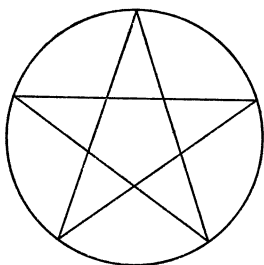


NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 4



OSLO 1956

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Suomen matematiikan ja fysiikan opettajien liitto – Finlands matematik- och fysiklärarförbund.

Íslenska stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

REDAKSJON:

Karl Dagerholm, David Fog, Carl-Erik Fröberg,

Regnar Norgil, E. J. Nyström, Kay Piene, Hans Rådström,

Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.

Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSE:

Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

TANKER OM TRE VIDENSKABER

N. E. NØRLUND

Foredrag holdt ved et fællesmøde i Dansk Matematisk Forening
og Dansk Geofysisk Forening i anledning af professor Nørlunds 70-års fødselsdag.

Jeg vil begynde med at takke de to indbydende foreninger for den venlige opfordring til at tale her i aften.

De grene af videnskaben, som jeg i særlig grad har haft lejlighed til at beskæftige mig med, er astronomien, matematiken, geodæsien og til dels også fysiken, for så vidt som visse geodætiske målinger har en rent fysisk karakter. Jeg skal tillade mig at sige nogle ord om de tre førstnævnte videnskabers rolle i vor erkendelse.

Intet kan være mere opløftende og betagende end om natten, når himlen er skyfri, at betragte stjernernes vrimmel. Man får en levende følelse af, hvor lille og ubetydelig man selv er, og det kan for nogle være gavnligt. Den franske matematiker Henri Poincaré har skrevet nogle gribende linier om astronomiens rolle, og da det vistnok ikke kan siges bedre, vil jeg tillade mig at gengive dem:

Les Gouvernements et les Parlements doivent trouver que l'Astronomie est une des sciences qui coûtent le plus cher: le moindre instrument coûte des centaines de mille francs, le moindre Observatoire coûte des millions; chaque éclipse entraîne à sa suite des crédits supplémentaires. Et tout cela pour des astres qui sont si loin, qui sont complètement étrangers à nos luttes électorales et n'y prendront vraisemblablement jamais aucune part. Il faut que nos hommes politiques aient conservé un reste d'idéalisme, un vague instinct de ce qui est grand; vraiment je crois qu'ils ont été calomniés; il convient de les encourager et de leur bien montrer que cet instinct ne les trompe pas, et qu'ils ne sont pas dupes de cet idéalisme.

On pourrait bien leur parler de la marine, dont personne ne peut méconnaître l'importance, et qui a besoin de l'Astronomie. Mais ce serait prendre la question par son petit côté.

L'Astronomie est utile, parce qu'elle nous élève au-dessus de nous-mêmes; elle est utile, parce qu'elle est grande; elle est utile, parce qu'elle

est belle; voilà ce qu'il faut dire. C'est elle qui nous montre combien l'homme est petit par le corps et combien il est grand par l'esprit, puisque cette immensité éclatante où son corps n'est qu'un point obscur, son intelligence peut l'embrasser tout entière et en goûter la silencieuse harmonie. Nous atteignons ainsi à la conscience de notre force, et c'est là ce que nous ne saurions acheter trop cher, parce que cette conscience nous rend plus forts.

Det er astronomien, som først har lært os, at der findes love. På grundlag af Tycho Brahes observationer fandt Kepler og Newton den ældste og den simpleste af alle naturlove, som styrer planeternes bevægelser. Her på jorden råder ikke den samme harmoni som i himmelrummet. De fænomener, som vi kan iagttage, er langt mere komplicerede, ofte tilsyneladende modstridende. Når det alligevel er lykkedes til en vis grad at beskrive mange fænomener ved andre love end den Newtonske, har det betydet meget, at man har haft astronomiens ophøjede forbillede at se hen til. Det var denne, som gav os det første eksempel på en differentialligning, som beskriver himmelmekanikens bevægelser. Uden dette eksempel havde videnskabsmændene måske længe tøvet med at tage fat. Under en altid skyet himmel havde det været tifold vanskeligere at kæmpe sig ud af middelalderens mørke og frigøre sig for den aristoteliske filosofis overvældende indflydelse. Det er endvidere værd at lægge mærke til, at i videnskaben finder man aldrig den i det borgerlige liv hyppige vending: Denne lov gælder ikke for Færøerne.

Astronomien har lært os, at naturlovene ikke er lokale, varierende fra et sted til et andet, som de borgerlige love. Naturlovene er evige og uforanderlige. De fjerneste dobbeltstjerner bevæger sig i keglesnit som vore egne planeter.

Jeg overgår nu til en gren af videnskaben, som i forgangen tid på ærefuld måde har været repræsenteret ved vort universitet, men som derefter i et langt tidsrum var uden forbindelse med dette, indtil den i de sidste årtier atter har fået en tilknytning til vor højeste læreanstalt. Jeg tænker på geodæsien, og jeg skal sige nogle ord om denne videnskabs formål og om de bidrag, der fra dansk side er givet til dens udvikling.

Af beretninger fra oldtiden kan vi se, at geodæsien er en af de ældste videnskaber. Vi hører f. ex. om de ægyptiske harpedonapter dvs. tovspændere, der havde som opgave efter Nilens periodiske oversvømmelser at udmåle det frugtbare land for derved at sikre, at hver mand fik det grundstykke, der tilkom ham. Af disse praktiske målinger opstod, siger Herodot, den geometri, som senere kom til Grækenland. I geometrien

har man ved abstraktion simplificeret den praktiske videnskabs opgaver, så at navnet geometri, der betyder jordmåling, er kommet til at betegne en formel videnskab, der har fjernet sig stærkt fra de anvendelser, som den skyldte sin tilblivelse. Som en utaknemlig søn har geometrien i den grad fornægtet sin oprindelse, at den ikke vil vedkende sig de nævnte mere praktiske opgaver, og disse har ikke kunnet finde nogen plads inden for geometriens rammer. Det er da gået omvendt af, hvorledes det plejer at gå, den mindre berømte fader har måttet søge navneforandring, og som betegnelse for de videnskabelige opgaver, jeg nu skal omtale, har man konstrueret et nyt navn *geodæsi*, der betyder jorddeling. Men i geodæsen har man også ved abstraktion simplificeret de praktiske opgaver, og nogle forfattere har ladet sig forlede til at betegne denne videnskab som en abstrakt naturvidenskab.

Man deler geodæsen i to afsnit, som man med en noget uheldig betegnelse kalder den højere og den lavere geodæsi. Indholdet af den sidst nævnte kan kort karakteriseres som en geometrisk beskrivelse af jordens overflade. Denne beskrivelse kan enten gives ved tal eller ved billeder. Man opnår størst nøjagtighed ved den talmæssige beskrivelse, der for et system af udvalgte punkter giver koter og koordinater, f. ex. geografisk længde og bredde eller retvinklede koordinater. En større overskuelighed og en for mange formål fyldestgørende nøjagtighed opnås gennem den billedlige fremstilling ved kort, der giver en projektion af en del af jordens overflade i formindsket målestok. Den tredje dimension, højden over havoverfladen, gengives enten ved niveaukurver, trukket gennem punkter med samme højde, eller ved bakkestreger, toner, skygger, og man har nået en stor kunstnerisk fuldkommenhed i gengivelsen af terrenets relief.

Denne geometriske beskrivelse er imidlertid ikke så let at tilvejebringe, som det ved første øjekast kunne synes, fordi de genstande, der skal afbildes, er så store, at vi ikke kan overse dem, og tillige fordi der i resultatet kræves en ikke ringe nøjagtighed af hensyn til de praktiske anvendelser.

Disse omstændigheder medfører, at der ved de grundlæggende målinger i geodæsen kræves en overmåde stor nøjagtighed på rundt regnet en milliontedel af den størrelse, der måles, medens man i de fleste andre områder af videnskaben som regel er glad ved at opnå en nøjagtighed på et par procent. Man kan angribe de geodætiske problemer på flere forskellige måder, men hvordan man end vender eller drejer dem, så støder man stadigt på denne samme fundamentale kendsgerning, at målenøjagtigheden skal være ca. en milliontedel. Dette bunder dybt i sagens natur, men en sådan nøjagtighed ligger på den yderste grænse af, hvad der kan

realiseres. Den kan kun opnås ved anvendelse af en meget stor omsorg og som resultat af komplicerede beregninger.

Men vi støder også på en anden vanskelighed, som jeg skal illustrere ved et eksempel. Hvis man spørger om, hvor i denne sal dette vandglas befinder sig, så er svaret let at give, thi man behøver blot at måle vandglassets afstand fra væggen i nord og fra væggen i øst samt dets højde over gulvet. Disse tre tal eller koordinater angiver på entydig måde vandglassets plads, og hvis jeg flytter det, så kan man med største lethed genfinde dets tidligere plads ved hjælp af de tre koordinater.

Men hvis jeg nu vælger en genstand i Århus og spørger om dens beliggenhed i forhold til denne sal, så er svaret ikke så let at give, thi nu kan vi ikke umiddelbart måle afstanden til den udvalgte genstand, men må tage vor tilflugt til indirekte metoder, og det fører til en betydelig komplikation.

Vælger vi f. ex. Århus Universitet og spørger, for at simplificere lidt, om dets beliggenhed i forhold til Københavns Universitet, så ligger det nær at svare ved at angive afstanden mellem de to universiteter og forbindelsesliniens retning. Men hvad mener vi i dette tilfælde med afstanden? Er det længden af den rette linie, som forbinder de to universiteter? Nej, thi den går gennem jordens indre og er utilgængelig for direkte måling. Er det den korteste vej på jordens overflade? Åbenbart heller ikke, thi Danmark bugter sig i bakke-dal, og den korteste vejs længde ville i høj grad være afhængig af, hvormange bakker vi tilfældigvis måtte passere.

En tilsvarende vanskelighed møder vi, når vi skal til at forklare, hvad vi mener med retningen af forbindelseslinien mellem de to universiteter. Vi kan ikke måle retningsvinklen direkte, vi må indskyde en række intermediære punkter. Men de retningsvinkler, som kan måles i de intermediære punkter, ligger i forskellige planer. Hvorledes kan vi heraf aflede den søgte retning? Det er indlysende, at vi må have noget fast, til hvilket vi kan henføre de størrelser, som vi kan måle. Det er ikke nok at sige: afstand og retning det ved vi jo så omtrent hvad er. Thi hvis vi vil undgå en yderst farlig fejlphobning, så må vi kunne tillægge disse to fundamentale begreber en ganske præcis mening. For at opnå dette må vi have en *flade*, på hvilken vi kan projicere de punkter, der skal bestemmes.

I det eksempel, som jeg først nævnte, havde vi ingen vanskelighed ved at finde os til rette. Det drejede sig om at lokalisere en genstand i denne sal. Arkitekten har her givet os de fornødne koordinatplaner, nemlig salens vægge og gulv.

Men i det andet eksempel har vi ikke fra naturens hånd fået noget tilsvarende, vi må skabe det ved en abstraktion. Når vi vil stædfæste gen-

stande her på jorden, ligger det nær at henføre dem til jordens overflade. Men denne flade er alt for kompliceret til, at vi kan benytte den som koordinatflade, og forøvrigt er det jo den lavere geodæsis og geografiens opgave at beskrive selve denne overflade. Vi må altså nødvendigvis have noget *andet*, som vi kan henføre den til eller afbilde den på. Når et bjerg angives at være 1000 m højt, så må man komme overens om, hvad det er, bjerget rager 1000 m op over, for at dette udsagn kan få en præcis mening.

Her træder nu den højere geodæsi hjælpende til, idet den ved en abstraktion indfører en ideel jordoverflade, som den virkelige jordoverflade ved projektion afbildes på. Den højere geodæsi er derfor en matematisk disciplin, som handler om denne tænkte flades egenskaber, om længden af en geodætisk linie gennem to punkter på fladen, også kaldet punkternes afstand, om vinkler målt på fladen etc. Den højere geodæsis første opgave er da bestemmelsen af jordens form.

Dette problem fik allerede i oldtiden en foreløbig løsning, idet Pythagoras hævdede, at jorden er en kugle, og Eratosthenes bestemte dennes størrelse. Han havde nemlig bemærket, at ved sommarsolhverv faldt solens stråler lodret ned i en brønd ved Syene, medens de samtidigt i Alexandria dannede en vinkel med vertikalen på $7\frac{1}{2}^\circ$. Afstanden mellem Syene og Alexandria anslog Eratosthenes til 5000 stadier, og han afledte af denne den første *gradmåling* en værdi for jordens radius, der kun afviger 15% fra den sande værdi.

Man havde således i oldtiden en ret god forestilling om jordens form, og dette er så meget mere beundringsværdigt, som påstanden om, at jorden er en kugle, egentlig står i modsætning til det, som den umiddelbare iagttagelse lærer os. Når vi står ved strandbredden og kaster blikket ud over det åbne hav, så ser vi på grund af refraktionen, at horisonten hæver sig op over os, så at vi tilsyneladende befinder os i det dybeste punkt af en hulformet skål. Derfor benyttede man også, navnlig i ældre tid, udtrykket *den høje sø*, the high seas eller altum mare som betegnelse for rum sø. Og i endnu højere grad forekommer jordoverfladen os skålformet, når vi i en flyvemaskine hæver os højt op. Men videnskaben lærer os det modsatte af det vi ser: kugle i stedet for hulform.

Når vi vandrer hen over det faste land, ser vi endvidere, at dette bølgler op og ned, bjerg afveksler med dal på en højst uregelmæssig måde. Alle disse ting som vi ser, den fysiske jordoverflades form i det små, behandles i geografin og topografien. Disse afvekslende former sætter vor fantasi i bevægelse, og de kan henrykke os ved deres skønhed og rigdom, men det er en endnu mere sublim tanke, at det hele også har en form i det store, over for hvilken bjergkæder og havdybder kun fremtræder som næsten umærkelige afvigelser. Denne form i det store, der altså er i tilsyneladende

modstrid med vore umiddelbare iagttagelser, må da være et resultat af andre og mere dybtliggende erfaringer, der tvinger os til den slutning, at skinnet bedrager os. Det er i virkeligheden en uhyre sum af tankearbejde, der ligger koncentreret i påstanden om, at jorden er en kugle med en diameter på 12800 km. Dette tankearbejde er et nødvendigt led i dannelsen af vort fysiske verdensbillede. I dette billede må jorden indtage den vigtigste plads, thi den er den planet, hvorpå vi lever og dør, og alle vore forestillinger er knyttet til de jordiske fænomener. Enhver, der ønsker at danne sig en opfattelse af den ham omgivende verden, som går ud over, hvad de mest nærliggende iagttagelser giver, kan ikke komme uden om spørgsmålet om jordens form. Og man vil ikke kunne nøjes med en omtrentlig besvarelse, thi jeg har allerede fremhævet, hvorledes vore sanser skuffer os, og når man hæver sig op til noget, der ligger så ganske uden for vor umiddelbare forestillingsevne som et legeme af jordens dimensioner, så må man basere sig på et exact ræsonnement, hvis man ikke vil risikere at nå til et helt falsk billede. Men jeg har endvidere påvist, at i den videnskab, der giver en ordnet gruppering af de ting, vi ser på jorden, er det en fundamental forudsætning for fortolkningen af de målinger, vi kan anstille, at vi kender jordens form.

Det er da ikke et videnskabeligt raffinement, men en tvingende nødvendighed, at vi forsøger at give et præcist og udtømmende svar på spørgsmålet om jordens form.

Er det nu rigtigt, at jorden er en kugle? I det 17. og 18. århundrede begyndte man at beskæftige sig mere indgående med besvarelsen af dette spørgsmål. Picard og Cassini fader og søn udførte deres berømte gradmåling i Frankrig, og de fandt heraf, at jordoverfladens afstand fra jordens centrum var større i Nordfrankrig end i Sydfrankrig. Heraf sluttede man, at jorden ikke er en kugle, men har form af en oval tilspidset ved polerne. Dette resultat vakte stor opsigt, fordi det stod i modstrid med den af Newton kort forinden fremsatte teori om den universelle tiltrækning. Newton gik ud fra, at den matematiske jordoverflade måtte være en flade i hydrostatisk ligevægt, og at kraften, der påvirker et overfladeelement, er resultanten af tiltrækningen af samtlige massedele og centrifugalkraften. Han kom derved ad beregningens vej til, at jordens overflade måtte være en omdrejningsellipsoide fladtrykt ved polerne.

En stor strid opstod mellem tilhængerne af Newton og Cassini, og hele den dannede verden tog ivrigt del i striden. Jordens form var blevet prøvestenen for den universelle tiltrækningslov. Det franske Akademi besluttede da at gøre slag i sagen, og det sendte de to berømte geodæter Maupertuis og Clairaut til Lapland for dér at udføre en gradmåling, der ved sammenligning med den franske kunne give svaret. Resultatet blev,

at Newtons teori fandt sin bekræftelse, og Voltaire formulerede da en af sine bidende sarkasmer: »Maupertuis a aplati les poles et les Cassinis«. Noget senere skrev Voltaire i sin *Discours sur la modération* følgende vers:

Vous avez confirmé dans des lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.

Disse sidste ord var uretfærdige, og Voltaire var sikkert for klog til, at han ikke skulle have forstået det. De må opfattes som et udtryk for hans lunefuldhed og mangel på mådehold. Thi videnskabens opgave er jo netop at prøve, om en opstillet teori bekræftes ved erfaringen eller ikke. Kun ad denne vej kan videnskaben afsløre for os den harmoni, som råder i naturen. Teori og experiment er derfor uadskillelige i naturvidenskaben. At tilsidesætte det ene for det andet ville være meningsløst. Taget hver for sig ville teorien være tom og experimentet blindt. Begge ville være uden interesse.

Man har da heller ikke villet nøjes med det ene af franskmændene anstillede experiment. I den følgende tid blev der i mange forskellige lande udført gradmålinger, der tilsigtede at give et bidrag til beregningen af de to bestemmende elementer i jordens form, nemlig radius ved æquator og fladtrykningen. Det viste sig nu, at man fandt forskellige værdier i forskellige lande, og jo mere måletekniken forfinedes, jo mere blev det åbenbart, at afvigelserne ikke kunne skyldes observationsfejl. Under forsøgene på at sammenfatte alle disse målinger til et hele udvikledes iagttagelseslæren og sandsynlighedsregningens strænge principper, så at man derigennem fik et exact mål for de uundgåelige observationsfejls indflydelse og en pålidelig bestemmelse af de reelle afvigelsers størrelse. Det blev nu klart, at omdrejningsellipsoiden kun var at betragte som en approximation til den virkelige matematiske jordoverflade. Denne sidste flade er for første gang blevet defineret på en tilfredsstillende måde af den tyske matematiker Gauss, så at man nu ikke længere risikerer, at forbedrede målinger tvinger til at ændre begrebets indhold, således som vi har set, at det to gange var sket. Gauss definerede den matematiske jordoverflade som den flade, der overalt står vinkelret på tyngdekraftens retning og som går igennem et fast punkt i havoverfladen ved middelvandstand. Denne flade kaldes *geoiden*, og alle højder måles som højder over geoiden, fordi det geometriske nivellement som bestemmende element benytter lodliniens retning. Geoiden er altså en flade, som overalt er horizontal. Da overfladen af en stillestående vædske indstiller sig vinkelret på lodlinien, så ville altså geoiden være sammenfaldende med det blikstille hav, hvis der ingen ebbe eller flod og ingen strømninger i havet var.

Geoiden følger den fysiske jordoverflade i store træk, men har åbenbart et langt mere regelmæssigt og glat forløb end denne. Ikke desto mindre er geoiden meget for kompliceret til, at vi kan tænke på at finde et simpelt matematisk udtryk for denne.

Vi vil da kun kunne angive geoiden ved at henhøre den til eller afbilde den på en anden og simplere flade. Men en sådan hjælpeflade behøver vi også for overhovedet at blive i stand til at udnytte vore stedbestemmelser, det vil sige underkaste dem en matematisk behandling. Hvis man nemlig ville henhøre dem til geoidefladen, så ville vi føres til så komplicerede formler, at det ikke ville være overkommeligt at regne med dem. Som hjælpeflade benytter man den ellipsoide, som slutter sig nærmest til geoiden. Denne kaldes *sphæroiden*. De nyeste målinger tyder på, at sphæroiden er en treakset ellipsoide, hvilket er så meget mere overraskende, som efter Poincaré's og Darwin's undersøgelser kun omdrejnings-ellipsoiden er en ligevægtsfigur, medens den treaksede ellipsoide er instabil.

Geoiden bølger op og ned i forhold til sphæroiden. Under de store højlande hæver geoiden sig indtil hundrede meter over sphæroiden, og på visse steder i verdenshavet sænker den sig til en tilsvarende dybde. Dette er ikke så lidt, når man betænker, at et nivellements punkts højde bestemmes med millimeters nøjagtighed.

Imidlertid er man for tiden ikke i stand til at bestemme sphæroiden med en fyldestgørende nøjagtighed, fordi det kun er en lille del af jordens overflade, som er godt opmålt. Man må derfor indføre endnu en tilnærmelse og benytte den såkaldte *referensellipsoide* i stedet for sphæroiden, og som sådan vælger man en ved de før nævnte gradmålinger bedst muligt bestemt ellipsoide, som inden for et mindre område slutter sig ganske godt til sphæroiden. Det er da til referensellipsoiden, man henhører de geodætiske målinger. Men ulykkeligvis benytter Danmark en referensellipsoide, Tyskland en anden, Frankrig en tredje, England en fjerde o. s. v. Først for nylig er man enedes om en fælles ellipsoide til videnskabeligt og til militært brug. Men de store kortværker hviler stadig på de nationale ellipsoider. Dette betyder, at tallene i de pågældende lande taler et forskelligt sprog, men naturligvis kan de oversættes. En sådan oversættelse kræver et stort arbejde, men det er på den anden side indlysende, at værdien af de allerede udførte geodætiske målinger ikke forringes af den omstændighed, at man til sin tid bliver nødsaget til at underkaste dem en fornyet bearbejdelse, når man har fundet en bedre referensellipsoide, end man nu har.

Jeg vender nu tilbage til den simple opgave, som jeg begyndte med at nævne, nemlig stedbestemmelser her på jorden. Løsningen af denne opgave er forudsætningen for, at vi kan give en ordnet og nøjagtig beskri-

velse af den relative beliggenhed af de ting, vi ser på jordens overflade. Men De vil se, at den løsning, vi er nået til, er ejendommelig. Når vi vil angive et punkts beliggenhed, så må vi hertil have tre koordinater. De to koordinater er vi fortrolige med under navnet længde og bredde. Disse fås ved at projicere punktet på referensellipsoiden og på denne udmåle længde og bredde. Men referensellipsoiden er en abstrakt matematisk flade, og de målinger, der tjener til dens bestemmelse, har egentlig til forudsætning, at vi allerede kender den, så at opgaven kun kan løses ved en række successive approximationer. Den tredje koordinat, *højden* regnes ud fra en helt anden flade, *geoiden*, hvis forløb i forhold til sphæroiden eller referensellipsoiden vi ikke kender.

Vi føres da til en ny problemstilling, nemlig den opgave at bestemme både geoiden og sphæroiden, og dette problem kan atter kun løses ved en række successive tilnærmelser på grundlag af et stort antal målinger fordelt over jordens overflade. Ved behandlingen af disse vanskelige opgaver tvinges man til at indføre endnu en hjælpeflade, den såkaldte *niveausphæroide*, der er en tilnærmelsesflade til geoiden, der omtrent hæver og sænker sig lige ofte i forhold til denne inden for kontinenternes område. Niveausphæroiden er en algebraisk flade af 14. grad, der slutter sig ret nøje til en ellipsoide, den bølgler op og ned i forhold til denne, og den største afvigelse mellem de to flader overstiger ikke 17 m. Vanskeligere er det at bestemme geoidens kontinentale undulationer i forhold til niveausphæroiden. For nogle decennier siden udkom der flere store arbejder desangående, hvori det hævdes, at højdeforskellen mellem de to sidstnævnte flader når en størrelse af 2800 m. Dette resultat ser bestikende ud, men det er fremkommet ved en urigtig fortolkning af det matematiske grundlag for alle disse betragtninger. Højdeforskellen mellem de to flader vil ikke kunne overstige 100 m. Af den sidste bemærkning vil De forstå, hvor langt man endnu er fra at være nået til en endelig løsning af de omhandlede problemer.

Når man tager i betragtning de store bjerghøjder og havdybder, som den fysiske jordoverflade udviser, så må man egentlig overraskes over, at de kontinentale geoideundulationer ikke er større end anført. Men dette beror på, at de synlige overskud og underskud af masse i jordskorpen i betydelig udstrækning er kompenseret ved underskud og overskud i de dybere lag. Med andre ord under oceanerne befinder sig lag af en større tæthed og under kontinenternes højdeplateauer lag af en ringere tæthed end den normale. I en dybde af ca. 120 km finder man en flade således beskaffen, at vertikale prismen af samme tværsnit mellem denne flade og den fysiske jordoverflade indeholder samme masse, hvor man end vælger prismet.

Det viser sig nu, at en undersøgelse af denne sidstnævnte flade er et nødvendigt led i bestemmelsen af geoiden. En sådan undersøgelse af jordens isostasi giver os tillige et såre interessant indblik i de geologiske kræfters natur og det seculære forløb af forandringerne i jordskorpen. Jordens indre giver efter for stadigt virkende kræfter. Bestræbelsen efter isostasi medfører udligningsbevægelser, som tilvejebringer hydrostatisk ligevægt. Udligningen foregår ved forskydninger af masserne i jordens indre.

Alle de her nævnte undersøgelser baseres på de geodætiske målinger. Blandt disse er navnlig gradmålingerne af stor betydning. En gradmåling foretages efter det førnævnte allerede af Eratosthenes benyttede princip. Man udvælger to langt fra hinanden beliggende punkter på jorden og bestemmer dels deres lineære afstand udtrykt f. ex. i meter, dels deres vinkelafstand ved astronomiske stedbestemmelser i de to punkter. Men hvis punkterne ligger f. ex. 1000 km fra hinanden, så ville det være en ganske uoverkommelig opgave at direkte måle afstanden mellem dem. Man benytter derfor en indirekte methode, idet man i et jævnt fladt terrain udvælger en basis af en længde på nogle få kilometer, og man udmåler omhyggeligt denne basis. Dernæst forbinder man basisliniens endepunkter og gradmålingsbuens endepunkter med et net af trekanter, hvis vinkler man alle måler. Man er da i stand til af basis længde at beregne alle trekantsidernes længder og deraf atter gradbuens længde. Man vil da også med fordel kunne foretage astronomiske stedbestemmelser i en del af trekantpunkterne, og man forbinder disse ved et nivellément. Denne proces, som man kalder triangulation, bliver således den grundlæggende methode i geodæsien.

Der gives imidlertid også en helt anden methode til bestemmelse af jordens form. Denne methode, der er lettere at praktisere, består i at måle tyngdekraftens størrelse i et stort antal punkter fordelt over jordens overflade. Hvis jorden var en homogen kugle, så ville man overalt finde samme værdi for tyngdekraften, men man finder meget forskellige værdier. Af hvad jeg allerede har sagt, vil De let indse, at når man kender en lineær afstand f. ex. radius ved æquator, så kan man af differenserne mellem tyngdekraftens størrelse i forskellige egne beregne jordens form.

Jeg vil nu kort omtale de bidrag, der fra dansk side er givet til geodæsiens udvikling. Jeg betegnede før triangulationen som den grundlæggende methode i geodæsien. Denne arbejdsmethode er ikke blot af afgørende betydning for behandlingen af de vanskelige og dybtliggende problemer, som jeg nu sidst omtalte, men den er det også for den opgave, som jeg først nævnte, nemlig for kortlægningen. Vi har alle set gamle

kort, som giver et i høj grad fortegnet billede af det pågældende land. Sådanne kort er tilvejebragt ved stykkevis opmåling af mindre områder uden faste holdepunkter, og de forskellige små områder er derefter føjet sammen til et større kort. Ved en sådan fremgangsmåde vil de uundgåelige målefejl summere sig op, og man vil få et ganske falsk billede. Den methode, man skal benytte, er den omvendte af den her skitserede. Man bedækker først et større landområde med et net af store trekanter, og disse fylder man atter ud med mindre trekanter, indtil man får et tilstrækkelig tæt system af fixpunkter. Mellem disse triangulatorisk bestemte fixpunkter kan man da uden fare udføre kortlægningen stykkevis. Triangulationen bliver altså det faste skelet, hvorpå kortet bygges op.

Triangulationens princip er dels dette, at man for at bevare nøjagtigheden går fra de store former til de små og ikke omvendt, dels at man hovedsagelig baserer sig på *vinkelmålinger* og kun bestemmer en enkelt eller nogle få basislinier. Man har tillagt hollænderen Snellius æren for at have opfundet den triangulatoriske methode, og han har herom skrevet et berømt værk: *Eratosthenes Batavus*, men jeg har for nogle år siden påvist, at det i virkeligheden er en dansk mand, som for første gang har gjort brug af denne methode. Denne mand er ingen ringere end Danmarks store vidtberømte astronom Tycho Brahe.

Tycho Brahe tegnede et kort over Hven, som var baseret på en triangulation mellem et stort antal punkter på øen. Han udførte også en stortriangulation mellem Uranienborg, Vor Frue Kirke, Roskilde Domkirke, Køge, Malmø, Landskrona, Lund, Helsingborg, Helsingør o. s. v., og han målte en basis på Hven mellem St. Ibs gamle kirke og Uranienborg. Efter Frederik II's ordre blev der også målt en anden basis mellem Helsingør og Helsingborg den 27. januar 1585, da det salte hav var dækket af is, som skrevet står. Tycho Brahe og hans elever foretog endvidere astronomiske stedbestemmelser i et stort antal punkter i Jylland, på Fyen, Sjælland og i Skåne. Det var planlagt at konstruere et kort over hele Danmark, og i et interessant brev, som Tycho Brahe sendte Anders Sørensen Vedel, anbefaler han at benytte den triangulatoriske methode, men disse planer blev ikke realiseret.

Tycho Brahes arbejder blev dog ikke uden indflydelse på geodæsiens udvikling i vort land. I det 17. århundrede er flere geodætiske værker blevet udgivet i Danmark, og mænd som Longomontanus, Rasmus Bartholin, Hans Lauremberg og Ole Rømer beskæftigede sig med topografiske arbejder. Blandt dem, der er blevet påvirket af Tycho Brahe, vil jeg særlig nævne Johannes Mejer, som udarbejdede et udmærket kort over Slesvig og Holsten, der udkom i 1652. Efter at være blevet udnævnt til kgl. matematiker gik Mejer med utrættelig energi i gang med

en kortlægning af hele Danmark og konstruerede omtrent 300 kort over de forskellige landsdele. Det var en næsten ufattelig stor præstation for en enkelt mand uden medhjælpere. Johannes Mejers kort over Danmark blev først udgivet under den sidste verdenskrig af Geodætisk Institut i et stort stateligt værk i 3 bind. Disse kort udgør en rig kilde til kundskab om vort land på Christian IVs tid.

I 1757 overdrog Videnskabernes Selskab den matematiske professor Peder Kofod at konstruere et kort over Københavns omegn. Ulykkeligvis døde Kofod 4 år senere, men det arbejde, han havde påbegyndt, blev indledningen til en stort anlagt geodætisk måling, som strakte sig over 80 år og udførtes på Videnskabernes Selskabs initiativ. Et net af trekanter blev udstrakt over hele Danmark, og på grundlag af disse konstrueredes et kort i målestokken 1:20000, som blev udgivet i 1:120000. Sjælen i dette store foretagende var Thomas Bugge, som var professor i matematik og astronomi ved Københavns Universitet. Disse på et tidligt tidspunkt konstruerede kort nød med rette stor anseelse, og de dannede i lange tider grundlaget for vort lands topografi.

Bugge havde til hensigt at benytte den under hans ledelse udførte triangulation til en særlig dansk gradmåling, men han blev for sent opmærksom på, at de benyttede trekanter var for små og for uregelmæssigt formede og den opnåede nøjagtighed derfor ikke tilstrækkelig stor. Denne plan måtte derfor opgives.

Det blev da overdraget til Bugges efterfølger som professor ved universitetet Hans Christian Schumacher at udføre en sådan gradmåling. Schumacher løste denne opgave med stort talent, og han blev den første direktør for den danske Gradmåling, som oprettedes 1816. Frederik VI nærede stor interesse for sagen, og han udrustede Schumacher med rigelige midler til arbejdets gennemførelse.

Schumachers gradmåling vandt stor påskønnelse, og den kom til at danne forbilledet for tilsvarende arbejder i udlandet, som udførtes af Bessel, Struve og Gauss. Dette gælder navnlig om den af Gauss ledede hannoveranske gradmåling, der er en direkte fortsættelse af den danske, og man må antage, at det var Schumachers påvirkning, som fik denne berømte matematiker til at beskæftige sig med de undersøgelser, som skulle få en så stor betydning for den teoretiske geodæsi.

Schumacher nåede ikke at fuldføre sit værk. Han døde i 1850, og den endelige bearbejdelse af hans gradmåling blev udført af hans efterfølger, den kendte statsmand og geodæt Andræ, om hvem direktør dr. Andersen for nylig har udgivet et interessant værk.

De stidigt stigende krav til nøjagtighed såvel som de fra generation til generation voksende ønsker om at bringe flere enkeltheder ind i de

topografiske kort bevirker, at et kortværk, som på et vist tidspunkt er fyldestgørende, i en senere tidsalder må fornyes. Således er det gået i de fleste lande og også her i Danmark.

Videnskabernes Selskabs kort var ved deres fuldførelse allerede forældede, desuden var de ret fattige på detaljer, og de manglede fuldstændigt den ene dimension, højdeangivelserne. Det blev derfor nødvendigt at genoptage kortlægningen. Dette arbejde blev overdraget til Generalstabens, hvis topografiske afdeling oprettedes i 1842. Generalstabens gik med stor iver i gang med den stillede opgave, og den løste denne på en fortjenstfuld måde. Generalstabens udgav et fuldstændigt kort i 1:20000 over hele Danmark såvel som kort i mindre målestokke. Disse kort har vundet stor påskønnelse og givet Danmark en smuk plads på kartografiens område.

Den videnskabelige geodæsis tarv blev samtidigt varetaget af Gradmålingen, men der var noget kunstigt og for arbejdet uheldigt i denne deling i to selvstændige institutioner. Desuden var det til rådighed stående personale utilstrækkeligt, så at de topografiske kort ikke kunne ajourføres i fornødent omfang og de videnskabelige arbejder ej heller fremmes i den udstrækning, som man måtte ønske. Under disse omstændigheder besluttede Rigsdagen i 1928 at forene Gradmålingen og Generalstabens topografiske afdeling til en under Krigsministeriet henhørende institution, der fik navnet Geodætisk Institut, og samtidigt forøgedes personalet.

Schumachers mere end 100 år gamle triangulation er ikke mere tidsvarende, og en del punkter er gået tabt. Geodætisk Institut har derfor som sit første arbejde udført en grundlæggende triangulation af 1. orden over hele Danmark, der er foretaget på en sådan måde, at den for alle tider vil være fyldestgørende. Dette store arbejde er bragt til afslutning, og det danske trekantsnet er blevet forbundet med det svenske over Øresund og med det tyske ved en række store trekanter over Østersøen. Alle Generalstabens koordinater hviler på en ganske kort basislinie på Amager, hvis nuværende længde afviger meget stærkt fra den, Schumacher fandt, og som er den, der er benyttet. Geodætisk Institut har derfor med den største omsorg målt 5 nye basislinier fordelt over landet. Den nøjagtighed, der derved er opnået, udgør 10^{-6} af den målte længde, medens trekantsvinklerne er målt med en nøjagtighed af $\frac{1}{3}$ buesekund.

Der er ved denne nye triangulation, som efterhånden er blevet for-tættet, skabt et fortrinligt grundlag for alle fremtidige opmålinger i Danmark, idet man nu for første gang er i en sådan situation, at enhver ny opmåling tjener til en forbedring af de forhåndenværende kort, fordi den henføres til et for hele landet fælles koordinatsystem.

I Island har Geodætisk Institut i mange år udført topografiske arbejder, delvis ved hjælp af fotogrammetrisk opmåling fra luften. For 10 år siden udgav institutet et pragtfuldt kortværk over Island omfattende alle ældre kort og resultatet af den nye opmåling i form af kort i 1:100 000 over hele landet. I indeværende år har institutet udført en ny 1. ordens triangulation i Island under benyttelse af de bedste moderne hjælpemidler, såsom geodimetre og helikoptere, de sidstnævnte var stillet til rådighed af U. S. A.

På Grønland er siden 1927 et storstilet kortlægningsarbejde blevet udført, som næppe noget andet land kan opvise mage til, under så vanskelige ydre forhold. Institutet har da også sat nogle af sine bedste kræfter ind på dette krævende foretagende. En triangulation er blevet udstrakt fra Kap Farvel til Thule omfattende mere end 16 breddegrader, og mere end 200 store kortblade over både Vestgrønland og Østgrønland er blevet udgivet.

På Færøerne blev i 1954 en helt ny triangulation foretaget. Selv om vi således har vist de nordlige lande megen opmærksomhed, har vi alligevel ikke forsømt hjemlandet.

Vort store topografiske kortværk over Danmark er bedre ajourført, end det nogensinde har været, og institutets tekniske afdeling er vel udrustet til at møde de store krav, der stilles.

Endvidere er et nyt præcisionsniveaulement blevet udstrakt over hele Danmark, og dette er suppleret med hydrostatiske niveaulementer over Store Bælt og Øresund, de sidste med støtte af Carlsbergfondet. Et 18 km langt meget snævert rør blev udlagt på bunden af Store Bælt, og det lykkedes at overføre koten fra Fyn til Sjælland med stor nøjagtighed. Metoden er siden blevet anvendt i andre lande.

Danmark er desuden blevet forsynet med et tæt net af tyngdestationer, som giver et værdifuldt bidrag til bestemmelse af geoidefladens forløb. Også her skylder jeg Carlsbergfondet tak for en bevilling til anskaffelse af de fornødne gravimetre.

Jeg vil nu forlade geodæsen og gå over til matematiken, som er det fag, der står mit hjerte nærmest.

Men da der er så mange ikke-matematikere til stede her i aften, skal jeg fatte mig i stor korthed.

Matematiken er åbenbart af en noget anden karakter end naturvidensskaberne. Matematiken er en skabende kunst. Matematiken er den kunst at benævne forskellige ting ved et og samme navn, vel at mærke ting, som er forskellige ved det, som er uvæsentlig, nemlig deres indhold, men identiske i det, som er væsentlig, nemlig deres form. Det er matematike-

rens kunst at opdage de dybtliggende analogier, som øjet ikke ser, men som tanken kan udrede. Et lignende synspunkt finder vi udtalt allerede hos Pythagoræerne, som betragtede formen som tingenes væsen. Bag ved de mange vekslende fænomener søgte de at finde den herskende lov, som udtrykkes ved formelle relationer mellem størrelsen og tal. Pythagoras gjorde derfor tallet til alle tings princip, idet han hævdede den berømte sentens *tingene er tal*. Der ligger en dyb sandhed i denne gamle påstand, som kort og knapt udtrykker at, ikke tingene selv, men relationerne mellem tingene er det eneste, som vi kan tillægge objektiv værdi.

Men matematiken er som sagt frem for alt en skabende kunst. Ud fra visse primitive postulat og aksiomer skaber den en række komplicerede og fine begreber, som ofte har vist sig nyttige ved studiet af naturen.

Hvis De vil tillade mig endnu et citat, så vil jeg minde om nogle åndfulde ord af den berømte franske matematiker og filosof Blaise Pascal. Han taler om *l'esprit de géométrie* et *l'esprit de finesse*.

En l'un, siger Pascal, les principes sont palpables mais éloignés de l'usage commun, de sorte qu'on a peine à tourner la tête de ce côté-là, manque d'habitude; mais pour peu qu'on l'y tourne on voit les principes à plein; et il faudrait avoir tout à fait l'esprit faux pour mal raisonner sur des principes si gros qu'il est presque impossible qu'ils échappent.

Mais dans l'esprit de finesse, les principes sont dans l'usage commun et devant les yeux de tout le monde. On n'a que faire de tourner la tête ni de se faire violence. Il n'est question que d'avoir bonne vue mais il faut l'avoir bonne, car les principes sont si déliés et en si grand nombre qu'il est presque impossible qu'il n'en échappe.

Og Pascal tilføjer med fin ironi:

Il est rare que les géomètres soient fins, et que les fins soient géomètres, à cause que les géomètres veulent traiter géométriquement ces choses fines, et se rendent ridicules voulant commencer par les définitions et ensuite par les principes ce qui n'est pas la manière d'agir en cette sorte de raisonnement.

Et les esprits fins, au contraire, ayant ainsi accoutumé de juger d'une seule vue, sont si étonnés — quand on leur présente des propositions où ils ne comprennent rien, et où, pour entrer, il faut passer par des définitions et des principes stériles, et qu'ils n'ont pas accoutumé de voir ainsi en détail — qu'ils s'en rebutent et s'en dégoûtent.

Mais les esprits faux ne sont jamais ni fins ni géomètres.

BLOMSTERSTØV OG ARKIMEDESPOLYEDER

VIGGO BRUN

Pappos beretter at Arkimedes har konstruert tretten halvregulære polyedre, det vil si polyedre som er begrenset av regulære polygoner, som ikke alle har samme sideantall. Nummer åtte av disse polyedrene som er nevnt hos Pappos er begrenset av tolv regulære femkanter og tyve regulære sekskanter. I Keplers *Harmonia Mundi* finner en den teg-

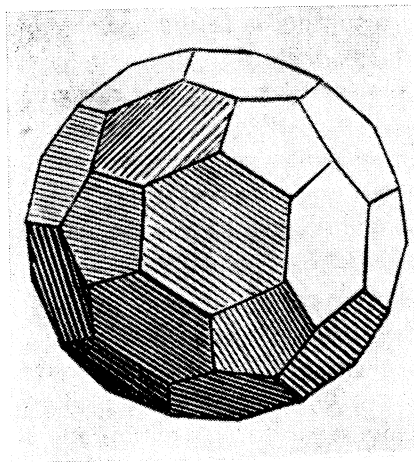


Fig. 1

ningen av dette polyedret som er gjengitt her (fig. 1). Kepler har gitt det navnet *truncus icosiëdros*. Det kan nemlig fremkomme ved å kutte av hjørnene i et ikosaeder, hvor jo fem regulære triangler møtes i hvert hjørne. Av de tretten halvregulære polyedrene som alle er avbildet i *Harmonia Mundi* er vel dette det vakreste. Det skiller seg ikke svært meget fra kuleformen. Det har (ved Trosvik verk i Brevik) fått praktisk anvendelse ved utvalsning av metallplater for å danne kuleformede beholdere. Man har først skåret til 12 femkantete metallplater og 20

sekskantete og så satt dem sammen til et slikt Arkimedespolyeder. Det hele er blitt valset ut til kuleform.

Våren 1955 fikk jeg hos botanikeren Ove Arboe Høeg se noen avbildninger av blomsterstøv i J. Fritzsches »Über den Pollen« fra 1837 slik som Fritzsche har sett det i sitt mikroskop. To av disse avbildninger, nemlig av blomsterstøvet til *Gomphrena globosa* (fig. 2) og *Chrysanthemum carinatum* (fig. 3) viste en eiendommelighet av matematisk interesse.

På overflaten av disse pollenkornene ser en nemlig et nett av femkanter og sekskanter. Rundt en femkant ser en fem regulære sekskanter. Ved

pollenkornet av *Chrysanthemum* er fordelingen helt »arkimedisk«. Rundt en sekskant er annenhver polygon femkantet og annenhver sekskantet. Høeg opplyser for øvrig at Fritzsches tegninger nok må ha vært temmelig idealisert (sammenlign Svein Manum: »Noen bemerkninger om pollenkorn av *Gomphrena globosa* og *Chrysanthemum carinatum*«, Blyttia, Oslo 1955).

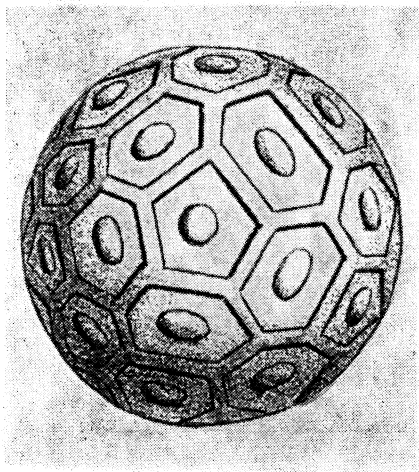


Fig. 2

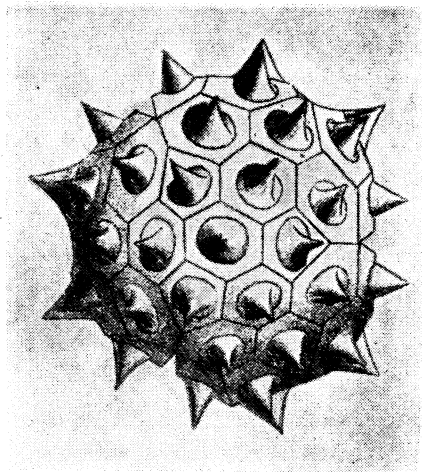


Fig. 3

Det ligger nær å tro at det må være en eller annen sammenheng mellom disse to pollenkornenes utseende og dette halvregulære polyedret til Arkimedes. Kanskje er det ett eller annet ekstremalfenomen som ligger til grunn — et trykk- eller strekkfenomen f. eks. Jeg har på ingen måte våget å forsøke noen forklaring på en slik sammenheng, men jeg har satt meg som mål å vise at en enkel naturprosess — fremkalt ved trykk — kan føre til et lignende fenomen.

Av en brøddeig tok min kone og jeg ut 32 kjegleformete legemer av samme størrelse. Disse ble plasert inne i en hulkule av metall (en globus som var delt i to halvkuler langs ekvator) slik at alle toppunktene i kjeglene var samlet ved kulens sentrum. Først plaserte vi en kjegle på bunnen av den nedre halvkulen, ved »sydpolen«. Så stillet vi seks andre kjegler rundt denne. Hadde disse seks kjeglene vært stillet rundt en kjegle på et plan istedenfor i en kule, ville det akkurat vært plass for alle seks slik at alle de sirkelformete grunnflatene ville tangere grunnflaten til den indre kjeglen. Her i kulen blir det ikke plass til det. Vi plaserte derfor først tre kjegler hvis grunnflater tangerte den først oppstilte kjegles grunnflate, slik at avstanden mellom de tre tangerings-

punkter ble like store. Så ble mellomrommene utfylt med tre nye kjepler som da ikke kom til å tangere den første kjeplen. Så ble seks nye kjepler lagt i hakkene mellom disse seks. Slik fortsatte vi inntil den 32te kjeplen ble stukket med spissen rett ned mot kulens sentrum (fra nordpolen av). Fordelingen av kjeplene vil da sees av fig. 4 hvor metallkulen er tenkt gjennomsiktig og sett rett nedenfra, slik at den midterste sirkel har sitt

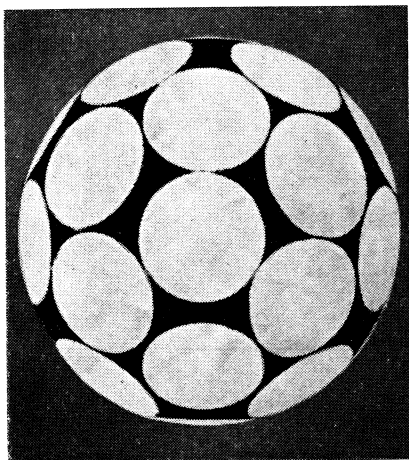


Fig. 4

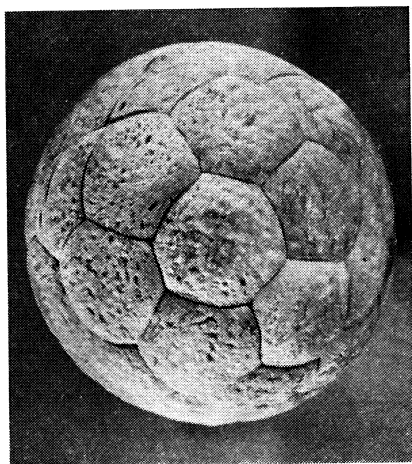


Fig. 5

sentrum i »sydpolen«. Etter at alle kjeplene var plasert ble den øvre halvkule av metall føyet til den andre. Når så deigen utvidet seg på grunn av gjæringen ble kjeplene av trykket omdannet slik at grenseflatene mellom dem ble plane og hele kulen ble kompakt. Etter at kulen var satt inn i stekeovnen og halvkulene fjernet etter stekingen så man på brødets overflate 12 femkanter og 20 sekskanter (begrenset av storsirkelbuer). Fordelingen var riktignok ikke overalt »arkimedesisk«. Men dette var helt ut tilfelle omkring den nederste kjeplen som var oppstillet ved »sydpolen«. Dette ser en på fig. 5 hvor »arkimedesbrødet« er fotografert rett nedenfra. Likheten mellom pollenkorntet til *Gomphrena globosa* slik som Fritzsche har tegnet det og dette brødet er ganske slående!

Når Arkimedesbrødet som regel vil komme til å fremvise 12 femkanter og 20 sekskanter, selv om fordelingen av dem ikke er »arkimedesisk«, er dette forklarlig.

For tegningen av et nett på en kule gjelder Eulers formel

$$f - k + h = 2.$$

Her betyr f antall flater i nettet, k antall kanter og h antall hjørner.

Denne Eulers formel får en interessant form når nettet er slik at det i hvert hjørne møtes tre og bare tre kanter. La da

n_3 være antall trekanter i nettet ,

n_4 være antall firkanter i nettet ,

o. s. v.

Antall flater blir lik antall trekanter pluss antall firkanter o. s. v., altså

$$f = n_3 + n_4 + n_5 + \dots$$

Antall kanter i en trekant er tre og i en firkant fire o. s. v. Legger vi disse tallene sammen får vi det dobbelte antall av kanter, fordi hver kant tilhører to flater:

$$k = \frac{1}{2}(3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots)$$

Antall hjørner i en trekant er også tre og i en firkant fire o. s. v. Legger vi disse tallene sammen får vi det tredobbelte antall hjørner, fordi hvert hjørne tilhører tre flater, etter den forutsetning vi har gjort:

$$h = \frac{1}{3}(3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots)$$

Settes verdiene av f , k og h inn i Eulers ligning får en

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 + 0 \cdot n_6 = 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \dots$$

Som en ser er antall av sekskanter i denne formelen multiplisert med null. Hvor stort antallet av sekskanter i nettet er, er derfor likegyldig. Hvis nettet bare inneholder femkanter og sekskanter vil formelen bli

$$n_5 = 12.$$

Antallet av femkanter ville da bli 12 uansett hvor mange sekskanter nettet inneholder. Da vi har brukt 32 kjegler ved bakningen må det derfor bli 20 sekskanter å se på overflaten, såfremt da ikke andre mangekanter enn femkanter eller sekskanter skulle forekomme. Men ved våre forsøk har dette som regel ikke vært tilfelle.

PROPERTIES OF CONSECUTIVE INTEGERS

SOLOMON W. GOLOMB

The best-known result about the divisibility properties of consecutive integers asserts:

THEOREM 1. *There are arbitrarily long runs of composite numbers.*

The standard proof says that $(n+1)!+k$ is composite for the n consecutive values corresponding to $k=2, 3, \dots, n+1$. A more economical construction is to use

$$\left(\prod_{p \leq n+1} p \right) - k, \quad k = n+1, n, \dots, 2; \quad p \text{ prime.}$$

Thus, to find nine consecutive composite numbers, instead of starting with $10! = 3\,628\,800$, one may begin with $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, the product of all the primes up to 10; and the nine consecutive composite numbers are 200, 201, 202, ..., 208.

The notation $(a, b) = n$ means that n is the *greatest common divisor* of a and b . If $(a, b) = 1$, a and b are called *relatively prime*.

This article is concerned with a systematic procedure for proving results about consecutive integers. The basic tool is the following lemma, which seems to have been generally overlooked heretofore.

THEOREM 2. *If*

$$A_1 = a_1n + b_1, \quad A_2 = a_2n + b_2, \quad \dots, \quad A_k = a_kn + b_k$$

are k arithmetic progressions such that $(a_i, a_j) = 1$ if $i \neq j$ (in other words, the numbers $a_1, a_2, \dots, a_k$ must be pairwise relatively prime), then there exist k consecutive integers $c+1, c+2, \dots, c+k$ such that $c+j$ is in A_j , for $j=1, 2, \dots, k$.

This can be proved directly, using Euclid's algorithm, but is much easier to obtain as a corollary of the »Chinese Remainder Theorem«,

which says: »If $a_1, a_2, \dots, a_k$ are pairwise relatively prime, and $s_1, s_2, \dots, s_k$ are any integers whatever, then there is a number c such that

$$c \equiv s_1 \pmod{a_1}, c \equiv s_2 \pmod{a_2}, \dots, c \equiv s_k \pmod{a_k}.$$

In fact, there is exactly one such number c between 1 and $J = \prod_{j=1}^k a_j$. (The notation $s \equiv t \pmod{m}$, invented by Gauss, simply means that $s - t$ is divisible by m .)

For example, to find a number c which is even, which is divisible by 3, and which leaves a remainder of 4 when divided by 5 — in other words, which satisfies $c \equiv 0 \pmod{2}$, $c \equiv 0 \pmod{3}$, and $c \equiv 4 \pmod{5}$, one may use $c = 24$; and this is the only possible choice between 1 and $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

PROOF OF THEOREM 2: By the Chinese Remainder Theorem, there exists a number c such that

$$c \equiv b_1 - 1 \pmod{a_1}, c \equiv b_2 - 2 \pmod{a_2}, \dots, c \equiv b_k - k \pmod{a_k}.$$

Thus $c + j \equiv b_j \pmod{a_j}$, and $c + j$ belongs to the arithmetic progression $A_j = a_j n + b_j$, for $j = 1, 2, \dots, k$. This completes the proof.

The Chinese Remainder Theorem tells more — namely, that it is possible to choose c between 1 and $J = \prod a_j$ in exactly one way. If the order in which the k progressions are taken does not matter, then there are $k!$ distinct choices of c between 1 and J .

Several new proofs can be given for Theorem 1, based on Theorem 2. For example, in Theorem 2, let $a_j = p_{2j-1} \cdot p_{2j}$, and $b_j = 0$, for $j = 1, 2, \dots, k$, where $p_1, p_2, \dots$ is the sequence of prime numbers. Then $c + j$ is a multiple of a_j , and has at least two distinct prime factors. Hence $c + 1, c + 2, \dots, c + k$ are all composite. In what follows, however, Theorem 2 will most often be applied to situations where the numbers $a_1, a_2, \dots, a_k$ are all primes, or powers of primes.

The Möbius function $\mu(n)$ may be defined as follows: If n is divisible by any perfect square greater than 1, then $\mu(n) = 0$. Otherwise, if n is a product of k distinct primes, then $\mu(n) = (-1)^k$, which is either $+1$ or -1 according as n has an even or an odd number of prime factors. By convention, $\mu(1) = 1$. Note that $\mu(n) = 0$ if and only if n is divisible by at least one of the numbers 4, 9, 25, 49, $\dots$, where these are the squares of the prime numbers. Table I shows $\mu(n)$ for all n up to 50.

It may be noted that -1 occurs three times in a row as $\mu(29)$, $\mu(30)$, and $\mu(31)$; and again three times as $\mu(41)$, $\mu(42)$, and $\mu(43)$. Also, 1 occurs three times in a row as $\mu(33)$, $\mu(34)$, $\mu(35)$; and 0 occurs three times in a row as $\mu(48)$, $\mu(49)$, and $\mu(50)$. It is natural to wonder how many times in a row $\mu(n)$ can have the same value. Since every fourth number is

n	$\mu(n)$	n	$\mu(n)$	n	$\mu(n)$	n	$\mu(n)$	n	$\mu(n)$
1	1	11	-1	21	1	31	-1	41	-1
2	-1	12	0	22	1	32	0	42	-1
3	-1	13	-1	23	-1	33	1	43	-1
4	0	14	1	24	0	34	1	44	0
5	-1	15	1	25	0	35	1	45	0
6	1	16	0	26	1	36	0	46	1
7	-1	17	-1	27	0	37	-1	47	-1
8	0	18	0	28	0	38	1	48	0
9	0	19	-1	29	-1	39	1	49	0
10	1	20	0	30	-1	40	0	50	0

TABLE I

divisible by 4, $\mu(n)=1$ and $\mu(n)=-1$ can each occur at most three consecutive times. But what about $\mu(n)=0$? A. Wintner [The Theory of Measure in Arithmetical Semi-Groups, p.14] gives a very complicated construction to prove the following result:

THEOREM 3. *There are arbitrarily long sequences of consecutive integers $c+1, c+2, \dots, c+k$, such that*

$$\mu(c+1) = \mu(c+2) = \dots = \mu(c+k) = 0.$$

PROOF: Consider the k arithmetic progressions $4n, 9n, 25n, \dots, p_k^2 n$, where p_k is the k^{th} prime number. Since $(p_i^2, p_j^2)=1$ if $i \neq j$, Theorem 2 applies (with all $b_i=0$), and there is a number c such that $c+1$ is divisible by 4, $c+2$ by 9, $c+3$ by 25, $\dots$, $c+k$ by p_k^2 ; and the assertion follows.

The numbers actually obtained by this construction are considerably smaller than by Wintner's method. Even more important, the proof just given can obviously be modified to yield the result: There are arbitrarily long sequences of non- k^{th} -power-free integers. This fact is not suggested by Wintner's proof.

Note also that Theorem 3 furnishes yet another proof for Theorem 1.

Euler's function $\varphi(n)$ is usually defined as the number of integers not exceeding n which are relatively prime to n . Thus $\varphi(6)=2$, because 1 and 5 are the only numbers, among 1, 2, 3, 4, 5, 6, which have no factor except 1 in common with 6. It is known that in general,

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

where the product is extended over all the distinct prime divisors p of n . Thus $\varphi(6) = 6(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 2$. Also, if p is prime, $\varphi(p) = p - 1$, because $1, 2, 3, \dots, p-1$ are all relatively prime to p . The formula gives $\varphi(p) = p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$. The values of $\varphi(n)$ for $n \leq 20$ are included in Table II.

Dirichlet's Theorem says that there are infinitely many primes in every arithmetic progression $an + b$, provided that a and b are relatively prime. For example, among the numbers $11, 21, 31, 41, 51, 61, \dots$, all of the form $10n + 1$, there are infinitely many primes.

The following appeared as a problem in the *American Mathematical Monthly* a few years ago:

THEOREM 4. *Given any integer M , there are arbitrarily long runs of consecutive integers $c + 1, c + 2, \dots, c + k$, such that*

$$\varphi(c + 1) \equiv \varphi(c + 2) \equiv \dots \equiv \varphi(c + k) \equiv 0 \pmod{M},$$

where φ is Euler's function. (That is, $\varphi(c + 1), \varphi(c + 2), \dots, \varphi(c + k)$ must all be divisible by M .)

PROOF: By Dirichlet's Theorem, there are infinitely many primes in the arithmetic progression $Mn + 1$. Pick any k of them — thus

$$q_1 = Mn_1 + 1, q_2 = Mn_2 + 1, \dots, q_k = Mn_k + 1.$$

Then

$$\varphi(aq_j) = aq_j \prod_{\substack{p|a \\ p \neq q_j}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p|a \\ p \neq q_j}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = a(q_j - 1) \prod_{\substack{p|a \\ p \neq q_j}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

is divisible by $q_j - 1$, regardless of the value of a ; and since $q_j - 1 = Mn_j$, $\varphi(aq_j)$ is divisible by M for all $j = 1, 2, \dots, k$. Therefore, form the arithmetic progressions

$$A_1 = aq_1, A_2 = aq_2, \dots, A_k = aq_k,$$

and use Theorem 2 to find a number c such that

$$c + 1 = a_1q_1, c + 2 = a_2q_2, \dots, c + k = a_kq_k.$$

(Theorem 2 applies, because $(q_i, q_j) = 1$ if $i \neq j$.) Then

$$\varphi(c + 1) \equiv \varphi(c + 2) \equiv \dots \equiv \varphi(c + k) \equiv 0 \pmod{M}.$$

Theorems 3 and 4 are basically similar, and they suggest a pattern to which Theorem 2 readily applies. This pattern may be worded as follows:

Given any two integers M and k , there is a run of consecutive integers $c+1, c+2, \dots, c+k$ such that $f(c+1), f(c+2), \dots, f(c+k)$ are all divisible by M , where f is a fixed arithmetic function.

This is certainly not true for *all* arithmetic functions f , but has been shown to hold for $f(n)=\varphi(n)$ (Euler's function) and for $f(n)=\mu(n)$ (the Möbius function). Other examples include $f(n)=\sigma(n)$, and $f(n)=d(n)$.

n	$\varphi(n)$	$\sigma(n)$	$d(n)$	n	$\varphi(n)$	$\sigma(n)$	$d(n)$
1	1	1	1	11	10	12	2
2	1	3	2	12	4	28	6
3	2	4	2	13	12	14	2
4	2	7	3	14	6	24	4
5	4	6	2	15	8	24	4
6	2	12	4	16	8	31	5
7	6	8	2	17	16	18	2
8	4	15	4	18	6	39	6
9	6	13	3	19	18	20	2
10	4	18	4	20	8	42	6

TABLE II

By definition, $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, the sum of all the divisors of n . It is easy to show that

$$\text{if } n = \prod_{p_i|n} p_i^{a_i}, \text{ then } \sigma(n) = \prod_{p_i|n} (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{a_i}),$$

where both products extend over all the distinct prime divisors p_i of n .

THEOREM 5. *Given M and k , there is a number c such that*

$$\sigma(c+1) \equiv \sigma(c+2) \equiv \dots \equiv \sigma(c+k) \equiv 0 \pmod{M}.$$

PROOF: Using Dirichlet's Theorem, let $q_1, q_2, \dots, q_k$ be any k distinct primes in the arithmetic progression $Mn-1$; and let $Q = \prod_{j=1}^k q_j$. By Theorem 2, choose R such that

$$R+1 = q_1^2 n_1, \quad R+2 = q_2^2 n_2, \quad \dots, \quad R+k = q_k^2 n_k;$$

and let $c = Q + R$. Then $c + j = Q + (R + j)$ is divisible by q_j but *not* by q_j^2 , because q_j divides both Q and $R + j$, while q_j^2 divides $R + j$ but not Q . Since $\sigma(n) = \prod (1 + p_i + \dots + p_i^{a_i})$, $\sigma(c + j)$ contains the factor $1 + q_j$, for all $j = 1, 2, \dots, k$. Since q_j belongs to the arithmetic progression $Mn - 1$, $q_j + 1$ is divisible by M , and the theorem is proved.

A very similar proof works for $d(n)$, the *number* of divisors of n . (If $n = \prod p_i^{a_i}$, then $d(n) = \prod (a_i + 1)$. It is not necessary to invoke Dirichlet's Theorem in proving the analog of Theorem 5 for $d(n)$.)

It is a much more difficult matter to decide whether or not for every number k there exists a number c depending on k such that

$$d(c + 1) = d(c + 2) = \dots = d(c + k).$$

For example, $d(2) = d(3) = 2$; and $d(33) = d(34) = d(35) = 4$; but the question of the existence of arbitrarily long runs has not been settled. The corresponding problem also exists for $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$; but Theorem 3 gives the answer for $\mu(n)$.

Theorem 2 is not the only important corollary of the Chinese Remainder Theorem. Instead of $c + 1, c + 2, \dots, c + k$, it is possible to use $c + t_1, c + t_2, \dots, c + t_k$, where $t_1, t_2, \dots, t_k$ are completely arbitrary. However, the case of *consecutive* numbers is certainly the most interesting.

RØRINGS CIRKLER OG POTENS SUMMER

ANDERS BAGER

1. Lad $a, b, c, s, T, R, r, r_a, r_b, r_c, h_a, h_b, h_c$ være 13 positive tal, der opfylder betingelserne

$$(1) \quad 2s = a + b + c$$

$$(2) \quad r_a r_b = s(s - c), \quad r_b r_c = s(s - a), \quad r_c r_a = s(s - b)$$

$$(3) \quad rr_a = (s - b)(s - c), \quad rr_b = (s - c)(s - a), \quad rr_c = (s - a)(s - b)$$

$$(4) \quad T = rs = r_a(s - a) = r_b(s - b) = r_c(s - c)$$

$$(5) \quad 2T = ah_a = bh_b = ch_c$$

$$(6) \quad abc = 4RT.$$

Det kan forudsættes bekendt, at alle disse formler gælder, hvis a, b, c betyder siderne i en (plan) trekant, s dennes halvperimeter, T dens areal, R radius i dens omskrevne cirkel, r radius i dens indskrevne cirkel, r_a, r_b, r_c radier i dens ydre røringsskruer og h_a, h_b, h_c dens højder (r_a og h_a svarende til a , og analogt).

De relationer, vi nu ad rent algebraisk vej vil udlede af systemet (1)–(6), gælder derfor i det omtalte specielle tilfælde. Vi viser dog omvendt, at hvis (1)–(6) alle er opfyldte (positive værdier af de 13 variable), da er a, b, c sider i en trekant, og de øvrige 10 størrelser har de angivne betydninger for denne trekant.

Mange af de formler, vi kommer til, er naturligvis alment kendte. Adskillige af formlerne er bevist for første gang i [2]. Nye er måske (31) og (32).

Algebraisk set indeholder systemet (1)–(6) for udledelsen overflødige formler. Vi vil til slut angive et minimalt delsystem, der er ækvivalent med det fulde system. Derved går dog symmetrien tabt.

Af (4) sluttet $T^2 = rr_a s(s - a)$, hvorefter (3) og (2) giver

$$(7) \quad T^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

$$(8) \quad T^2 = rr_a r_b r_c.$$

Elimineres ved (4) T af (7) og (8), fås

$$(9) \quad r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}, \quad r_a^2 = \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}$$

$$s^2 = \frac{r_a r_b r_c}{r}, \quad (s-a)^2 = \frac{r r_b r_c}{r_a}.$$

Ligesom her vil vi i det følgende af et sæt indbyrdes analoge usymmetriske formler kun angive den ene.

Af (1) følger straks

$$(10) \quad (s-a) + (s-b) + (s-c) = s.$$

Multipliseres (10) med s , giver (2):

$$(11) \quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = s^2.$$

Divideres (10) med T , fås ved (4):

$$(12) \quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

Af (1) følger let

$$(13) \quad 2(s-a) = -a + b + c.$$

Divideres (1) og (13) med $2T$, fås ved (4) og (5):

$$(14) \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

$$(15) \quad -\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a}.$$

Bringes (12) på hel form, fås

$$(16) \quad r r_a r_b + r r_b r_c + r r_c r_a = r_a r_b r_c.$$

Ifølge (1) er $2s^2 - (a+b+c)s = 0$, hvorefter sluttes

$$(17) \quad s(s-c) + (s-a)(s-b) = ab$$

$$(18) \quad r_a r_b + r r_c = ab,$$

idet (18) følger ved (2) og (3). Analogt fås

$$(19) \quad r_a r_b - r r_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Ved addition af (18) og (19) til deres respektive analoge fås

$$(20) \quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a + r r_a + r r_b + r r_c = ab + bc + ca$$

$$(21) \quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a - r r_a - r r_b - r r_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ifølge (1) har man

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} = \frac{c}{(s-a)(s-b)}$$

$$\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} = \frac{c}{s(s-c)}.$$

Heraf fås ved (7) og (17) let

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} = \frac{abc}{T^2}.$$

Multiplikation med T giver i kraft af (4) og (6):

$$(22) \quad r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

Kvadreres (22), fås ved (21) den kønne formel

$$(23) \quad r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 16R^2.$$

Ved (1) fås let formelen

$$s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

og heraf igen ved division med T^2 ifølge (4) og (5):

$$(24) \quad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{T^2} = \frac{4}{h_a^2} + \frac{4}{h_b^2} + \frac{4}{h_c^2}.$$

2. Sættes til afkortning

$$S = a^2 + b^2 + c^2,$$

kan (22), (23), (12) og (24) skrives på den fælles form

$$(25) \quad r_a^p + r_b^p + r_c^p + (-r)^p = P(R, S, T), \quad p = \pm 1, \pm 2,$$

idet P for $p > 0$ er et polynomium i R, S og T , for $p < 0$ et sådant polynomium divideret med en potens af T . Vi skal nu generalisere (25) til alle hele $p \neq 0$ og bestemme funktionen P .

Til indledning minder vi om, at hvis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ er rødderne i polynomiet

$$(26) \quad X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4,$$

da gælder formlerne

$$-a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$a_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4$$

$$-a_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

$$a_4 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$$

Sættes nu $\alpha_1 = r_a$, $\alpha_2 = r_b$, $\alpha_3 = r_c$, $\alpha_4 = -r$, viser (22), (21), (16) og (8), at

$$(27) \quad a_1 = -4R, \quad a_2 = \frac{1}{2}S, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -T^2,$$

og (26) går over i

$$(28) \quad X^4 - 4RX^3 + \frac{1}{2}SX^2 - T^2.$$

Sættes nu for $p = 1, 2, 3, \dots$

$$(29) \quad s_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \alpha_3^p + \alpha_4^p,$$

da gælder for »potenssummerne« (29) den explicite formel (se [1], [3]):

$$(30) \quad s_p = \sum \frac{(-1)^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4} p(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 - 1)!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3! \beta_4!} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_4},$$

hvor man skal summere over alle kvadrupler $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ af hele, ikke-negative tal, der opfylder betingelsen $\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 4\beta_4 = p$. Endvidere skal $a_i^{\beta_i}$ tolkes som 1, hvis $a_i = \beta_i = 0$.

I det tilfælde, der interesserer os, er $a_3 = 0$, hvilket bevirker, at alle led med $\beta_3 > 0$ forsvinder. Indsættes værdierne (27) i (30), og sættes $\beta_1 = i$, $\beta_2 = j$, $\beta_4 = k$, fås

$$(31) \quad r_a^p + r_b^p + r_c^p + (-r)^p = \sum_{i+2j+4k=p} \frac{(-1)^j (i+j+k-1)! 2^{2i-j} p}{i! j! k!} R^i S^j T^{2k}.$$

Heri er specielt for $p = 1$ og $p = 2$ indeholdt formlerne (22) og (23). Yderligere fås eksempelvis for $p = 3$:

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 - r^3 = 64R^3 - 6R(a^2 + b^2 + c^2).$$

Da $r_a, r_b, r_c, -r$ er rødderne i (28), er $r_a^{-1}, r_b^{-1}, r_c^{-1}, (-r)^{-1}$ rødderne i polynomiet

$$X^4 - \frac{S}{2T^2} X^2 + \frac{4R}{T^2} X - \frac{1}{T^2}.$$

Man har altså i dette tilfælde

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{S}{2T^2}, \quad a_3 = \frac{4R}{T^2}, \quad a_4 = -\frac{1}{T^2}.$$

Indsættes disse værdier i (30), og sættes $\beta_2 = i$, $\beta_3 = j$, $\beta_4 = k$, fremkommer

$$(32) \quad r_a^{-p} + r_b^{-p} + r_c^{-p} + (-r)^{-p} = \sum_{2i+3j+4k=p} \frac{(-1)^j (i+j+k-1)! 2^{2j-i} p}{i! j! k!} \cdot \frac{R^j S^i}{T^{2(i+j+k)}}.$$

For $p = 1$ og $p = 2$ giver (32) de tidligere formler (12) og (24). Yderligere fås eksempelvis for $p = 3$:

$$\frac{1}{r_a^3} + \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r^3} = -\frac{12R}{T^2} = -\frac{24}{h_a h_b h_c}.$$

3. Ifølge (2) er $s-a$, $s-b$, $s-c$ positive, og (13) og dens analoge viser, at

$$a < b+c, \quad b < c+a, \quad c < a+b.$$

Der findes derfor en trekant med sider a , b , c , og (1)–(6) gælder med de tidligere angivne betydninger af de 10 øvrige størrelser, og også kun med disse, da (1), (9), (4), (5) og (6) bestemmer s , r , r_a , r_b , r_c , T , h_a , h_b , h_c , R entydigt ved a , b , c .

Vi erstatter nu (1)–(6) med delsystemet

$$(I) \quad 2s = a+b+c$$

$$(II) \quad r_b r_c = s(s-a)$$

$$(III) \quad r_c r_a = s(s-b)$$

$$(IV) \quad rr_a = (s-b)(s-c)$$

$$(V) \quad rs = r_a(s-a)$$

$$(VI) \quad T = rs$$

$$(VII) \quad 2T = ah_a, \quad 2T = bh_b, \quad 2T = ch_c$$

$$(VIII) \quad abc = 4RT.$$

Division af (II) og (III) giver let

$$(33) \quad r_b(s-b) = r_a(s-a).$$

Af (III) og (IV) fås analogt

$$(34) \quad rs = r_c(s-c).$$

Multipliseres (33) med r , fås ved (IV):

$$rr_b = (s-c)(s-a).$$

Ifølge (V) og (34) gælder

$$(35) \quad r_a(s-a) = r_c(s-c).$$

Når (35) multipliceres med r_b , fås ved (II):

$$r_a r_b = s(s-c),$$

og multipliceres (III) med r , fås ved (V):

$$rr_c = (s-a)(s-b).$$

Hermed er godtgjort, at delsystemet (I)–(VIII) er ækvivalent med hele systemet (1)–(6). Vi skal nu vise, at ingen ligning i systemet (I)–(VIII) kan udledes af de øvrige. Dette gøres principielt på den måde, at man tilvejebringer et sådant sæt værdier for de 13 variable, at alle ligninger pånær den betragtede gælder.

Lad først den betragtede ligning være (VIII). Da R kun indgår i denne, kan den ikke udledes af de øvrige. Vi kan dog slutte endnu mere: Lad (A) være en af ligningerne i systemet (I)–(VII), og lad der være tilvejebragt værdier for de 12 variable i dette system, der opfylder alle ligninger pånær (A). Vi kan da supplere op med en sådan værdi af R , at (VIII) også gælder. Hermed er vist, at hvis (A) er uafhængig af de øvrige ligninger i (I)–(VII), da også af de øvrige ligninger i (I)–(VIII). Vi kan derfor simpelthen fjerne (VIII) fra systemet i resten af beviset.

Da h_a , h_b , h_c hver kun optræder i 1 ligning, kan vi også fjerne (VII). Derpå optræder T kun i (VI), der så kan fjernes, hvorefter (II) og endelig (III) kan udelades.

Tilbage er systemet (I), (IV), (V) med de 6 variable a , b , c , s , r , r_a . Sættes $a=b=c=6$, $s=8$, $r=1$, $r_a=4$, gælder (IV) og (V), men ikke (I). Sættes $a=r=2$, $b=c=3$, $s=r_a=4$, gælder (I) og (V), men ikke (IV). Sættes endelig $a=s=2$, $b=c=r=r_a=1$, gælder (I) og (IV), men ikke (V), og beviset er fuldført.

LITTERATUR

- [1] N. BOURBAKI: *Algèbre*, Chap. IV–V. Paris 1950. (Appendice I, exercise 3.)
- [2] K. W. FEUERBACH: *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*. 2. Ausgabe, Berlin 1908.
- [3] JUL. PETERSEN: *De algebraiske Ligningers Theori*. København 1877. (§ 23.)

BOKMELDINGER

C. B. ALLENDOERFER—C. O. OAKLEY: *Principles of mathematics*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 15 + 448 pp. sh. 37/6.

(Innehållsfortegnelse i NMT 3 (1955), s. 170.)

Denna bok är i första hand avsedd för nybörjare vid amerikanska »liberal arts colleges». De traditionella matematikkurserna för dessa studerande är till innehåll och omfattning jämförliga med de nordiska gymnasiekurserna i matematik. Författarna till »Principles of mathematics» är mycket kritiska mot dessa kurser och anser att de är föråldrade och att det är hög tid att man även på detta stadium tar hänsyn till den enorma utvecklingen inom matematiken under de senaste hundra åren. Enligt deras åsikt bör även nybörjare kunna få en viss förståelse för modern matematik om man i de elementära kurserna inför moderna betraktelsesätt och begreppsbildningar. Som uttryck för dess reformidéer har »Principles of mathematics» intresse även utanför den krets den egentligen är avsedd för.

Författarna söker realisera sitt program bl. a. genom att inleda boken med några kapitel, vilka skall tjäna som introduktion till »abstrakt matematiskt tänkande». Även i Sverige har på universitetshåll diskuterats om inte studenterna i samband med de elementära studierna i matematik borde tränas något i formell logik, varigenom deras matematikstudier skulle underlättas på flera punkter. Det räcker kanske att nämna hur svårt många studenter har att neget ett visst påstående, t. ex. att omtala vad det innebär att en funktion *inte* är likformigt kontinuerlig, för att motivera varför man är avgjort positiv till det första kapitlet i föreliggande bok, i vilket de enklaste begreppen och satserna i logiken genomgås. Kapitel 2, »The number system», accepterar man också, men mera tvivelaktigt är det om presentationen av grupp-, kropp- och mängdbegreppen i de följande tre kapitlen är så värdefull. Det kan t. ex. ifrågasättas om den ytliga behandling det här är fråga om ger de studerande någon förståelse för modern matematik, vilket ju är ett av författarnas huvudmål.

Efter dessa fem kapitel behandlas i sju kapitel det, som författarna anser vara väsentligt i de traditionella kurserna i »college algebra», trigonometri, analytisk geometri och »calculus». Ofta intresserar sig författarna mera för den begreppsmässiga än den tekniska sidan av teorin. Sålunda diskuteras funktionsbegreppet synnerligen grundligt i kapitel 6, där man ger en modern definition av funktion som en par mängd med viss egenskap. Många givande synpunkter framföres, men framställningen är ganska omständig och man undrar om nybörjare kan ha intresse för många av de subtila detaljer, som behandlas. I de följande kapitlen genomgås utan krav på stränghet speciella funktioner, analytisk geometri m. m. Gränsvärdesbegreppet diskuteras i kapitel 11. En noggrann definition av gränsvärde ges, men de flesta satser meddelas utan bevis. Kapitel 12, »Calculus», inledes med en skiss av integraldefinitionen, varefter följer huvudsakligen obevisade satser om derivator och integraler. I momentet om maxima och minima göres även här de i elementära läroböcker vanliga felaktiga påståendena om derivatans tecken i en omgivning av en extrempunkt. Även om kapitel 12 endast skall betraktas som en kortfattad introduktion till differential- och integralkalkyl, så är framställningen ändå alltför urvattnad. T. ex. göres inte något försök att definiera exponentialfunktionen e^x , trots att derivatan av såväl denna funktion som logaritmfunktionen meddelas. Boken avslutas med ett elementärt kapitel om statistik och sannolikhetskalkyl, där knappast några av de tidigare utvecklade matematiska hjälpmedlen användes.

»Principles of mathematics» innehåller otvivelaktigt många nya synpunkter av intresse för den elementära matematikundervisningen. Enligt recensentens uppfattning har författarna emellertid knappast lyckats med sin föresats att ge väsentliga drag av modern matematik. Det förefaller synnerligen tvivelaktigt om något sådant över huvud taget är möjligt på detta stadium.

Lennart Sandgren

A. O. GELFOND: *Ganzzahlige Lösungen von Gleichungen*. (Blaschke, Math. Einzelschriften 2.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1954. 59 S. Brosch. DM 7.80.

(Innehållsförteckning i NMT, dette hefte, s. 41.)

Den kjente russiske tallteoretiker Gelfond holdt i 1951 en serie populære forelesninger over ubestemte ligninger ved Moskva-universitetet. Forelesningene ble offentliggjort året etter, og foreligger nå i tysk oversettelse.

Læren om de ubestemte eller diofantiske ligninger er et meget om-

fattande emne, kanskje særlig fordi stoffet i så høy grad også appellerer til amatørerne på matematikkens område. Problemstillingen er nemlig så lettfattelig: løsning av ligninger i rasjonale eller særlig i hele tall. De fleste lærebøker eller oversikter over teorien forutsetter imidlertid en viss matematisk skolerung, og derfor skulle Gelfonds meget elementære bok ha en opplagt misjon.

Forfatteren utvikler først elementene av kjedebrøk-teorien, og bruker dette til fullstendig løsning av ligningen $ax + by + c = 0$ i hele tall. Etter et avsnitt om Pytagoreiske trekkanter kommer så en nokså inngående undersøkelse av den Pellske ligning $x^2 - Ay^2 = 1$. Først behandles det enkle talleksempel $A = 2$, hvor kjedebrøken for $\sqrt{A}$ får periodelengde 1. Så vises det at hvis ligningen overhodet er løsbart, vil alle løsninger $x + y\sqrt{A}$ være potenser av en grunnløsning $x_0 + y_0\sqrt{A}$, og tilslutt blir det bevist, gjennom en rekke skritt, at ligningen alltid er løsbart. Det blir derimot *ikke* nevnt at kjedebrøken for $\sqrt{A}$ alltid er periodisk, og at grunnløsningen av Pells ligning kan finnes ved hjelp av perioden. Selv om et *bevis* for dette kanskje ville føre for langt, er det merkelig at et så interessant og elegant resultat er forbigått i taushet.

Boken avsluttes med en kort omtale av ligninger av høyere grad; her er det selvsagt ikke mulig å gi bevisene. Thues sats er nevnt, og forfatteren viser meget instruktivt hvorledes den leder til problemet om rasjonal approksimasjon av algebraiske tall. Etter en kort historikk om Fermats ligning $x^n + y^n = z^n$ gjennomføres uløsbartbeviset for $n = 4$, etter den klassiske metode med »infinite descent«.

Alle gjennomførte bevis er meget grundige og krever bare små matematiske forutsetninger. Utvalget av stoff virker fornuftig, men kanskje ikke særlig inspirerende. Man må ønske boken velkommen som en verdifull tilvekst til den populære litteratur om ubestemte ligninger.

Ernst S. Selmer

KARL SCHÜTTE: *Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen*. (Index of mathematical tables.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1955. 143 S. Ganzl. DM 14.50.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 43.)

Den stora mängd tabeller, som framsprungit genom de senaste decenniernas utveckling inom den numeriska analysen och angränsande områden, har också skapat ett behov av översikter över tillgängliga tabellverk. Under en följd av år har därvid det kända och omfångsrika arbetet av Fletcher, Miller och Rosenhead, publicerat i London 1946, utgjort standardverket i detta avseende, men det är naturligt att man nu börjat

känna ett behov av en modernare uppslagsbok. Föreliggande arbete utgör ett försök i denna riktning.

Omkring 60% av innehållet omfattar matematiska tabeller, medan resten utgöres av tabeller från olika tillämpningsområden. Endast den förra delen kommer emellertid att behandlas här.

Förf. har sökt undvika äldre arbeten, speciellt sådana där noggrannheten är låg, men man får likväl intrycket, att materialet bort sovras ytterligare. Systematiken är bitvis föga konsekvent genomförd. Framför allt saknar man emellertid uppgifter om argument, intervall och differenser, och vidare skulle det ibland inte skada med en antydning om vederhäftigheten. Den som någon gång varit tvungen att använda Hayashis tabell, en stark aspirant på världsmästartiteln i fråga om tryckfel, skulle nog vara speciellt intresserad av en dylik uppgift.

Det begränsade utrymmet tillåter endast ett fåtal detaljmarkeringar. Bland WPA:s tabeller över naturliga logaritmer upptages endast en volym utav fyra. Den från samma håll emanerande tabellen över $\arctg x$ (1942) liksom en senare upplaga från NBS (1953) tycks ha blivit bortglömda. 606 decimaler för e resp. 808 för π är inte längre gällande världsrekord; i MTAC har angivits 3000 för e och nyligen 3089 för π . Såväl e som e^{-1} ges med 2500 decimaler i NBS tabell över e^x . Den komplexa Γ -funktionen finns numera tabulerad även i NBS Appl. Math. Series. Bland litteraturen om matematikmaskiner saknar man bl. a. Bowden, *Faster than thought*, och bland böcker om numeriska metoder bl. a. Collatz' verk om differentialekvationer. I åtskilliga fall är uppgifterna om tryckort och tryckår felaktiga.

Använd med omdöme ger emellertid boken åtskilliga värdefulla upplysningar, åtminstone så länge det inte gäller allt för komplicerade funktioner, och som en »första hjälp» kan den trots de påtalade bristerna rekommenderas.

Carl-Erik Fröberg

KARL STRUBECKER: *Differentialgeometrie, I. Kurventheorie der Ebene und des Raumes.* (Sammlung Götschen 1113/1113a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1955. 150 S., 18 Fig. DM 4.80.

(Innehållsförteckning i NMT 3 (1955), s. 118.)

Medels vektorkalkyl ges i föreliggande del I av en lärobok i differentialgeometri den klassiska teorin för plan- och rymdkurvor.

Förutom plana kurvors båglängd, krökning, evoluta, evolvent och oskulation mellan tvenne kurvor undersökas speciellt konvexa kurvor (Eilinen) och kurvor med konstant bredd samt s. k. Zindlerska kurvor. För rymdkurvor behandlas förutom deras flexion, torsion (Frenets form-

ler) den osculerande sfären samt enveloppen till enparametriga ytskaror, speciellt enveloppen till rymdkurvors osculerande plan och normalplan, s. k. torsionsytor. Det bör särskilt framhållas att betraktelser utföras även för komplexa figurer: komplexa kurvor i planet och ännu mera i rymden, för isotropa plan och rätta linjer, isotropa plan- och rymdkurvor.

Framställningen är god och klar samt underlättas av de behandlade exemplen och goda figurerna.

Lauri Pimiä

MOTTATTE BØKER

R. Albrecht—H. Hochmuth: *Übungsaufgaben zur höheren Mathematik, III*. Verlag R. Oldenbourg, München, 1956. 128 S., 39 Fig. Brosch. DM 9.80.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung: Elementar integrierbare Typen. Graphische Verfahren. Kurvenscharen 5–56 * Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung 57–101 * Systeme linearer Differentialgleichungen 102–116 * Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung 117–121 * Vermischte Aufgaben 122–128.

Paul G. Andres—Hugh J. Miser—Haim Reingold: *Basic mathematics for science and engineering*. John Wiley & Sons, New York, 1955. 846 pp. \$ 6.75.

Numerical computations 1–43 * Simple algebraic operations 44–91 * Functions and their graphs 92–132 * Trigonometric functions 133–180 * The graphs of the trigonometric functions 181–221 * Simple properties of vectors 222–244 * Algebraic operations 245–268 * Exponents and radicals 269–305 * Logarithms 306–353 * The fundamental relations of trigonometry 354–384 * The oblique triangle 385–408 * The j operator 409–440 * Linear equations and determinants 441–484 * Quadratic equations and equations of higher degree 485–536 * The straight line 537–563 * Circles and loci 564–591 * Equations of the second degree: The conics 592–622 * Elements of solid analytic geometry 623–654 * The elements of differential calculus 655–699 * The elements of integral calculus 700–729 * Appendix 730–774 * Answers to exercises 775–828 * Index 829–846.

Wilhelm Blaschke: *Einführung in die Geometrie der Waben*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus, 4.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1955. 108 S. Brosch. SFr. 15.25.

Kurvenwaben in der Ebene 9–55 * Flächenwaben 55–84 * Bemerkungen über Viererwaben von Kurven in der Ebene 85–96 * Einiges über Kurvenwaben im Raum 97–105 * Stichworte und Namen 106–108.

R. Courant: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*. Band II: Funktionen mehrerer Veränderlicher. Dritte, verbesserte Aufl. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 11+468 S., 110 Fig. Ganzl. DM 36.00.

Vorbemerkungen über analytische Geometrie und Vektorrechnung 1–31 * Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre Ableitungen 31–98 * Ausbau und Anwendungen der Differentialrechnung 98–187 * Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher 187–305 * Integration über mehrdimensionale Bereiche. Fortsetzung 305–364 * Anwendungen, insbesondere Differentialgleichungen 364–431 * Verzeichnis der wichtigsten Formeln und Sätze zu beiden Bänden 432–460 * Sachverzeichnis zum zweiten Bande 461–468.

David Fog: *Matematik for landinspektører og skovbrugere*. 2. udg. Den kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, København, 1955. 391 s. D. kr. 32.00.

Aritmetik og algebra 1–16 * Elementær trigonometri og analytisk geometri 17–45 * Koordinatændringer. Elementære transformationer 46–56 * Keglesnit og keglesnitsflader 57–78 * Sfærisk geometri og sfærisk trigonometri 79–90 * Kontinuerte funktioner 91–101 * Differentialregning 102–124 * Integralregning 125–152 * Logaritme- og eksponentialfunktioner 153–161 * Rækketeori 162–187 * Integrationsmetoder 188–199 * Kurveteori 200–216 * Funktioner af 2 variable. Fladeteori 217–249 * Dobbeltintegral 250–258 * Nomografi 259–267 * Differentialligninger 268–297 * Regning med tilnærmede tal. Fejlteori 298–334 * Opgaver 335–386 * Register 387–391.

A. O. Gelfond: *Ganzzahlige Lösungen von Gleichungen*. (Blaschke, Math. Einzelschriften 2.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1954. 59 S. Brosch. DM 7.80.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 37.)

Gleichungen mit einer Unbekannten 7–8 * Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten 8–17 * Beispiele von quadratischen Gleichungen mit drei Unbekannten 18–22 * Bestimmungen aller Lösungen einer Gleichung von der Form $x^2 - Ay^2 = 1$ 23–34 * Allgemeiner Fall der quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten 34–45 * Gleichungen mit zwei Unbekannten von höherem als dem zweiten Grade 45–50 * Algebraische Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade mit drei Unbekannten und gewisse Exponentialgleichungen 51–59.

Homer E. Newell, Jr.: *Vector Analysis*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 11+216 pp. sh. 41/6.

Scalars and vectors 3–27 * A review of some mathematical concepts 28–46 * Differentiation of vectors 47–54 * Divergence and curl 55–70 * The operator ∇ 71–78 * Relationships involving ∇ 79–82 * Curvilinear coordinates 83–104 * General theorems and potential theory 105–128 * Miscellaneous applications 131–140 * Motions in space 141–154 * A sketch of electromagnetic theory 155–197 * Answers to exercises 199–207 * Index 209–216.

Hans-Heinrich Ostman: *Additive Zahlentheorie*. Teil I: Allgemeine Untersuchungen. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 7.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 7+233 S. DM 29.80.

Der Summenbegriff; allgemeine Eigenschaften 1–21 * Mengen mit Relativnullen 22–24 * Basismengen 24–26 * Zusammenhang mit DIOPHANTischen Gleichungen 26–27 * FERMAT-Indizes 27–28 * Verallgemeinerungen von Σ 29 * Anzahlfunktion, Kompositionen, Partitionen 29–69 * Die verschiedenen Dichtebegriffe 70–103 * Anzahlfunktion reduzibler Mengen 103–113 * Die zweigliedrige obere asymptotische Dichte 114–119 * Die arithmetischen (finiten) Dichten reduzibler Mengen 119–136 * Die asymptotischen Dichten reduzibler Mengen 136–156 * Die Genauigkeit der Abschätzungen 156–161 * Basen endlicher Ordnung 161–173 * Minimalbasen 173–182 * Wesentliche Komponenten 182–189 * Weitere Zusammenhänge mit den zugeordneten dyadischen Reihenentwicklungen 189–201 * Literaturverzeichnis 202–229 * Autorenverzeichnis 230–231 * Sachregister 232–233.

M. Schuler—H. Gebelein: *Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen*. (Mit deutschem und englischem Text.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 24+296 S., 11 Fig. Ganzl. DM 58.00.

Vorwort—Preface V–IX * Inhaltsverzeichnis—Contents X * Einführung—Introduction XI–XXIV * Tab. I: Funktionen $G(q^4, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte q und θ) 1–52 * Tab. II: Funktionen $G(q^4, z)$ laufend nach q^4 53–80 * Zugehörige Werte q und θ zusammengestellt 81–82 * Tab. III: Funktionen $H(q^3, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte q und θ) 83–128 * Tab. IV: Funktionen $H(q^3, z)$ laufend nach q^3 129–156 * Zugehörige Werte q und θ zusammengestellt 157–158 * Tab. V: Jacobische elliptische Funktionen laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte für θ , $-\lg \cos \theta = -\lg k'$, K und K/E) 159–216 * Tab. VI: Jacobische elliptische Funktionen laufend nach q 217–218 * Zugehörige Werte für $-\lg k'$ und θ 219–278 * Zugehörige Werte für K und K/E 279–280 * Tab. VII: Tafeln für die Umrechnung zwischen dem Legendreschen Modul θ und dem Jacobischen Parameter q 281–296.

M. Schuler—H. Gebelein: *Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen*. (Mit deutschem und englischem Text.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 10+114 S., 11 Fig. Ganzl. DM 29.60.

Vorwort—Preface V–X * Inhaltsverzeichnis—Contents XI * Einführung—Introduction 1–24 * Tab. I: Jacobische elliptische Funktionen laufend nach z mit Angabe der zugehörigen Werte θ 25–52 * Tab. II: Jacobische elliptische Funktionen laufend nach q 53–66 * Werte für θ und $-\lg \cos \theta$ 67–73 * Werte für K und K/E 74 * Tab. III: Funktionen $\bar{G}(q, z)$ und $\bar{H}(q, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte θ) 75–90 * Tab. IV: Funktionen $\bar{G}(q, z)$ und $\bar{H}(q, z)$ laufend nach q 91–106 * Tab. V: Tafel für die Umrechnung zwischen dem Legendreschen Modul θ und dem Jacobischen Parameter q 107–112 * Tab. VI: Tafeln der Koeffizienten für die Interpolation nach Everett 113–114.

Karl Schütte: *Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen.* (Index of mathematical tables.) Verlag R. Oldenbourg, München, 1955. 143 S. Ganzl. DM 14.50.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 38.)

Vorwort 7–21 * Abkürzungen 22–23 * Numerisches und praktisches Rechnen 24–32 * Logarithmen der natürlichen Zahlen 33–43 * Logarithmen der Kreisfunktionen 44–50 * Numeri der Kreisfunktionen 51–59 * Aus elementaren Funktionen abgeleitete einfache Funktionen 60–65 * Primzahlen, Primfaktoren und Faktoren, Zins- und Rententafeln; Kettenbrüche, Zahlentheorie 66–67 * Fakultäten, Gammafunktionen, Exponential- und Hyperbelfunktionen; elementare transzendente Funktionen 68–72 * Elliptische Funktionen und Integrale, Kugel-, Besselsche und andere höhere Funktionen 73–81 * Integraltafeln und weitere höhere Funktionen; numerische Lösung von Gleichungen und Differentialgleichungen 82–89 * Tafeln für die Anwendung in Physik, Chemie und anderen angewandten Naturwissenschaften 90–105 * Astronomie und Astrophysik 105–118 * Geodäsie und Geophysik 119–123 * Nautische und aeronautische Ortsbestimmung 123–128 * Meteorologie 129–130 * Astronautik 131 * Tafeln ohne genauere Inhaltsangabe, Formelsammlungen, Verschiedenes, Masse, Gewicht, Währungen 132–135 * Index der Autoren 136–141 * Index der Institute 142–143.

Claude E. Stout: *Shop mathematics.* John Wiley & Sons, New York, 1955. 11+282 pp.

Part 1: Integers, fractions, decimals, gearing, cutting speeds and feeds 1–70 * Part 2: Negative numbers, arithmetic of letters, powers and roots, area and volume, pythagorean theorem, simple equations and systems of equations 71–121 * Part 3: Fundamentals of geometry and trigonometry, right and oblique triangles, vectors, graphs 123–179 * Part 4: Logarithms, exponents and indices, use of logarithmic tables, use of slide rule for the fundamental operations and for trigonometric calculations 181–243 * Table of trigonometric functions 245–278 * Index 279–282.

Hans Wittich: *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen.* (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 8.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 4+163 S., 31 Fig. DM 25.60.

Einleitung 1–4 * Theorie des Maximalgliedes von WIMAN-VALIRON 4–11 * Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungslehre 12–31 * Weitere Folgerungen aus den Hauptsätzen. Ergänzungen 31–53 * Umkehrung des zweiten Hauptsatzes 53–62 * Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen 63–82 * Konforme und quasikonforme Abbildungen von Ringgebieten 82–105 * Über das Typenproblem 105–118 * Das Umkehrproblem der Wertverteilung 118–145 * Funktionen mit beschränktem DIRICHLET-Integral 145–158 * Literaturverzeichnis 159–163.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 74–76 sendes til *redaksjonssekretæren* innen 25. mai 1956. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til redaksjonssekretæren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

74. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}.$$

Otto Marstrander

75. Der er givet en konveks firkant $ABCD$ med siderne $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$ og $d=DA$ samt diagonalene $e=AC$ og $f=BD$. Vis, at firkanten da og kun da kan indskrives i en cirkel, når

$$\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Fr. Fabricius-Bjerre

76. I en sfærisk trekant ABC med sider a , b og c betegner r den sfæriske radius for den indskrevne cirkel, r_a , r_b og r_c de sfæriske radier for de ydre berøringscirkler (nabotrekanternes indskrevne cirkler) og R den sfæriske radius i den omskrevne cirkel. Idet s er trekantens halve perimeter, og

$$\delta = \frac{1}{2} \sin a \sin b \sin C = \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)},$$

skal man vise formlerne

$$\begin{aligned}
& \operatorname{tgr} \operatorname{tgr}_a \operatorname{tgr}_b \operatorname{tgr}_c = \delta^2, \\
& \cot r_a + \cot r_b + \cot r_c - \cot r = 2 \operatorname{tg} R,^1 \\
& \operatorname{tgr}_a + \operatorname{tgr}_b + \operatorname{tgr}_c - \operatorname{tgr} = \operatorname{tg} R (1 + \cos a + \cos b + \cos c), \\
& \operatorname{tgr}_b \operatorname{tgr}_c + \operatorname{tgr}_c \operatorname{tgr}_a + \operatorname{tgr}_a \operatorname{tgr}_b - \operatorname{tgr} (\operatorname{tgr}_a + \operatorname{tgr}_b + \operatorname{tgr}_c) \\
& = \cos a + \cos b + \cos c - \cos b \cos c - \cos c \cos a - \cos a \cos b.
\end{aligned}$$

Herudfra danner man let den fjerdegradsligning, hvis rødder er tgr_a , tgr_b , tgr_c og $-\operatorname{tgr}$. De 4 anførte formler går ved en passende grænseovergang, hvor kuglens radius går mod ∞ , over i formlerne (8), (12), (22) og (21) i Anders Bagers artikel i dette hefte.

David Fog

77. a) Bestäm synvinkeln från en punkt till en rätlinig sträcka och sök dess maximum och minimum, då punkten rör sig längs en rät linje eller en cirkel.

b) Bestäm den ort, från vilken två raka sträckor synas under lika stora vinklar.

Hj. Tallqvist

78. a) Et punkt P kan bevege seg i det indre av en likesidet trekant. Vis at summen av de vinkelrette avstander fra P til trekantens sider er konstant.

b) I en trekant ABC er alle vinklene mindre enn 120° ; P er et punkt i trekantens indre. Vis, ved å nytte resultatet i a), at $PA + PB + PC$ blir minst når P ligger slik at en ser alle trekantens sider fra P under vinkler på 120° .

79. Skriver en $7/17$ som dyadisk brøk:

$$\frac{7}{17} = 0; \overline{0110\ 1001} \dots,$$

består perioden av 8 sifre slik at annen halvdel av perioden er »komplementet« til første halvdel (hvert av sifrene 0 og 1 er byttet ut med det andre). Vis at ethvert rasjonalt tall mellom 0 og 1 som kan skrives på formen $m/(2^n + 1)$ gir en dyadisk brøk der perioden har $2n$ sifre, og annen halvdel av perioden er »komplementet« til første halvdel.

80. Sett

$$p_N = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

og $p = \sin \pi x / \pi x$. Vis at for $|x| < 1$ er

¹ Se f. eks. Chr. Gudermann: *Lehrbuch der niederen Sphärik*, Münster 1835, 9. Abschnitt. Her findes en omfattende samling formler, hvori indgår radierne i en sfærisk trekants og dens nabotrekantens indskrevne og omskrevne cirkler.

$$\frac{p_N}{p} = 1 + \frac{x^2}{N + \alpha},$$

der $|\alpha| < 1$ (jfr. Otto Marstrand's løsning i dette hefte av oppg. 66).

81. La nullpunktene i polynomet

$$f(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n$$

være $r_1, r_2, \dots, r_n$. Vis at det polynomet $F(x)$ som har nullpunktene $r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2$ er

$$F(x) = \sum a_{2i} a_{2j} x^{n-i-j} - \sum a_{2i+1} a_{2j+1} x^{n-i-j-1},$$

der summene utstrekkes over alle hele, ikke-negative i og j , idet $a_k = 0$ for $k > n$.

LØSNINGER

66. Wallis' formel kan skrivas på formen

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right).$$

Visa, att för tillräckligt stora N gäller

$$\frac{1}{2\pi(N+1)} \leq \left| \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) - \frac{2}{\pi} \right| \leq \frac{2}{\pi(4N-3)}.$$

Arne Pleijel

Lösning: Vi setter

$$P = \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right), \quad S = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1},$$

og får da

$$P > 1 - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} > 1 - S,$$

eller

$$1 - P < S < \frac{PS}{1 - S}.$$

Videre blir

$$\frac{1}{P} = \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right) > 1 + S,$$

eller $1 - P > PS$. Nå er

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{4N+2}.$$

Multipliserer vi derfor

$$PS < 1 - P < \frac{PS}{1-S}$$

med $\prod_{n=1}^N (1 - 1/4n^2)$, får vi

$$\frac{1}{\pi(2N+1)} < \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) - \frac{2}{\pi} < \frac{2}{\pi(4N+1)}$$

for $N \geq 1$.

Otto Marstrander

67. Låt L och L' vara längden av en regulär polygon P , resp. av dess ortogonalprojektion P' , då projektionsvinkeln är v . Visa att

$$2L' \geq L(1 + \cos v).$$

Magnus Tideman

Lösning: La et linjestykke med lengden s ligge i P 's plan og danne vinkelen φ med de to plans skjæringslinje. Lengden av linjestykkets projeksjon blir da

$$s' = s \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 v} = s \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 v}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 v}} \right),$$

som gir

$$s' \geq s \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 v}{1 + \cos v} \right) = s \left(1 - \frac{1}{2} (1 - \cos v)(1 - \cos 2\varphi) \right)$$

(hvor likhetstegnet bare gjelder dersom $\sin^2 \varphi$ er 0 eller 1), eller

$$2s' \geq s(1 + \cos v) + s(1 - \cos v) \cos 2\varphi.$$

Idet s er sidelengden til P , får vi da

$$2L' \geq L(1 + \cos v) + s(1 - \cos v) \sum_{h=0}^{n-1} \cos 2 \left(\alpha + \frac{2h\pi}{n} \right),$$

hvor n er antall sider i P , og α er vinkelen mellom en av sidene i P og skjæringslinjen. Da den siste summen som kjent er lik 0, får vi

$$2L' \geq L(1 + \cos v),$$

hvor likhetstegnet bare kan gjelde dersom P er et kvadrat med en side parallell med skjæringslinjen.

Otto Marstrander

Også løst av H. Killingbergtrø og Rolv Rasmussen.

68. Polynomet $P(x)$ har endast enkla nollställena $a, b, \dots, m$. Visa, att om gradtalet av $P(x)$ är $> \mu + 1$, så gäller

$$\frac{a^\mu}{P'(a)} + \frac{b^\mu}{P'(b)} + \dots + \frac{m^\mu}{P'(m)} = 0 \quad (\mu \text{ heltal och } \geq 0).$$

Lennart Busch

Lösning: Da graden av $x^\mu(x-a)$ er mindre enn graden av $P(x)$, kan $x^\mu(x-a)/P(x)$ utvikles i partialbrøker. Vi får da

$$(1) \quad \frac{x^\mu(x-a)}{P(x)} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{M}{x-m} = 0.$$

Multiplikasjon med $x-b$ gir

$$B = -\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^\mu(x-a)}{\frac{P(x) - P(b)}{x-b}} = \frac{b^\mu(a-b)}{P'(b)}.$$

De øvrige tellere i (1) bestemmes på tilsvarende måte. Ved å innføre verdiene av $B, \dots, M$ i (1) og deretter la x konvergere mot a , fås den søkte formel

$$\frac{a^\mu}{P'(a)} + \frac{b^\mu}{P'(b)} + \dots + \frac{m^\mu}{P'(m)} = 0.$$

Otto Marstrander

Også løst av Anders Bager, Bent Christiansen, Magnus Hegranes og Rolv Rasmussen.

69. Vis at

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{1}{15} \pi^4, \quad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \frac{7}{120} \pi^4.$$

Åge Ramberg

Løsning: Af identiteten

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-kx} + \frac{e^{-kx}}{e^x - 1}$$

følger umiddelbart

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \sum_{\lambda=1}^k \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx + \int_0^\infty \frac{x^n e^{-kx}}{e^x - 1} dx.$$

De k første integraler er bestemt ved

$$\sum_{\lambda=1}^k \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-\lambda x} dx = \Gamma(n+1) \sum_{\lambda=1}^k \lambda^{-(n+1)},$$

hvor $\Gamma(n+1)$ for hele n er lig $n!$. Af

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots} < 1$$

indses, at det sidste integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-kx}}{e^x - 1} dx < \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-kx} dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}$$

konvergerer mod nul for $k \rightarrow \infty$. Der gælder derfor

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n+1) \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} = \Gamma(n+1) \zeta(n+1),$$

hvor $\zeta(n+1)$ er Riemanns ζ -funktion.

De søgte integraler bliver herefter

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \Gamma(4) \zeta(4) = 3! \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx - \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \frac{(2x)^3}{e^{2x} - 1} d(2x) = \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{7}{120} \pi^4.$$

Hans-Otto Tønder

Også løst av Otto Borgersen. Løsninger er sendt inn av en rekke andre, men de lider alle av den mangel at leddvis integrasjon av en rekke er utført uten noen motivering av dens tillatelighet.

70. I oppgave 49 ble det hevdet at rekken

$$\sum_{(n)} \frac{1}{n},$$

utstrakt over alle n som skrevet i titallsystemet ikke inneholder siffret 9, er konvergent. Finn en øvre skranke for summen, helst så liten som mulig.

R. Tambs Lyche

DEN FØRSTE INTERNORDISKE PRISOPGAVE

Som omtalt i NMT 3 (1955), s. 126, indkom der ialt 15 besvarelser på den internordiske prisopgave. Peter Winge, København, fik tildelt første præmie (en rejse til Island med ophold i Reykjavik), medens Helgi Jónsson, Reykjavik, Per Wennerberg Karlsson, København, og Asmus L. Schmidt, Ribe, Danmark, fik præmier i form af pengebeløb.

I det følgende skal der nu ved uddrag af de præmierede besvarelser gives en behandling af opgaverne (teksten findes i NMT 2 (1954), s. 128–130). Uddragene er dog i enkelte tilfælde forkortet og let bearbejdet.

Regnar Norgil

1. Vi betragter korden AB og lader den i teksten nævnte linie være parablens ledelinie l (fig. 1). AB projiceres på l i A_1B_1 og dens midtpunkt M i M_1 , der er midtpunktet af A_1B_1 . Punktet M_1 er endvidere skæringspunkt mellem den til AB hørende diameter d og l ; d skærer parablen i et punkt R , der er røringsspunkt for en med AB parallel tangent t , og M_1 er spejlbilledet af brændpunktet F i t . Linien M_1F er altså vinkelret på t og følgelig også på AB . For en vilkårlig trekant ABC , der er indskrevet i parablen, gælder derfor, at når man projicerer sidernes midtpunkter på ledelinien og fra de fremkomne

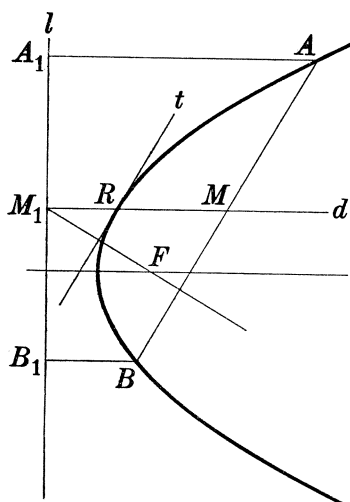


Fig. 1

punkter på ledelinien og fra de fremkomne projektioner fælder vinkelrette på de respektive sider, vil disse tre linier gå gennem samme punkt, nemlig parablens brændpunkt.

Erstattes nu ledelinien med en vilkårlig linie l_1 vinkelret på parablens akse, ses ved en parallelforskydning, at de tre i opgavens tekst nævnte linier vil gå gennem samme punkt af parablens akse, og at dette afstand fra l_1 er $\frac{1}{2}p$, hvor p er parablens parameter.

2. Vi tegner en linie l_1 vinkelret på den givne akseretning (fig. 2). De tre punkter A , B og C forbindes, og midtpunkterne

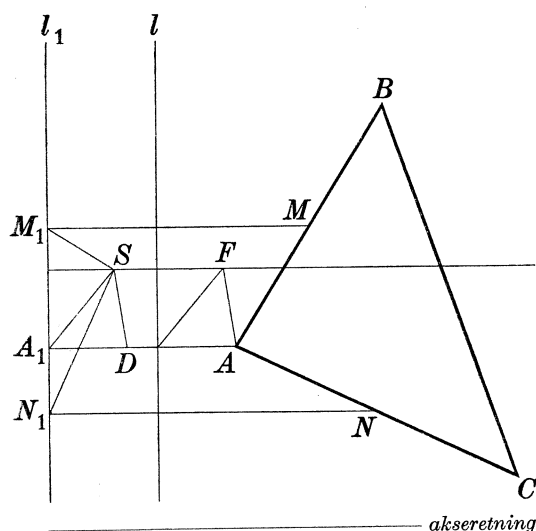


Fig. 2

M og N af AB og AC projiceres på l_1 i M_1 og N_1 . De vinkelrette fra M_1 og N_1 på henholdsvis AB og AC skærer da ifølge nr. 1 hinanden i et punkt S , der ligger på parablens akse i afstanden $\frac{1}{2}p$ fra l_1 . Den søgte parabel må derfor kunne frembringes af en parabel med ledelinie l_1 og brændpunkt S ved en passende parallelforskydning i aksens retning.

A projiceres på l_1 i A_1 , og midtnormalen til A_1S skærer A_1A i D . Parallelforskydningen må da have størrelsen DA , og den fører S over

i den søgte parabels brændpunkt F (og l_1 over i dens ledelinie l).

Af det ovenstående følger, at der findes en og kun een parabel, som er omskrevet om en given trekant ABC og har en given akseretning (der ikke er parallel med nogen af trekantens sider); thi — med betegnelserne ovenfor — vil den eneste mulighed være den parabel, som har ledelinie l og brændpunkt F . Denne parabel går ifølge konstruktionen gennem A , og ved hjælp af den i nr. 1 viste sætning ses den også at gå gennem B og C .

3. Ved benyttelse af sætningen, at to tangenters skæringspunkt og midtpunktet af den korde, der forbinder røringsspunkterne, ligger på en ret linie parallel med parablens akse, ser man, at de tre tangenters skæringspunkters projektioner på en linie l_1 vinkelret på den opgivne akseretning vil være de i nr. 1 nævnte midtpunkter af kordernes projektioner på l_1 .

Konstruktionen kommer da til at forløbe således (fig. 3). Skæringspunkterne A , B og C projiceres på l_1 i henholdsvis A_1 , B_1 og C_1 . Lad A_1 falde mellem B_1 og C_1 . Fra A_1 afsættes ud til hver side på l_1 et liniestykke

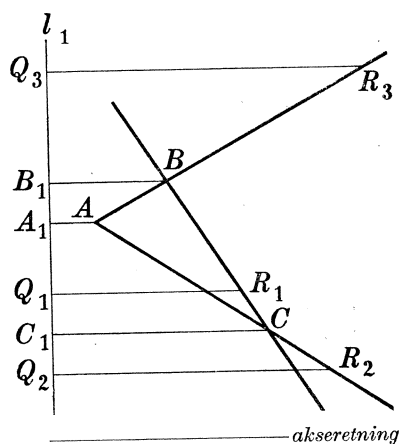


Fig. 3

af længden B_1C_1 , således at A_1 bliver midtpunkt af det fremkomne linie-stykke Q_2Q_3 . Afsætter man nu stykket Q_2C_1 fra C_1 ad l_1 mod B_1 (eller Q_3B_1 fra B_1 ad l_1 mod C_1), får man et punkt Q_1 , og de tre punkter Q_1 , Q_2 og Q_3 er projektionerne på l_1 af de tre røringspunkter. Linier gennem Q_1 , Q_2 og Q_3 parallelle med akseretningen skærer nu tangenterne i deres røringspunkter R_1 , R_2 og R_3 med parablen, og dennes akse og brændpunkt kan fastlægges som i nr. 2.

4. Alle besvarelser bygger på ganske simple analytiske regninger, og de skal derfor ikke medtages her.

5. Lad parablen $y^2 = px$ være givet. I tre vilkårlige punkter $\left(\frac{y_1^2}{p}, y_1\right)$, $\left(\frac{y_2^2}{p}, y_2\right)$ og $\left(\frac{y_3^2}{p}, y_3\right)$ af denne tegnes tangenter, hvis skæringspunkter bliver $\left(\frac{y_1y_2}{p}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, $\left(\frac{y_2y_3}{p}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ og $\left(\frac{y_3y_1}{p}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$. Skal disse punkter ligge på parablen

$$(y-b)^2 = p_1(x-a),$$

må man have

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_1+y_2}{2}-b\right)^2 &= p_1\left(\frac{y_1y_2}{p}-a\right), & \left(\frac{y_2+y_3}{2}-b\right)^2 &= p_1\left(\frac{y_2y_3}{p}-a\right), \\ \left(\frac{y_3+y_1}{2}-b\right)^2 &= p_1\left(\frac{y_3y_1}{p}-a\right). \end{aligned}$$

Ved subtraktion elimineres først a , derefter b , og man får $p=4p_1$.

Det kan tilføjes, at en betragtning ud fra nr. 4 af de to trekanten, der dannes med vinkelspidser i henholdsvis røringspunkterne og tangent-skæringspunkterne, også bekvemt fører til resultatet.

6. Ifølge nr. 5 er parameteren p_2 for den parabel P_2 , der har den opgivne trekants sider eller deres forlængelser som tangenter, 4 gange så stor som parameteren p_1 i den anden parabel P_1 , der går gennem trekantens vinkelspidser.

Nu vælges (fig. 4) et punkt B på P_1 (uden for P_2), og tangenterne til P_2 tegnes fra dette punkt; røringspunkterne kaldes R_1 og R_3 . Linien BR_1 skærer i almindelighed P_1 i endnu et punkt C , fra hvilket der kan tegnes endnu en tangent til P_2 ; lad denne have røringspunktet R_2 . Tangenterne R_3B og R_2C vil skære hinanden i et punkt A_1 på R_2R_3 's diameter d , og lad skæringspunktet mellem d og P_1 være A .

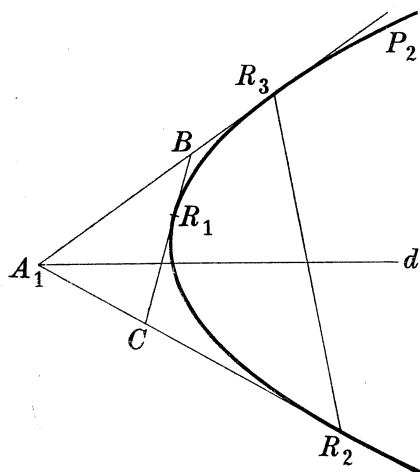


Fig. 4

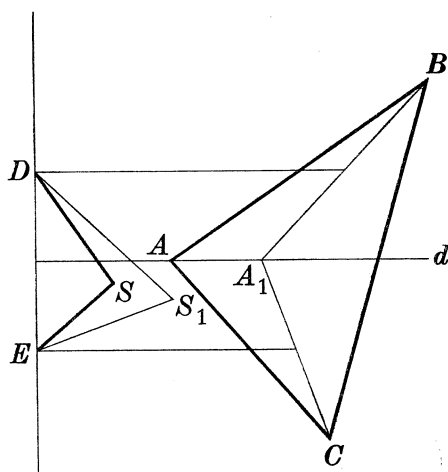


Fig. 5

Tænker man sig nu (fig. 5), at A_1 falder inden for P_1 , så vil der ifølge nr. 2 gennem A_1 , B og C kunne tegnes en (og kun een) parabel P_3 med den forelagte akseretning, og til bestemmelse af dennes halve parameter ($\frac{1}{2}p_3$) benyttes metoden fra nr. 1. Samtidig bestemmes til sammenligning $\frac{1}{2}p_1$.

Trekant DES kommer til at ligge helt inden i trekant DES_1 ; højden på DE fra S er derfor mindre end højden på DE fra S_1 , men den første højde er lig $\frac{1}{2}p_1$ og den anden lig $\frac{1}{2}p_3$. Vi har altså: $p_1 < p_3$, hvoraf $p_2 < 4p_3$.

Når imidlertid P_2 og P_3 ligger, som de gør i forhold til trekant A_1BC , har man ifølge nr. 5, at $p_2 = 4p_3$, d.v.s. en modstrid — A_1 ligger altså ikke inden for P_1 .

Antagelsen, at A_1 skulle ligge uden for P_1 , fører ligeledes til modstrid, hvilket ses ved på figuren at ombytte A og A_1 . Punkterne A og A_1 vil derfor falde sammen, og den parabel, der kan tegnes gennem A_1 , B og C , er P_1 selv. For ethvert valg af B på P_1 uden for P_2 (med enkelte undtagelser) vil man på den angivne måde kunne få en trekant, hvis vinkelspidser ligger på P_1 , og hvis sider eller deres forlængelser er tangenter til P_2 . Der findes altså uendelig mange trekanter af denne art.

PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVLER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier i Danmark udskrev i år i lighed med tidligere år prisopgaver for danske gymnasieelever og kursuselever til studentereksamen. For den bedste besvarelse er udsat en præmie på 100 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstrapræmier.

Særtryk af opgaverne blev tilsendt samtlige gymnasieskoler og kurser i Danmark. Indleveringsfristen udløb 1. april 1956.

Opgavernes ordlyd var følgende:

1. Lad A være et vilkårligt punkt på den rette linie, hvis ligning er $x=a$, hvor a er en positiv konstant, og lad B være punktet $(-a, 0)$. Gennem A og B tegnes to på hinanden vinkelrette linier, hvis skæringspunkt er P , og hvor $AP=2a$.

1) Find det geometriske sted for midtpunktet M af AP , når A gennemløber linien $x=a$.

2) Undersøg og tegn det fundne geometriske sted.

Gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt O og punktet M tegnes en ret linie l , hvis vinkel med x -aksen er v .

3) Find længden af OM som en funktion af v , idet v dog tænkes forskellig fra $\frac{\pi}{2} + p\pi$.

På linien l bestemmes et punkt Q , således at $OQ \cdot OM = 4a^2$.

4) Find det geometriske sted for Q , når M gennemløber den i 2) fundne kurve med undtagelse af punktet O .

5) Angiv dette geometriske steds art og beliggenhed i koordinatsystemet.

2. Bevis, at

$$\int_0^1 (1-x^2)^p dx = \frac{2p}{2p+1} \int_0^1 (1-x^2)^{p-1} dx,$$

hvor p er et vilkårligt tal større end eller lig med 1.

Idet man derefter antager, at n er et positivt helt tal, skal man beregne

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} dx.$$

3. En sfærisk polygon kaldes regulær, når alle dens sider er lige store, og alle dens vinkler er lige store.

Hvilke værdier kan p have, når en kugle skal dækkes helt af kongruente regulære konvekse p -kanter, som ikke har indre punkter fælles.

Idet n er antallet af regulære p -kanter, der støder op til hver af vinkelspidserne, skal man for hver mulig værdi af p angive de værdier, som n kan antage.

Bevis, at $(p-2)(n-2) < 4$.

Beregn for hvert muligt værdisæt af p og n siden i den regulære p -kant.

4. I hver af vinkelspidserne af en trekant ABC er anbragt en partikel, hvis masse angives ved samme tal som længden af den modstående side i trekanten.

Find partikelsystemets tyngdepunkt.

Tre lineære stænger, der overalt har samme masse pr. længdeenhed, er anbragt som sider i en trekant.

Find stangsystemets tyngdepunkt.

5. Idet

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

er en voksende talfølge, og

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

skal man vise, at hvis $n > p \geq 1$, så er

$$\frac{A_n - A_0}{n} > \frac{A_p - A_0}{p}.$$

Idet α er et givet tal større end 1, skal man dernæst vise, at når n og p er to hele positive tal, hvor $n > p \geq 1$, så er

$$\sqrt[n]{\alpha^p} - 1 < \frac{p}{n}(\alpha - 1).$$

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1955 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 14.2 E. Følner: *Om nogle funktionsrum fra de næstenperiodiske funktioners teori.*
14.3 R. V. Kadison, New York: *Certain aspects of spectral theory.*
21.3 E. Andersen: *Anvendelse af hulkortkalkulatorer i den praktiske matematik belyst ved et par eksempler.*
14.4 G. Ancochea, Madrid: *Géométrie projective et algèbre moderne.*
16.5 J. Nielsen: *En basis for undergrupper af fri grupper.*
19.9 F. P. Pedersen: *Om geodætiske linier på en torus.*
10.10 K. R. Buch: *Køproblemer i matematisk behandling (Glimt fra de stokastiske processers teori).*
7.11 N. E. Nørlund: *Tanker om tre videnskaber.*
21.11 H. Tornehave: *Et bevis af Bogoliouboff for hovedsætningen for næstenperiodiske funktioner.*
5.12 P. O. Neerup: *Hjelmslevs kongruenslære som analytisk geometri.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

- 17.10 D. Fog: *Om »stringent tænkning og prægnant udtryksform«.*
18.10 R. Petersen demonstrerede differentialanalysatoren.
19.10 W. Fenchel: *Det isoperimetriske problem.*
19.10 P. Mogensen og P. Rubinstein: *Hvorledes kan man forme en undervisning i differential- og integralregning for sproglige gymnasiaster? (Forhandling.)*

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 19.1 P. J. Myrberg: *Automorfisista thetafunktionista [Om automorfa thetafunktioner].*
23.2 K. Inkeri: *Fermat'n väittämästä ja ympyräkunnan luokkaluvusta [Om Fermat's hypotes och klasstalet för den cyklotomiska kroppen].*
13.3 R. Nevanlinna: *Gauss ja epäeuklidinen geometria [Gauss och icke-euklidisk geometri].*
20.4 G. af Hällström: *Exempel på användning av Laplace-transformationer för beräkning av sannolikhetsfördelningar.*
14.9 A. Pfluger, Zürich: *Ein alternierendes Verfahren auf Riemannschen Flächen.*
16.9 — *Ein Approximationssatz für harmonische Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen.*
21.9 P. Jordan, Hamburg: *Mathematische Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie.*
20.10 P. Kustaanheimo: *Finiittisistä geometrioista [Om finita geometrier].*
18.11 O. Frostman, Stockholm: *Extremalproblem inom potentialteorien.*

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND.

- 5.2 Årsmöte i Riihimäki. Förhandlingar och val. Programmet upptog ett industribesök och en diskussion om Läroverkskommitténs betänkande angående den inre utvecklingen av läroverken. Inledaren U. Kuuskoski berörde särskilt matematikens ställning. Livlig diskussion, varvid rätt stark kritik av betänkandet framfördes.
- 2-4.7 Föreläsnings- och exkursionsdagar i Uleåborg (c:a 130 deltagare). Utbildningen av läroverkslärare viktigaste fråga på programmet. Industribesök, utflykt samt en fem dagars rundresa i Lappland. Förbundets 20-årsjubileum firades 2.7. För första gången var representanter för broderförbunden i Danmark, Norge och Sverige närvarande.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

- 25.1 Trausti Einarsson: *Tyngdemåling i Island.*
- 15.3 Ari Brynjólfsson: *Jordens magnetiske felt.*
- 5.4 Þorkell Þorkelsson: *Nogle formler for trigonometriske rødder i algebraiske ligninger.*
- 1.11 Magnús Magnússon: *Elementarpartikler.*
- 13.12 Sigurkarl Stefánsson: *Parabler.*

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 25.1 I. Johansson: *Omkring limesbegrepet i den matematiske analyse.*
R. Tambs Lyche: *Om en konvergent tallfølge.*
- 23.2 Th. Skolem: *Gauss, hans liv og arbeider.*
- 22.3 O. Reiersøl: *Utleddning av differensialligninger og differensligninger for beregning av funksjoner definert ved integraler.*
- 28.4 F. John, New York: *Proper and improper problems for partial differential equations.*
- 4.10 E. B. Schieldrop: *Et nytt prinsipp i mekanikken.*
- 15.11 K. E. Aubert: *En generalisert idealteori.*
- 12.12 S. Selberg: *Om noen nyere resultater i den additive tallteori.*

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

Om disse foredragene foreligger det melding fra de forskjellige kretser:

- 10.2 W. Mikalsen: *Matematikken på språklinjene.* (Bergen.)
- 24.2 H. Christoffersen: *Grensebetraktninger i gymnasimatematikken.* (Oslo.)
- 17.3 Rundebordkonferanse om retteøving i matematikk. (Bergen.)
- 24.9 Th. Götharson, Karlskoga, og B. Rudberg: *Algebraundervisningen på de lavere trinn.* (Hamar.)
- 24.10 S. Stoesen, R. Bjercke og Th. B. Schyberg: *Skolen og handelen.* (Trondheim.)
- 31.10 Th. Gundersen: *Praktisk regning. Overgangsproblemer folkeskole—realskole.* (Hamar.)
- 31.10 Ø. Leinum: *Bokføring som praktisk fag.* (Trondheim.)
- 6.11 K. B. Sollesnes: *Matematikken på språklinjene.* (Stavanger.)
- 7.11 K. Kure: *Problemer i forbindelse med eksamensoppgaver i matematikk.* (Halden.)
- 8.11 K. Piene: *Matematikkens plass i amerikansk skole og lærerutdanning.* (Oslo.)

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

26.3 Möte i Stockholm:

- L. Hörmander: *Uppskattningar med energiintegral för allmänna partiella differentialekvationer med konstanta koefficienter.*
 T. Ganelius: *Om resttermen i en Taubersats för Laplace-transformer.*
 L. E. Zachrisson: »Markoff-spel» med tillämpningar på duellproblem.
 O. Hanner: *Parallellförskjutning av konvexa mängder.*
 E. Ingelstam: *Hills ekvation som grund för en hypotes om ögats färgseende.*
 L. Carleson och B. Kjellberg: *Om användning av matematiska metoder på vissa trafikproblem.*

11.6 Möte i Stockholm:

- Y. Domar: *Om majorantsatser för subharmoniska funktioner.*
 L. Hulthén: *Vad är operationsanalys?*
 O. Frostman: *Om ett posthumt arbete av Carleman inom kinetisk gasteori.*

12.11 Möte i Stockholm:

- B. Kjellberg: *Majoranter till analytiska funktioner.*
 A. Jensen, København: *Matematiske problemer inden for telefonien.*
 S. Lyttkens: *Resttermuppskattningar vid Tauberteorem.*
 T. Ganelius: *Resttermuppskattningar vid Tauberteorem vid Laplace-transformer.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I LUND.

16–17.4 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 3, s. 77.

26–27.11 Höstmöte, vilket ägnades åt elektroniken i skolan.

Följande demonstrationer gjordes:

- G. Leide: *Elektronrörens allmänna egenskaper.*
 E. Möller: *Elektronröret som oscillator.*
 O. Lundquist: *Elektronröret som likriktare.*
 L. Stigmark: *Mikrovågor.*
 B. Persson: *Moderna tillämpningar.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM.

7–8.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 3, s. 77.

FORENINGSNYTT

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND.

På årsmötet 5.2 1955 beslöts att årligen anordna en pristävling i matematik för gymnasister liksom i de övriga nordiska länderna.

Förbundets styrelse godkände 17.3 1955 en skrivelse till Skolstyrelsen angående matematikens, fysikens och kemins tilltänkta ställning i de reformerade läroverken. Förslag till skrivelsen hade uppgjorts av en särskilt tillsatt kommitté.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM

avhöll sitt årsmöte den 4–5 januari 1956 i Kemiska institutionens lokaler i Uppsala. Styrelse och arbetsutskott återvaldes. Efter årsmötet hölls följande föredrag:

C. Lönnqvist: *Den nya satelliten*.

J. Orring: *Enhetsskolans kursplaner i matematik, fysik och kemi* (diskussion).

F. Hjerting och S. Lindholm: *Demonstration av fysikaliska skolförsök*.

U. Kuuskoski: *Nordiskt samarbete mellan matematik-, fysik- och kemilärare* (diskussion).

Rundvandring företogs genom Kemiska institutionen med visning av cyklotronen, elektronmikroskopet, ultracentrifugen och biokemiska avdelningen. Slutligen avlades besök vid Pharmacia läkemedels-fabrik.

UTNEVNELSER

Til professorer i matematik ved Danmarks tekniske højskole: Docent, dr. phil. S. Lauritzen og dr. phil. H. Tornehave.

Til professor i matematikk ved Universitetet i Oslo: Dr. philos. W. Ljunggren.

Til professor i anvendt matematikk ved Universitetet i Bergen: Dr. philos. O. Bjørgum.

Till docent i matematik vid Lunds Universitet: Fil. dr. L. Hörmander.

OVERSIGT OVER CIEM's UDVIKLING, NUVÆRENDE STRUKTUR OG HJORTIDIGE VIRKSOMHED

I. Oprettelse og organisation af CIEM.

CIEM er oprettet af den internationale matematiske union (IMU), en videnskabelig union omfattende for tiden 29 lande. Hvert enkelt land er tilsluttet unionen gennem en komité.

CIEM er at opfatte som en videreførelse og udvidelse af den internationale matematikundervisningskommission (IMUK), som i århundredets første årtier under Felix Kleins ledelse øvede en betydelig indflydelse på matematikundervisningen verden over.

CIEM skal behandle alle sager i IMU, som angår matematikundervisning, og tage initiativ ved at opstille passende programmer, som kan fremme en sund udvikling af matematikundervisningen på alle trin og sikre offentlig anerkendelse af dennes betydning.

Oprettelsen fandt sted ved den første generalforsamling i IMU (Rom, marts 1952), hvor en foreløbig kommission med professor Chatelet, Paris, som præsident blev udpeget. Det første møde i CIEM blev afholdt i Genua i oktober 1952. Her udarbejdedes et arbejdsprogram for tidsrummet 1952–1954, og der udgik opfordring til de enkelte lande til at tilslutte sig CIEM og udpege en foreløbig delegeret med bl. a. den opgave at nedsætte for sit land en underkommission for matematikundervisning med henblik på det foreliggende arbejdsprogram.

De endelige rammer for CIEM blev fastlagt ved den anden generalforsamling

i IMU (Haag, september 1954). Herefter skal CIEM bestå af 10 delegerede valgt af IMU, der blandt disse tillige udpeger præsidenten for CIEM, samt 2 delegerede for hvert land (for tiden 15 lande) udpeget af dettes komité for IMU. Valgene gælder for 4-årige perioder. De løbende forretninger og tilrettelæggelsen af arbejdet varetages af eksekutivkomitéen bestående af præsidenten, 2 vicepræsidenter, 1 sekretær og yderligere 3 medlemmer. Pånær præsidenten vælges eksekutivkomitéen af CIEM ved skriftlig afstemning.

For perioden 1955–58 har eksekutivkomitéen fået følgende sammensætning:

Præsident:	H. Behnke, professor, Münster,
Vice-præsidenter:	G. Kurepa, professor, Belgrad, M. H. Stone, professor, Chicago,
Sekretær:	J. Desforge, undervisningsinspektør, Paris,
Medlemmer:	Ram Behari, professor, Indien, E. A. Maxwell, professor, Cambridge, K. Piene, rektor for Det pædagogiske seminar, Oslo.

II. CIEM's virksomhed i tidsrummet 1952–1954.

Efter det omtalte møde i Genua i oktober 1952 udgik til de delegerede for de enkelte lande opfordring til

1. at lade udarbejde en rapport til belysning af »Matematikens og matematikere-rens rolle i vor tid« til fremlæggelse ved
2. at lade udarbejde en rapport om landets matematikundervisning for alders-grupperne 16–21 år til fremlæggelse ved
3. at lade afsende et repræsentativt udvalg af lærebøger i matematik (og anden matematisk litteratur) for aldersgruppen 16–21 år som bidrag til en bog-udstilling ved

den internationale matematikerkongres i Amsterdam i september 1954. Opfordrin-gen gav som resultat 7 rapporter vedrørende 1. og 9 rapporter vedrørende 2., der alle blev fremlagt ved korte foredrag under kongressen (i dennes sektion 7), samt en meget righoldig udstilling af bøger fra mange lande, som nu har fået plads i Musée pédagogique i Paris. Rapporterne vedrørende 1. er trykt i »L'Enseignement Mathématique«, 2^{ième} série, tome 1 (1955), side 92–191.

Ved et møde af CIEM's eksekutivkomité i Paris i oktober 1954 blev bl. a. be-sluttet:

- a. De nationale underkommissioner opfordres til at publicere et værk i deres land under titlen »Det videnskabelige grundlag for matematikundervisningen i skolerne«.
- b. De nationale underkommissioner opfordres til at fortsætte overvejelserne vedrørende »Matematikens og matematikerens rolle i vor tid«.

III. CIEM's virksomhed i perioden 1955–1958.

Resultater af CIEM's virksomhed agtes fremlagt og drøftet ved den planlagte internationale matematikerkongres i Edinburgh 1958.

Det tyske underudvalg for CIEM har afholdt møde i Münster i juni 1955, hvortil udenlandske interesserede var indbudt. Ved mødet drøftedes planer om udsendelsen af et værk af encyklopædisk karakter om nyere fremskridt i matematikken af betydning for matematikundervisningen i skolerne, efter de foreløbige planer om-fattende 4 bind:

Bd. 1: Axiomatik. Algebra

- 2: Geometri
- 3: Analysis
- 4: Angewandte Mathematik.

Drøftelserne var særlig detaljerede vedrørende geometri-bindet.

Hvert kapitel af de enkelte bind tænkes skrevet af en skolemand og en universitetsmand i fællesskab. Der ønskes i et vist omfang udenlandske medarbejdere. Værket ønskes udsendt inden Edinburgh-kongressen i 1958. Til fortsat drøftelse af planerne indkaldtes til nyt møde i slutningen af november 1955.

I tilslutning til mødet afholdtes »21. Tagung zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Höhere Schule« ved universitetet i Münster. Af programmet, som omfattede 19 foredrag, kan fremhæves et foredrag af præsidenten for CIEM, professor H. Behnke, »Über die augenblickliche Lage des mathematischen Unterrichts«. Han omtalte heri, at matematikken ligesom fysikken i de senere år har gennemløbet en rig indre udvikling, samtidig med at faget er blevet af hastigt voksende og stedse mere direkte betydning for væsentlige sider af samfundslivet. Dette stiller store krav til undervisningen og dens udøvere. Samtidig truer det stærkt voksende behov for højtuddannede, dels i de videnskabelige institutter, som er genstand for en kraftig ekspansion, dels som medarbejdere ved praktiske opgaver, på det alvorligste skolernes forsyning med kvalificerede matematik-fysik-lærere. I nogle lande, hvor udviklingen er særlig vidt fremskredet, er situationen allerede katastrofal.

CIEM har i forbindelse med universitetet i Genève arrangeret et symposium til minde om Henri Fehr, grundlægger og redaktør af det højt værdsatte tidsskrift »L'Enseignement Mathématique«, med titlen »L'enseignement mathématique au niveau secondaire: ses fondements scientifiques et ses rapports avec l'enseignement universitaire«. I tilslutning hertil afholdt eksekutivkomitéen et møde, ved hvilket man vedtog at foreslå arbejdet i CIEM for perioden 1955-58 koncentreret om først og fremmest følgende tre punkter:

1. Matematikundervisningen for aldersgruppen under 16 år.
2. Det videnskabelige grundlag for matematikundervisningen på gymnasie-niveauet (secondary schools).
3. Sammenlignende studier vedrørende begynderundervisningen i geometri.

Desuden betragtes »Matematikens og matematikerens rolle i vor tid« som permanent emne til overvejelse. — Rapporter fra de enkelte lande vedrørende de nævnte emner ønskes udarbejdet til matematikerkongressen i Edinburgh i 1958.

Næste møde i eksekutivkomitéen afholdes 27. maj 1956 i Münster i tilslutning til et møde i den tyske underkommission, hvor de ovenfor nævnte punkter 1. og 2. skal debatteres, samt til »22. Tagung zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule«, organiseret af universitetet i Münster.

En kongres om matematisk-naturvidenskabelig undervisning, ved hvilken M. H. Stone repræsenterede CIEM, afholdtes i februar 1956 i Indien.

IV. CIEM's organ.

Henri Fehr tilbød før sin død, at »L'Enseignement Mathématique« måtte blive det officielle organ for CIEM, et tilbud, som er blevet modtaget.

»L'Enseignement« vil bl. a. offentliggøre artikler om matematiske fremskridt af betydning for matematikundervisningen og artikler af didaktisk karakter. Således vil rapporter udarbejdet på CIEM's foranledning og foredrag holdt på

symposier arrangeret af CIEM kunne forventes publicerede i tidsskriftet. Tillige vil tidsskriftet regelmæssigt bringe officielle meddelelser om CIEM's aktivitet.

Udgivelsen er for en periode af fire år sikret ved en bevilling fra universitetet i Genève. Tidsskriftets økonomiske forhold videre fremover er under overvejelse. Det er ønskeligt, at et stort antal matematikere og matematiklærere, skoler og andre institutioner verden over tegner abonnement. Ved et omfang af ca. 300 sider pr. årgang er abonnementsprisen 20 SFr. Hvis antallet af abonnenter i et land overstiger 100, kan hver af disse abonnenter opnå en rabat på 25%.

Tidsskriftets sekretariat: Professor J. Karamata, Institut de Mathématique, Université, Genève (Suisse).

Den tidligere serie er afsluttet med bd. 40 (1953). Af den nye serie er netop udsendt bd. 1, hefte 1-3, som bl. a. indeholder 7 artikler om »Matematikens og matematikerens rolle i vor tid«.

SUMMARY IN ENGLISH

N. E. NØRLUND: *Reflections on three branches of science.* (Danish.)

The article contains a lecture given by the author at a meeting in honour of his 70th birthday. The three branches of science are astronomy, geodesy and mathematics. The author begins by pointing out the importance of astronomy for the development of the exact sciences, and concludes with a few affectionate words on his own favourite subject, mathematics. The main part of the article is concerned with geodesy, its history, problems and difficulties. Particular emphasis is laid on the Danish contributions to the subject. The first known triangulation was performed by the famous Danish astronomer Tycho Brahe, and Danish maps have always been of a high international standard.

VIGGO BRUN: *Pollen grains and Archimedean polyhedra.* (Norwegian.)

(The drawings referred to are found on pp. 20-22.)

The drawings of the pollen grains of *Gomphrena globosa* and *Chrysanthemum carinatum*, published by Fritzsche in 1837 (figs. 2 and 3), show a striking similarity to the Archimedean semi-regular polyhedron *truncus icosiëdros*, bounded by 12 regular pentagons and 20 regular hexagons (fig. 1). To examine whether such a shape can be explained as a pressure phenomenon, the author and his wife put 32 cones of bread-dough in a hollow metal sphere, with the tops of the cones at the centre, and the bases arranged as in fig. 4. After raising of the dough and baking, the resulting "Archimedean bread" showed the typical features of the *truncus icosiëdros* (fig. 5), although not everywhere completely regular.

The occurrence of exactly 12 pentagons on the surface is made plausible by an application of Euler's polyhedral formula.

SOLOMON W. GOLOMB: *Properties of consecutive integers.* (English.)

Given any two integers M and k and a fixed arithmetic function $f(n)$, does there exist a run of consecutive integers $c+j$, $j=1, 2, \dots, k$, such that $f(c+j) \equiv 0$

(mod M)? It is shown that the Euler function $\varphi(n)$, and the sum $\sigma(n)$ of the divisors of n , both represent functions with this property. The proofs make use of Dirichlet's theorem on primes in an arithmetic progression. It is stated that the same property holds for the number $d(n)$ of divisors of n , and that the proof of this is elementary (not invoking Dirichlet's theorem).

It is also shown, by an elementary argument, that there are arbitrarily long sequences of consecutive integers for which the Möbius function $\mu(n) = 0$.

The proofs are all based on the following lemma, which follows easily from the "Chinese remainder theorem": If $A_j = a_j n + b_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, are k arithmetic progressions such that $(a_i, a_j) = 1$ if $i \neq j$, then there exist k consecutive integers $c+1, c+2, \dots, c+k$ such that $c+j$ is in A_j .

ANDERS BAGER: *Inscribed and escribed circles and sums of powers.* (Danish.)

Let a, b, c denote the sides of a plane triangle, $2s$ the perimeter, T the area, r and R the radii of the inscribed and the circumscribed circles, r_a, r_b, r_c the radii of the escribed circles and h_a, h_b, h_c the altitudes. These quantities satisfy a system of fundamental equations (formulas (1)–(6) p. 30). Conversely, positive quantities satisfying this system will have the above-mentioned meaning for a triangle of sides a, b, c . Algebraically, the full system is equivalent to a reduced, non-symmetric minimal set of equations ((I)–(VIII) p. 34).

From the given system (1)–(6), the author derives several other relations, many of them well-known. Of particular interest are the two formulas (31) and (32) p. 33, expressing the sum of powers $r_a^p + r_b^p + r_c^p + (-r)^p$ by R, T and $S = a^2 + b^2 + c^2$ for all positive and negative integral exponents p .