarium föredraga en gång till över samma ämne. Det är verkligen en fan så fin metod ...« Redan följande år började doktorsavhandlingar om integralekvationer utförda av Hilberts elever att komma ut för att efter få år uppgå till nära dussintalet.

Gång efter annan ser man i Fredholms efterlämnade papper hur han på viktiga punkter föregriper den utveckling som blev en så snabb följd av hans grundläggande insats. Med tvekan beslöt han sig för att delta i Pariskongressen 1900. Före resan skriver han till Mittag-Leffler: »Härmed är ju en viss risk förenad ty sannolikt lyckas jag ej övervinna alla svårigheter som hindrar mig för närvarande och då finns alltid den sannolikheten att bland auditoriet somliga finns som ser mer än jag själv.« Ännu var hans metod inte bekant och händelseförloppet blev annorlunda än han fruktat. I sitt kongressföredrag, som han aldrig publicerade, gav han den härledning av de grundläggande formlerna som Hilbert senare återupptäckte och tryckte 1904 i den första av sina kända *Mitteilungen*. Den efter Picard uppkallade singulära integralekvationen med kärnan $e^{-|x-y|}$ finns behandlad i Fredholms efterlämnade anteckningar långt innan den studerades av Picard 1910 och 1911. Från 1902 finner man den sats med vilken Hilbert senare studerade kärnor som är oändliga på definitionskvadratens diagonal: Här saknas emellertid bevis och ofta stannar Fredholms undersökningar från dessa arbetsfyllda år vid utkast och idéer. En mängd undersökningar av fall då hans teori icke är användbar, men resolventen ändå blir meromorf finns utförda. Speciellt kan nämnas studiet av kärnor av typen $f(x - \alpha y)$, $0 < \alpha < 1$, varvid integrationsintervallet är reella axeln. Vidare finner man spekulationer över Neumann-Poincarés problem vid områden med hörn och spetsar och även utkast förebådande införandet av kontinuerliga spektra.

I början av sin professorstid uppmanades Fredholm av Teubnerförlaget att skriva en lärobok om integralekvationer. För detta ändamål var han tjänstledig från sin professur höstterminen 1906 och utkast till boken finns bevarade. Men då Fredholm erfor att Hilbert samtidigt arbetade med en liknande uppgift och då efter 1906 en rad läroböcker i ämnet kom ut avstod han från fullföljandet av uppdraget.

I Frankrike befästes Fredholms renommé genom det starka stödet av Poincarés auktoritet. Genom att 1908 tillerkänna honom Ponceletpriset fogade franska vetenskapsakademien hans namn till namnen på matematikens och fysikens mest framstående företrädare. Sålunda hade före honom J. R. Mayer, Clausius, Kelvin och Hilbert mottagit detta pris, som så sällan utdelas till utlänningar. Invitationer från lärda samfund började strömma in, ofta, det måste erkännas, för att bli begravda i hans lådor. Efter Fredholms död fann man bland hans papper en samling av sådana utmärkelser, varom ingen i Sverige, inte ens hans närmaste någonsin hört talas.

Det är helt naturligt att Fredholm under sina föreläsningar vid Stockholms högskola med förkärlek talade om de viktiga delar av den klassiska matematiska fysiken, som utgjorde huvudämnet för hans vetenskapliga arbete. År 1908 hölls sålunda de första föreläsningarna i Sverige över den Fredholmska teorien för integralekvationer och dess fysikaliska tillämpningar. Inriktningen av hans vetenskapliga produktion hindrade emellertid icke att han föreläste över nästan alla områden av den aktuella fysiken. Fredholm var inte i populär mening en glänsande föreläsare. Han talade med en allvarlig och monoton röst och det hände att han gjorde räknefel på svarta tavlan. Men detta betydde föga. I själva verket var hans kurser disponerade med ett sällsynt mästarskap och han behärskade framför allt den svåra konsten att meddela sina elever denna känsla för enheten och det väsentliga av en teori, som så klart kommer till synes i hans egna skrifter.

Fredholms totala produktion är inte stor då den mäts i antal trycksidor. Fullbordandet av ett manuskript var för honom ett arbete av det slag som nedläggs av en konstnär, som icke tål någon ofullkomlighet i utmejslingen. Då han för femte eller sjätte gången redigerar materialet till doktorsavhandlingen säger han »jag lyckas nu skriva två sidor om dagen». Hans trägna arbete ledde till en framställning, som var beundransvärd genom sin klarhet och innehållsrika korthet, men arbetssättet medförde att dragen av det inre intuitiva utarbetandet suddades ut och mer eller mindre betydelsefulla detaljer ofta gick förlorade. Hans personlighet är på något sätt dold bakom själva fulländningen av hans verk, i vilket han med sällsynt kraft band vidsträckta kunskaper till en och samma idé. Men i grund och botten var Fredholm något helt annat än den exklusive teoretiker man får bilden av då man enbart läser hans skrifter.

Vi har redan nämnt hans banbrytande praktiska insats på livförsäkringsväsendets område och även nämnt hans levande intresse för tekniska problem. Hans auktoritet anlätades också ofta vid bedömningen av

arbeten av teknisk-teoretisk natur och han behandlade själv problem av detta slag. Zeilon berättar att han sett en bormaskin som var konstruerad enligt Fredholms beräkningar och som fungerade utmärkt. Men Fredholms tekniska intresse var ingalunda av enbart teoretisk natur. Mästare i att hantera fil, lödkolv och den lilla svarv, som han låtit installera i sitt arbetsrum, var han också en skicklig finmekaniker.

Efter 1910 intresserade han sig mycket för Kelvins undersökningar om integration av differentialekvationer med tekniska hjälpmedel. Han föresatte sig att själv konstruera maskiner för numerisk lösning av vissa differentialekvationer, kanske stimulerad här till av skönheten och precisionen hos den integralfunktion och den harmoniska analysator han anskaffat till sin institution. Det är inte bekant för vilken ekvation den maskin var avsedd, som Fredholm byggde, men man vet att den under varierande initialvillkor kunde dra vackra och exakta integralkurvor. Senare demonterade Fredholm maskinen, utan tvivel i avsikt att bygga om den för en annan ekvation. Han tycks inte ha lämnat tillräckliga anvisningar för att man skall kunna rekonstruera den.

Däremot finns bevarad en liten maskin, som Fredholm konstruerade för graveringen av spektralgitter. En länkmekanism, driven av en liten hydraulisk motor, styr automatiskt en diamantspets över en glasplatta och den precision med vilken apparaten arbetar är beundransvärd. Fredholms intresse för spektralteorin eller allmännare för atomfysiken var emellertid av betydligt äldre datum. Han hade på ett tidigt stadium insett betydelsen av Wiens och Plancks arbeten om den termiska strålningen och i anslutning till ett välkänt arbete av Ritz hade han i en avhandling från 1906 visat att lämpligt valda integralekvationer gav upphov till spektralformler av Balmers och Rydbergs typ.

Fredholms ur teoretisk synpunkt så eleganta formuler för lösningen av integralekvationer är föga användbara då det gäller praktisk numerisk räkning. Medveten om detta ägnade Fredholm mycket arbete åt uppgiften att finna och undersöka speciella fall då kalkylerna är explicit genomförbara. Från tidigare år kan bl. a. nämnas hans lösning av Neumann-Poincarés problem för en ellips. Trots påstötningar från Lindelöfs sida blev detta arbete aldrig publicerat. Efter en lång period av tystnad, som börjar 1910 och under vilken Fredholms huvudintresse synes ha varit studiet av mekaniska integrationsmetoder, återvänder han till sina undersökningar om explicit lösbare integralekvationer. Den problemkrets han studerar i sina tre sista avhandlingar från tiden 1920–25 finns utförligt beskriven i Zeilons biografi och skall inte beröras närmare här. Må det vara nog sagt att det av Fredholms efterlämnade papper framgår vilket oerhört arbete han nedlade på dessa frågor.

Mycket musikalisk hyste Fredholm ett brinnande intresse framför allt för Bachs musik. Fast han inte var pianist, sökte han gärna på pianot fram temata och stämmor från Bachs kontrapunktiskt så komplicerade kompositioner. På sitt sista läger upplevde han också glädjen att slutligen höra samtliga 28 fugor ur Wohltemperiertes Klavier. I sin ungdom hade han lärt sig spela flöjt, men ersatte på äldre dagar detta instrument med fiolen. Redan som barn hade han själv byggt sin första fiol av ett kokosnötskal. Instrumentet, som fortfarande finns kvar, liknar en av dessa långskaftade arabiska violiner med skarp och nasal ton.

Musiken gav honom inte bara vederkvickelse, utan stimulerade också på annat sätt hans intresse. Längre hade, teoretiskt och praktiskt, de tekniska finesserna och den gåtfulla akustiska fulländningen av hans instrument sysselsatt hans tankar. Hans sista arbete blev aldrig fullbordat. Kvar finns endast några fragment, några blad med kalkyler och kortfattade, svårtydda anteckningar jämte teckningen av en idealiserad fiol. På denna är dragna en serie kurvor, för vilka approximativa ekvationer finns angivna. Betydelsen av kurvorna framgår inte. Antingen kan de tänkas ange nodlinjer för elastiska vibrationer eller sammanbinder de punkter där materialet har samma tjocklek. Det är emellertid tydligt att Fredholm hade ställt sig uppgiften att med teoriens och erfarenhetens hjälp tränga in i de gåtor, som ligger förborgade i konstruktionen av detta fulländade instrument.

De så gripande och förbryllande bladen ger på ett egendomligt sätt en syntes av Fredholms liv. I dem avspeglas de stora drivkrafterna, som verkade i honom, i dem ser vi liksom i Fredholms hela livsverk de samlade ansträngningarna av en matematiker och fysiker som samtidigt var musiker och konstnär.

Fredholm avled den 17 augusti 1927.

AKSIOMATISK GRUNNLAG FOR DEN EUKLIDISKE GEOMETRI

JOHN OLAV STUBBAN

I denne artikkelen skal vi gi et lite utsyn over den såkalte euklidiske geometri, som er identisk med den vanlige elementargeometri slik vi lærer den i skolen. Vi skal i korte trekk vise hvilke aksiomer som ligger til grunn for denne geometrien, og ved et par eksempler vise hvilke konsekvenser det medfører om en foretar visse endringer i aksiomene. Det er ikke her meningen å drive grunnlagsteoretiske drøftinger, betraktningene er helt elementære, og det kreves ingen spesielle forkunnskaper. Hensikten er å gi tidsskriftets lesere — i første rekke kanskje gymnasias-ter — et lite innblikk i hvilket viktig område av matematikken studiet av aksiomene i virkeligheten er.

Det vil være kjent for alle som overhodet har syslet med matematikk, at Euklid (ca. 300 f. Kr.) var den første som i nevneverdig grad gjorde forsøk på å skape en strengt systematisk oppbygging av geometrien. For oss kan kanskje resultatet synes å lide av atskillige mangler, men når en tar i betraktning at matematikken på Euklids tid besto i en temmelig uordnet mengde mer eller mindre tilfeldige setninger, må vi nok erkjenne at det byggverk han skapte — til tross for dets svakheter — avtvinger vår dypeste respekt og beundring.

Det Euklid først og fremst så helt klart, var at matematikken er en logisk vitenskap, der setning følger på setning i en slutningsrekke, idet hver enkelt av dem bevises på grunnlag av foregående setninger. Nå sier et gammelt ordtak at »av intet kommer intet«, og ved logisk utledning av matematiske setninger må en ha visse setninger som det ikke kreves bevis for. En slik setning som godtas uten bevis, kalles en *grunnsetning* eller et *aksiom* ($\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha$), og samlingen av de aksiomer som danner grunnlaget for en bestemt teori, kalles teoriens *aksiomsystem*. Det greske ordet aksiom betyr bl. a. »noe selvinnløsende«. Euklid selv brukte imidlertid ikke dette uttrykket. Han skilte på den ene side mellom aksiomer som kan betraktes som generelle logiske regler, og som han kalte »alminnelige forestillinger« ($\kappa\omicron\iota\iota\alpha\iota \acute{\epsilon}\nu\theta\omicron\iota\alpha\iota$), og på den annen side spesielle

geometriske setninger som han kalte »postulater« (*αἰτήματα*). Til den første kategori hører f. eks. følgende regel: Når hver enkelt av to ting er lik en tredje ting, er de to første innbyrdes like. Og som eksempel på et postulat kan nevnes det såkalte parallell-postulat, som vi skal komme nærmere tilbake til siden.

Når man av de setninger som en gitt teori består av, velger ut de som en vil stille opp som aksiomer, kan dette utvalget gjøres på mer enn en måte. Tidligere — og derfor også hos Euklid — ble utvalget foretatt med henblikk på å få et system av mest mulig selvinnlysende aksiomer. Selve ordet aksiom viser dette. I våre dager tar en imidlertid ikke lenger slike hensyn, idet en nå foretar utvalget med det mål for øyet å skaffe seg et *hensiktsmessig* aksiomsystem. Men hvordan aksiomene enn velges, forlanges det at de skal oppfylle visse krav, og disse er:

I. Aksiomene skal være uavhengige av hverandre.

II. Aksiomene skal være motsigelsesfrie.

Det første kravet betyr at det innenfor aksiomsystemet ikke skal forekomme noe aksiom som kan utledes av de øvrige og bare av disse. Hvis nemlig en setning i aksiomsystemet kan bevises, er den jo — ifølge definisjonen på aksiom — ikke noe aksiom. Imidlertid er det klart at det ikke er til noen som helst skade for selve teorien om ett eller flere av aksiomene er avhengig av de øvrige. Krav I har derfor i virkeligheten bare prinsipiell betydning.

Krav II betyr at vi ut fra det valgte aksiomsystem ikke skal kunne utlede en setning og samtidig den stikk motsatte setningen. Det er innlysende at en ikke på noen måte kan slå av på dette kravet.

De svakheter som senere undersøkelser har avslørt ved Euklids aksiomsystem, består ikke så mye i forsyndelser mot krav I ovenfor (krav II er selvsagt oppfylt) som i det faktum at Euklid gjør bruk av en del *stiltiende* forutsetninger som rettelig burde vært stilt opp som aksiomer sammen med de andre.

Noen streng kritikk av Euklids aksiomsystem ble ikke forsøkt før Max Pasch vinteren 1873/74 holdt en rekke forelesninger om dette emnet. Disse forelesningene ble utgitt i 1882 (*Vorlesungen über neuere Geometrie*). Senere har det vært satt opp flere aksiomsystemer for geometrien, men det system som for ettertiden er blitt stående som det klassiske, er det som Hilbert stilte opp i 1899 i sin berømte bok *Grundlagen der Geometrie*. Hilbert stilte opp aksiomer som gjelder både for plan- og romgeometrien, men for enkelhets skyld innskrenker vi oss her til bare å betrakte planet.

Hilberts aksiomer¹ (for planet) ser slik ut:

I. *Insidens-aksiomer.*

- 1) Gjennom to punkter går det alltid en og bare en rett linje.
- 2) På enhver rett linje gis det alltid minst to punkter.
- 3) Det gis et punkt som ikke ligger på en gitt rett linje.

II. *Mellom-aksiomer.*

- 1) Når et punkt B ligger mellom to punkter A og C , så ligger de tre punktene på en rett linje, og B ligger også mellom C og A .
- 2) Når A og B er gitt, gis det alltid minst ett punkt C slik at B ligger mellom A og C .
- 3) Av tre punkter på en rett linje gis det aldri mer enn ett som ligger mellom de to andre.
- 4) Hvis A , B og C er tre punkter som ikke ligger på en rett linje, og a er en rett linje som ikke går gjennom noen av de tre punktene, og hvis a inneholder et punkt som ligger mellom A og B , så vil a også inneholde et punkt som enten ligger mellom A og C eller mellom B og C .

På grunnlag av aksiomene I + II kan en nå bevise en del setninger (vi skal ikke bevise dem her) som i sin tur tjener som grunnlag for innføring av en del begreper, som inngår i senere aksiomer.

Ved et *linjestykke* AB forstår vi den delen av den rette linje gjennom A og B som inneholder A og B samt de punktene som ligger mellom A og B .

Ved en *trekant* ABC forstår vi linjestykkene AB , BC og CA tilsammen. Linjestykkene kalles *sidene* og punktene A , B , C *hjørnene*.

På en rett linje a er gitt tre atskilte punkter O , A og B . Vi sier at A og B ligger på *samme side* av O hvis O ikke ligger mellom A og B , og at A og B ligger på *hver sin side* av O hvis O ligger mellom A og B .

Ved en *stråle* med et punkt O som *begynnelsepunkt* forstår vi den delen av en linje gjennom O som inneholder O samt alle de punktene som ligger på samme side av O . Punktet O deler derfor linjen i to stråler slik at O alltid ligger mellom et punkt på den ene strålen og et punkt på den andre, såfremt punktene er forskjellige fra O .

To stråler med felles begynnelsepunkt kalles en *vinkel*. Strålene kalles vinkelens *ben* og begynnelsepunktet dens *toppunkt*.

I planet er gitt en rett linje a og to punkter A og A' som ikke ligger på a . Hvis linjestykket AA' ikke inneholder punkter som ligger på a ,

¹ Ifølge 7. utg. av *Grundlagen der Geometrie*.

sier vi at A og A' ligger på *samme side* av a . Hvis linjestykket derimot inneholder et punkt på a , sier vi at A og A' ligger på *hver sin side* av a .

III. Kongruens-aksiomer.

- 1) Når A og B er to punkter på en rett linje a , og A' er et annet punkt på en annen rett linje a' (lik eller forskjellig fra a), så finnes det på a' på en gitt side av A' et punkt B' slik at $AB \cong A'B'$.
- 2) Hvis seks punkter A, B, A', B', A'', B'' er gitt slik at $AB \cong A'B'$ og $A'B' \cong A''B''$, så er også $AB \cong A''B''$.
- 3) Hvis B ligger mellom A og C , hvis videre B' ligger mellom A' og C' , og hvis endelig $AB \cong A'B'$ og $BC \cong B'C'$, så er også $AC \cong A'C'$.
- 4) Hvis en vinkel med vinkelben a, b er gitt og dessuten fra et punkt O en stråle a' , så finnes det på en gitt side av a' fra O en og bare en stråle b' slik at $\angle(a, b) \cong \angle(a', b')$.
- 5) Hvis en for to trekanter ABC og $A'B'C'$ har at $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ og $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, så har en også at $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

IV. Parallel-aksiomet¹.

Gjennom et punkt utenfor en gitt rett linje a går det ikke mer enn én rett linje som er parallel med a .

V. Kontinuitets-aksiomet².

På en rett linje a er gitt to punkter A_0 og B og på en rett linje a' to punkter C og D . Da eksisterer det et naturlig tall n slik at når $A_1, A_2, \dots, A_n$ er punkter på a som oppfyller betingelsene: A_0 ligger ikke mellom A_1 og B , og $A_{i-1}A_i \cong CD$ for $i = 1, 2, \dots, n$, så ligger B mellom A_0 og A_n .

Enhver matematisk setning gir utsagn om visse begreper som dels er elementer og dels relasjoner mellom disse. Slike elementer er f. eks. punkt, linje, vinkel, tall, likning, osv., og som eksempel på en relasjon mellom elementene punkt og linje kan nevnes insidens mellom dem, dvs. at punktet ligger på linjen (eller at linjen går gjennom punktet). De elementer og relasjoner som inngår i en teori, må — så vidt det er mulig — *defineres*. Men i en definisjon kan en ikke unngå å gjøre bruk

¹ Dette aksiomet er i realiteten det samme som Euklids parallellpostulat, som lyder slik: Hvis to rette linjer a og a' i samme plan overskjæres av en tredje linje b , og de innvendige vinkler på samme side av b tilsammen er mindre enn $2R$, vil a og a' skjære hverandre (når de forlenges tilstrekkelig) på den siden av b der de nevnte vinkler ligger.

² Dette aksiomet kalles også ofte *Archimedes'* aksiom.

av andre begreper, og på samme måte som en må bygge på et antall setninger som ikke bevises (aksiomene), må en også bygge på visse begreper som ikke defineres. Disse kalles *grunnbegreper*, og det er klart at de vil forekomme i aksiomene. Disse grunnbegrepene består av *grunnelementer* og *grunnrelasjoner*.

På liknende vis som det står oss fritt å velge aksiomene innenfor mengden av setningene i en gitt teori på flere måter, kan også grunnbegrepene gjøres til gjenstand for varierte valg. Således definerte Euklid f. eks. både punkt og linje, mens Hilbert ikke definerer noen av dem. Han betrakter dem altså som grunnelementer. Veblen¹ satte i 1904 opp et aksiomsystem (A system of axioms for geometry) der han innfører punktet som grunnelement, men innfører samtidig slike relasjoner mellom punkter at det blir mulig for ham å definere begrepet rett linje.

Ettersom grunnbegrepene ikke er definert, har vi selvsagt a priori atskillig frihet når det gjelder å tillegge dem de forskjelligste betydninger. Og det viser seg også at det ikke behøver å bære galt avsted om en lar grunnbegrepene skifte betydning. Et velkjent eksempel på dette er jo bruken av dualitetsprinsippet i projektivgeometrien: Når en lar punkt bety rett linje og omvendt, og en samtidig foretar visse nødvendige språklige modifikasjoner, får en som resultat en fullgod geometri, og det er en av projektivgeometriens eiendommeligste egenskaper at den «nye» teorien er identisk med den opprinnelige. En oppnår ikke annet enn en permutasjon av setningene.

Vi skal betrakte et eksempel der vi gir grunnelementene punkt og rett linje og grunnrelasjonene mellom, kongruens og parallellitet i Hilberts geometri en annen betydning enn den tilvante. For å skille tydelig mellom de nye begrepene og de opprinnelige, skriver vi de nye med anførselstegn, altså »punkt«, »rett linje«, »mellom«, »kongruens« og »parallell«, mens vi skriver punkt, rett linje, mellom, kongruens og parallell rett og slett når disse begrepene har sin opprinnelige betydning.

Vi fikserer nå et bestemt fast punkt O i planet. Ved »punkt« forstår vi ethvert punkt som er forskjellig fra O , og ved »rett linje« forstår vi enhver rett linje gjennom O samt enhver sirkel gjennom O .

At »punktet« B ligger »mellom« »punktene« A og C definerer vi på to måter (fig. 1) alt etter arten av »linjen« AC : 1) Hvis AC er en linje gjennom O , og hvis ett av punktene O og B ligger på linjestykket AC , mens det andre ligger utenfor, så sier vi at B ligger »mellom« A og C . 2) Hvis »linjen« AC er en sirkel gjennom O , sier vi at B ligger »mellom« A og C hvis B ligger på den av de to sirkelbuene AC som ikke inneholder O .

¹ Amerikansk matematiker av norsk slekt.

Det nye »kongruens«-begrepet definerer vi slik: La $\widehat{AB}$ betegne avstanden mellom A og B . Hvis vi da har gitt »punktene« X, Y, X', Y' ,

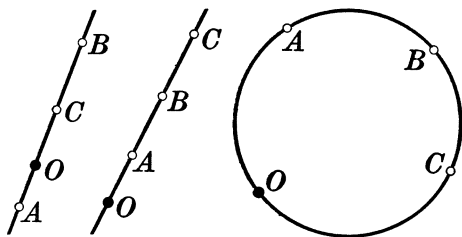


Fig. 1

bestemmer vi (fig. 2) på linjene OX, OY, OX', OY' »punktene« X_0, Y_0, X'_0, Y'_0 slik at

$$\widehat{OX} \cdot \widehat{OX}_0 = \widehat{OY} \cdot \widehat{OY}_0 = \widehat{OX'} \cdot \widehat{OX'_0} = \widehat{OY'} \cdot \widehat{OY'_0},$$

lik en på forhånd fastlagt konstant ($\neq 0$). Hvis nå $\widehat{X_0Y_0} = \widehat{X'_0Y'_0}$, så er også $XY \cong X'Y'$ (her er $\cong$ symbolet for »kongruens«). For de »rette

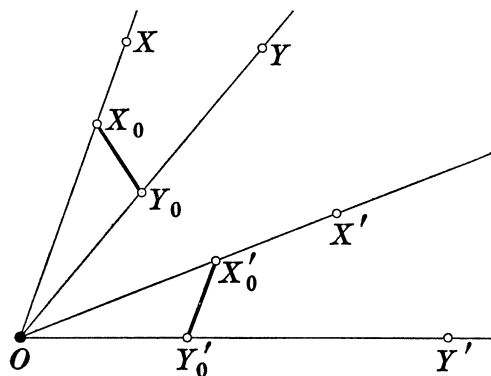


Fig. 2

linjene« a, b, a', b' skal gjelde at $\angle(a, b) \cong \angle(a', b')$ hvis sirklene eller linjene a og b skjærer hverandre i O under samme vinkel som sirklene eller linjene a' og b' .

To »rette linjer« sies å være »parallelle« når minst en av dem er en sirkel gjennom O , og de berører hverandre i O (fig. 3).

Hvis en vil ha strevet med å gjennomgå alle Hilberts aksiomer, idet en hele tiden gjør bruk av de nye begrepene »punkt«, »rett linje«, »mellom«, »kongruens« og »parallelle«, vil en finne at alle aksiomene oppfylles. Dette kan en ellers innse direkte. Foretar man en inversjon med hensyn på O ,

vil »punkt« og »rett linje« gå over i punkt og rett linje, og en ser lett at relasjonene »mellom«, »kongruens« og »parallel« transformeres over i de vanlige mellom-, kongruens- og parallell-relasjonene.

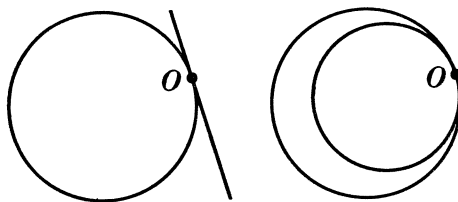


Fig. 3

Denne siste betraktningsmåten viser oss dessuten at vi har nærsagt ubegrenset mulighet til å konstruere nye »geometrier« ved simpelthen å overføre de vanlige grunnelementene, og i samsvar hermed også de vanlige grunnrelasjonene, til nye begreper ved en valgt transformasjon. Ettersom de opprinnelige grunnbegrepene oppfyller Hilberts aksiomsystem, vil også de nye grunnbegrepene gjøre det, og det vi egentlig får fram ved en slik transformasjon, er i virkeligheten ikke annet enn en ny modell av Euklids geometri. Dette leder oss til følgende definisjon av *Euklids geometri*:

Ved en plan euklidisk geometri forstår vi en geometrisk lærebygning, der to grunnelementer (som vi kaller punkt og rett linje), og dessuten visse grunnrelasjoner mellom disse (som vi kaller insidens, »mellom«, kongruens og parallellitet) oppfyller de krav som er gitt i Hilberts aksiomsystem.

Hva den euklidiske geometri egentlig innebærer, får en først den rette forståelse av når en enten *sløyfer* ett eller flere av Hilberts aksiomer eller *erstatter* dem med andre (som da selvsagt ikke må være av en slik natur at en senere kan utlede nettopp de aksiomene som ble sjaltet ut). Med sine 14 aksiomer gir Hilberts system rik anledning til allehånde variasjoner. Det spørs imidlertid om det overhodet kan komme noe fornuftig ut av et aksiomsystem som er oppstått som resultat av vesentlige endringer i Hilberts system. Det vil selvsagt føre for langt å detalj-behandle disse tildels vanskelige problemer her. Vi får nøye oss med å betrakte det tilfellet som historisk har størst interesse, og som har hatt den aller største betydning for den geometriske forskning. Det gjelder de konsekvenser det har, at en manipulerer med parallell-aksiomet (Euklids femte postulat).

Gjennom alle tider har dette aksiomet vært gjenstand for matematikernes spesielle interesse. Muligens fordi det er mindre innlysende enn

de øvrige aksiomene, har en uvilkårlig følt trang til å bevise påstanden i aksiomet. Utallige er da også de »bevis« som har sett dagens lys. Imidlertid led de alle sammen av en og samme mangel. De bygget nemlig — enten stilltiende eller uttrykkelig — på forutsetninger som i bunn og grunn var likeverdige med parallellpostulatet.

Det var først i det nittende århundre at problemet om parallellaksiomets bevisbarhet ble definitivt løst, og den som aller først løste floken var Gauss (1777—1855). Han fant nemlig på å erstatte parallellaksiomet med dets motsetning: Gjennom et punkt utenfor en rett linje går det alltid mer enn en rett linje som er parallell med den første. Med utgangspunkt i denne nye påstanden bygget han så geometrien opp fra grunnen av, idet han hadde en av følgende to muligheter som mål: 1) Enten ville han før eller senere komme fram til en selvmotsigelse, og dermed få konstatert at hans aksiom var galt og følgelig Euklids riktig. 2) Eller motsigelsen ville utebli slik at det nye aksiomet førte til en ny »geometri« som nok ville vise seg å være vesensforskjellig fra den tilvante, men som *logisk* sett ville være holdbar. Og dette ville i sin tur bety at Euklids femte postulat hverken kunne bevises eller motbevises. Men uansett hvilket av disse to tilfellene skulle være mulig, ville iallfall spørsmålet om aksiomets bevisbarhet være løst.

Det viste seg at det resultat Gauss kom til, var tilfelle 2. Imidlertid var det med dette som med så mye annet av det Gauss gjorde, han lot være å offentliggjøre disse epokegjørende resultatene. Senere kom Bolyai (1802—1860) og nesten samtidig med og uavhengig av ham Lobatsjefski (1793—1856) på den samme ideen som Gauss, nemlig å erstatte parallellaksiomet med dets motsetning. Disse to kom da også til de samme resultatene, og ettersom de publiserte sine oppdagelser før Gauss' etterlatte papirer med de samme teoriene ble funnet, kaller en den nye geometrien for *Lobatsjefski-Bolyai's geometri*. Vanligvis kalles den imidlertid *hyperbolsk geometri*. Betegnelsen *ikke-euklidisk geometri* brukes også, men den er ikke entydig da den brukes om enhver geometri som er oppstått på grunn av endringer i Hilberts aksiomsystem.

Vi skal ikke her komme nærmere inn på den hyperbolske geometri, men bare nevne — som et eksempel på hvordan denne geometrien avviker fra den euklidiske — at vinkelsummen i en trekant alltid er mindre enn $2R$. Nærmere bestemt er differensen mellom $2R$ og vinkelsummen proporsjonal med trekantens areal.

Ovenfor har vi vist hvordan en for den euklidiske geometri kan lage modeller ved å gi grunnbegrepene ny betydning. På liknende måte kan en også lage seg modeller for ikke-euklidiske geometrier, og vi skal her se på en enkel modell for den hyperbolske geometri.

La a være en rett linje i planet. Ved et »punkt« forstår vi nå et punkt på en på forhånd fiksert side av linjen a . En »rett linje« er enten en halvsirkel med sentrum på a eller en stråle vinkelrett på a og med begynnelsepunkt på a , og som ligger på den samme siden av a som »punktene«. Vi skal ikke gjennomgå denne »geometrien« i detalj og derfor heller ikke definere hva vi forstår ved grunnrelasjonene »insidens«,

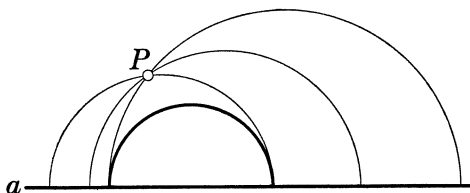


Fig. 4

»mellom« og »kongruens«. Imidlertid er det betraktninger over parallellaksiomet som har ledet til den hyperbolske geometri, og det er derfor naturlig at vi stanser opp litt ved parallellbegrepet. I denne modellen vi betrakter, sier vi at to »rette linjer« er »parallelle« når de ikke skjærer hverandre. Denne fundamentale egenskapen samsvarer fullt ut med den tilsvarende egenskap ved parallelle linjer i Euklids geometri. Det er også lett å se at den definerte »parallelitet« medfører at det gjennom et »punkt« utenfor en »rett linje« går mer enn én »rett linje« som er »parallelle« med den første (se fig. 4).

Til slutt skal vi nevne at allerede før både Gauss, Bolyai og Lobatsjefski hadde jesuitpateren Saccheri (ca. 1730) funnet den hyperbolske geometri. Når han allikevel ikke har fått æren av å regnes som oppdageren av det første eksempel på muligheten av en ikke-euklidisk geometri, henger det slik sammen: Som sine etterfølgere bygget Saccheri også på parallellpostulatets motsetning, og han kom også til de samme resultater som Gauss, Bolyai og Lobatsjefski. Men de besynderlige egenskaper ved den nye geometrien skapte konflikter i hans sjel. På den ene side hadde han verden omkring seg, den hadde Vårherre skapt, og i den gjaldt Euklids aksiomer. Den nye geometrien hadde han selv skapt, følgelig var den menneskeverk. Og som den troende katolikk han var, så han ingen annen vei ut av dette dilemma enn å forkaste sin egen teori som falsk. Og som en naturlig konsekvens av dette sluttet han at Euklids geometri var »riktig«.

ANSKUELIG FREMSTILLING AV SUMMEFORMLER

JOHANNES LOHNE

1. Formelen for summen av de n første naturlige tall:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

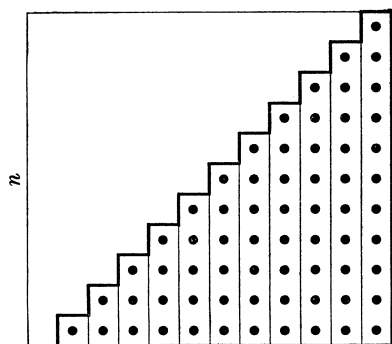


Fig. 1

ses lett ved å sette sammen to kongruente »trappefigurer«, som vist i fig. 1.

2. Den tilsvarende formel for kvadrattallene:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

kan illustreres på lignende måte: Et rektangel med sider $2n+1$ og $n(n+1)$ bygges opp av seks områder som hvert har arealet $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Fire av områdene er innbyrdes kongruente,

likeså de to øvrige. Fig. 2 illustrerer oppbyggingen for $n=4$, og inneholder i sitt indre de tilsvarende figurer for $n=3$, 2 og 1.

En annen figur til illustrasjon av samme formel er rekonstruert av

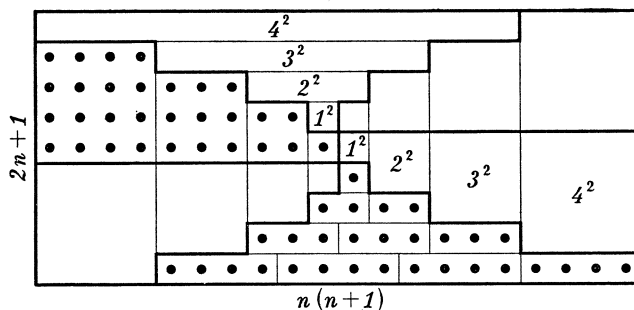


Fig. 2

J. E. Hofmann (smlgn. O. Becker: Grundlagen der Mathematik, s. 37). Hans figur kan imidlertid ikke utvides for voksende n uten å endre på de byggesteiner som allerede er lagt.

3. Geometrisk enklere blir illustrasjonen av formelen for kubikktallene:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Formelen innbyr til å lage et kvadrat av fire like sett kubikktall, som illustrert i fig. 3 med $n=4$.

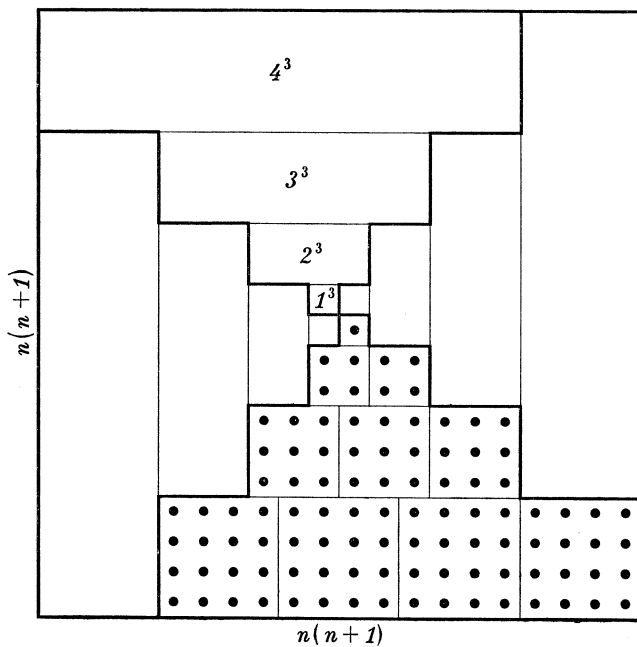


Fig. 3

VAD ÄR OPERATIONSANALYS?

LAMEK HULTHÉN

Den mest kända definitionen av begreppet operationsanalys (OA) kommer från Morse och Kimball [1], vilka definiera OA som en vetenskaplig metod att förse exekutiva organ med kvantitativt underlag för deras åtgärder. Ordet operation förekommer här alltså i den allmänna betydelsen verksamhet eller funktion. Mera utförligt skulle man kunna beteckna OA som en rationell orsaks- och sambandsanalys av sådana förlopp, där människor, maskiner och organisationer äro verksamma, såsom militära konflikter, trafik, produktion, ekonomiska skeenden, och i denna analys spelar sannolikhetsbegreppet en liknande fundamental roll som i den moderna teoretiska fysiken. Det är därför inte så överraskande, att de banbrytande insatserna i OA under det andra världskriget [2, 3, 4] gjordes av fysiker, t. ex. P. M. S. Blackett och E. J. Williams i England, P. M. Morse i U. S. A. Man kan nog utan att göra någon »overstatement« kalla Blackett för den moderna operationsanalysens upphovsman, även om det funnits ansatser tidigare (Lill 1889 [5], Lanchester 1916 [6]). Såvitt känt skrev han också de första anvisningarna för OA-män (1941) och rubricerade då deras arbete som »Scientific Analysis of Operations« eller »Operational Research« [7].

De metoder, som man använder inom OA, äro hämtade från matematiken och den matematiska statistiken, fysiken, kemien, biologien, experimentell psykologi, kort sagt: matematik och naturvetenskap. Det är alltså inte metoderna, som äro nya, utan deras användning. Ett väsentligt drag är samspelet mellan teori och experiment, till vilket man då givetvis räknar insamling av observationer och erfarenheter. Att statistik och sannolikhetskalkyl spela en grundläggande roll vid behandlingen av det empiriska materialet, har förut sagts, men det måste framhävas, att man ofta kan komma ganska långt med rätt elementära metoder, vilket också ett par av de följande exemplen torde visa. Det väsentliga för en OA-man är inte att behärska subtila matematiska metoder, utan förmågan till kritisk rationell analys av föreliggande data och händelseförlopp.

Solandt [8] framhåller som typiskt för OA, att den studerar en *organisation i arbete* och beskriver dess metod rätt och slätt som en *systematisk användning av sunt förnuft* (jfr Goodeve [3]). Det är egentligen omöjligt att ge en allmän beskrivning av, hur en OA-mans arbete går till, men vi skulle efter Solandt kunna ställa upp följande schema, som ibland kan ha tillämpning. Det är alldeles fundamentalt, att man gör klart för sig vad som är

1. *syftet* med operationen eller verksamheten. Nästa steg blir då att finna
2. ett *mått* på verksamhetens effektivitet. I många fall kan detta vara svårt, men har man väl funnit ett sådant mått, så kan man i allmänhet också finna
3. en *metod* att studera vad som påverkar effektiviteten. Det sista steget blir sedan att på grundval av dessa studier rekommendera
4. en *åtgärd*, för att förbättra effektiviteten.

Det finns många exempel på vikten av att analysera, vad man egentligen vill med en viss verksamhet. När engelska amiralitetet under andra världskriget frågade OA-männen, hur man skulle kunna sänka flera tyska u-båtar, nöjde sig dessa icke med den givna problemställningen, utan påpekade, att vad man i dåvarande läge borde sträva efter var, icke att sänka så många u-båtar som möjligt, utan att få så mycket tonnage som möjligt över Atlanten. Vi känna alla den metod, som användes för att nå detta syfte: konvojmetoden. Den har flera aspekter, som är typiska för OA, och vi skall därför dröja något vid den.

Som bekant började fartygsförlusterna genom massanfall från u-båtar bli särskilt kännbara 1942. Konvojernas medelstorlek var 40 fartyg, och man hade vanligen 6 à 7 eskortfartyg per konvoj — det hade behövts fler, men det fanns inte fler. Men det fanns i varje fall en sak, som kunde varieras, och det var konvojens storlek. En undersökning av alla konvojer, som seglat över Atlanten från 1941—1942, visade följande resultat [7]:

Konvojens storlek	% förlorade fartyg
< 40 fartyg, medeltal 32	2,5%
> 40 » , » 54	1,1%

En enklare sammanfattning av ett statistiskt material kan knappast tänkas, och ändå ger det en upplysning av största vikt. En närmare granskning visade, att antalet förlorade fartyg per konvoj var ungefär detsamma, oberoende av om konvojen var stor eller liten. Antalet eskortfartyg hade då varit i stort sett detsamma för både små och stora konvojer, och de anfallande u-båtsflockarna hade inte heller varierat mycket i storlek.

På denna punkt kan nu lämpligen den *teoretiska analysen* sätta in: hur kan det komma sig, att förlusterna bli relativt mindre i en stor konvoj än i en liten? Svaret på frågan — eller rättare en del av svaret — kan man få genom ett enkelt geometriskt resonemang. Antag, att en konvoj om 40 fartyg täcker en yta, för enkelhetens skull en cirkelyta¹, med radien $1\frac{1}{2}$ sjömil = 2400 m, och att eskorten håller sig 2 sjömil = 3600 m utanför denna cirkel (fig. 1). Eskortradien blir då 6000 m, och den omkrets, som eskorten skall täcka, $2\pi \cdot 6000$ m.

Om vi nu öka konvojen till 80 fartyg, så tar den upp dubbelt så stor yta, men *konvojradien* blir bara $\sqrt{2}$ gånger så stor som förut: $2400 \cdot \sqrt{2}$ m = 3400 m. Med oförändrat eskortavstånd 3600 m blir eskortradien 7000 m och den sträcka, som eskorten skall täcka, $2\pi \cdot 7000$ m. Det betyder, att 7 eskortfartyg kunna väntas skydda en konvoj om 80 fartyg lika effektivt som 6 eskortbåtar skydda 40 fartyg.

Men, invänder någon, en u-båt, som bryter genom eskortkedjan, har ju flera fartyg att skjuta på i en konvoj om 80 än i en konvoj om 40. Det är visserligen sant, men u-båten har endast ett begränsat antal torpeder, kanske 6, och en viss träffsannolikhet för varje².

En annan fördel med de stora konvojerna kan belysas med ett exempel från sommaren 1943. Man hade då 11 grupper av eskortfartyg för att följa de olika konvojerna på nära håll. Dessutom hölls tre grupper i reserv för undsättning till anfallna konvojer. Genom att minska konvojernas antal med en tredjedel kunde man minska näreskortgrupperna från 11 till 8, medan undsättningsgrupperna ökade från 3 till 6. Det

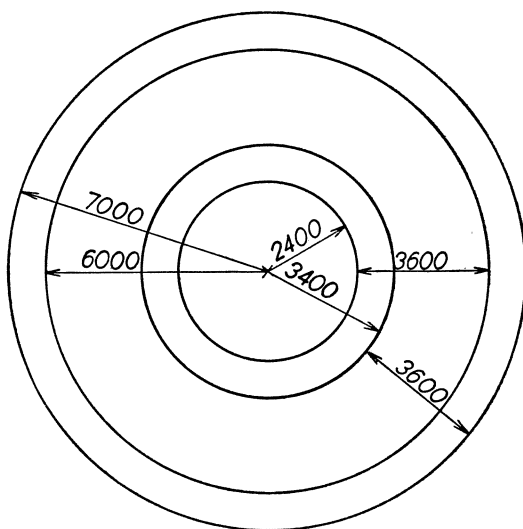


Fig. 1

¹ Nedanstående överläggning gäller i princip även för en långsträckt ellips eller vilka likformiga konturer som helst; det framgår emellertid indirekt av resonemanget, att cirkelformen är den fördelaktigaste ur skyddssynpunkt.

² En författare erinrar om analogien med en jägare, som lossar sin bössa mot en flock änder; han faller inte fler, om det är 80 i flocken, än om det är 40. Om jämförelsen är alldeles riktig, skall jag låta vara osagt, men den är i varje fall typiskt engelsk.

betyder alltså, att chansen för att en anfallen konvoj skulle få undsättning praktiskt taget 3-dubblades, eftersom antalet undsättningsgrupper per konvoj ökade från $\frac{3}{11}$ till $\frac{6}{8}$.

En trivial men väsentlig aspekt på konvojproblemet är följande: för att en u-båt eller u-båtsflock skall kunna anfalla, måste den först upptäcka konvojen. Hur förhåller det sig då med sannolikheten för upptäckt? Antag, att en u-båt jagar i ett område med ytan A , där det i genomsnitt finns n fartyg eller fartygsgrupper slumpvis fördelade. Förutsätt för enkelhets skull vidare, att den optiska räckvidden är R , d. v. s. att utkiken ser allt, som passerar inom ett avstånd¹ R . Då u-båten gått en distans d , har den alltså sökt genom ett område av storleken $2R \cdot d$ (fig. 2), och bör då i genomsnitt ha sett $\frac{2Rd}{A}n$ av de fartyg (resp.

grupper av fartyg), som befinna sig där. Man bör då också komma ihåg, att den effektiva räckvidden blir något större mot en konvoj, eftersom konvojen har en viss utsträckning (exempelvis en radie a) och det räcker med, att u-båten upptäcker ett av de yttersta fartygen i konvojen. Räckvidden blir då $R+a$ i st. f. R .

Tag ett numeriskt exempel: i ett område 1000×1000 sjömil finnas 100 fartyg spridda över hela området. En u-båt söker över en sträcka av, låt oss säga 150 sjömil per dag, och ser allt inom 10 sjömil. Medelantalet upptäckter blir då

$$\frac{150 \cdot 20}{1000 \cdot 1000} \cdot 100 = 0,3;$$

den upptäcker alltså ett fartyg i genomsnitt var tredje dag. Vi gå nu till det motsatta extremfallet och anta, att alla 100 fartygen äro samlade i en konvoj, som då enligt vad vi förut sade har en radie av

2 sjömil, utan eskort; räckvidden blir då 12 i st. f. 10. Chansen för upptäckt blir

$$\frac{150 \cdot 24}{1000 \cdot 1000} \cdot 1 = \frac{3,6}{1000} = \frac{1}{280},$$

¹ Observera, att endast erfarenhet eller experiment kan bestämma R , eller rättare sannolikheten för upptäckt som funktion av det kortaste avståndet till den linje, längs vilken föremålet rör sig. Jämför den sid. 98-100 (fig. 6) omnämnda undersökningen ang. upptäckt av flygplan.

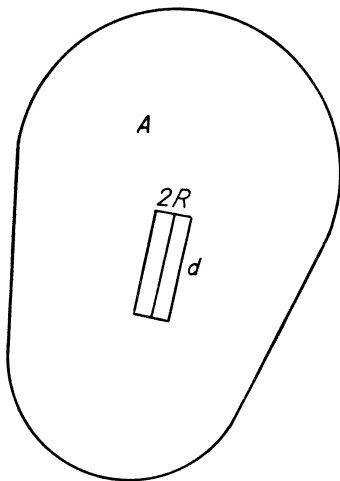


Fig. 2

d. v. s. en upptäckt på 9 månader, vilket gör uppgiften ganska hopplös ur u-båtens synpunkt. Delar man upp konvojen i 2 om 50 fartyg, som gå helt oberoende av varandra, blir chansen för upptäckt praktiskt taget dubbelt så stor — alltså ytterligare ett argument för de stora konvojerna.

Denna enkla uppskattning av sannolikheten för upptäckt är ett typiskt exempel på vad Blackett [7] kallar *a priori-metoden*: den innebär att man gör en teoretisk analys av problemet *a priori*, d. v. s. i stort sett utan användning av empiriska data. Denna metod är av särskild vikt vid analys av militära problem i fredstid, då man helt naturligt har begränsad tillgång till praktiska erfarenheter av nya vapen, ny taktik o. s. v.

Innan vi lämna konvojproblemet, vill jag göra två anmärkningar. Den ena gäller u-båtarnas taktik mot konvojerna: den låga upptäckts-sannolikheten förbättras inte så mycket, om låt oss säga 10 u-båtar jaga tillsammans, men däremot, om de jaga var för sig. Chansen för upptäckt blir då praktiskt taget 10 gånger större. Den bästa taktiken blir då: spana var för sig, men samlas, innan en upptäckt konvoj anfaller.

Den andra anmärkningen gäller konvojernas storlek. Det bästa skyddet mot u-båtarna erhålles med stora konvojer, men gör man konvojerna alltför stora, kan man riskera, att exempelvis förlusterna i väntetid vid konvojens samling blir en så stor olägenhet, att man måste väga den mot risken av fartygsförluster genom u-båtsanfall. Väntetid betyder ju förlorad tonnagetid. Detta problem måste rimligtvis ha beaktats på ett eller annat sätt, men mig veterligt finns det ingenting publicerat om det. Jag nöjer mig med att skissera, hur en sådan beräkning kan göras: Antag att konvojen består av N fartyg, som samlas t. ex. 10 per dag. Tiden för samlingen blir då $\frac{1}{10}N$ dagar, den genomsnittliga väntetiden för ett fartyg $\frac{1}{20}N$ dagar, och den totala tidsförlusten $N \cdot \frac{1}{20}N = \frac{1}{20}N^2$ dagar. Antag vidare, att cykeln lastning—överfart—lossning—återfart tar $10 + 20 + 10 + 20 = 60$ dagar. Om då ett fartyg för varje cykel får en väntetid på 60 dagar, så blir det bara hälften så effektivt ur transportsynpunkt. 120 dagars väntetid blir då ekvivalent med 1 fartygsförlust. Man bör vidare ta hänsyn till, att förlust av ett fartyg med last är mera kännbar än förlust av enbart fartyg; tag t. ex. värdet av fartyg med last i genomsnitt = 5 fartyg. Vid en sänkning gör man då i medeltal en förlust ekvivalent med 3 fartyg (barlast på återresan). Antar man dessutom, i överensstämmelse med tidigare citerade erfarenheter, att en konvoj vid en färd över Atlanten i genomsnitt förlorar l fartyg, oberoende av konvojens storlek, så blir den totala procentuella förlusten per konvoj om N fartyg genom sänkningar och väntetid

$$\frac{3l}{N} + \frac{N}{2400}.$$

Betraktat som funktion av konvojstorleken N har detta uttryck sitt minimum för $N = \sqrt{7200l}$; om $l \approx 1$, blir det optimala N -värdet alltså 80 à 90 fartyg¹.

Man kan emellertid ställa frågan, om det här använda kriteriet, att den procentuella förlusten skall vara så liten som möjligt, är det mest ändamålsenliga.

Om man exempelvis är beredd att ta något större förluster för att på kortare sikt få över så mycket tonnage som möjligt, skulle i stället följande kriterium komma i fråga. Antag M fartyg disponibla, uppdelade på konvojer om N st. (antalet konvojer alltså M/N). Antalet fartyg, som kommer fram, blir $M - \frac{M}{N}l$, och tiden, som en resa tar för ett fartyg $60 + \frac{1}{20}N$ dagar. Om kvoten

$$M \cdot \frac{1 - \frac{l}{N}}{60 + \frac{20}{N}} = 20M \cdot \frac{N - l}{1200N + N^2}$$

maximeras, fås $N \approx \sqrt{1200l}$, eller, om $l \approx 1$, $N \approx 35$.

Jag skall här också beröra en metod, som Blackett [7] döpt till *variationismetoden* — en benämning som ur matematisk synpunkt inte är alldeles lyckad. Den borde hellre heta metoden med partiella derivator eller något dylikt. Antag att vi ha någon storhet y , som kan betyda utfallet av en viss operation och beror på olika variabler $x_1, x_2, \dots, x_n$, som kunna vara t. ex. insatsen av olika vapen eller truppslag. Utfallet y är i allmänhet en mycket invecklad funktion av variablerna $x_1, x_2, \dots$, som är omöjlig att bestämma generellt, men man kan ofta få en föreställning om, hur funktionen varierar i ett visst variabelområde genom att använda den kända utvecklingen

$$y + \Delta y = f(x_1, x_2, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots,$$

där det i allmänhet är tillräckligt att ta med de lineära termerna, om variationerna Δx_i inte äro alltför stora. Genom att ändra en variabel i taget, kan man få en föreställning om de partiella derivatornas storlek, t. ex. om endast x_1 varierar:

¹ Betraktar man hela cykeln blir uttrycket $\frac{6l}{N} + \frac{N}{1200}$ och resultatet oförändrat.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \approx \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1},$$

och kan sedan förutsäga, vad en annan ändring av x_1 , fortfarande inte alltför stor, skulle ge för resultat.

Man kan sedan genom att hålla x_1 konstant och variera x_2 få en föreställning om nästa partiella derivata

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \approx \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}.$$

Då man känner dessa båda partiella derivator approximativt, kan man tydligen också få reda på, vad en samtidig variation av x_1 och x_2 skulle ge, nämligen

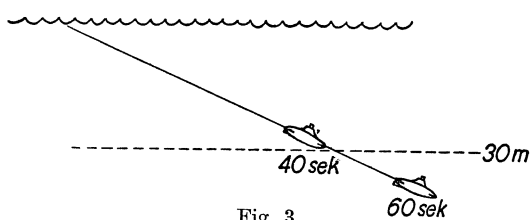
$$\Delta y_{1,2} \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2.$$

Låt oss ta ett exempel från affärslivet: en företagschef vill veta, om hans reklamkostnader äro rätt avvägda och fördelade. Försäljningen y är en funktion av många variabler, men i det här fallet intressera vi oss endast för, låt oss säga kostnaderna för tidningsreklam x_1 å ena sidan, för distribution av trycksaker och reklamartiklar x_2 å andra sidan. Han varierar då en av dessa kostnader i taget, och kan sedan av de resultat han får, sluta sig till, vad en viss samtidig ändring i x_1 och x_2 skulle ge för resultat. Det bör framhållas, att bestämningen av Δy_1 etc. måste ske med kritik och omdöme: har vederbörande valt t. ex. maj månad för sitt experiment med exempelvis ökad tidningsreklam, så bör han jämföra inte bara med april och juni innevarande år, utan också med april, maj och juni föregående år. Man måste alltid vara på sin vakt mot variationer i utfallet, som bero på andra orsaker än den för tillfället aktuella variabeländringen.

Ett av de mest omtalade exemplen på OA från det andra världskriget är E. J. Williams' analys av taktiken vid flyganfall mot u-båtar. Våren 1941 var situationen den, att antalet sänkta u-båtar inte stod i rimlig proportion till insatsen av flyg med sjunkbomber — den senare analysen visade, att chansen för en verksam träff med en sjunkbomb mot en u-båt var av storleksordningen 1 på 1000! Sjunkbombarna voro vid denna tid inställda för detonation på 30 m djup. Anledningen var rent sprängteknisk: experterna hade påpekat, att explosion på större djup gav kraftigare verkan och större räckvidd. Trots att detta i och för sig var alldeles riktigt, visade Williams' analys, att just det stora detonations-

djupet var anledning till den dåliga träffprocenten. Huvuddragen av hans utredning voro följande:

U-båten dyker med en vertikalhastighet av ungefär 0,6 m/sek. För att komma ner till detonationsdjupet måste den alltså ha varit under dykning i 50 sek. Sätter man sjunkbombens räckvidd eller verkningsradie till 6 m, så måste u-båten alltså ha dykt 40—60 sekunder före detonationen för att befinna sig på ett djup, där sjunkbomben kan ha någon effekt



(fig. 3). Det var tydligen av vikt att få svar på följande frågor: I vilket läge befann sig en u-båt i allmänhet, när den anfölls av ett flygplan? Hur lång tid hade den varit under dykning? Bearbetning av erfarenheter från faktiska anfall ledde till följande statistik:

U-båtens situation vid anfallet	Antal fall %
synlig	34
varit under dykning	
högst 15 sekunder	27
dito 15—30 sek.	15
dito 30—60 »	12
dito > 60 »	12

Detta betyder, att knappt $\frac{1}{10}$ av u-båtarna befann sig på ett sådant djup, 30 ± 6 m, att de kunde påverkas av en sjunkbomb. Men härtill kommer, att det område, inom vilket u-båten kan befinna sig, räknat från dykvirveln, ökar mycket kraftigt med dyktiden, ungefär med tredje potensen av denna. U-båten kan ju variera sin hastighet i både horisontell och vertikal led, den kan gira o. s. v. (se fig. 4).

I den tillgängliga litteraturen har jag inte funnit några siffror för denna del av beräkningen, men låt oss anta, att u-båtens horisontalhastighet under dykningen är högst 5 m/sek. Efter 60 sek. är u-båten då att finna inom en horisontell yta med längd-dimension 300 m och tvärdimensionen kanske 200 m. Om u-båtens egna dimensioner äro $65 \times 6 \times 4$ och sjunkbomben har en verkningsradie på 6 m, så blir alltså den yta, inom vilken man måste träffa för att u-båten åtminstone skall få en skada i skrovet, ungefär 65×18 m, och chansen för att man skall

träffa rätt inom den yta, där u-båten kan finnas blir ungefär $\frac{65 \cdot 18}{300 \cdot 200} =$

0,02. Eftersom dessutom endast en knapp tiondel av u-båtarna befann sig på rätt djup, blir chansen för en träff överhuvudtaget endast 1 på 500 (jfr den förut citerade siffran 1 på 1000, som gällde en »successful kill«).

Resultatet av Williams' analys blev alltså: den gamla taktiken förutsatte, att u-båten vid tidpunkten för anfallet befann sig på ett djup, som var rätt osannolikt ($\lesssim 10\%$) och dessutom innebar, att u-båten var lokaliserad inom ett stort område och därför svår att träffa. I stället borde man inrikta sig på att u-båten skulle vara synlig eller nyss ha börjat dyka; detta var sannolikare ($\approx 60\%$) och dessutom var målet då beläget inom en mycket mindre yta. Den praktiska rekommendationen blev att minska detonationsdjupet för sjunkbomben — Williams angav 6 m som lämpligaste djup. Den nya taktiken ledde också till ett starkt ökat antal sänkningar, trots att sjunkbombens verkningsradie minskades genom det reducerade detonationsdjupet. Lustigt nog förklarade den tyska krigsledningen de ökade u-båtsförlusterna med att engelsmännen infört en ny, betydligt kraftigare sjunkbomb!

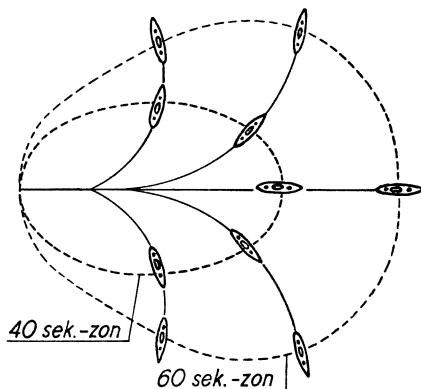


Fig. 4

Ett berömt exempel på »a priori-metoden» utgör Lanchester's n^2 -lag [6]. Antag, att två styrkor A och B bekämpa varandra genom någon form av beskjutning. Båda styrkorna antagas bestå av ett mycket stort antal enheter, och varje enhet i A beskjuter ett visst antal enheter i B , och omvänt. Under ett tidsintervall dt har en enhet i A en viss sannolikhet, säg αdt , att försätta en enhet i B ur stridbart skick. Finns det n_A enheter i A , så kunna dessa alltså på tiden dt eliminera i genomsnitt $n_A \alpha dt$ enheter ur B -styrkan, där antalet är n_B .

Om ändringen i n_B under tiden dt kallas dn_B ($-dn_B$ =förlusten), så erhåller man tydligen följande differentialekvation:

$$dn_B = -\alpha n_A dt,$$

och för A :s genomsnittliga förluster på grund av B :s beskjutning får man på motsvarande sätt

$$dn_A = -\beta n_B dt,$$

där βdt är chansen för att *en* enhet i *B* under tiden dt skall eliminera en enhet i *A*. Tydligt äro α och β mått på stridseffektiviteten hos *en* enhet i *A*, resp. *B*.

Genom att dividera de båda ekvationerna kan man eliminera dt och erhåller:

$$\frac{dn_B}{dn_A} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{n_A}{n_B}, \quad \text{eller} \quad \frac{dn_B}{n_B} : \frac{dn_A}{n_A} = \frac{\alpha n_A^2}{\beta n_B^2}.$$

Denna ekvation säger bl. a., att de *relativa* förlusterna äro lika stora, om följande villkor är uppfyllt:

$$\alpha n_A^2 = \beta n_B^2.$$

A och *B* äro då lika starka. Det riktiga måttet på en stridande styrkas effektivitet är alltså enhetens effektivitet, multiplicerad med *kvadraten* på antalet enheter. Om

$$\alpha n_A^2 > \beta n_B^2,$$

så är *A* starkare än *B* och det *förväntade* resultatet av en drabbning (= medelresultatet av ett stort antal sådana strider) blir, att *A* nedkämpar *B*, såvida inte striden dessförinnan avbrytes, t. ex. genom att *B* drar sig tillbaka.

Den förutnämnda differentialekvationen kan också skrivas

$$\alpha d(n_A^2) = \beta d(n_B^2),$$

och efter integration får man

$$\alpha(N_A^2 - n_A^2) = \beta(N_B^2 - n_B^2),$$

där N_A resp. N_B är antalet enheter vid stridens början, och n_A , n_B hänföra sig till en och samma senare tidpunkt. Om nu exempelvis *A* är starkare än *B* d. v. s.

$$\alpha N_A^2 > \beta N_B^2,$$

så kan *A* väntas vinna striden, och han kan ur den nyss nämnda ekvationen få reda på, hur stora förluster han måste räkna med för att fullständigt nedkämpa *B* ($n_B = 0$). Svaret erhålles ur

$$\alpha n_A^2 = \alpha N_A^2 - \beta N_B^2,$$

där n_A nu betyder det antal enheter i *A*, som i medeltal kan väntas återstå efter en fullständig nedkämpning av *B*.

Låt oss ta ett numeriskt exempel, som vi kalla »Nelson vid Trafalgar» (efter en engelsk kollega). Nelson går med 40 linjeskepp mot en fransk-

spansk flotta om 46 fartyg. Han är väl i och för sig underlägsen men manövrerar så, att fransmännens linje klyvs i två delar, och Nelson kan koncentrera elden från sina 40 skepp mot 23 av fransmännens. Vi anta, att de olika linjeskeppen äro likvärdiga och tillämpa Lanchester's lag för att beräkna, hur många engelska skepp n , som kunna väntas återstå efter att de 23 franska satts ur stridbart skick. Vi få

$$n^2 = 40^2 - 23^2 = 1071, \quad n \approx 33.$$

Förlusten skulle alltså bli 7 fartyg — i verkligheten var den visst 5. Efter en sådan inledning bör inte Collingwood ha svårt att fullfölja segern.

n^2 -lagen uppställdes av F. W. Lanchester 1916 i ett numera klassiskt arbete »Aircraft in Warfare» [6], men dess intuitiva användning i krigskonsten är förmodligen lika gammal som skjutvapnen (i betydelsen avståndsvapen). Vid strid med handvapen man mot man kan situationen vara sådan, att överlägsenhet i antal inte kan utnyttjas, och då gäller snarare Lanchester's s. k. lineära lag.

Trafiken i det moderna samhället utgör ett tacksamt fält för operationsanalys. Ett enkelt exempel: från 1950 till 1951 ökade antalet bilar i Sverige med 25%, medan antalet bilolyckor ökade med 56%. En försäkringsexpert uttalade, att den stora ökningen av olycksfrekvensen finge tillskrivas de många nya och ovana förarna. Bakom hans uttalande låg tydligen den föreställningen, att antalet olyckor borde vara proportionellt mot antalet bilar, under i övrigt oförändrade betingelser. Ett sådant antagande kan ju vara naturligt, när det gäller olyckor, där endast ett fordon är inblandat (typ dikeskörning på grund av halt väglag, för hög hastighet etc.). Men ett stort antal olyckor består ju i kollision mellan 2 fordon, och frekvensen av sådana olyckor bör snarare vara proportionell mot antalet möten eller omkörningar än mot antalet bilar i och för sig. Hur varierar nu t. ex. antalet möten med antalet bilar? Låt oss tänka oss en lång och någorlunda livligt trafikerad väg, där det under en viss tid kör n_1 bilar i den ena riktningen och n_2 i den andra. Antalet möten blir då i stort sett $n_1 n_2$. Nu kan det ju vara ett rimligt antagande att n_1 och n_2 var för sig äro proportionella mot det antal bilar, som finns i landet, under i övrigt oförändrade betingelser, och antalet möten mellan bilar blir då proportionellt mot n^2 (motsvarande gäller för omkörning). Det är då strax litet mindre förvånande, att antalet olyckor ökar med en faktor $1,56 = (1,25)^2$, när antalet bilar ökar med faktorn 1,25.

Men låt oss inte överdriva betydelsen av denna överensstämmelse,

utan i stället erinra oss den inte så ovanliga typen av olycka: kollision med mötande bil vid omkörning. Dela in de nyssnämnda n_1 bilisterna i två grupper, en långsam, antal l_1 , och en snabb, antal s_1 , och antag, att alla de snabba bilisterna hinna köra om alla de långsamma. Antalet omkörningar blir då $l_1 s_1$. Men chansen för att det skall inträffa en farlig situation av nämnda typ bör vara proportionell inte bara mot antalet omkörningar utan också mot antalet mötande bilar, tillsammans alltså $l_1 s_1 n_2$. Om vart och ett av dessa tre tal kan antas proportionellt mot totala antalet bilar n , bör frekvensen av denna speciella typ av olyckor (med 3 motorfordon inblandade) stiga proportionellt med n^3 , under i övrigt oförändrade betingelser. Resultatet av denna överläggning blir sålunda, att olycksfrekvensen $O(n)$ inte kan väntas vara direkt proportionell mot antalet motorfordon utan måste stiga betydligt snabbare:

$$O(n) = c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3.$$

Den starka ökningen av olycksfrekvensen är alltså till stor del »ren automatik«, som det heter nu för tiden, vilket inte hindrar, att de ovana förarna kunna ha spelat en viss roll i sammanhanget. Det som begränsar giltigheten av ovanstående överläggning, är kanske framför allt psykologiska faktorer, som t. ex. att större trafiktäthet framtvingar större försiktighet hos förarna, vilket minskar koefficienterna (c_1 , c_2 , c_3 ovan). Hur stor denna mildrande effekt är, kan endast en empirisk undersökning avgöra.

I framtiden komma säkert matematisk-naturvetenskapliga metoder att användas på samhällsproblem av mycket större vidd. En artikel av Halsbury [9] öppnar intressanta perspektiv: han diskuterar bl. a. möjligheten att med de metoder, som brukar benämnas »linear programming« bidra till att lösa problemet om en rättvis och ändamålsenlig inkomstfördelning i samhället.

I det svenska försvaret har operationsanalys i egentlig mening introducerats först efter 1950, men den har redan givit viktiga resultat och tenderar att få allt större betydelse, inte minst inom flygvapnet. Bland de problem, som behandlats av dess OA-grupp, kunna efter vederbörligt tillstånd följande nämnas.

Den optiska luftbevakningen skötes av poster placerade i torn, helst högt belägna. För att en sådan bevakning skall bli effektiv fordras i ett vidsträckt land som vårt ett rätt stort antal ls (=luftbevakningsstationer) och en motsvarande talrik personal. Uppenbarligen är det av stor vikt att dessa ls fördelas på ett ändamålsenligt sätt.

Om man ser bort från terrängens ojämnheter, bör man eftersträva en

regelbunden fördelning, och det är då endast två ytstrukturer, som kunna komma i fråga: den kvadratiske och den hexagonala (fig. 5).

Antag, att det finns ett största avstånd R , bortom vilket det är omöjligt för ett normalt öga att se ett flygplan av viss typ. Låt oss exempelvis ställa fordran, att varje punkt på kartan skall befinna sig på ett avstånd $\leq R$ från åtminstone en gitterpunkt (ls).

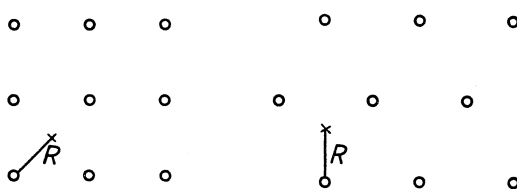


Fig. 5. Kvadratiskt och hexagonalt ytgitter.

I det kvadratiske fallet blir den ogynnsammast belägna punkten diagonalernas skärningspunkt. Kvadratens sida får då vara högst $R/\sqrt{2}$, och ls-tätheten blir då minst $1/2R^2$.

I det hexagonala fallet får den omskrivna cirkelns radie vara högst $= R$ och triangelns sida $R/\sqrt{3}$. Enhetsrombens yta blir $\frac{3}{2}R^2/\sqrt{3}$ och minsta tillåtna täthet blir $2/3\sqrt{3}R^2$.

Förhållandet mellan de minsta erforderliga tätheterna blir $4/3\sqrt{3} = 0,77$ — det hexagonala ytgittret kräver sålunda 23% mindre täthet än det kvadratiske, om man väljer det kriterium, som anfördes i början. I praktiken blir det regelbundna mönstret starkt modifierat av terrängens beskaffenhet, och den reella vinsten blir inte heller så kraftig, men även om skillnaden i det behövliga antalet ls inte skulle vara mer än 5 à 10%, så betyder det en stor besparing i materiel och personal.

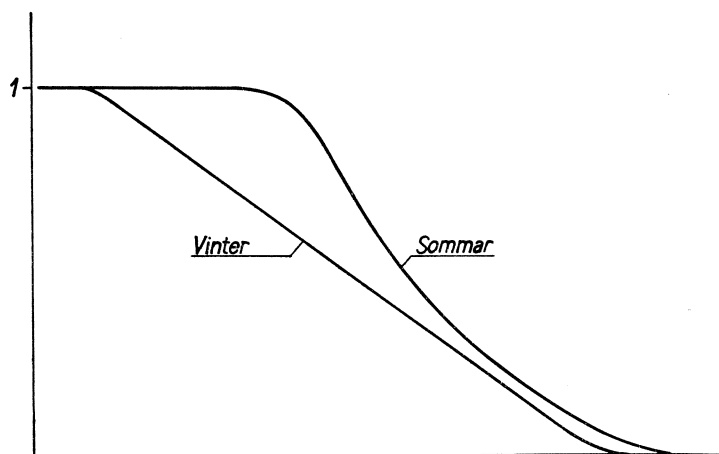


Fig. 6. Sannolikheten för upptäckt av viss flygplantyp på låg höjd, som funktion av dess kortaste avstånd till observatören.

För att få ett begrepp om den lämpliga »gitterkonstanten« måste man vädja till erfarenheten. En del experiment ha anställts för att bestämma sannolikheten för upptäckt av en viss flygplanstyp som funktion av det kortaste avstånd, på vilket det passerar förbi resp. ls. Ur dessa försök kan man också bestämma sannolikheten för upptäckt som funktion av avståndet (positivt eller negativt) från yttersta bevakningslinjen i en viss ls-gruppering. Försöken utfördes både sommar- och vintertid under i övrigt så lika betingelser som möjligt. En del av resultaten återges utan skala i fig. 6. Skillnaden mellan sommar och vinter är påfallande trots att sikten i bägge fallen var så god, att ögats upplösningsförmåga kunde praktiskt taget helt utnyttjas. Förklaringen torde åtminstone delvis ligga i hörselns betydelse för upptäckten: under vinterförsöken stodo ls-posterna för kylans skull med pälskragarna uppfällda och öronskydden på pälsmössorna nedfällda.

Det kan inte nog starkt framhållas, att den experimentella sidan av OA är lika viktig som den teoretiska. Liksom i den egentliga naturvetenskapen är det alltid erfarenheten, som har det sista ordet.

Spelteorien är en gren av matematiken, som hör nära samman med operationsanalysen och på senare tiden blivit rätt mycket omtalad.

En utmärkt framställning av spelteoriens grunder har redan givits i denna tidskrift av E. Følner [10] (jfr också McKinseys bok [11]). Jag skulle här bara vilja understryka, att svårigheten i att tillämpa spelteorien praktiskt vanligen inte ligger på den matematiska sidan, utan i den värdering, som måste göras innan man kan ställa upp en vinstmatrix. Ett visst utfall av ett spel kan värderas helt olika i olika situationer, och följaktligen kan också den bästa »strategien« bli helt olika.

Det kan vara lämpligt att sluta med en påminnelse om, att samma begränsning egentligen vidlåder all operationsanalys. Resultatet av en analys beror mer eller mindre kritiskt på de förutsättningar och värderingar, som gjordes i dess början, och man måste därför ständigt vara på sin vakt emot alltför vidlyftiga slutsatser.

LITTERATUR

- [1] P. M. MORSE — G. E. KIMBALL: *Methods of Operations Research*. New York & London 1951.
- [2] J. G. CROWTHER — R. WHIDDINGTON: *Science at War*, kap. II. London 1947.
- [3] C. GOODEVE: *Operational Research*. Nature, March 13, 1948, pp. 377–384.
- [4] P. M. MORSE: *Mathematical Problems in Operations Research*. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), pp. 602–621.

- [5] E. LILL: *Die Grundgesetze des Personenverkehrs*. Zeitschrift für Eisenbahnen und Dampfschiffahrt der österreichisch-ungarischen Monarchie, Heft 35 u. 36, 1889.
- [6] F. W. LANCHESTER: *Aircraft in Warfare*. London 1916.
- [7] P. M. S. BLACKETT: *Operational Research*. The Advancement of Science V, nr. 17 (1948); idem, *Operational Research, Recollections of Problems Studied, 1940-45*. Brassey's Annual 64 (1953), pp. 88-106.
- [8] O. SOLANDT: *Observation, Experiment and Measurement in Operations Research*. Journal of the Operations Research Society of America (Jorsa) 3 (1955), pp. 1-14.
- [9] EARL OF HALSBURY: *From Plato to the Linear Program*. Jorsa 3 (1955), pp. 239-254.
- [10] E. FÖLNER: *Elementer af von Neumann's spiltteori*. NMT 1 (1953), pp. 115-126.
- [11] J. C. C. MCKINSEY: *Introduction to the Theory of Games*. New York 1952.
- [12] McCLOSKEY & TREFETHEN: *Operations Research for Management*. Johns Hopkins Press, Baltimore 1954.

Utom »Jorsa« hänvisas till den engelska tidskriften Operational Research Quarterly, utgiven av the Operational Research Society, London.

Häfte 3, årg. 84, 1955 av den svenska »Artilleritidskrift« har helt ägnats operationsanalys.

BOKMELDINGER

JOE KENNEDY ADAMS: *Basic statistical concepts*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 16+304 pp. sh. 41/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 109.)

Forfatteren sier i forordet at boken er ment »primarily as a text for a one- or two-semester course for students who have had little or no previous calculus or statistics«. Han forutsetter således ikke kjennskap til differensial- og integralregning.

I bokens 7 første kapitler behandles endelige populasjoner og diskrete sannsynlighetsfordelinger. Her presenteres leseren for en rekke av de grunnleggende begreper fra matematisk statistikk. Såvel intervallestimering som statistisk hypoteseprøving med bruk av styrkefunksjon er omtalt og belyst ved eksempler. Denne innføring er mulig selv om leseren har små matematiske forkunnskaper, så lenge en holder seg til endelige populasjoner.

I de dernest følgende 7 kapitler behandles de vanligste kontinuerlige fordelinger, og boken avsluttes med et kort kapittel om ikke-parametriske statistiske metoder. Nå er kjennskap til differensial- og integralregning nødvendig, og forfatteren forklarer i et par avsnitt det han mener er nødvendig å vite for å kunne følge med videre. Fremstillingen får mer og mer karakter av oversikt, og setningen »we state without proof« går igjen stadig oftere. I Appendix B er riktignok noen av resultatene utledet.

Etter hvert som den matematiske statistikk får større og større anvendelse innen naturvitenskapene, sosialvitenskapene, medisin m. m., blir det stadig fler som får bruk for å ha kjennskap til statistisk terminologi, og hvordan problemene må formuleres for å kunne behandles med det matematisk-statistiske begrepsapparat. At forfatteren har tenkt seg denne gruppe som lesere av boken, fremgår av Appendix A: »Some hints on how to ask questions of mathematical statisticians«.

Boken kan da også anbefales alle som ønsker en kortfattet oversikt over statistisk terminologi og tenkemåte. Stoffet er oversiktlig og klart fremstilt. Imidlertid tror jeg det er å frykte at leseren vil overse hovedpointene ved de statistiske teoremer på grunn av besvær med å forstå

den matematiske fremstilling, hvis han har så svake matematiske ferdigheter som forutsatt i forordet.

Arnljot Høyland

ÉMILE BOREL—ANDRÉ CHÉRON: *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous*. (Monographies des probabilités 5.) 2me édition revue et corr. Gauthier-Villars, Paris, 1955. 18+424 pp. fr. 2200.

(Innholdsfortegnelse i NMT 3 (1955), s. 170.)

For et par år siden oppsto det i Norsk Bridgemagasin en større diskusjon om et bestemt bridgeproblem. I denne anledning fikk jeg forelagt meg en rekke brev som redaktøren for magasinet hadde mottatt. Problemet var av en slik art at en skulle sannsynlighetsmessig beregne den beste måten å spille en bestemt hånd på. Dette viste at sannsynlighetsberegning i bridge i ganske stor utstrekning interesserte en stor del av Norges bridgespillere. På den annen side viste brevene at norske bridgespilleres kjennskap til sannsynlighetsregning i bridge stort sett var begrenset til Culbertsons tabeller.

Uten da å ha lest den bok som nå skal anmeldes, antydte jeg overfor redaktøren at denne kunne tenkes å brukes.

Forfatterne behandler de forskjellige faser av et bridgespill:

- 1) Det å blande kortene.
- 2) Før meldingene er begynt.
- 3) Det blinde utspill.
- 4) Spill og motspill.

Forfatterne har stort sett fulgt den linje at de har stilt problemene generelt og så ved eksempler behandlet spesielle problem. Ved endel øvelse vil en lett kunne bruke teoriene på de bridgespill en selv skal behandle. Boken er skrevet på en slik måte at en kan bruke den som oppslagsbok uten å ha lest boken.

I første og største delen av boken er det matematiske formelapparat og de matematiske resonnement redusert til et minimum. Dette gjør at en kan lese og bruke de kunnskaper boken gir uten å måtte kunne store mengder med matematikk. For mere matematiske skolerte gjennomgås teoriene i appendices. Bevisene virker ved gjennomsyn matematisk tilfredsstillende.

Boken kan anbefales for:

- a) Bridgespillere med interesse for sannsynlighetsregning i bridge.
- b) Personer, som har et visst kjennskap til bridge og som ønsker å finne eksempelsamlinger i sannsynlighetsregning.

Alf Gudbrandsen

DAVID FOG: *Matematik for landinspektører og skovbrugere*. 2. udg. Den kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, København, 1955. 391 s. D. kr. 32.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 41.)

Ved å lese gjennom innholdsfortegnelsen for boken får en det inntrykk at det må være umulig å behandle hele den mengde stoff som er tatt med på så liten plass. Det er derfor ikke uten spenning en begynner lesingen, for å se hvordan forfatteren løser den vanskelige oppgaven. En skulle vente at framstillingen ville bli springende når så mange disipliner skal behandles, men her må en si at forfatteren på en meget pen måte har klart å smelte det hele sammen til en enhetlig framstilling.

Ved innføring av vektorregningen nytter forfatteren et venstrehåndssystem. Her ville jeg langt ha foretrukket et høyrehåndssystem, for å ha en framstilling som svarer til det en vanligvis finner ved anvendelser av vektorregningen.

Avsnittet om kjeglesnitt og kjeglesnittsflater har en rekke meget pene og instruktive figurer.

Når det gjelder den relative vekt som er lagt på de forskjellige emner, vil det alltid være plass for uenighet. Om det skulle være tilfelle også for denne bok, regner jeg ikke det for noen nevneverdig innvending.

Gjennom alle kapitler merker en seg hvordan forfatteren har trukket fram det vesentlige, mens spesialtilfeller er henvist til en mer beskjeden plass.

I denne utgave er tatt med et kapitel om sannsynlighetsregning og sannsynlighetsfordelinger, samtidig som en del kapitler er omarbeidet fra første utgave.

I tillegg til eksempler løst i teksten har boken en oppgavesamling på 400 øvelsesoppgaver. Denne store og gode samling skulle være en god hjelp ved innarbeidelsen av de enkelte kapitler. Her savner jeg facit til oppgavene. Det hadde utvilsomt vært en fordel å ha med.

Jeg vil karakterisere foreliggende utgave som en meget god lærebok.

Johs. Østvold

H. GASK: *Ordinära differentialekvationer*. 2. uppl. (Lunds Matematiska Sällskaps kompendier 3.) Lund, 1956. 45 s. Sv. kr. 8.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 109.)

Gennem dette lille hefte kan man paa behagelig maade stifte bekendtskab med elementer af de sædvanlige differentiaalligningers teori. I indledningen omtales praktiske problemer, der fører til differentiaalligninger, og eksistens- og entydighedsspørgsmaalet vedrørende løsningerne til en

differentialligning af n^{te} orden anskueliggøres. Kapitel 1 behandler differentialligninger af første orden og giver nogle fysiske anvendelser. I kapitel 2, der omhandler de lineære differentialligninger af n^{te} orden med konstante koefficienter, startes med en helt elementær behandling af tilfældet $n=2$, der er særlig vigtigt for anvendelserne. I kapitel 3 bevises de klassiske entydigheds- og eksistenssætninger. Heftet slutter med 45 øvelseseksempler og en tilhørende facitliste.

Erling Følner

H. HADWIGER: *Altes und Neues über konvexe Körper*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus, 3.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1955. 116 S. Brosch. SFr. 13.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT 3 (1955), s. 116.)

Blandt de grene af geometrien, i hvilke man med relativt simple hjælpemidler kan nå interessante og dybtgående resultater, indtager de konvekse figurers teori en fremtrædende plads. Mange anskuelige og fængslende problemer vedrørende plane konvekse figurer og konvekse legemer tillader ret elementære, men ingenlunde trivielle løsninger. Dette område er let tilgængeligt gennem en række bøger, af hvilke bør nævnes: W. Blaschke's »Kreis und Kugel« (1916; ny udgave 1956) og T. Bonnesen's »Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes« (1929), endvidere to russiske bøger, nemlig en af L. Lusternik (1941) og en af I. M. Jaglom og V. G. Boltjanskij (1951; en tysk udgave af denne mest elementære behandling, i form af opgaver, er annonceret), og endelig for en del af indholdets vedkommende L. Fejes Tóth's »Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum« (1953). Til disse fremstillinger med hver sit særpræg følger sig nu Hadwigers lille monografi. Den tager et vel afgrænset emne inden for teorien op til indgående behandling og fører det frem til de nyeste resultater og åbne spørgsmål.

Til et konvekst legeme knyttes som bekendt mangfoldige måltal, som ikke ændres ved flytninger af legemet, f. eks. volumen, overfladeareal, diameter (maximalafstanden mellem to af legemets punkter), den omskrevne kugles radius o. s. v. En central del af de konvekse legemers teori beskæftiger sig med opgaver, der falder ind under følgende almindelige problemstilling: Man betragter alle konvekse legemer, for hvilke et (eller flere) måltal antager en given værdi (givne værdier). Man spørger, hvilke indskrænkninger dette medfører for værdierne af et bestemt andet måltal. Specielt interesserer man sig for dette måltals eventuelle største og mindste værdi og de legemer blandt de betragtede, for hvilke disse værdier antages. Resultaterne former sig som uligheder mellem måltal. Betegner V voluminet og F overfladearealet af et legeme, udsiger f. eks.

den isoperimetriske ulighed $36\pi V^2 \leq F^3$, at voluminet af et legeme med givet overfladeareal F er højst lig med voluminet af kuglen med samme overfladeareal. Det centrale emne i Hadwigers bog er netop den nævnte problemstilling for de tre »fundamentale måltal« V , F og M . Her betegner M , for legemer med kontinuert krummet overflade, overfladeintegralet over middelkrumningen. Definitionen kan udvides til vilkårlige konvekse legemer, hvor altså f. eks. hjørner og kanter er tilladt; M viser sig i alle tilfælde at være 2π gange middelværdien af afstanden mellem to parallelle støtteplaner. Disse tre måltals særlige betydning for teorien beror først og fremmest på deres optræden i en formel for voluminerne af et konvekst legemes såkaldte parallellegemer. Er K et konvekst legeme, og ϱ et positivt tal, forstås ved K 's ydre parallellegeme K_ϱ i afstanden ϱ foreningsmængden af alle kugler med radius ϱ , hvis centrer hører til K . For voluminet af K_ϱ har man da Steiners formel

$$V_\varrho = V + F\varrho + M\varrho^2 + \frac{4}{3}\pi\varrho^3.$$

Forfatteren skriver det sidste led $\frac{4}{3}C\varrho^3$, idet han af formelle grunde som fjerde måltal indfører overfladeintegralet C af den Gaussiske krumning, hvilket for konvekse legemer jo altid har værdien 4π . En karakterisering af disse fire fundamentale måltal, som yderligere understreger deres særstilling, skyldes Hadwiger selv. Er $X(K)$, hvor K betegner et vilkårligt konvekst legeme, et måltal, der afhænger monotont af legemet og er additivt, da er det en linearkombination af de fire fundamentale måltal med ikke-negative konstante koefficienter. [$X(K)$ siges at være monoton, når $X(K') \leq X(K)$, dersom K' er indeholdt i K , og at være additiv, når $X(K) = X(K_1) + X(K_2) - X(K_{12})$, hvor K_1 og K_2 betegner de dellegemer, hvori K deles af en vilkårlig plan, og K_{12} snitfiguren betragtet som (udartet) konvekst legeme.]

Skønt fremstillingen samler sig om undersøgelsen af de fundamentale måltal, bringer den et meget bredt udsnit af teorien, idet adskillige ældre og nyere hjælpemidler og metoder til behandling af denne problemkreds er medtaget. I første kapitel giver forfatteren en oversigt over begrebsdannelser og resultater vedrørende konvekse legemers almene egenskaber, deriblandt støtteplan og støttefunktion, Minkowskis addition af legemer (desværre med en fra den sædvanlige afvigende og uheldig betegnelse, nemlig $\times$ i stedet for $+$, der reserveres til betegnelse af foreningsmængder, skønt $\cup$ er kommet i brug herfor), parallellegeme, mål for afvigelsen mellem to konvekse legemer, kontinuitet af måltal. Andet kapitel indeholder sætninger om approksimation af konvekse legemer ved polyedre, om Steiners symmetrisering og især om effekten af en følge af symmetriseringer. Tredie og fjerde kapitel udgør bogens kerne. Her indføres de

fire fundamentale måltal, og der bevises bl. a. den omtalte karakterisering af dem. Dernæst behandles på forskellige måder ulighederne mellem dem, nemlig Minkowskis uligheder $M^2 \geq 4\pi F$ og $F^2 \geq 3MV$, den isoperimetriske og $M^3 \geq 48\pi^2 V$, der begge følger umiddelbart af de to første, forskellige skærpelser af disse uligheder, diskussioner af lighedstegnene og, tildels som hjælpemiddel, Brunn-Minkowskis sætning. Blaschke har bemærket, at der må bestå endnu en, hidtil ukendt, ulighed mellem V , F og M . En diskussion af dette spørgsmål og de opnåede resultater afslutter fjerde kapitel. Det femte og sidste bringer en omtale af de mangfoldige måder, på hvilke de fundamentale måltal optræder i integralgeometrien.

Bogens stil er knap. En del beviser er ret kortfattede og kræver et ikke helt ringe medarbejde fra læserens side, hvilket dog lettes væsentlig ved forfatterens prægnante og klare formuleringer. Læsere uden forkundskaber på området vil utvivlsomt savne en omtale af de tilsvarende, betydelig simplere, forhold for konvekse områder i planen, og det må derfor tilrådes dem at begynde studiet med en af de ovenfor nævnte bøger. Den, der ønsker at trænge dybere ind i emnet og at stifte bekendtskab med de frugtbare ideer, som det er blevet beriget med i den senere tid, vil få et særdeles rigt udbytte af bogen og ved sammenligning med ældre fremstillinger og med afhandlinger konstatere mange smukke nye drejninger og forenklinger.

W. Fenchel

PAUL LORENZEN: *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 78.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 7 + 298 S., 1 Fig. DM 38.40, ganzl. DM 42.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT 3 (1955), s. 171–172.)

Denne boka representerer et nokså sjeldent fenomen innen matematisk litteratur. Den er nemlig et vitenskapelig originalarbeide samtidig som den i stor utstrekning må sies å være forståelig selv for ikke-spesialister.

Det forfatteren vil gi er intet mindre enn en ny begrunnelse av de sentrale deler av matematikken som aritmetikk, algebra, topologi og analyse. Boka er delt i tre deler med overskriftene »Logik«, »Konkrete Mathematik« og »Abstrakte Mathematik«. Det er vanskelig på noen få linjer å beskrive nøyaktig hvori Lorenzens nye begrunnelse består og hvor den skal plasseres i forhold til tidligere retninger i grunnlagsforskningen. På mange måter kommer den kanskje nærmest til Skolems rent »finite« begrunnelsesmåte, slik denne kom til uttrykk i hans rekursive aritmetikk. Men Lorenzen er ikke så radikalt »finit« som Skolem var,

idet Lorenzen f. eks. tillater kvantorer. Den del av matematikken som Lorenzens undersøkelser angår er bare de områder som kan fremstilles i ren »kalkyl«-form. Det vil si den del hvor matematikerens virksomhet kan tenkes redusert til en skjematisk operering med figurer (symboler på et stykke papir) etter ganske bestemte regler. I bokens første kapitel er dette beskrevet utførlig i tilknytning til en rekke enkle eksempler på kalkylen. Nettopp fordi disse kalkylene ikke har noen vanlig matematisk tolkning og er så meget enklere enn en ordinær matematisk kalkyl, er de utmerket egnet til å belyse den rent formalistiske betraktningssmåten som kommer til uttrykk ved det Lorenzen kaller »schematisches Operieren«.

I annen del, »Konkrete Mathematik«, behandles i det vesentlige innføringen av tallbegrepet. De naturlige tall fremkommer i Lorenzens teori ved betraktning av »lengden« av symbolrekker og ved abstraksjon utfra symbolrekker med like mange ledd. Innførelsen av rasjonale tall byr ikke på noe nytt. Men for å komme frem til de reelle tall og dermed til analysen trengs først en definisjon av mengdebegrepet, og her skiller Lorenzens definisjon seg radikalt fra den mer ukritiske Cantorske definisjon. Lorenzens mengdebegrep baserer seg på en teori for »Sprachschichten«, som blant annet leder til at en i absolutt forstand i Lorenzens oppbygging i det hele ikke får å gjøre med annet enn tellbare mengder. Det bemerkelsesverdige er at dette ikke synes å forhindre oppbyggingen av analysen i noen vesentlig grad. Dette blir vist i detalj f. eks. når det gjelder derivasjon, målteori og Lebesgue-integrasjon. Denne annen del er utvilsomt den mest tungleste i boka. Når det gjelder den tredje del som viser hvorledes den moderne matematikk — spesielt algebra og topologi — innordnes i Lorenzens system, er denne relativt lettlest, spesielt for en som er en del orientert om disse tingene på forhånd.

Det er en ytterst interessant og til dels oppsiktsvekkende bok Lorenzen har skrevet. Den vil selvsagt først og fremst interessere logikk-spesialister, men den inneholder også meget interessant stoff for en vanlig matematiker, endog for en som ikke er noen spesialist på noe felt.

K. E. Aubert

MOTTATTE BØKER

Joe Kennedy Adams: *Basic statistical concepts*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 16+304 pp. sh. 41/6.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 102.)

Finite populations and their distributions 1-16 * Sampling from a finite population 17-29 * Statistical inference 30-49 * Parameters and statistics 50-63 * Hypergeometric and binomial distributions 64-74 * Poisson distributions 75-81 * Discrete distributions 82-83 * Continuous distributions 84-95 * Normal distributions 96-122 * Chi square 123-142 * »Student's« t distributions 143-151 * Bivariate distributions 152-179 * F distributions and the analysis of variance 180-203 * Non-parametric statistics 204-211 * References 213-214 * Appendix A. Some hints on how to ask questions of mathematical statisticians 217-218 * Mathematical appendix 219-254 * Miscellaneous tables 255-276 * Tables of sampling distributions 277-288 * Glossary 289 * Answers to exercises 290-298 * Index 299-304.

Wilhelm Blaschke: *Kreis und Kugel*. Zweite, verbesserte Aufl. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1956. 8+167 S., 27 Fig. Ganzl. DM 18.60.

Die Minimumeigenschaft des Kreises 1-42 * Die Minimumeigenschaft der Kugel 43-85 * Ergebnisse über konvexe Körper von Schwarz, Brunn und Minkowski 86-112 * Neue Aufgaben über Extreme bei konvexen Körpern 113-145 * Ausblick auf weitere Untersuchungen über konvexe Körper 146-164 * Sachverzeichnis, Namenverzeichnis 165-167.

H. Gask: *Ordinära differentialekvationer*. 2. uppl. (Lunds Matematiska Sällskaps kompendier 3.) Lund, 1956. 45 s. Sv. kr. 8.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 104.)

Inledning 1-8 * Differentialekvationer av första ordningen 9-17 * Lineära differentialekvationer med konstanta koefficienter 18-29 * Satser om lösningars existens och entydighet 30-38 * Övningsexempel 39-42 * Svar till övningsexemplen 43-45.

Wolfgang Gröbner: *Matrizenrechnung*. (Blaschke, Math. Einzelschriften 4.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 249 S., 9 Fig. DM 23.00.

Vektoren und Matrizen 9-24 * Äusseres Produkt. Determinanten 24-64 * Lineare Algebra 64-98 * Fortsetzung der Determinantentheorie 98-126 * Rationale

Funktionen einer quadratischen Matrix 127–167 * Äquivalenz und Ähnlichkeit 167–204 * Kongruenz und Hauptachsenprobleme 204–241 * Namen- und Sachverzeichnis 242–249 * Literaturverzeichnis 249.

Wolfgang Haack: *Elementare Differentialgeometrie*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, math. Reihe, 20.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1955. 8+239 S., 12 Fig. Brosch. SFr. 18.70, ganzl. SFr. 22.00.

Vektoren und Bewegungsinvarianten 1–8 * Kurven im Raum 8–39 * Einparametrische Dreibeinscharen. Streifen 39–48 * Elemente der Flächentheorie 48–72 * Abbildungen zweier Flächen aufeinander 72–90 * Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen 90–102 * Geometrie auf der Fläche 102–135 * Minimalflächen 135–145 * Zweidimensionale Dreibeinmannigfaltigkeiten 146–193 * Existenzsätze der Flächentheorie 193–231 * Literaturverzeichnis 232–234 * Sachregister 235–239.

G. Hamel: *Mechanik der Kontinua*. (Herausgegeben von I. Szabó.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1956. 210 S., 65 Fig. Ganzl. DM 29.70.

I. Theorie der idealen Flüssigkeiten: Die Grundlagen 9–26 * Eindimensionale Luftbewegung: Schall und Knall 26–46 * Potentialströmungen ohne freie Oberflächen 46–63 * Ebene Potentialströmungen mit freien Oberflächen 63–75 * Wirbelbewegung idealer Flüssigkeiten (Lagrange und Helmholtz) 75–98 * Zweidimensionale, stationäre Bewegungen kompressibler Flüssigkeiten 98–100 * Die Potentialbewegung 100–122 * II. Zähe Flüssigkeiten: Die Navier-Stokesschen Gleichungen 123–146 * Schleichende Bewegungen 146–157 * Exakte Lösungen 157–170 * Prandtls Grenzschichttheorie 171–179 * Turbulenz 179–188 * III. Über allgemeinere deformierbare Systeme: Elastische Schwingungen 188–206 * Namen- und Sachverzeichnis 207–210.

Handbuch der Physik. Herausgegeben von S. Flügge. Band I: Mathematische Methoden I. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 7+364 S., 37 Fig. Ganzl. DM 72.00. Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuchs: Subskriptionspreis DM 57.60.

Josef Lense: Grundbegriffe der klassischen Analysis, gewöhnliche Differentialgleichungen, Funktionentheorie (Reelle Funktionen, Differential- und Integralrechnung, unendliche Reihen, Funktionen von komplexen Veränderlichen, gewöhnliche Differentialgleichungen, das Lebesguesche Integral 1–89 * Josef Lense: Partielle Differentialgleichungen 90–119 * Josef Lense: Elliptische Funktionen und Integrale 120–146 * Josef Meixner: Spezielle Funktionen der mathematischen Physik (Lösungen von Differential- und Funktionalgleichungen, Differenzgleichungen, die Schwingungsgleichung, Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen) 147–217 * Friedrich Schlögl: Randwertprobleme (Orthogonale Funktionensysteme, lineare Integralgleichungen, Variationsrechnung, Randwertprobleme bei Differentialgleichungen der Physik) 218–352 * Sachverzeichnis (Deutsch-Englisch) 353–358 * Subject Index (English-German) 359–364.

F. B. Hildebrand: *Introduction to numerical analysis*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1956. 10+511 pp. sh. 64/-.

Introduction 1-34 * Interpolation with divided differences 35-59 * Lagrangian methods 60-90 * Finite-difference interpolation 91-127 * Operations with finite differences 128-187 * Numerical solution of differential equations 188-257 * Least-squares polynomial approximation 258-311 * Gaussian quadrature and related topics 312-367 * Approximations of various types 368-423 * Numerical solution of equations 424-485 * Appendix 486-505 * Index 507-511.

F. Hirzebruch: *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 9.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 8+165 S. DM 30.80.

Einleitung 1-10 * Vorbereitungen 10-73 * Die Thomsche Algebra. Anwendungen 73-88 * Eigenschaften des Toddschen Geschlechtes und seiner Verallgemeinerungen 88-110 * Der Satz von Riemann-Roch für algebraische Mannigfaltigkeiten 110-157 * Literatur 158-160 * Namen- und Sachverzeichnis 161-165.

Bruce E. Meserve: *Fundamental concepts of geometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Cambridge (Mass.), 1955. 9+321 pp. \$ 7.50.

Foundations of geometry 1-24 * Synthetic projective geometry 25-68 * Coordinate systems 69-102 * Analytic projective geometry 103-149 * Affine geometry 150-184 * Euclidean plane geometry 185-218 * The evolution of geometry 219-267 * Noneuclidean geometry 268-287 * Topology 288-310 * Bibliography 311 * Index 313-321.

Progress in nuclear energy. Editors: R. A. Charpie, J. Horowitz, D. J. Hughes and D. J. Littler. (Physics and Mathematics Series, 1.) Pergamon Press Ltd., London, 1956. 10+398 pp. sh. 84/-.

J. A. Harvey and J. E. Sanders: Summary of data on the cross sections and neutron yields of U^{233} , U^{235} and Pu^{239} 1-54 * P. A. Egelstaff and D. J. Hughes: Resonance structure of U^{233} , U^{235} and Pu^{239} 55-90 * H. A. Bethe: Theoretical analysis of neutron resonances in fissile materials 91-106 * L. Cranberg, R. B. Day, L. Rosen, R. F. Taschek and M. Walt: Techniques for measuring elastic and non-elastic neutron cross sections 107-160 * S. Bernstein and E. C. Smith: The cross section of the fission product poison Xe^{135} as a function of energy 161-178 * R. L. Macklin and H. S. Pomerance: Resonance capture integrals 179-190 * G. R. Keppin: Delayed neutrons 191-226 * Dixon Callihan: Homogeneous critical assemblies 227-250 * J. Codd, L. R. Shepherd and J. H. Tait: The physics of fast reactors 251-310 * S. M. Feinberg: Heterogeneous methods for calculating reactors 311-342 * H. Hurwitz, Jr. and R. Ehrlich: Highly enriched intermediate and thermal assemblies 343-392 * Index 393-398.

W. W. Sawyer: *Prelude to mathematics*. (Pelican Books A 327.) Penguin Books Ltd., Harmondsworth, 1955. 214 pp. sh. 2/6.

On beauty and power 7–18 * What are the qualities of a mathematician? 19–30 * Pattern in elementary mathematics 31–46 * Generalization in elementary mathematics 47–58 * On unification 59–64 * Geometries other than Euclid's 65–88 * Algebra without arithmetic 89–102 * Matrix algebra 103–124 * Determinants 125–142 * Projective geometry 143–166 * On apparent impossibilities 167–182 * On transformations 183–190 * Finite arithmetics and geometries 191–200 * On groups 201–214.

A. Spitzbart—R. H. Bardell: *Plane trigonometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Cambridge (Mass.), 1955. 9+205 pp. \$ 3.75.

The trigonometric functions 1–24 * Circle relations. Right triangles 25–48 * Graphs of the trigonometric functions. Inverse trigonometric functions 49–78 * Properties of the trigonometric functions 79–115 * Logarithms 116–131 * The solution of oblique triangles 132–158 * Complex numbers 159–174 * Answers to exercises 175–187 * Tables 190–202 * Index 203–205.

Karl Strubecker: *Einführung in die höhere Mathematik*. Band I: Grundlagen. Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 15+821 S., 338 Fig. DM 36.00.

I. Zahlen und Zahlenrechnen: Reelle Zahlen, ungenaue Zahlen 3–23 * Das Rechnen mit ungenauen Zahlen 24–53 * Elementare Fehlerrechnung 53–71 * Elementare Zahlentheorie 71–134. II. Elementare algebraische Funktionen: Lineare und quadratische Funktionen. Komplexe Zahlen 135–179 * Geometrische Anwendungen 179–198 * Ebene Vektorrechnung 198–222 * Polynome und algebraische Gleichungen 222–289 * Interpolation 290–321 * Rationale und algebraische Funktionen 321–387 * Affine und projektive Geometrie der Ebene 387–461. III. Grenzwerte. Unendliche Reihen: Grenzwerte 462–505 * Unendliche Reihen 505–573. IV. Elementare transzendente Funktionen. Stetige Funktionen. Umkehrfunktionen: Exponentialfunktion, Kreisfunktionen und Hyperbelfunktionen 574–651 * Stetige Funktionen 651–725 * Umkehrfunktionen 725–763 * Der logarithmische Rechenstab. Logarithmische Funktionspapiere 763–811 * Namen- und Sachverzeichnis 812–821.

B. L. van der Waerden—E. Nievergelt: *Tafeln zum Vergleich zweier Stichproben mittels X-Test und Zeichentest*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956. 4+34 S. DM 4.80.

I. Theoretische Grundlagen: Der X-Test 1–11 * Der Zeichentest 11–12 * Die Berechnung der Tafeln 13–14 * II. Anwendungsvorschriften 14–19 * III. Tafeln 21–29 * IV. Application of the tests 30–34.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 82–84 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Holmen, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. august 1956.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

82. Beräkna värdet av determinanten

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \sin \varphi & \sin 2\varphi & \dots & \sin (n-1)\varphi \\ \sin \varphi & 0 & \sin \varphi & \dots & \sin (n-2)\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin \varphi & 0 & \dots & \sin (n-3)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin (n-1)\varphi & \sin (n-2)\varphi & \sin (n-3)\varphi & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

A. Pleijel

83. La

$$f(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n \quad (a_0 = 1)$$

være et polynom med nullpunktene $r_1, r_2, \dots, r_n$. Vis at polynomet

$$F(x) = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n A_n$$

vil ha nullpunktene $r_1^3, r_2^3, \dots, r_n^3$, dersom

$$A_r = \sum_{\substack{i+j+k=3r \\ i \leq j \leq k \leq n}} A_{ijk} a_i a_j a_k, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

For $i < j < k$ er $A_{ijk} = 6$ hvis $i \equiv j \equiv k \pmod{3}$, mens $A_{ijk} = -3$ i de øvrige tilfelle. Videre er $A_{iik} = 3$, $A_{iii} = 1$.

R. Tambs Lyche

84. La p og q være to gitte positive tall. For $u > 0$ defineres en tallfølge $\{c_n\}$ av positive tall ved

$$c_1 = u, \quad c_{n+1}^2 = pc_n + \frac{q}{c_n}.$$

Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \xi,$$

hvor ξ er den positive rot i likningen

$$\xi^3 = p\xi^2 + q.$$

R. Tambs Lyche

85. I et tetraeder betegnes lengdene av tre sidekanter som går ut fra et av hjørnene, med a , b og c , og de tre vinklene mellom de samme kantene med x , y og z . Vis at tetraedrets volum blir

$$\frac{1}{6}abc \sqrt{1 + 2 \cos x \cos y \cos z - (\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z)}.$$

Olav Bjørn Skaar

86. Prove

$$a^{n\varphi(2n)} - 1 \equiv 0 \pmod{4n^2},$$

where $n \geq 2$, $(a, 2n) = 1$, and φ denotes Euler's function.

Martin G. Beumer

87. a) Visa att orten för konstant synvinkel vid en parabel är en hyperbelgren.

b) Sök orten för lika stora synvinklar vid två parabler.

Hj. Tallqvist

88. Vis at for alle naturlige tall m og n er

$$\frac{m(m+1)(m+2) \dots (m+n)}{n!}$$

et helt tall delelig med det minste felles multiplum for m , $n+1$ og $m+n$.

89. Bevis identiteten

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{i}.$$

LØSNINGER

37. Sett

$$s_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \quad \sigma_k = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \quad (s_0 = \sigma_0 = 0).$$

Bevis identiteten

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu}^2 (\sigma_{\nu} + \sigma_{n-\nu} + 2(s_{\nu} - s_{n-\nu})^2) = 6 \binom{2n}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu^2} \binom{2\nu}{\nu}.$$

R. Tambs Lyche

Løsning: Idet n og ν er hele tall, $0 \leq \nu \leq n$, definerer vi $\binom{n}{\nu, x}$ ved

$$\binom{n}{\nu, x} = \frac{n!}{(1+x)(2+x) \dots (\nu+x)(1-x)(2-x) \dots (n-\nu-x)} \text{ for } 0 < \nu < n,$$

og

$$\binom{n}{0, x} = \binom{n}{n, -x} = \frac{n!}{(1-x)(2-x) \dots (n-x)}.$$

Da blir $\binom{n}{\nu, 0} = \binom{n}{\nu}$ en vanlig binomialkoeffisient.

Av definisjonen følger

$$(1) \quad \binom{n}{\nu, x} = \frac{n}{\nu+x} \binom{n-1}{\nu-1, x} \quad \text{for } \nu > 0,$$

og

$$(2) \quad \binom{n}{\nu, x} = \binom{n}{n-\nu, -x}.$$

Idet $p \geq 0$ er et helt tall, setter vi

$$(3) \quad S_{n,p} = \sum_{\nu=0}^n \left[\binom{n}{\nu, x}^2 (\nu+x)^p + \binom{n}{\nu, -x}^2 (\nu-x)^p \right].$$

Vi deriverer $S_{n,0}$ to ganger, og ser da at venstre side av oppgavens identitet blir

$$\Sigma_n = \frac{1}{4} [S_{n,0}']_{x=0}.$$

I (3) setter vi $\nu = n - \mu$ og anvender (2). Vi får da

$$S_{n,p} = \sum_{\mu=n}^0 \left[\binom{n}{\mu, -x}^2 (n - (\mu - x))^p + \binom{n}{\mu, x}^2 (n - (\mu + x))^p \right],$$

eller

$$(4) \quad S_{n,p} = \sum_{q=0}^p (-1)^{p-q} \binom{p}{q} n^q S_{n,p-q}.$$

For $p \geq 2$ anvender vi (1) på (3), og får

$$S_{n,p} = x^p \left[\binom{n}{0, x}^2 + (-1)^p \binom{n}{0, -x}^2 \right] + n^2 \sum_{\nu=1}^n \left[\binom{n-1}{\nu-1, x}^2 (1+\nu-1+x)^{p-2} + \binom{n-1}{\nu-1, -x}^2 (1+\nu-1-x)^{p-2} \right].$$

Setter vi her $\nu=1+\mu$, så får vi

$$(5) \quad S_{n,p} = x^p \left[\binom{n}{0, x}^2 + (-1)^p \binom{n}{0, -x}^2 \right] + n^2 \sum_{r=0}^{p-2} \binom{p-2}{r} S_{n-1,r}.$$

Ligning (4) gir for $p=1$ og for $p=3$:

$$(6) \quad 2S_{n,1} = nS_{n,0}$$

$$(7) \quad 2S_{n,3} = n^3 S_{n,0} - 3n^2 S_{n,1} + 3n S_{n,2}.$$

Ligning (5) gir for $p=2$ og for $p=3$:

$$(8) \quad S_{n,2} = x^2 \left[\binom{n}{0, x}^2 + \binom{n}{0, -x}^2 \right] + n^2 S_{n-1,0}$$

$$(9) \quad S_{n,3} = x^3 \left[\binom{n}{0, x}^2 - \binom{n}{0, -x}^2 \right] + n^2 (S_{n-1,0} + S_{n-1,1}).$$

Ligning (6) gir, når n byttes om med $n-1$:

$$(10) \quad 2S_{n-1,1} = (n-1)S_{n-1,0}.$$

Av ligningene (6) til (10) finner vi etter eliminasjon av $S_{n,1}$, $S_{n,2}$, $S_{n,3}$ og $S_{n-1,1}$, rekursjonsformelen

$$(11) \quad S_{n,0} = \frac{6x^2}{n^2} \left[\binom{n}{0, x}^2 + \binom{n}{0, -x}^2 \right] - \frac{4x^3}{n^3} \left[\binom{n}{0, x}^2 - \binom{n}{0, -x}^2 \right] + \frac{2n(2n-1)}{n^2} S_{n-1,0}.$$

Når vi her deriverer to ganger og derpå setter $x=0$, får vi

$$\Sigma_n = \frac{6}{n^2} + \frac{2n(2n-1)}{n^2} \Sigma_{n-1}.$$

Ved induksjon bevises da lett at Σ_n er lik høyre side av oppgavens identitet.

Den metode som er brukt til å utlede (11) er hentet fra en artikkel av Tor B. Staver i Norsk Matematisk Tidsskrift, 4 hefte 1947.

Otto Marstrand

50. Den ubestemte ligning $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ er selvsagt alltid løsbart når f. eks. $a + b = c$, med $x = y = 1$, $z = -1$. Vis at ligningen alltid er mulig for enhver modul (smlgn. NMT 3 (1955), s. 52–53), når

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

altså når koeffisientene er *Pythagoreiske tall*.

Ernst S. Selmer

Da ingen løsninger er innkommet, gjengir vi oppgavestillerens eget forslag:

Løsning: Vi må undersøke forholdene modulo 9 og modulo de primtall $r = 3h + 1$ som går opp i koeffisientene. Vi kan forutsette at a , b og c er parvis innbyrdes primiske.

La $r|c$; vi setter $x = a$, $y = -b$, z vilkårlig, og får

$$ax^3 + by^3 + cz^3 \equiv a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = c^2(a^2 - b^2) \equiv 0 \pmod{r},$$

altså er ligningen mulig modulo r .

Vi kunne også ha satt $x = b$, $y = a$, altså

$$ax^3 + by^3 + cz^3 \equiv ab^3 + ba^3 = ab(a^2 + b^2) \equiv 0 \pmod{r}.$$

Dette gir imidlertid ingen egentlig ny løsning, for p. g. a. $r|c^2 = a^2 + b^2$ er

$$\frac{a}{-b} \equiv \frac{b}{a} \pmod{r}.$$

Hvis $r|a$ (f. eks.), setter vi på samme måte $y = b$, $z = -c$, eller også $y = c$, $z = -b$.

Forholdene modulo 9:

Da

$$t^2 \equiv 0 \text{ eller } +1 \pmod{3}$$

ettersom

$$t \equiv 0 \text{ eller } \pm 1 \pmod{3},$$

ser vi av $a^2 + b^2 \equiv c^2 \pmod{3}$ at vi må ha $3|a$ eller $3|b$, men $3 \nmid c$. La f. eks.

$$3|a, 3 \nmid b, 3 \nmid c, \text{ altså } b^2 \equiv c^2 \pmod{9}.$$

Men herav følger $b \equiv \pm c \pmod{9}$, og den gitte ligning er mulig modulo 9 med

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 1, \quad z \equiv \mp 1 \pmod{3}.$$

74. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}.$$

Otto Marstrand

Løsning: For at skaffe en rækkeudvikling af $f(x) = (\text{Arc sin } x)^2$ dannes

$$f'(x) = 2 \text{Arc sin } x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''(x) = 2 \text{Arc sin } x \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{1-x^2}.$$

Dette viser, at $f(x)$ er det partikulære integral til differentialligningen

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2,$$

der bestemmes ved linieelementet $(x, y, y') = (0, 0, 0)$.

Sættes

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

fås

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2)a_{k+2} - k^2 a_k] x^k = 2,$$

der med $(x, y, y') = (0, 0, 0)$ giver

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{og} \quad a_{2n} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n-2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2n}.$$

Herefter må

$$(\text{Arc sin } x)^2 = x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n-2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2n} x^{2n},$$

såfremt potensrækken er konvergent. Dette er, da den har en kvotient-række til overrække, ialtfald tilfældet for $|x| < 1$.

Sættes $x = \frac{1}{2}$, fås

$$\frac{\pi^2}{36} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}}.$$

Hans-Otto Tønder

Også løst av Rolv Rasmussen, Ragnar Johs. Solvang og K. Hove Storhoug.

75. Der er givet en konveks firkant $ABCD$ med siderne $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$ og $d=DA$ samt diagonalerne $e=AC$ og $f=BD$. Vis, at firkanten da og kun da kan indskrives i en cirkel, når

$$\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Fr. Fabricius-Bjerre

Løsning: Da firkanten er konveks, vil f avta når e vokser og a, b, c og d er konstante. Da vokser e/f når e vokser, og kan derfor ikke ha verdien $(ad+bc)/(ab+cd)$ i mer enn det tilfellet som er identisk med følgende:

Når firkanten er innskrevet i en sirkel, er $\sin A = \sin C$, og $\sin B = \sin D$. Av likningene for firkantens flateinnhold,

$$\frac{1}{2}(ad+bc) \sin A = \frac{1}{2}(ab+cd) \sin B,$$

og for sirkelens diameter, $e/\sin B = f/\sin A$, får en $e/f = (ad+bc)/(ab+cd)$.

H. Källingberg

Også løst av Chr. Andersen, C. Stan Andresen, Jarl Chr. Dyekjær, K. Zeuthen Heidam, Henrik Meyer, Flemming P. Pedersen, A. V. Peljo og Hans Rischel.

RESULTAT AV PRISTÄVLINGEN FÖR SVENSKA GYMNASISTER

(Uppgifterna i NMT 3 (1955), s. 180–181.)

Sammanlagt inkommo 13 svar, därav ett utom tävlan. Första och andra pris delas lika mellan Ulf Ottoson, Kommunala gymnasiet, Malmö och Rolf Hallström, Högre allmänna läroverket för gossar å Södermalm, Stockholm, vilka alltså erhålla 75 kronor vardera. Dessutom utdelas extrapriser i form av gratisprenumerationer på NMT till följande: Ivo Tammaru, Katedralskolan, Lund och Torsten Ehlin, hal, Falun (2 årgångar vardera) samt Olof Dahl, Vasa hal, Göteborg, Lars Otto Nilsson, hal för gossar, Malmö, Tord Holmstedt, hal för gossar, Hälsingborg och Johan Martin-Löf, hal å Östermalm, Stockholm (1 årgång vardera).

SUMMARY IN ENGLISH

ÅKE PLEIJEL: *Ivar Fredholm*. (Swedish.)

A biography of the Swedish mathematician Ivar Fredholm (1866–1927), in connection with the publication of his collected papers by the Mittag-Leffler Institute in Stockholm. The article is partly based on the paper by Nils Zeilon: "Ivar Fredholm" (Acta Math. 54, 1930). In addition to an account of Fredholm's life, the main ideas of his fundamental results in the theory of integral equations are explained.

JOHN OLAV STUBBAN: *Axiomatic foundation of the euclidean geometry*. (Norwegian.)

After a few historical remarks on Euclid's original system of axioms, it is stressed that every such system should consist of *independent* and *consistent* axioms. As an example, Hilbert's famous system of axioms for the (plane) euclidean geometry is given in full.

In addition to the axioms, there are certain basic elements and relations (chosen differently in different systems) that can not be defined. Within the same system, the basic elements (e.g. point and line) and relations (congruence etc.) may be given a different *interpretation*. As an example, Hilbert's system of axioms is "translated" by a transformation of reciprocal radii of the ordinary euclidean plane.

A *non-euclidean* geometry results when one or more axioms of the euclidean system are deleted or modified. A famous example is the *hyperbolic* geometry of Gauss, Lobatsjefski and Bolyai, where the parallel-axiom is deleted. A few remarks concerning this geometry conclude the expository article.

JOHANNES LOHNE: *Graphical illustration of summation formulae.* (Norwegian.)

The well-known formulae for $\sum_{x=1}^n x^m$ ($m = 1, 2, 3$) are illustrated graphically in figs. 1-3 pp. 85-86.

LAMEK HULTHÉN: *What is operational analysis?* (Swedish.)

Operational analysis (OA) is defined as a scientific method for providing executive departments with a quantitative basis for their decisions. It is important to establish the *purpose* of the operation, a *measure* for its effectiveness, a *method* to study how different factors influence the effectiveness, and finally *recommendations* for improvement.

The following examples of OA are treated: 1° U-boat warfare, especially the optimal size of convoys to minimize losses and/or waiting time in harbour. During the last war, convoy losses were much reduced by increasing the size of each convoy. 2° Blackett's "method of variation", estimating the size of each partial derivative. 3° William's analysis, during the last war, of aircraft attack on submarines. The effect of depth charges was considerably increased by detonation on a much smaller depth. 4° Lanchester's " n^2 -law" of warfare: The effectiveness of a force in an artillery duel is really proportional to the *square* of its armed strength. "Nelson at Trafalgar" is given as an example. 5° An application of OA to traffic problems is mentioned. The rate of car accidents must be expected to grow much faster than the number of cars in an area. 6° The author reports of certain tests on aircraft detection by sight, performed by the Swedish airforce. The probability of detection turns out to be greater in Summer than in Winter (fig. 6 p. 99), in spite of almost identical visibility conditions. The difference is explained by the winter-caps, which reduced the possibility of additional sound-detection.