

NÅGRA ELEMENTÄRA FUNKTIONALEKVATIONER OCH HILBERT'S FEMTE PROBLEM

HANS RÅDSTRÖM

1. Vi skall betrakta de två ekvationerna

$$(A) \quad f(\varphi(x, y)) = f(x) + f(y)$$

$$(B) \quad \varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z)).$$

I ekv. A är φ en given funktion av två variabler och f en sökt funktion av en variabel. I ekv. B är φ en sökt funktion av två variabler.

De två ekvationerna har vissa intressanta samband som vi skall utreda. Vi får samtidigt anledning att något beröra det femte av de berömda problem, som Hilbert ställde vid Pariskongressen år 1900. Våra resultat ger också lösningen av detta problem för det enklaste fallet, då dimensionstalet är ett.

Artikeln innehåller inga väsentligt nya resultat utan är skriven i avsikt att ge en elementär inledning till en intressant problemkrets i teorien för topologiska grupper. De övningsuppgifter, som är inlagda här och var, ha svar i slutet av artikeln. Det är inte nödvändigt att lösa dessa uppgifter för att kunna följa framställningen.

2. Vi börjar med att ge några välbekanta exempel på ekvationer av typen A.

$$\text{Ex. 2.1:} \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Cauchy bevisade att om f är en kontinuerlig reell funktion av en reell variabel som satisfierar 2.1 för *alla* reella x och y så är $f(x) = \text{konst} \cdot x$. Man kan också bevisa (beviset skall genomföras i nr 8) att om f är definerad endast i ett intervall innehållande origo, och om f satisfierar 2.1 för alla x och y i detta intervall sådana att också $x+y$ tillhör intervallet så är $f(x) = \text{konst} \cdot x$ i intervallet. Om man däremot tar ett intervall som icke innehåller origo så finns det ofta även andra lösningar till ekvationen. (Se övningsuppgift 2.)

$$\text{Ex. 2.2:} \quad f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

Denna ekvation karakteriserar på ett liknande sätt logaritmfunktionen, ty varje kontinuerligt f som satisfierar 2.2 för *alla positiva* x och y är av formen $f(x) = \text{konst} \cdot \log x$. Liksom i ex. 2.1 gäller resultatet också för ett ändligt intervall förutsatt att detta innehåller talet 1.

Ex. 2.3:
$$f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f(x) + f(y).$$

Man igenkänner additionsteoremet för arctg :

$$\text{arctg} \frac{x+y}{1-xy} = \text{arctg} x + \text{arctg} y.$$

Om man här med arctg förstår funktionens huvudgren är formeln giltig endast om $xy < 1$, sålunda t. ex. om $|x| < 1$ och $|y| < 1$. Det kan visas att varje kontinuerlig funktion f som satisfierar 2.3 för alla x och y sådana att $|x| < 1$, $|y| < 1$ och $\left|\frac{x+y}{1-xy}\right| < 1$ är av formen $f(x) = \text{konst} \cdot \text{arctg} x$.

Som framgår av exemplen 2.2 og 2.3 är det i allmänhet omöjligt att finna kontinuerliga lösningar till ekv. A definierade för *alla* reella tal (om man bortser från den triviala lösningen f identiskt $= 0$). Det blir därför nödvändigt att formulera problemet att lösa A på följande sätt: Bestäm f i ett visst intervall så att A är satisfierad så snart x , y och $\varphi(x, y)$ tillhör intervallet. Exempelen visar att om man skall kunna vänta sig att lösningen skall vara unik så när som på en multiplikativ konstant så bör intervallet innehålla ett visst tal e som var 0 i ex. 2.1 och 2.3 samt 1 i ex. 2.2. En närmare diskussion (som vi ej utför här) av hur det förhåller sig i det allmänna fallet med godtyckligt φ visat att talet e bör ha egenskapen att $\varphi(e, x) = \varphi(x, e) = x$ för alla x i intervallet.

Vi ställer därför nu följande

LÖSNINGSPROBLEM FÖR EKV. A: Låt φ vara en given funktion av två variabler definierad då dessa bägge tillhör ett givet intervall I . Antag vidare att det finns ett tal e i I sådant att $\varphi(e, x) = \varphi(x, e) = x$ för alla x i I . Bestäm varje funktion f av en variabel, definierad i I , icke identiskt $= 0$ och sådan att

$$f(\varphi(x, y)) = f(x) + f(y)$$

gäller så snart x , y och $\varphi(x, y)$ tillhör I .

Övningsuppgifter: 1) Bestäm ett tal e så, att $\varphi(e, x) = \varphi(x, e) = x$ samt gissa en lösning till A definierad i en omgivning av e då

$$(a) \quad \varphi(x, y) = x + y - 1; \quad (b) \quad \varphi(x, y) = x^{\log y}.$$

2) Låt f bestämmas på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{om } 2 \leq x \leq 3 \\ \text{godtyckligt} & \text{om } 3 < x < 4 \\ x & \text{om } 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Visa, att $f(x+y) = f(x) + f(y)$ så snart alla tre talen x , y och $x+y$ ligger mellan 2 och 5.

3) Visa, att om $f(x+y) = f(x) + f(y)$ så snart x , y och $x+y$ ligger mellan 2 och 6 och om $f(x) = x$ då $2 \leq x \leq 3$ så är $f(x) = x$ överallt mellan 2 och 6.

3. Vi ger nu några exempel på funktioner φ som satisfierar funktional-ekvationen B:

Ex. 3.1: $\varphi(x, y) = x + y$

3.2: $\varphi(x, y) = xy$

3.3: $\varphi(x, y) = \frac{x+y}{1-xy}$

3.4: $\varphi(x, y) = x + y + xy$

3.5: $\varphi(x, y) = \max(x, y)$

3.6: $\varphi(x, y) = x$

3.7: $\varphi(x, y) = 17$

3.8: $\varphi(x, y) = \max(x, y, x+y)$.

En funktion φ av två variabler kan också betraktas som en *operation*, som till två tal x och y associerar ett tredje $\varphi(x, y)$. Som följd härav är det ofta lämpligt att låta detta betraktelsesätt få ett uttryck även i beteckningarna, så att man använder ett operationstecken, t. ex. $\circ$, och skriver

$$\varphi(x, y) = x \circ y.$$

Vår funktional ekvation B antager med ett sådant skrivsätt formen

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

och vi ser att den helt enkelt uttrycker att operationen är *associativ*.

Låt oss nu verifiera att de åtta exemplen verkligen ger associativa operationer. Vad de två första exemplen beträffar är detta ju axiom i teorien för reella tal och det är alldeles trivialt i exemplen 3.5, 3.6 och 3.7.

De övriga fallen behandlar man lätt genom direkt uträkning av $(x \circ y) \circ z$ och $x \circ (y \circ z)$. Som exempel väljer vi 3.4:

$$(x \circ y) \circ z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z = x + y + z + xy + xz + yz + xyz.$$

Eftersom $x \circ (y \circ z)$ på analogt sätt leder till samma uttryck är associativiteten bevisad. Man observerar här att de enda egenskaper hos addition och multiplikation som använts vid denna räkning är deras kommutativitet och associativitet samt multiplikationens distributivitet m. avs. på addition. Därför har vi på samma gång bevisat associativiteten för varje operation uppbyggd som i ex. 3.4 av två operationer vilka som helst istället för addition och multiplikation, bara de ha de nämnda egenskaperna. En sådan operation ges i ex. 3.8 som erhållits ur 3.4 genom att $x \cdot y$ ersatts med $x + y$ och $x + y$ med $\max(x, y)$. Då addition och maximerande bägge är båda associativa och kommutativa samt då distributiviteten även gäller:

$$x + \max(y, z) = \max(x + y, x + z),$$

så följer att även 3.8 är en associativ operation.

En funktion $\varphi(x, y)$, definierad då x och y bägge tillhör ett visst intervall I , säges satisfiera ekv. B i detta intervall om ekvationen gäller för alla x, y och z sådana att $x, y, z, \varphi(x, y)$ och $\varphi(y, z)$ alla ligger i I . Den motsvarande operationen $x \circ y$ säges då vara associativ i I .

Övningsuppgift: 4) Bestäm alla (på hela reella axeln) associativa operationer av formen

$$x \circ y = ax + by.$$

4. Vi återvänder nu till lösningsproblemet för ekv. A så som det formulerats i nr 2, och vi antar i detta och nästa nummer att den givna funktionen φ har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen som överallt då x och y tillhör det givna intervallet, I , är skilda från noll. Vidare inskränker vi oss till att undersöka lösningar som är deriverbara överallt i I . Om f är en sådan lösning så gäller alltså

$$(A) \quad f(\varphi(x, y)) = f(x) + f(y)$$

så snart alla tre talen x, y och $\varphi(x, y)$ tillhör I . Speciellt erhålles för $y = e$:

$$\text{dvs } f(e) = 0. \quad f(x) = f(x) + f(e),$$

Genom att derivera A m. avs. på x resp. y erhåller man:

$$f'(\varphi(x, y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = f'(x)$$

$$f'(\varphi(x, y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = f'(y).$$

Således gäller

$$f'(x) = f'(y) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)}.$$

Låt oss nu sätta $f'(e) = k$ och ersätta y med e i ovanstående formel. Man får

$$f'(x) = k \cdot \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, e)},$$

ty $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, e) = 1$ eftersom $\varphi(x, e) = x$.

Om vi nu tar hänsyn till att $f(e) = 0$ får vi följande

LÖSNINGSFORMEL FÖR EKV. A:

$$f(x) = k \int_e^x \frac{dt}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, e)}.$$

Vi vet ännu inte om denna formel verkligen ger en lösning utan vi har blott bevisat att om f är en överallt i I deriverbar lösning som i punkten e har derivatan k , så är f given av ovanstående formel. Formeln ger oss alltså möjlighet att beräkna de deriverbara lösningarna om sådana existerar, men vi har inte bevisat att varje funktion som ges av formeln verkligen är en lösning. För att undersöka detta är det nödvändigt att pröva i ekv. A.

Övningsuppgifter: 5) Bestäm alla i en omgivning av origo deriverbara lösningar till ekv.:

$$f(x+y+xy) = f(x) + f(y).$$

6) Visa, att ekv.

$$f(x+y+x^2y^2) = f(x) + f(y)$$

icke har några icke-triviala, deriverbara lösningar i någon omgivning av origo.

5. Vi förutsatte i nr 4 att $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ är kontinuerlig och skild från noll i I .

Således har integranden i Lösningformeln konstant tecken i I , ty en kontinuerlig funktion kan ju inte växla tecken utan att anta värdet noll. Härav följer att $f'(x)$ har konstant tecken, dvs att $f(x)$ är strikt monoton. I nr 6 skall vi visa att för att ekv. A skall kunna ha en strikt monoton lösning är det nödvändigt att φ satisfierar ekv. B i I . Operationen

$x \circ y$ måste m. a. o. vara associativ. Vi skall nu visa att om detta nödvändiga villkor är uppfyllt så ger lösningsformeln verkligen en lösning.

Vi gör alltså samma regularitetsförutsättningar om φ som i nr 4 och vill nu undersöka om en av lösningsformeln definierad funktion f verkligen satisfierar ekvation A. Det gäller således att visa att uttrycket $f(\varphi(x, y)) - f(x) - f(y)$ är noll, eller om lösningsformeln användes att

$$\int_e^{\varphi(x, y)} \dots - \int_e^x \dots - \int_e^y \dots = \int_x^{\varphi(x, y)} \frac{dt}{\varphi_2(t, e)} - \int_e^y \frac{dt}{\varphi_2(t, e)}$$

är noll. (Vi betecknar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ med φ_2 .)

I den första integralen genomför vi substitutionen $t = \varphi(x, s)$ där x hålles fixt och s är den nya variabeln. Man ser att då s går från e till y så går t från x till $\varphi(x, y)$. Vidare gäller $dt = \varphi_2(x, s) ds$, varför integralen blir

$$\int_e^y \frac{\varphi_2(x, s)}{\varphi_2(\varphi(x, s), e)} ds.$$

Om vi i den andra integralen skriver s istället för t ser vi att vad vi behöver bevisa nu är att

$$\int_e^y \left(\frac{\varphi_2(x, s)}{\varphi_2(\varphi(x, s), e)} - \frac{1}{\varphi_2(s, e)} \right) ds = 0.$$

Därmed är resultatet klart ty som vi strax skall visa är integranden lika med noll för alla x och s sådana att x, s och $\varphi(x, s)$ tillhör I . För att inse detta betraktar vi ekv. B som ju φ förutsätts satisfiera i I :

$$\varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z)).$$

Om man deriverar m. avs. på z får man

$$\varphi_2(\varphi(x, y), z) = \varphi_2(x, \varphi(y, z)) \cdot \varphi_2(y, z).$$

Sätt nu $z = e$ och ersätt y med s :

$$\varphi_2(\varphi(x, s), e) = \varphi_2(x, s) \cdot \varphi_2(s, e).$$

Vi har bevisat

SATS 5.1: Om φ satisfierar B på ett intervall I och har kontinuerliga, från noll skilda första derivator på I samt om I innehåller ett tal e med egenskapen

$$\varphi(x, e) = \varphi(e, x) = x,$$

så ger formeln:

$$f(x) = \text{konst.} \cdot \int_e^x \frac{dt}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, e)}$$

en lösning till A som är deriverbar i I . Genom olika val av konstanten erhålles på detta sätt alla i I deriverbara lösningar till A.

ANMÄRKNING: En genomgång av beviset visar att det räcker att antaga $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ och kontinuerlig.

Övningsuppgifter: 7) Beteckna $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ med φ_1 , och $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ med φ_2 .

(a) Uppställ en lösningsformel för ekv. A där φ_1 ingår istället för φ_2 .

(b) Bevisa formeln

$$\varphi_1(x, y) \cdot \varphi_2(x, e) = \varphi_2(x, y) \cdot \varphi_1(e, y).$$

8) Bestäm det största (ändliga eller oändliga) intervall i vilket förutsättningarna i 5.1 är satisfierade om

$$(a) \quad \varphi(x, y) = xy; \quad (b) \quad \varphi(x, y) = \frac{x+y}{1-xy}.$$

9) Visa, att ekv. A icke i någon omgivning av origo har en icke-trivial lösning om φ väljes som i ex. 3.5, 3.6 eller 3.7 samt uppgiv för vart och ett av dessa fall vilka förutsättningar i ovanstående sats som icke är satisfierade.

6. Genom satsen i nr 5 har vi fullständigt klarat ut relationerna mellan ekvationerna A och B under vissa deriverbarhetsförutsättningar. Satsen säger ju hur man kan bestämma alla deriverbara lösningar f till A om man vet att den givna funktionen φ satisfierar B (och satsens övriga förutsättningar). Den ger emellertid också en överblick över alla lösningar till B som satisfierar satsens förutsättningar. Om nämligen φ är en sådan lösning finns ju enligt satsen en funktion f som satisfierar A: $f(\varphi(x, y)) = f(x) + f(y)$. Vi har sett att f är strikt monoton (och deriverbar). Då existerar en invers funktion g till f , och om man applicerar g på bägge leden av A erhålles

$$(6.1) \quad \varphi(x, y) = g(f(x) + f(y)).$$

En sådan lösning φ måste därför ha den form som ges i högra ledet. Men omvänt är det klart att alla φ av denna form verkligen satisfierar B så länge f och g är inversa funktioner. Man har ju nämligen då

$$\varphi(\varphi(x, y), z) = g(f(g(f(x) + f(y))) + f(z)) = g(f(x) + f(y) + f(z)).$$

Men uttrycket $\varphi(x, \varphi(y, z))$ kan analogt skrivas om på samma form, vilket visar att B gäller.

Då vi sålunda under vissa deriverbarhetsförutsättningar lyckats lösa våra två funktionalekvationer går vi nu över till att diskutera lösningarna under svagare villkor. Vi härleder först några nödvändiga villkor för att ekv. A skall ha strikt monotona och kontinuerliga (men ej nödvändigt deriverbara) lösningar.

Om f är en sådan lösning, definierad på intervallet I , så har ju f en invers funktion g och beviset ovan för att φ satisfierar B på I går att genomföra utan ändringar. Vi ser alltså att vår operation $x \circ y$ måste vara associativ. Likaledes följer av 6.1 omedelbart att $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ dvs att $x \circ y$ måste vara kommutativ. Eftersom f är strikt monoton och kontinuerlig har g samma egenskaper. Då följer av 6.1 att $\varphi(x, y)$ måste vara en kontinuerlig funktion av de två variablerna x och y .

Till sist påpekar vi att om intervallet I antas innehålla ett tal e sådant att $\varphi(x, e) = \varphi(e, x) = x$ för alla x i I och om detta e ligger i det inre av intervallet så gäller att det finns en omgivning av e sådan att om a tillhör denna omgivning så har ekv.

$$\varphi(a, x) = e$$

en rot x , som $\rightarrow e$ då $a \rightarrow e$. Ekvationen antar ju nämligen enl. 6.1 formen $g(f(a) + f(x)) = e$ eller $f(a) + f(x) = f(e) = 0$, vilket ger $f(x) = -f(a)$,

$$x = g(-f(a)).$$

7. De förutsättningar, som härletts som nödvändiga för existensen av strikt monotona och kontinuerliga lösningar till ekv. A i slutet av nr 6, är i själva verket också tillräckliga, om blott intervallet I icke är för stort. Vi skall nu visa detta och använder då genomgående beteckningen $x \circ y$ istället för $\varphi(x, y)$. Det visar sig att kommutativiteten hos denna operation är en överflödig förutsättning som följer av de övriga. Vi gör därför följande

FÖRUTSÄTTNINGAR F: Låt I vara ett givet intervall och e en given punkt i det inre av I . En operation $x \circ y$ är också given och definierad för alla x och y som bägge tillhör I . Operationen satisfierar

F. 1: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ för alla x, y och z sådana att bägge leden är definierade.

F. 2: $e \circ x = x \circ e = x$ för alla x i I .

F. 3: Om a ligger tillräckligt nära e så kan man lösa x ur ekv. $a \circ x = e$. Detta x varierar kontinuerligt med a och $x \rightarrow e$ då $a \rightarrow e$.

F. 4: $x \circ y$ är kontinuerlig som funktion av de två variablerna x och y .

Om ekvationen $a \circ x = e$ för givet a har en rot x så säger vi att detta x är en (höger-)invers till a . Förutsättningen F. 3 säger därför att det

finns en omgivning, U , till e sådan att om a tillhör denna omgivning så har a minst en invers, och att en sådan invers alltid finnes godtyckligt nära e om blott a väljes tillräckligt nära e . Om därför a tillhör en tillräckligt liten omgivning, V , till e så har a säkert en invers i omgivningen U av e . Låt b vara en sådan invers till a . Då har b själv en invers c . Då gäller

$$a \circ (b \circ c) = a \circ e = a$$

och

$$(a \circ b) \circ c = e \circ c = c.$$

På grund av associativiteten har vi därför $a=c$. (Observera att om V väljes tillräckligt liten så ligger säkert alla talen $a, b, c, a \circ b$ och $b \circ c$ i I .) Vi har visat, att det finns en omgivning V till e sådan att om a tillhör V så har a 's invers en invers och att denna invers är a självt. Eftersom $b \circ c = e$ och $c = a$ gäller således icke blott att $a \circ b = e$ (dvs att b är invers till a) utan även att $b \circ a = e$. (Man säger att b är både höger- och vänsterinvers till a .)

SATS 7.1: Om förutsättningarna F ovan gäller så finns ett delintervall till I , innehållande e , för vilket de också gäller och där dessutom gäller att $x \circ y$ är en växande funktion av x för varje y samt en växande funktion av y för varje x .

BEVIS: Låt y vara ett tal i den ovan nämnda omgivningen V till e . Då har y en invers z . Vi visar först att funktionen $x \circ y$ är en omvändbart entydig funktion av x på ett tillräckligt litet intervall kring e . Antag nämligen att x_1 och x_2 vore två olika x -värden sådana att

$$x_1 \circ y = x_2 \circ y.$$

Då gällde ju $(x_1 \circ y) \circ z = (x_2 \circ y) \circ z$. Om man använder associativiteten (vilket säkert är möjligt om x_1 och x_2 ligger tillräckligt nära e) och observerar att $y \circ z = e$ så får man $x_1 \circ e = x_2 \circ e$ eller $x_1 = x_2$. Således är $x \circ y$ omvändbart entydig. Eftersom den enligt F. 4 också är kontinuerlig så är den strikt monoton och i själva verket växande eftersom detta ju är fallet för $y = e$. (Man har ju $x \circ e = x$.)

På analogt sätt visas att $x \circ y$ är en växande funktion av y för varje x i V och y i någon viss omgivning av e . Därmed är satsen bevisad.

SATS 7.2: Om F gäller och om $x \circ y$ dessutom är en växande funktion av var och en av variablerna x och y i intervallet I så har ekv. A en kontinuerlig och växande lösning definierad i I .

BEVIS: Beviset bygger på att man använder en analogi till en välbekant, i våra skolor använd metod för att införa potenser av reella tal.

Vi ger därför icke alla detaljer utan framhåller endast de för den aktuella situationen typiska momenten, medan resten skisseras.

Om a är ett tal i intervallet I så är $a \circ a$ ett definierat tal. Om detta i sin tur tillhör I kan man bilda $a \circ (a \circ a) = (a \circ a) \circ a$. Vi inför beteckningen $a^{\circ n}$ för uttrycket $\underbrace{a \circ a \circ a \circ \dots \circ a}_{n \text{ st.}}$. Vi ser alltså att om $a^{\circ 2}$ tillhör

I så kan man bilda $a^{\circ 3} = a \circ a^{\circ 2}$. Om återigen $a^{\circ 3}$ tillhör I så kan man bilda $a^{\circ 4}$. Denna procedur kan upprepas så länge de erhållna talen tillhör I . Vi får på så sätt en följd av tal $a, a^{\circ 2}, a^{\circ 3}, \dots$, bildad med hjälp av operationen $\circ$ i analogi med det sätt varpå man med hjälp av multiplikationen definierar potenserna. Man inser då att räknelagen

$$a^{\circ m} \circ a^{\circ n} = a^{\circ(m+n)}$$

måste gälla så snart de två talen till vänster tillhör I . Vidare inses att om $a > e$ så är följderna monotont växande och om $a < e$ monotont avtagande så att i bägge fallen $a^{\circ n}$ ligger längre och längre från e ju större n blir.

Vi bevisar nu att, om $a \neq e$ och I är ett ändligt intervall, det förr eller senare inträffar att följderna $a^{\circ n}$ upphör att ligga i I så att man därför icke kan fortsätta den hur långt som helst. Antag nämligen motsatsen, dvs att $a^{\circ n}$ tillhör I för alla n . Följderna vore då begränsade och eftersom den är monoton skulle den ha ett gränsvärde b :

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\circ n}.$$

Men då vore ju $a \circ b = a \circ \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\circ n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\circ(n+1)} = b$, dvs $a \circ b = e \circ b$. Men detta strider mot att $x \circ b$ är en växande funktion av x .

Vi inför nu negativa exponenter genom att definiera

$$a^{\circ(-n)} = b^{\circ n}$$

där b är inversen till a . Detta kan göras för alla a som ligga tillräckligt nära e .

Sedan införas $a^{\circ r}$ för rationella r . Man behöver blott observera att $x^{\circ n}$ för fixt n är en monoton och kontinuerlig funktion av x , ty härav följer att om a tillhör I så kan man bestämma ett tal x så att

$$x^{\circ n} = a.$$

Detta x betecknas med $a^{\circ(1/n)}$ och $a^{\circ(m/n)}$ definieras nu genom $a^{\circ(m/n)} = (a^{\circ(1/n)})^{\circ m}$.

Till sist utsträcker definitionen till irrationella exponenter genom kon-

tinuitet och man visar att $a^{\circ b}$ är en strikt monoton och kontinuerlig funktion av b för fixt $a \neq e$.

Sammanfattningsvis erhålles med den ovan skisserade proceduren följande resultat: Om a ligger tillräckligt nära e så är $a^{\circ b}$ definierat för alla reella tal b som tillhör ett visst intervall (som beror på a) kring 0. Då b genomlöper detta intervall så genomlöper $a^{\circ b}$ monotont och kontinuerligt intervallet I . Dessutom gäller

$$(7.3) \quad a^{\circ(b+c)} = a^{\circ b} \circ a^{\circ c}.$$

För att konstruera vår sökta lösning f till ekv. A förfar vi nu så: Fixera ett $a \neq e$ och definiera $f(x)$ genom ekvationen

$$a^{\circ f(x)} = x.$$

(Observera analogien med införandet av logaritmer i det specialfall då $\circ$ betyder multiplikation.) Av 7.3 följer nu omedelbart att f satisfierar A:

$$f(x \circ y) = f(x) + f(y),$$

och satsen är bevisad.

KOROLLARIUM: Om förutsättningarna i 7.2 är satisfierade så är $x \circ y$ kommutativ.

Ty vi såg ju i nr 6 hur lösbarheten av A medför operationens kommutativitet.

ANMÄRKNING: Om man jämför sats 7.2 med sats 5.1 så ser man att vi har fått införa nya antaganden för att i 7.2 kunna avstå från de deriverbarhetsförutsättningar som gjordes i 5.1. Den väsentligaste av de nya förutsättningarna är att vi varit tvungna att anta existensen av inverser, åtminstone i närheten av e . Å andra sidan visade vi i slutet av nr 6 att om A är lösbar så existerar säkert inverser. Deriverbarhetsförutsättningarna i sats 5.1 medför således existensen av inverser och sats 5.1 faller därför under sats 7.2.

Övningsuppgift: 10) Bestäm $a^{\circ(1/2)}$ och $a^{\circ(-1)}$ om $x \circ y$ är definierat av

$$(a) \quad \frac{x+y}{1-xy}; \quad (b) \quad x+y+xy.$$

8. I nr 7 visades existensen i närheten av e av åtminstone en strikt monoton lösning till ekv. A om funktionen φ satisfierar förutsättningarna F. Då uppstår problemet att avgöra huruvida det även existerar andra lösningar än de som erhållas genom den konstruktion som användes vid beviset av sats 7.2. Svaret är nej, vilket framgår av sats 8.2 nedan. För beviset av denna sats behöver vi sats 8.1 som hänför sig till det

speciella fallet då $\varphi(x, y) = x + y$. Detta är den sats vars bevis utlovades i ex. 2.1 och det är alltså en mycket välbekant problemställning det är fråga om. Beviset är, såvitt jag vet, det elegantaste och kraftigaste och samtidigt det minst kända av de elementära bevisen (= bevis utan användning av urvalsaxiomet).

SATS 8.1: Om den kontinuerliga funktionen f satisfierar ekvationen $f(x+y) = f(x) + f(y)$ för alla x och y sådana att x , y och $x+y$ alla tre tillhör ett intervall I som innehåller origo så gäller för alla x i I att $f(x) = \text{konst} \cdot x$.

BEVIS: Då f är kontinuerlig är den också Riemannintegrabel. Sätt

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Låt nu x och y vara givna tal i I sådana, att även $x+y$ tillhör I . Då gäller säkert $f(t+y) = f(t) + f(y)$ för alla t mellan 0 och x . Genom att integrera bägge leden i ekvationen m. avs. på t erhåller man:

$$\int_0^x f(t+y) dt = F(x) + x \cdot f(y).$$

Här är vänstra ledet $= F(x+y) - F(y)$ som man ser genom att utföra substitutionen $s = t + y$. Således gäller

$$x \cdot f(y) = F(x+y) - F(x) - F(y).$$

Men då högra ledet i denna ekvation är symmetriskt i x och y gäller således

$$x \cdot f(y) = y \cdot f(x).$$

Härav följer satsen.

Man observerar att man kan ersätta kontinuiteten av f med villkoret att f skall vara integrabel, och icke nödvändigt i Riemanns mening, utan att vilken som helst integrationsmetod kan användas som har de vanliga egenskaperna.

Vi kan nu bevisa

SATS 8.2: Låt φ satisfiera förutsättningarna i sats 7.2. Då gäller att om f och f_1 är kontinuerliga lösningar till ekv. A på intervallet I och om f är strikt monoton, så är $f_1(x) = \text{konst} \cdot f(x)$ för alla x i I .

BEVIS: Då f är strikt monoton och kontinuerlig har den en invers funktion g med samma egenskaper. Funktionen f avbildar intervallet I på ett annat intervall J . Eftersom I innehåller e och $f(e) = 0$ ser vi att J innehåller 0. Tydligen är g definierad på J och avbildar J på I .

Vi visar först att g satisfierar funktionalekvationen

$$(8.3) \quad \varphi(g(u), g(v)) = g(u+v)$$

så snart u, v och $u+v$ tillhör J . Låt nämligen u och v vara givna på detta sätt. Då kan vi finna x och y tillhörande I så att

$$\begin{cases} u = f(x) \\ v = f(y) \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = g(u) \\ y = g(v) \end{cases}.$$

Om vi kan visa att $\varphi(x, y)$ tillhör I så gäller ju ekv. A dvs:

$$f(\varphi(x, y)) = f(x) + f(y) = u + v.$$

Genom att applicera g på vänstra och högra leden erhåller man

$$\varphi(g(u), g(v)) = \varphi(x, y) = g(u+v)$$

dvs 8.3. Emellertid är det klart att om x och y ligger på var sin sida om e så tillhör $\varphi(x, y)$ intervallet I . Antag nämligen t. ex. att $x \leq e \leq y$. Eftersom φ är en växande funktion av var och en av variablerna följer ur dessa olikheter att

$$x = \varphi(x, e) \leq \varphi(x, y) \leq \varphi(e, y) = y$$

dvs att $\varphi(x, y)$ ligger mellan x och y som bägge tillhör I .

Det andra fallet då x och y ligger på samma sida om e , fordrar en något längre argumentering. Antag att $\varphi(x, y)$ icke tillhör I . Vi betraktar situationen $e \leq x \leq y$ (vilket är tillräckligt då alla andra fall kan behandlas analogt). Vi kan också förutsätta att f är växande (ty skulle f vara avtagande betraktar vi istället $-f$). Eftersom $u+v$ tillhör J kan vi finna ett tal z i I sådant att $f(z) = u+v = f(x) + f(y)$. Eftersom f är växande gäller $f(e) \leq f(x) \leq f(y)$ dvs $0 \leq u \leq v$. Således är $u+v \geq v$ och därav följer $y \leq z$. Vidare är det klart att $\varphi(x, y) \geq x$ och $\geq y$. Eftersom z tillhör I men $\varphi(x, y)$ icke tillhör I måste $\varphi(x, y) > z$. Sammanfattningsvis gäller således

$$e \leq x \leq y \leq z < \varphi(x, y).$$

Vi betraktar nu s som obekant i ekvationen

$$\varphi(x, s) = z.$$

Eftersom $\varphi(x, e) = x \leq z$ och $\varphi(x, y) > z$ finns mellan e och y precis en rot s till denna ekvation, och då x, s och $\varphi(x, s) = z$ alla tre tillhör I så gäller A dvs:

$$f(z) = f(\varphi(x, s)) = f(x) + f(s).$$

Å andra sidan gäller ju $f(z) = f(x) + f(y)$. Härav följer att $y = s$, vilket är

orimligt då $\varphi(x, y)$ icke tillhör I , medan $\varphi(x, s)$ tillhör I . Därmed är visat att 8.3 gäller så snart u, v och $u+v$ tillhör J .

Beviset av satsen kan nu slutföras på följande sätt. På grund av 8.3 gäller

$$f_1(\varphi(g(u), g(v))) = f_1(g(u+v)).$$

Men eftersom f_1 satisfierar A kan vänstra ledet skrivas om på formen

$$f_1(g(u)) + f_1(g(v)).$$

Således ser vi att den sammansatta funktionen $f_1(g)$ satisfierar förutsättningarna i 8.1 på intervallet J . Därför gäller för alla u i J att

$$f_1(g(u)) = k \cdot u \text{ där } k \text{ är en konstant.}$$

Om $g(u)$ betecknas med x erhålles $u=f(x)$ och resultatet $f_1(x)=k \cdot f(x)$ för alla x i I . V. S. B.

Övningsuppgift: 11) Lös funktionalekvationen (giltig i någon omgivning av origo):

$$f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y) = f(x+y).$$

9. Vi skall nu betrakta de i det föregående vunna resultaten från en ny synpunkt och erinrar då först om vad som menas med en grupp.

En *grupp* är en mängd av element där det finns definierad en operation som till två element a och b vilka som helst i gruppen associerar ett tredje gruppelment c (vilket i allmänhet betecknas med ab , som om operationen vore vanlig multiplikation): $c=ab$. Denna operation har följande egenskaper:

1. Den är associativ, dvs:

$$(xy)z = x(yz).$$

2. Det finns ett enhetselement e sådant att för alla x i gruppen gäller

$$ex = xe = x.$$

3. Till varje x i gruppen finns en invers y så att

$$xy = e.$$

Om gruppen samtidigt är ett topologiskt rum så säger man att den är en *topologisk grupp* om

4. operationen xy är kontinuerlig i bägge sina variabler x och y och inversen till x varierar kontinuerligt med x .

Som exempel på grupper kan vi nämna:

Ex. 9.1: De positiva reella talen med multiplikation som operation, $e=1$ och $1/x$ = inversen till x .

Ex. 9.2: De reella talen med addition som operation, $e=0$ och $-x$ = inversen till x .

Dessa grupper är tydligen topologiska grupper (om nämligen den vanliga topologien för reella tal används). De är *enparametriga*, dvs man kan ange de olika gruppelmenten genom att ange olika värden av en enda *reell* parameter. Exempel på en *tvåparametrig* topologisk grupp är:

Ex. 9.3: De komplexa talen med addition som gruppoperation, $e=0$ och $-x$ = invers till x .

Om man jämför ovanstående definition av begreppet topologisk grupp med förutsättningarna F i nr 7 så ser man att det råder påfallande likheter. Är intervallet I som omnämns i F en grupp om operationen $\circ$ tages som gruppoperation? Icke nödvändigt, ty det finns dock ett antal viktiga skillnader mellan F och definitionen av gruppbegreppet. För det första fordras i F icke att resultatet av operationen $x \circ y$ skall tillhöra I , medan i en grupp xy alltid tillhör gruppen. För det andra antages i F existens av inverser blott i närheten av e , medan i en grupp varje element har en invers.

Vi erhåller en definition av begreppet *lokal grupp* om vi i första raden i F ändrar ordet »intervall» till »topologiskt rum» samt ytterligare fordrar att de värden som operationen antager bildar ett topologiskt rum i vilket mängden $a \circ I$ utgör en omgivning av a för varje a som tillhör I .

Tydligen är varje topologisk grupp en lokal grupp, men en lokal grupp behöver icke vara en grupp. Man inser lätt att också en godtycklig omgivning av enhetselementet i en topologisk grupp utgör en lokal grupp. Det är ett olöst problem att avgöra huruvida omvändningen också gäller, dvs: Kan varje lokal grupp inbäddas i en grupp?

Övningsuppgift: 12) Vilka av följande mängder, M , är grupper resp. lokala grupper om den vanliga multiplikation används som operation? M är mängden av de reella tal som är

(a) > 2 ; (b) ≥ 1 ; (c) $> \frac{1}{2}$; (d) > 0 ; (e) ≥ 0 ; (f) $\neq 0$; (g) $= 1$; (h) $= 0$.

10. En lokal grupp utgör enligt sin definition ett topologiskt rum. Man kan därför klassificera de lokala grupperna genom deras topologiska egenskaper. Om en lokal grupp kan omvändbart entydigt och kontinuerligt avbildas på en omgivning av en viss punkt (t. ex. origo) på den reella talaxeln och så att enhetselementet avbildas på den givna punkten säger man att gruppen är *enparametrig*. Om det är möjligt att göra en sådan (topologisk) avbildning av gruppen på en omgivning av origo i ett

Varje enparametrig lokal grupp är lokalt isomorf med gruppen av de reella talen med addition som gruppoperation.

Det finns således väsentligen (dvs bortsett från lokala isomorfier) bara en enda enparametrig lokal grupp, den additiva gruppen av reella tal. För att inse detta behöver vi blott undersöka vilken effekt en koordinattransformation har på den ovan införda funktionen φ . Låt alltså de från början givna koordinaterna betecknas med ett index 1 och antag att vi också inför nya koordinater som anges med index 2. Om x är ett variabelt element i den lokala gruppen som i de två koordinatsystemen har koordinaterna x_1 resp. x_2 så kommer dessa koordinater att variera kontinuerligt med x så att till varje värde av x_1 svarar precis ett värde av x_2 . Således kan x_2 uttryckas som en funktion av x_1 :

$$x_2 = f(x_1),$$

där funktionen f är omvändbart entydig och omvändbart kontinuerlig, dvs monoton och kontinuerlig. Så ser alltså en godtycklig koordinattransformation ut. Villkoret för att den givna lokala gruppen skall vara lokalt isomorf med den additiva gruppen av reella tal är uppenbarligen att det är möjligt att välja de nya koordinaterna så att relationen $z = xy$ antar formen $z_2 = x_2 + y_2$. Om relationen i de ursprungliga koordinaterna har formen $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$ så gäller det alltså att finna en monoton och kontinuerlig funktion f sådan att

$$f(\varphi(x_1, y_1)) = f(z_1) = z_2 = x_2 + y_2 = f(x_1) + f(y_1).$$

Transformationen f skall alltså satisfiera ekv. A. Men enligt sats 7.1 och 7.2 finns det en monoton och kontinuerlig lösning till A och således kan vi införa nya koordinater så att gruppoperationen uttryckt i dessa blir den vanliga additionen.

12. Med kännedom om den formulering av sats 7.2 som gavs i nr 11 är det naturligt att ställa problemet att avgöra huruvida en liknande sats gäller för n -parametriga lokala grupper. Är det t. ex. sant att varje tvåparametrig lokal grupp är lokalt isomorf med den additiva gruppen av vektorer i planet (isomorf med de komplexa talen vid addition, jfr ex. 9.3)? Detta är icke fallet — ty det finns en tvåparametrig (global) grupp som icke är kommutativ och som därför icke kan vara lokalt isomorf med den kommutativa gruppen av tvådimensionella vektorer (se övningsuppgift 13). Man kan emellertid visa att varje tvåparametrig lokal grupp är lokalt isomorf med en av dessa bägge grupper. Således finns det väsentligen bara två olika tvåparametriga lokala grupper.

Den rätta formuleringen av problemet gavs av Hilbert:

HILBERTS FEMTE PROBLEM: *Är det sant att i varje n -parametrig lokal grupp koordinater kan införas på ett sådant sätt att de funktioner $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ av $2n$ variabler som definierar gruppoperationen 10.1 är analytiska funktioner?*

Genom resultatet i nr 11 har vi löst Hilberts femte problem för det enparametriga fallet. Svaret på Hilberts fråga är i detta fall ja, ty $x + y$ är ju analytisk i x och y .

Övningsuppgift: 13) Betrakta alla talpar (a, b) där $a > 0$. Verifiera att dessa bildar en icke-kommutativ grupp om operationen definieras genom

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

13. Till sist några historiska notiser.

I Abels Oeuvres finner man fyra artiklar om funktionalekvationer som alla hänger intimt ihop med här behandlade frågeställningar. I en av artiklarna behandlas ekv. B (under onödigt omfattande förutsättningar; φ antages satisfiera $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$). Abel bevisar där en svagare version av sats 5.1. Av de övriga behandlar en närbesläktade funktionalekvationer och två problemet att kontinuerligt iterera funktioner, dvs att bilda en parametrig lokal grupp av reella funktioner där fg betyder den sammansatta funktionen $f(g(x))$ och som innehåller en given funktion. Dessa artiklar ha mycket litet uppmärksamats av Abels kommentatorer trots att de innehåller flera i den senare utvecklingen fruktbärande idéer.

I den klassiska teorien för lokala grupper förutsatte man att funktionerna $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ har vissa deriverbarhetsegenskaper. Denna teori skapades av Lie, som ägnade hela sin produktion åt den och dess tillämpningar. Lie visade att om i en n -parametrig grupp koordinater kan införas så att funktionerna φ_v har alla derivator upp till och med tredje ordningen kontinuerliga så kan man också införa nya koordinater så att de nya φ_v blir analytiska. (Jfr sats 5.1.)

Hilberts femte problem består således i att avgöra huruvida dessa deriverbarhetsförutsättningar verkligen är nödvändiga eller om det räcker att förutsätta enbart kontinuitet. Man har lyckats skärpa Lies resultat så långt att man visat att det räcker att antaga att

$$\varphi_v(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$$

har kontinuerliga derivator av första ordningen med avseende på variablerna x_i enbart (eller y_i). (Segal.)

För kompakta grupper löstes problemet av v. Neumann 1933 och för kommutativa grupper av Pontrjagin 1934. För grupper i allmänhet gavs det slutliga svaret på Hilberts fråga av Montgomery och Zippin 1952. De bevisade bl. a. att Hilberts förmodan var riktig. Det återstår emellertid fortfarande att lösa problemet för *lokala* grupper. Genom Montgomery's och Zippin's resultat är emellertid problemet löst för alla viktiga lokala grupper. Som tidigare framhållits känner man nämligen icke till någon enda lokal grupp som inte kan inbäddas i en grupp. Men för en lokal grupp som ligger i en grupp följer resultatet naturligtvis av Montgomery's och Zippin's arbete.

Svar till övningsuppgifterna:

1. (a) $e = 1$, $f(x) = x - 1$ för alla x ;
 (b) $e =$ logaritmens bas, $f(x) = \log \log x$ för $x > 1$.
4. $x \circ y = x + y$, x, y eller 0.
5. $f(x) = k \cdot \log(1 + x)$.
6. Ur lösningsformeln beräknat f satisfierar ej A.
7. (b) Derivera B m. avs. på y och sätt sedan $y = e$.
8. (a) $0 < x$; (b) $-1 < x < 1$.

$$10. (a) a^{\circ(1/2)} = \frac{a}{1 + \sqrt{1 + a^2}}, \quad a^{\circ(-1)} = -a;$$

$$(b) a^{\circ(1/2)} = \frac{a}{1 + \sqrt{1 + a}}, \quad a^{\circ(-1)} = -\frac{a}{1 + a}.$$

$$11. f(x) = e^{kx} - 1.$$

12.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
Grupp	Nej	Nej	Nej	Ja	Nej	Ja	Ja	Ja
Lokal grupp	Nej	Nej	Ja	Ja	Nej	Ja	Ja	Ja

TRÆK AF VÆGTSTANGSREGLENS HISTORIE

MOGENS PIHL

Foredrag holdt i Selskabet for de eksakte videnskabers historie, november 1952.

I mekanikkens historie har *vægtstangsreglen* spillet en betydelig rolle, idet den før kendskabet til sætningen om kræfternes parallelogram udgjorde grundlaget for behandlingen af alle statiske problemer. Og det er forstaaeligt, at man gennem tiderne har forsøgt at »bevise« denne grundlæggende lov paa forskellig maade, altsaa at reducere den til endnu simple forudsætninger. Hensigten med det følgende er for det første at fortælle om saadanne beviser for vægtstangsreglen, idet vi dog udelukkende holder os til betragtninger af statisk natur, og dernæst at vise nogle faa eksempler fra mekanikkens historie paa anvendelser af denne regel.

1. Arkimedes' bevis. Dette velkendte bevis [1] bygger paa følgende forudsætninger: 1° Ligevægten af et system bevares, dersom to lige tunge vægte samles i midtpunktet mellem deres ophængningspunkter. 2° En vægtstang — fra hvis egenvægt vi her og i det følgende ser bort — er i ligevægt, dersom den symmetrisk omkring ophængningspunktet er belastet med parvis lige tunge vægte.

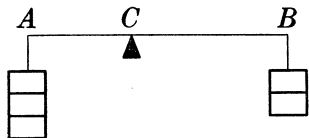


Fig. 1 a

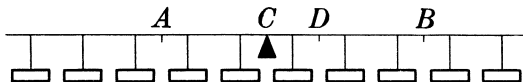


Fig. 1 b

Lad (fig. 1 a) vægtstangen AB være ophængt i punktet C , der deler AB i det omvendte af forholdet mellem de i A og B ophængte vægte; disse antages at være kommensurable. D er et saadant punkt af vægtstangen, at $AC = DB$ (fig. 1 b). Afsættes til venstre for A og til højre for B i vægtstangens retning linjestykkerne henholdsvis AD og BD , bliver C midtpunktet af den saaledes forlængede vægtstang. Der vil da

være ligevægt ved ophængning i dette punkt, dersom vægtene i A og B spredes som vist paa fig. 1 b; dette er altid muligt, da de linjestykker, paa hvilke vægtene fordeles, er proportionale med disse. Men denne lige-

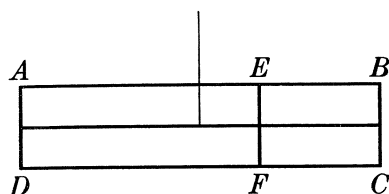


Fig. 2 a

vægt bevares, naar vægtene atter samles, hvormed sætningen er bevist.

Hos Arkimedes bevises dernæst det inkommensurable tilfælde, hvad vi ikke her skal gaa nærmere ind paa. En tillempning af Arkimedes' bevis for vægtstangsreglen er givet af Stevin [15] og Galilei [6]: Bjælken

$ABCD$ paa fig. 2 a er ophængt i ligevægt. Den overskæres ved snittet EF , og tankegangen fremgaar derefter saa tydeligt af fig. 2 b og 2 c, at nærmere kommentar maa anses for overflødig. Figureerne 2 a, 2 b og 2 c er — med uvæsentlige ændringer — taget direkte fra Stevin.

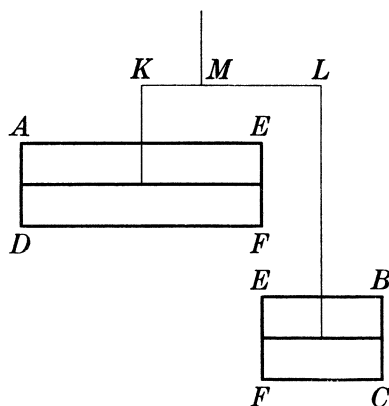


Fig. 2 b

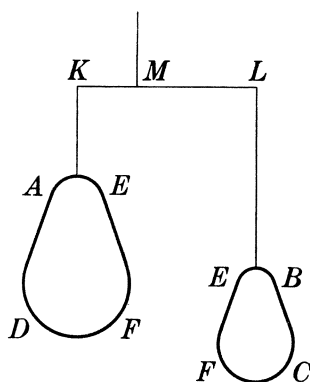


Fig. 2 c

Iøvrigt er det mindre ligevægtsbetingelser end *tyngdepunktsbestemmelser*, hvormed Arkimedes beskæftiger sig i de overleverede afhandlinger, hvor — som paavist af Juel [9] og Stein [14] — tyngdepunktet er implicit defineret gennem en række rent *geometriske* krav. Paa lignende maade var jo f. eks. forholdsbegrebet i den Eudoxiske proportionslære i Euklid V ikke eksplicit defineret, men aksiomatisk bestemt gennem opstillingen af visse forudsætninger, som dette begreb skal respektere. Kendt er de anvendelser, Arkimedes gjorde af tyngdepunktsbestemmelser til beregning af maal for overflader og rumfang, og hvorom E. J. Dijksterhuis fornylig har gjort rede i dette tidsskrift [4].

Hvad forudsætningerne for det Arkimediske bevis angaar, har kritikken i særdeleshed været rettet imod den første, som heller ikke kan siges at

være indlysende. Samlingen af to lige tunge vægte i midtpunktet er jo i almindelighed ikke mekanisk tilladelig; saaledes vil f. eks. svingningstiden af et fysisk pendul ændres ved en saadan samling, idet inertimomentet herved forandres.

2. »Euklids« bevis. Blandt de mange arabiske haandskrifter, der — i reglen med urette — besmykkes med Euklids navn, findes et interessant om vægtstangen, udgivet i 1851 af Woepcke ([16]; se ogsaa [13] og [5]). Det heri givne bevis viser sig ved nærmere analyse i det væsentlige at bygge paa følgende forudsætninger:

1° Et i et punkt ophængt vandret plan forbliver i den vandrette ligevægt, dersom det belastes med to lige tunge vægte, hvis forbindelseslinjestykkes midtpunkt falder i ophængningspunktet, og dersom det i ophængningspunktet belastes med vilkaarlige vægte.

2° Forskydes en vægt paa et vandret plan, der er ophængt i et punkt, vil planet ganske vist ophøre med at være i ligevægt, idet det vil hælde til den side, hvor vægten forskydes, men den linje gennem ophængningspunktet, der staar vinkelret paa forskydningsretningen, forbliver vandret.

Fig. 3 forestiller to kongruente rektangler med en vinkelspids fælles og et par vinkler som topvinkler. Figuren tænkes beliggende i et vandret plan, der er i ligevægt under ophængning i C . Tilføjelsen af tre lige tunge vægte i punkterne A , D og E vil da ikke ændre ligevægtsstillingen af planet. Thi for det første kan denne tilføjede vægtforde-

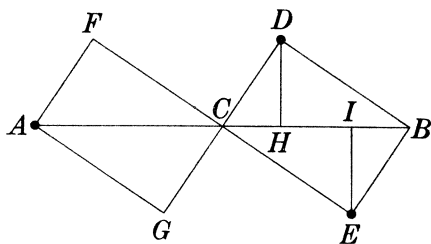
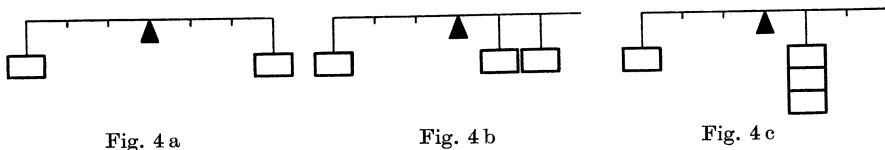


Fig. 3

ling jo opfattes som hidrørende fra parallelforskydninger vinkelret paa den rette linje FCE af to af tre i F , C og E anbragte lige tunge og ligevægtsbevarende vægte, saaledes at fordelingen af lige tunge vægte i A , D og E i hvert tilfælde holder FCE vandret. Og for det andet kan den samme vægtfordeling opfattes som hidrørende fra parallelforskydninger vinkelrette paa GCD af to af tre lige tunge, ligevægtsbevarende vægte i G , C og D , saaledes at ogsaa GCD holdes vandret ved tilføjelsen af vægtene i A , D og E . Men naar to hinanden skærende linjer holdes vandrette, vil planet ligeledes bevare sin vandrette stilling. Heraf følger da, at den i C ophængte vandrette vægtstang ACB forbliver i ligevægt, dersom den belastes med tre lige tunge vægte i henholdsvis A , H og I , hvor H og I er projektioner af D og E paa AB , og altsaa $CH = IB$; thi denne vægtfordeling kan jo opfattes som hidrørende fra parallelforskydninger af

vægtene i D og E vinkelret ind paa ACB . Eller sagt med andre ord: Dersom den ene af to lige tunge vægte med samme afstande fra ophængningspunktet paa en vægtstang i ligevægt skubbes et stykke (BI) indad mod ophængningspunktet, vil ligevægten bevares, saafremt en ligesaa tung vægt samtidig løsnas fra ophængningspunktet og skubbes det samme stykke (CH) i modsat retning. Og man kan da let vise, at ligevægten af enhver vægtstang bevares, dersom man, for hver gang en vilkaarlig vægt skubbes et



stykke indad mod ophængningspunktet, løsner en ny, ligesaa tung vægt i ophængningspunktet og skubber den det samme stykke i modsat retning.

Af fig. 4a, b og c fremgaar da, hvorledes vægtstangsreglen bevises for det tilfælde, at vægtene forholder sig som 1:3, og det er ikke vanskeligt at generalisere denne overvejelse til vilkaarlige kommensurable forhold.

3. Huygens' bevis. Vi skal ikke her eksplicit angive de nærmere forudsætninger for Huygens' bevis ([8]; se ogsaa [13]) — der iøvrigt udmærker sig ved en nøje præcisering af grundlaget —, men blot anskueliggøre den ledende tanke (fig. 5):

I A og B er ophængt to kommensurable vægte, og man skal vise, at

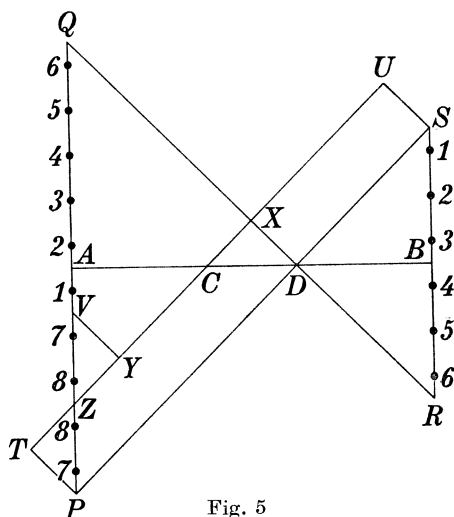


Fig. 5

den i punktet C ophængte vægtstang ACB er i ligevægt, naar C deler AB i det omvendte af vægtenes forhold. D er som tidligere det punkt af vægtstangen, hvor $AC = DB$. Hjælpelinierne RQ , PS og TU trækkes som vist paa figuren, saa de hælder 45° mod AB . Firkanten $TPSU$ er et rektangel. VY tegnes, saa der fremkommer to kongruente retvinklede trekanten PTZ og VYZ ; de to trapezer $QXYV$ og $RXUS$ er da ogsaa kongruente. Vægtene i A og B spredes som vist paa figuren; dette er muligt, da de

forholder sig som linjestykkerne PQ og RS . Det ses nu, at alle vægte langs RS ligger symmetrisk med de tilsvarende nummererede vægte paa VQ med hensyn til X , og vægtene paa PV ligger parvis symmetrisk med hensyn til Z . Planet vil derfor være i ligevægt, naar det understøttes langs TU . Men da dette ogsaa er tilfældet, naar det understøttes langs AB , vil det være i ligevægt, dersom det understøttes i C , hvor TU og AB skærer hinanden. Denne ligevægt ændres ikke, ved at vægtene langs PQ og RS atter samles i A og B , hvormed beviset er ført.

4. Ole Rømers bevis. I Leibniz' efterladte papirer findes et vidnesbyrd om, at Huygens' ven og kollega i det franske akademi Ole Rømer ogsaa har givet et bevis for vægtstangsreglen [11]. Desværre er Leibniz' notater saa kortfattede, at det ikke heraf fremgaar, hvorledes Rømer i enkeltheder har gennemført dette højst interessante bevis, men tankegangen synes i det væsentlige at have været følgende:

Ved betragtning af henholdsvis en ligesidet trekant og en rhombe, hvor man gerne vil indrømme, at tyngdepunktet ligger i henholdsvis medianernes og diagonalernes skæringspunkt, skal det ifølge Rømer fremgaa, at vægtstangsreglen er gyldig for de tilfælde, hvor vægtene forholder sig som henholdsvis 1:2 og 1:3. Hvorledes han er kommet hertil, ses ikke af Leibniz' optegnelser, og forskellige formodninger kan opstilles, hvoraf en er omtalt i [11] og med en lille ændring kan gengives saaledes:

Et plan er belastet med lige tunge vægte i vinkelspidserne 1, 2 og 3 af en ligesidet trekant (fig. 6a); det er i ligevægt med medianskæringspunktet som ophængningspunkt. Denne ligevægt forstyrres ikke, dersom vægtene i 2 og 3 samles i midtpunktet af den tilhørende side. Hermed er vægtstangsreglen bevist for det tilfælde, hvor vægtene forholder sig som 1:2.

For vægtforholdet 1:3 godtgøres reglen paa lignende maade ved betragtning af en rhombe, sammensat af to ligesidede trekanter og belastet

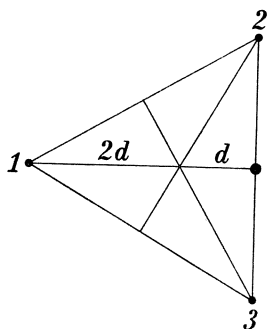


Fig. 6 a

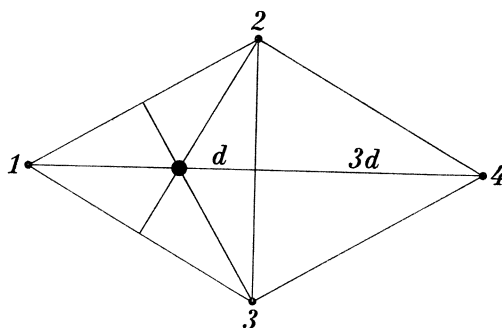


Fig. 6 b

med lige tunge vægte i vinkelspidserne 1, 2, 3 og 4 (fig. 6b). Figuren er i ligevægt ved ophængning i rhombediagonalernes skæringspunkt. Ligevægten bevares, naar vægtene i 1, 2 og 3 samles i medianskæringspunktet for den tilhørende trekant; heraf følger vægtstangsreglen for forholdet 1:3.

Til den givne bevisførelse maa dog bemærkes, at det ikke er helt tilfredsstillende at operere med begrebet tyngdepunkt paa denne maade, naar man ikke har nærmere kendskab til Rømers opfattelse af dette begreb.

Dernæst opstiller Rømer den sætning — og i den her givne præcise formulering! — *at det til hvert forhold mellem to hele, positive tal m og n og til hvert positivt tal c er muligt at finde to hele, ikke negative tal x og y , saaledes at den numeriske forskel mellem m/n og $2^x/3^y$ er mindre end c* . Altsaa at ethvert positivt rationalt tal kan approksimeres vilkaarligt tæt med tal af formen $2^x/3^y$, hvor x og y er hele tal ≥ 0 . Og af denne grund er det da ifølge Rømer kun nødvendigt at bevise vægtstangsreglen for det tilfælde, at vægtene forholder sig som $2^x:3^y$. Men beviset herfor er meget let. I korthed kan vi formulere det paa følgende maade: Lad de til vægtene 2^x og 3^y hørende arme være henholdsvis a og b . Er der ligevægt, vil denne ikke ændres, hvis vægten 2^x halveres og anbringes i afstanden $2a$, saaledes at vi nu paa den ene side har vægten 2^{x-1} i afstanden $2a$. Fortsættes med denne halvering af vægten og fordobling af armen, faas tilsidst vægten 1 i afstanden $2^x a$, og paa samme maade vil ligevægten ikke forstyrres, ved at vi fortsætter med at tredele vægten og tredoble armen paa den anden side af vægtstangen, indtil vi faar vægten 1 virkende i afstanden $3^y b$ fra ophængningspunktet. Men da de to vægte 1 kun kan være i ligevægt, naar armene er ligestore, følger heraf, at $2^x a = 3^y b$ er en nødvendig betingelse for ligevægt. At betingelsen ogsaa er tilstrækkelig, indses ved at gennemløbe ræsonnementet i modsat retning.

Desværre findes beviset for ovennævnte fra den tid ellers ukendte approksimationssætning ikke i Leibniz' notater. Sætningens rigtighed kan let bevises med vor tids matematiske hjælpemidler [11], men noget helt elementært bevis har det ikke været mig muligt at finde. Maaske kan tidsskriftets læsere finde et saadant? Og angive en algoritme for denne approksimation?

5. Momentsætningen. I de hidtil givne beviser har vi forudsat, at kræfterne — vægtene — er indbyrdes parallelle og vinkelret virkende paa den retlinjede vægtstang. I middelalderen — og maaske allerede i oldtiden, hvad bemærkninger hos Heron og Pappus kunne tyde paa —

var man klar over, at vægtstangsreglen kunne udvides til den lov, vi nu kender under navn af *momentsætningen*. I det simple tilfælde, hvor et plant legeme paavirkes af to i samme plan beliggende, hinanden modarbejdende kræfter k_1 og k_2 (fig. 7a), siger denne sætning jo, at der

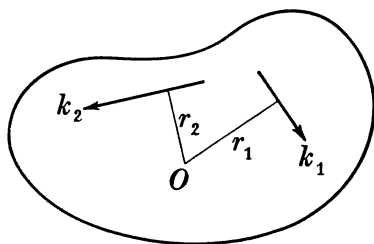


Fig. 7 a

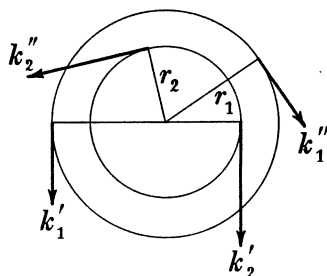


Fig. 7 b

bestaar ligevægt omkring ophængningspunktet O , saafremt $k_1 r_1 = k_2 r_2$, hvor r_1 og r_2 er de vinkelrette afstande fra O til kræfterne. Man kunne tænke sig, at indsigten i denne momentsætning var opnaaet paa følgende maade (se f. eks. [3], [7]) — direkte evidens herfor foreligger dog ikke:

I dobbelttrissen med radierne r_1 og r_2 i fig. 7 b holder kræfterne k'_1 og k'_2 , der i størrelse er lig med henholdsvis k_1 og k_2 , hinanden i ligevægt ifølge vægtstangsreglen, da $k_1 r_1 = k_2 r_2$, og følgelig $k'_1 r_1 = k'_2 r_2$. Tilføjes nu kræfterne k'_1 og k'_2 ligestore og ensrettede med henholdsvis k_1 og k_2 , vil k'_1 og k'_2 af »symmetrigrunde« holde hinanden i ligevægt, ligesaa k'_2 og k'_1 ; men da k'_1 og k'_2 holder systemet i ligevægt, maa dette ligeledes være tilfældet med k'_1 og k'_2 , og følgelig vil kræfterne k_1 og k_2 i fig. 7a ogsaa holde dette system i ligevægt.

6. En statisk anvendelse. Som et eksempel fra den tid paa statisk anvendelse af vægtstangsreglen vil vi vise, hvorledes Ole Rømer bestemte ligevægt paa skraaplanet ([12], hvori omtales nogle utrykte manuskripter af Rømer i det franske akademi; heri er ogsaa behandlet mere komplicerede ligevægtsproblemer end det her omtalte). Paa et skraaplan med hældningsvinklen α (fig. 8) holdes legemet S i ligevægt under paavirkning af

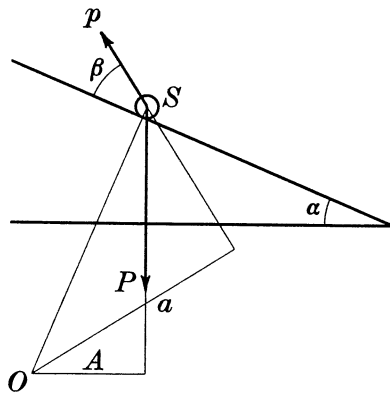


Fig. 8

tyngdekraften P og en kraft p , hvis vinkel med skraaplanet er β . Lad O være et punkt af skraaplanets normal i S . Tænk vi os skraaplanet fjernet og legemets bevægelse paa et lille stykke erstattet med en cirkelbevægelse med centrum i O , saaledes at radius fra O til legemet kan opfattes som en enarmet vægtstang, ændrer dette ikke ligevægten, og ligevægtsbetingelsen er da $p \cdot a = P \cdot A$, hvor a og A er de vinkelrette afstande fra O til retningerne af p og P . Og idet $A/a = \sin \alpha / \cos \beta$, kan ligevægtsbetingelsen skrives

$$p \cos \beta = P \sin \alpha .$$

I det tilfælde, hvor p virker parallel med skraaplanet, overgaar betingelsen til den velkendte lov for en vægt virkende langs et skraaplan: $p = P \sin \alpha$.

7. En dynamisk anvendelse. I det berømte værk om penduluret, offentliggjort i 1673, havde Huygens bestemt den *reducerede pendullængde* af et fysisk pendul, altsaa længden af det matematiske pendul, der svinger i takt med det fysiske. Og i et arbejde fra 1703 [2] viste nu Jacob Bernoulli, hvorledes denne bestemmelse kunne foretages paa simple maade ved anvendelse af vægtstangsreglen. For nemheds skyld nøjes vi med at betragte et pendul bestaaende af to massepunkter m_1 og m_2 , der er fast forbundne med en vægtløs stang gennem ophængningspunktet O , og hvis afstande fra O er henholdsvis l_1 og l_2 ($l_1 < l_2$). Hvis massepunktet m i afstanden l fra O svinger i takt med det fysiske pendul, er l den reducerede pendullængde. Betegnes m 's akceleration i bevægelsesretningen til et givet tidspunkt med γ ($= g \sin \alpha$, hvor g er tyngdeakcelerationen og α vinklen med lodlinien), vil m_1 og m_2 , da pendulerne jo følges ad, til dette tidspunkt i samme retning have akcelerationerne $\frac{l_1}{l} \gamma$ og $\frac{l_2}{l} \gamma$. Heraf følger, at m_1 , grundet paa den mekaniske forbindelse med m_2 , i sin bevægelse er hæmmet af tvangskraften $m_1 \gamma - m_1 \frac{l_1}{l} \gamma$, hvorimod m_2 's bevægelse af samme aarsag fremmes af tvangskraften $m_2 \frac{l_2}{l} \gamma - m_2 \gamma$. Og da disse vinkelret paa stangen virkende tvangskræfter maa holde hinanden i ligevægt overfor den betragtede drejning om ophængningspunktet — her er Bernoulli faktisk allerede inde paa d'Alemberts princip! —, fører vægtstangsreglen til

$$\left(m_1 \gamma - m_1 \frac{l_1}{l} \gamma \right) l_1 = \left(m_2 \frac{l_2}{l} \gamma - m_2 \gamma \right) l_2$$

eller

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2},$$

hvilket er formelen for den reducerede pendullængde.

LITTERATUR

- [1] ARKIMEDES, se f. eks. *Ostwald's Klassiker* nr. 203. Leipzig 1923, s. 36; eller Paul Ver Eecke: *Les oeuvres complètes d'Archimède*. Bruxelles 1921, s. 307.
- [2] JACOB BERNOULLI: *Opera*. Genève 1744, I, s. 454, s. 460; II, s. 930.
- [3] LA COUR og APPEL: *Historisk Fysik* I. København 1896, s. 165.
- [4] E. J. DIJKSTERHUIS: *Die Integrationsmethoden von Archimedes*. Nordisk Matematisk Tidsskrift 2 (1954), s. 5–23.
- [5] P. DUHEM: *Les origines de la statique* I. Paris 1905, s. 61.
- [6] GALILEI: *Dialogues concerning two new sciences*. New York 1914, s. 110; eller *Ostwald's Klassiker* nr. 11. Leipzig 1890, s. 94.
- [7] A. E. HAAS: *Die Grundgleichungen der Mechanik dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung*. Leipzig 1914, s. 10.
- [8] HUYGENS: *Oeuvres complètes* XIX. La Haye 1937, s. 40–47.
- [9] C. JUEL: *Note om Arkimedes Tyngdepunktslære*. Oversigt over Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, København 1914, s. 421–441.
- [10] E. A. MOODY og M. CLAGETT: *The medieval science of weight*. Madison 1952.
- [11] M. PIHL: *Et lille bidrag til vægtstangsreglens historie*. Matematisk Tidsskrift B, København 1950, s. 123–126.
- [12] M. PIHL: *Ole Rømers virksomhed i det franske akademi*. Naturens Verden, København 1949, s. 25.
- [13] D. REIMANN: *Historische Studie über Ernst Machs Darstellung der Entwicklung des Hebelsatzes*. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B III, Berlin 1936, s. 554–592.
- [14] W. STEIN: *Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes*. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B I, Berlin 1930, s. 221–244.
- [15] STEVIN, se E. J. Dijksterhuis: *Simon Stevin*. Haag 1943, s. 116.
- [16] WOEFCKE: *Journal Asiatique* (IV), bd. 8 (1851), s. 225.

For nærmere studium anbefales i særdeleshed henvisningerne [14], hvori W. Stein giver en omhyggelig analyse af *Arkimedes' statik*; [13], i hvilken afhandling D. Reimann gør rede for væsentlige træk af *vægtstangsreglens bevishistorie*; samt den udmærket kommenterede udgave [10] af middelalderlige skrifter om vægtstangen.

ET LILLE PROBLEM FRA FLADETEORIEN

DAVID FOG

De følgende linier skal tjene til at belyse det faktum, som vel nok kan virke overraskende, første gang man møder det, nemlig at selv om alle normalsnit til en flade $z=f(x, y)$ i et bestemt punkt har minimum (resp. maksimum) i dette punkt, behøver selve fladen ikke at have minimum (resp. maksimum) i punktet.

Som et simpelt eksempel herpå vil vi betragte fladen

$$(1) \quad z = y^2 - 2x^2y + \frac{3}{4}x^4.$$

Af (1) ses, at i begyndelsespunktet O er $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; i dette punkt er altså xy -planen tangentplan og z -aksen normal.

Vi vil skære fladen med en vilkårlig plan gennem denne normal. Planens skæringslinje med xy -planen kan på parameterform fremstilles ved

$$x = \varrho \cos v, \quad y = \varrho \sin v,$$

hvor v er liniens vinkel med x -aksen, og parametren ϱ angiver det løbende punkts afstand fra O . Indsættelse i (1) giver

$$(2) \quad z = \varrho^2 \sin^2 v - 2\varrho^3 \cos^2 v \sin v + \frac{3}{4}\varrho^4 \cos^4 v.$$

Idet v holdes fast, fremstiller denne ligning snitkurven i et ϱz -koordinat-system, beliggende i snitplanen.

Af (2) ses, at man i O har

$$\frac{dz}{d\varrho} = 0, \quad \frac{d^2z}{d\varrho^2} = 2\sin^2 v.$$

Alle snitkurver, for hvilke $\sin v \neq 0$, vil derfor have minimum i dette punkt. Det samme gælder imidlertid også for den ved $\sin v = 0$ bestemte kurve, idet (2) her reduceres til $z = \frac{3}{4}\varrho^4$. *Alle fladens normalsnit i begyndelsespunktet har altså minimum i dette punkt.*

Lad os dernæst betragte den kurve på fladen, der projiceres på xy -planen i parablen $y=x^2$. Indsættelse i (1) giver her $z = -\frac{1}{4}x^4$, hvilket viser, at kurven — og dermed fladen — indeholder punkter i umiddelbar

nærhed af O med negativ z -koordinat. *Fladen har altså ikke minimum i begyndelsespunktet.*

Den tilsyneladende modstrid mellem de fundne fakta opløser sig let, når man betragter fladens beliggenhed i forhold til xy -planen. Dens ligning (1) kan skrives

$$z = (y - \tfrac{1}{2}x^2)(y - \tfrac{3}{2}x^2).$$

Fladen skærer altså xy -planen i to parabler, der rører x -aksen — og hinanden — i O og vender til samme side. Fladens z -koordinat er negativ, når (x, y) ligger i det seglformede areal mellem de to parabler, men positiv for punkter (x, y) uden for dette område.

Vi betragter nu en vilkårlig linie i xy -planen, gående gennem O . På denne kan vi med O som midtpunkt afgrænse et interval, som ikke har noget punkt i det »negative område«. Lader vi linien dreje sig omkring O , så den nærmer sig x -aksen, vil det brugelige interval blive mindre, og når linien konvergerer mod x -aksen, vil intervallets længde gå mod nul; men det eksisterer stadig i enhver stilling under grænseovergangen. Falder linien på selve x -aksen, kan intervallet vælges ubegrænset stort. Disse forhold er i overensstemmelse med, at hvert normalsnit i O har minimum i dette punkt. Parablen $y = x^2$ forløber derimod i det negative område og giver derfor anledning til fladepunkter under xy -planen i ubegrænset nærhed af O . Hermed er det anskueliggjort, hvordan de to fremsatte — og beviste — påstande kan forenes.

En anden flade med lignende egenskaber som den ovenfor behandlede er fremstillet ved

$$z = y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5;$$

men udseendet af denne flade — og dens skæringskurve med xy -planen — i omegnen af det kritiske punkt (begyndelsespunktet) er dog lidt anderledes end i det foran gennemgåede eksempel. Den nærmere undersøgelse heraf overlades til læseren.

ON THE PROBLEM OF PARTITIONING THE CIRCLE SO AS TO VISUALIZE LEIBNIZ' FORMULA FOR π

VIGGO BRUN

Lecture in the Norwegian Mathematical Society, Sept. 28, 1954.

Lionardo da Vinci has an interesting remark in *Trattato della pittura*. In his opinion the art of painting, the art of the eye, is superior to poetry, the art of the ear, because the eye is a much finer organ than the ear. He says: »If you, historians, or poets, or mathematicians had not seen things with your eyes you could not report them in writing.« (Se uoi istorigrafi o poeti o altri mattematici nō ui aveste col'occhio viste le cose, male le potreste riferire per le scritture.)

No doubt not all mathematicians are in agreement. Some prefer a geometrical treatment, others an analytical one. As characteristic examples one can mention Poncelet and Abel. Poncelet treated mathematics wholly geometrically. A direct contrast was Abel; in his collected works, one can hardly find a figure of importance. His ideal world seems to have been totally independent of the geometrical treatment. An amusing verification of this is given by Oystein Ore in his book on Abel, where he quotes a newspaper polemic between Professor Hansteen and Professor Holmboe. The latter had criticized a textbook in geometry published by Hansteen in 1835. In the polemic which followed, Hansteen writes: »When I see a student, who has received his mathematical education in that school, draw a circle for me which has the form of a potato, and in one extremity of this monster put a point, or, what is even worse, just write a capital letter, to indicate what he calls the midpoint, then I already know what the clock has struck, and that all his geometry is not worth a pipe of tobacco.«

Holmboe gives the following reply: »I must confess that this is a really curious criterion for the worth of a student's geometrical knowledge. Niels Abel was a man of this school. As it happens, I am able to show to anyone who so desires, several illustrations of the circles which he

sketched. He was not clever in freehand drawing. Therefore his circles looked miserable and they can really be compared with potatoes if not with even worse things. Consequently, all his geometry was not worth a pipe of tobacco.»

We can see that the desire of Lionardo da Vinci to have seen the things with the eyes is not alien to modern mathematicians either. In a necrology over Max Dehn, written by W. Magnus and R. Moufang, it is said: »Dehn war ein Geometer von ausgezeichneter Phantasie, seine Probleme wurzeln im Anschaulichen. Die dem Geometer nach einem Worte von Felix Klein eigentümliche Freude, sehen zu können, was er denkt, wird an Dehns Forschungsweise lebendig.«

The old greeks can certainly be said to have fulfilled the claim of Lionardo. They indeed treated mathematics geometrically. The old hin-

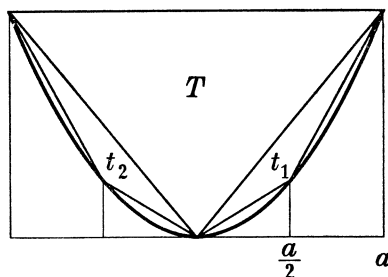


Fig. 1

dus went even a step further when they treated geometrical questions. They drew a figure and wrote: »See«.

Newton and Leibniz computed areas by making use of the fact that the determination of areas and of tangents lead to inverse operations. This was great progress indeed. But in doing so, the determination of areas could no longer be seen with the eyes, to use the words of Lionardo.

I will mention an example. Archimedes calculated the segment of a parabola in the following way (fig. 1): He bisects the abscissa a and thereby determines a vertex of the triangle t_1 . He then shows that

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{4}T.$$

In continuing the bisection of the abscissas, he gets four new triangles with a total area of $\frac{1}{4}(t_1 + t_2)$, and so on. In this way, Archimedes obtains the area of the parabola:

$$S = T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \dots = \frac{4}{3}T.$$

This operation is indeed »visible«. Newton and Leibniz determine this area by means of the operation

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = x^2.$$

I have shown in an article on the formula of Simpson in the first

volume of this journal how the Archimedian method could lead to a usable generalized Simpson-formula, whereas the most obvious analytic method leads to a formula which is nearly unusable.

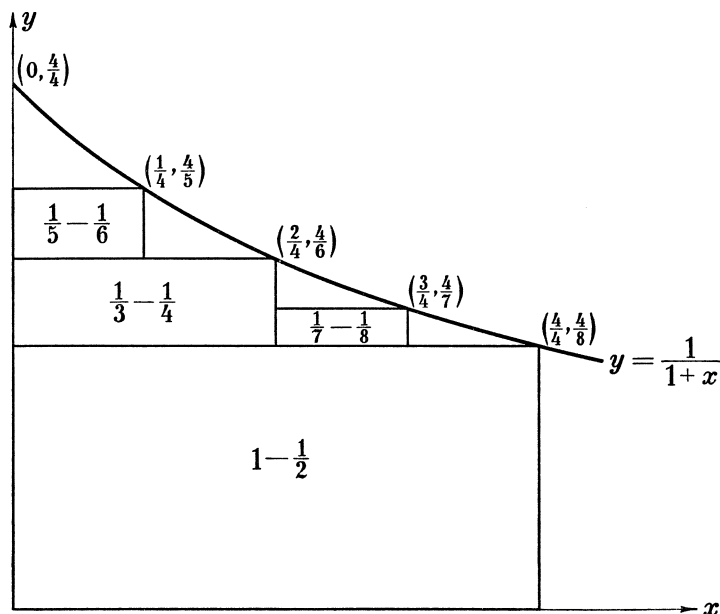


Fig. 2

Before the time of Newton and Leibniz, lord Brouncker used this bisecting-summation of Archimedes to determine the area under the hyper-

bola $y = \frac{1}{1+x}$, when x goes from 0 to 1. Lord Brouncker in this way, as seen from fig. 2, obtains the formula

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

It seems that at that time much importance was attached to this discovery by lord Brouncker. The publication in Philosophical Transactions Vol. 4, 1668 opens thus: »The squaring of the Hyperbola, by an infinite series of rational numbers together with its demonstration by that Eminent Mathematician the Right Honorable the Lord Viscount Brouncker. What the Acute Dr. John Wallis had intimated, some years since ... that the World one day would learn from the Noble Lord Brouncker the Quadrature of the Hyperbolae: the Ingenious Reader may see performed in the subjoyned operation, which its Excellent author was now pleased to communicate as followths in his own words.«

Otherwise lord Brouncker's interesting determination of $\ln 2$ appears to have been entirely forgotten after having been replaced by the integration of

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

I should think that this intelligible method of Brouncker ought to find its place in elementary mathematical education, along with the method of the infinitesimal calculus.

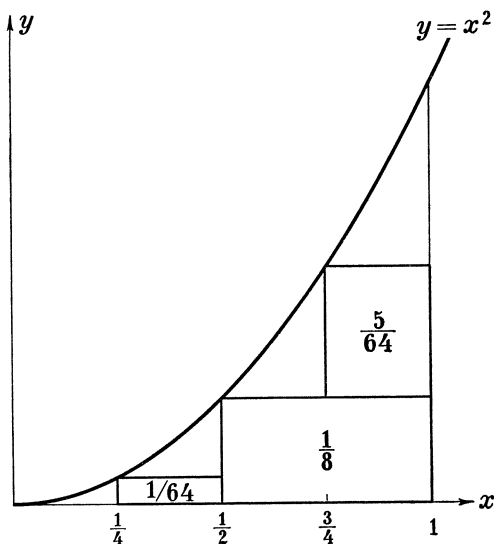


Fig. 3

Let us examine what formulas we arrive at by using this bisecting-summation in the determination of the area A_2 under the parabola $y = x^2$ when x goes from 0 to 1 (fig. 3). We find

$$(1) \quad A_2 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} (1^2 - 2^2 + 3^2) + \frac{1}{8^3} (1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2) \\ + \frac{1}{16^3} (1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 15^2) + \dots$$

It is known that

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2r-1)^2 = 2r^2 - r.$$

Using the formula for the sum of a geometrical series, one then obtains the same result as Archimedes, $A_2 = \frac{1}{3}$.

The corresponding formula for the area A_n under the curve $y=x^n$ when x goes from 0 to 1 is

$$(2) \quad A_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} (1^n - 2^n + 3^n) + \frac{1}{8^{n+1}} (1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \dots + 7^n) + \dots$$

Certainly a formula for

$$1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \dots + (2r-1)^n$$

is known when n and r are natural numbers. But as this formula uses the Bernoullian numbers, it will not be easy thereby to deduce that

$$A_n = \frac{1}{n+1}.$$

Otherwise it is possible to establish this independent of the infinitesimal calculus of Newton and Leibniz, in the manner already used by Roberval and Fermat.

Is it possible, in a corresponding manner, to «chart» the area of the circle such that the formula of Leibniz and Gregory:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

can be «seen with the eyes»?

The classical method for the determination of π , using inscribed and circumscribed polygons, was visible indeed. But it has the disadvantage of leading to a series of calculations of square roots.

The vertices of a regular polygon inscribed in a circle with radius 1 do not have rational coordinates. It is easy to determine a rational point (x_1, y_1) on the circle

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

as intersection with the line $y=kx$ with k rational:

$$x_1 = \frac{2}{1+k^2}, \quad y_1 = \frac{2k}{1+k^2}.$$

We are therefore able to find a formula for π , using the partition of the area of the circle which is shown in fig. 4. It is not difficult to find a rule for computing the successive terms by continued bisection of the k -scale. But the formula will be too complicated to be of interest.

The condition that the inscribed rectangles, or perhaps triangles, shall

have vertices with rational coordinates is, however, unnecessarily strong. It is sufficient that the *areas* of the rectangles or triangles be rational

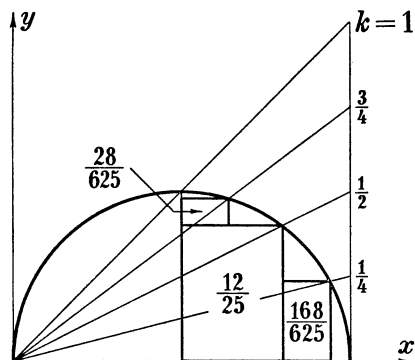


Fig. 4

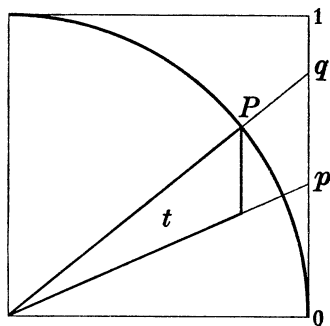


Fig. 5

numbers. We can use the fact that the area of the triangle t in fig. 5 will be rational if p and q are rational, as

$$(3) \quad t = \frac{1}{2} \cdot \frac{q-p}{1+q^2}.$$

Consequently it is not necessary that the coordinates of the point P be rational. If we therefore, instead of partitioning the circumference of the circle into equal parts, partition the circumference of the circumscribed square in equal parts, we will, by the construction in fig. 6, obtain a

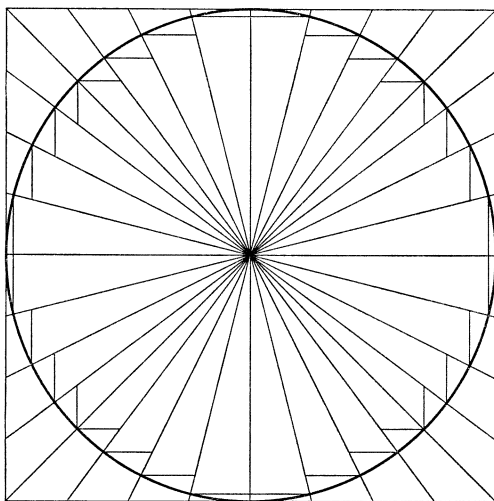


Fig. 6

lower bound for π . In the same manner we can obtain an upper bound, and it is easy to show that the difference between the upper and the lower bounds tends to zero by continued partitioning.

We will use this method to deduce a formula for π . It is sufficient to study the eighth part of the circle (fig. 7).

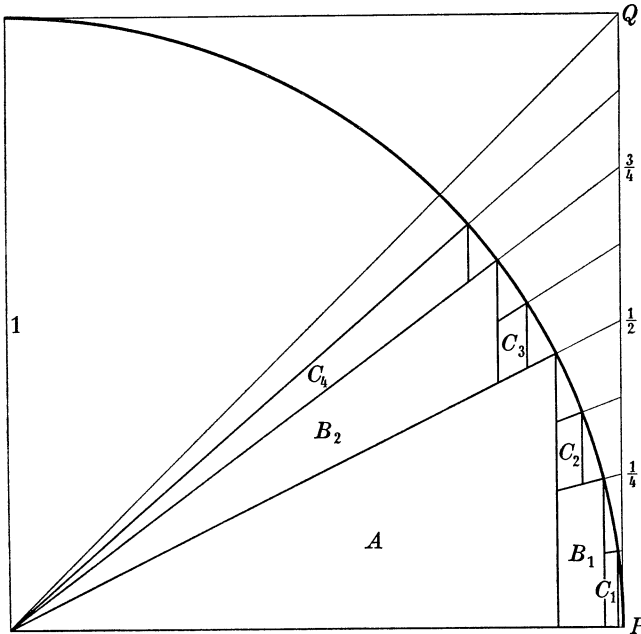


Fig. 7

We first partition the square side PQ into two equal parts and inscribe only the triangle A . Afterwards we partition PQ into four parts and construct the trapezoid B_1 and the triangle B_2 . We then partition PQ into eight equal parts and construct the trapezoids C_1 , C_2 and C_3 and the triangle C_4 . By continuing in this manner we get

$$\frac{\pi}{8} = A + B_1 + B_2 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \dots$$

The areas of the triangles can be calculated by formula (3), and each trapezoid can be considered as the difference between two triangles. In this manner we obtain, after multiplication by 2:

$$(4) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1 + (\frac{1}{4})^2} - \frac{1}{1 + (\frac{2}{4})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{3}{4})^2} \right] \\ + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{1 + (\frac{1}{8})^2} - \frac{1}{1 + (\frac{2}{8})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{3}{8})^2} - \frac{1}{1 + (\frac{4}{8})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{5}{8})^2} - \frac{1}{1 + (\frac{6}{8})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{7}{8})^2} \right] + \dots$$

By aid of the formula

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots \quad (\text{for } 0 < a < 1),$$

we are able to transform each term in (4), and we get the formula

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -(\frac{1}{2})^2 \\ +(\frac{1}{2})^4 \\ -(\frac{1}{2})^6 \\ +\dots \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & +1 \\ -(\frac{1}{4})^2 + (\frac{2}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2 \\ +(\frac{1}{4})^4 - (\frac{2}{4})^4 + (\frac{3}{4})^4 \\ -(\frac{1}{4})^6 + (\frac{2}{4})^6 - (\frac{3}{4})^6 \\ +\dots \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 & +\dots + 1 \\ -(\frac{1}{8})^2 + (\frac{2}{8})^2 - \dots - (\frac{7}{8})^2 \\ +(\frac{1}{8})^4 - (\frac{2}{8})^4 + \dots + (\frac{7}{8})^4 \\ -(\frac{1}{8})^6 + (\frac{2}{8})^6 - \dots - (\frac{7}{8})^6 \\ +\dots \end{bmatrix} + \dots$$

The sum of the first horizontal line is 1. The sum of the second line is $-A_2$ according to formula (1), and the sum of the third line is A_4 according to formula (2). After having established the possibility of changing the order of summation in the double-infinite series, we obtain

$$\frac{\pi}{4} = 1 - A_2 + A_4 - A_6 + \dots,$$

where A_n denotes the area under the curve $y = x^n$ when x goes from 0 to

1. Assuming that we know the formula $A_n = \frac{1}{n+1}$, we get the Leibniz formula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Obviously I have not succeeded in finding an equally »visible« formula for π as lord Brouncker found for $\ln 2$. It would surely be of great interest if someone could find a better »charting« of the area of the circle to illustrate this »arithmetical formula« for π , which certainly is one of the most glorious conquests in mathematics.

APROPÅ EN PRISTÄVLINGSUPPGIFT

LENNART SANDGREN

Hösten 1954 anordnades genom NMT en pristävling för svenska gymnasister. Första delen av uppgift 3 löd så:

»Som bekant är $\sin x < x$ för $x > 0$. Bestäm det minsta värde på a för vilket $\sin x > x - ax^3$ då $x > 0$.«

Det visade sig att ingen av deltagarna korrekt löst denna uppgift. Förmodligen är detta ganska förvånande för dem som inte känner till den gängse uppläggningsen av gymnasiekursen i funktionslära i Sverige. Uppgiften skulle troligen inte berett t. ex. danska gymnasister samma svårigheter, beroende inte så mycket på det väsentligt större omfånget av analyskursen i Danmark utan framför allt på att denna kurs är inriktad på centralare frågeställningar.

Under de senaste åren har i Sverige förts en ganska livlig diskussion om gymnasiets matematikundervisning och i första hand om funktionslärans uppläggning och omfång. En ny kursplan har också tillkommit, vilken bör innebära ett stort framsteg. Lösningarna till ovan citerade prisuppgift har gett impulsen till följande reflexioner, som huvudsakligen berör kravet på stringens i framställningen av analysen.

Medan man i många avsnitt av gymnasiekursen försöker göra framställningen korrekt och i största utsträckning logiskt bindande, tycks funktionsläran ännu utgöra ett undantag. Denna åsikt får man bekräftad av de insända lösningarna av uppgiften ovan. Medan nästan alla deltagarna i de övriga fem uppgifterna i tävlingen uttrycker sig noggrant och logiskt, är de diffusa och felaktiga formuleringarna i uppgift 3 legio. En av de tävlande, som på flera av de övriga uppgifterna presterat utmärkta lösningar och dessutom är den som kommit »närmast« en korrekt lösning av uppgift 3, uttrycker sig (i en för sammanhanget helt överflödigt passus) bl. a. på följande sätt:

»Om en funktion $y=f(x)$ är växande, så är också y' växande«.

Orsakerna till att en gymnasist gör ett dylikt misstag kan naturligtvis vara många. Det kan kanske finnas ett samband med det faktum att

man på gymnasiet ägnar en oproportionerligt lång tid åt ett ensidigt mekaniskt räknande med derivatan för bestämning av maxima, minima, tangenters och normalers ekvationer. För den djupare förståelsen av begreppet derivata har detta räknande mycket litet värde. Väsentligt mera givande är då derivatans betydelse för funktionens växande och avtagande. Om man t. ex. vid uppritandet av funktionskurvor inte bara intresserar sig för derivatans nollställen utan också för dess tecken får man flera upplysningar om kurvans utseende samtidigt som man inövar väsentliga egenskaper hos första derivatan.

En annan möjlighet att rikta intresset på derivatans fundamentala egenskaper är en utvidgning av den traditionella problemfloran med andra givande områden t. ex. olikheter. En av orsakerna till att uppgift 3 togs med i pristävlingen var en önskan att framhålla ett problemgebit, som är värt att odla men t. ex. i studentskrivningarna förekommit mycket sparsamt.

Ett betydande inflytande på funktionslärans utformning utövas naturligtvis av de använda läroböckerna. De flesta läroböcker i funktionslära uppvisar påtagliga brister bl. a. i fråga om stringens. Inte sällan avfärdas t. ex. hela teorin för funktioners växande, avtagande, maxima och minima med hänvisning till några figurer. Ibland förekommer även rent felaktiga uttalanden. T. ex. säger en lärobok:

»Då funktionen har ett minimum, övergår den från avtagande till växande« och i konsekvens härmed

»I en minimipunkt övergår derivatan från negativ till positiv«.

I båda fallen är det ju bara omvändningen som är riktig. Då dessutom bara de riktiga satserna kommer till användning, kan det väl inte finnas något skäl att formulera felaktiga satser erhållna ur alltför speciella figurer. I en samling av studentuppgifter förekommer i lösningen av ett problem det ovan omtalade felaktiga påståendet att »derivatan av en växande funktion är växande«.

Det faktum att funktionsläran infördes i den svenska gymnasiekursen ganska sent kan kanske vara en förklaring till att dess utformning i undervisning och i läroböcker uppvisar så betydande svagheter. I Danmark fick analysen en central ställning i gymnasieundervisningen redan i början av 1900-talet och i dag motsvarar analyskursen en inte oväsentlig del av den svenska ett-betygskursen vid universiteten. Man har svårt att tro att det skulle vara möjligt att bibringa något större antal av de svenska gymnasisterna en djupare förståelse för så pass avancerade frågor. Av diskussioner med såväl danska gymnasielärare som universitetslärare har jag fått intrycket, att man också i Danmark anser att stringenskravet i vissa fall drivits för långt. En fara med långt driven

precisionsmatematik är i varje fall att den kan verka hämmande på ett spekulativt och intuitivt tänkande, som väl ändå är charmen och en av väsentligheterna i matematiken, även om det i skolan oftast bara får sin yttring i lösandet av mer eller mindre knepiga problem.

Hur långt man skall gå i fråga om stringens i matematikundervisningen i gymnasiet är en avvägningsfråga som i sista hand beror av den enskilda klassens standard. I Sverige torde det emellertid vara ytterst önskvärt att man i funktionsläran når längre än vad som tycks vara fallet för närvarande. På det nya gymnasiets matematiska gren blir detta säkert möjligt, medan målet naturligtvis får sättas lägre på allmänna linjen och biologiska grenen. Om sedan de skriftliga proven i studentexamen utformas så att de framhäver fundamentala begrepp och intressanta problemställningar, så kommer gymnasiets matematikkurs också att få väsentligt ökat värde.

MOTTATTE BØKER

R. Albrecht — H. Hochmuth: *Übungsaufgaben zur höheren Mathematik, II*. Verlag R. Oldenbourg, München, 1955. 131 S., 76 Fig. Brosch. DM 9.80.

Determinanten. Lineare Gleichungen 5–16 * Komplexe Zahlen mit Anwendungen 17–24 * Vektoren. Analytische Geometrie des Raumes 25–38 * Funktionen von mehreren Veränderlichen 39–61 * Flächen und Raumkurven 62–84 * Mehrfache Integrale 85–122 * Integralsätze der Vektorrechnung 123–131.

C. B. Allendoerfer — C. O. Oakley: *Principles of mathematics*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 15+448 pp. sh. 37/6.

Logic 1–38 * The number system 39–68 * Groups 69–82 * Fields 83–102 * Sets and Boolean algebra 103–123 * Functions 124–158 * Algebraic functions 159–181 * Trigonometric functions 182–224 * Exponential and logarithmic functions 225–241 * Analytic geometry 242–283 * Limits 284–329 * The calculus 330–363 * Statistics and probability 364–419 * Answers to selected exercises 421–442 * Index 443–448.

Émile Borel — André Chéron: *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous*. (Monographies des probabilités 5.) 2me édition revue et corr. Gauthier-Villars, Paris, 1955. 18+424 pp. fr. 2200.

Le battage des cartes 4–33 * La distribution des cartes après la donne 34–82 * La phase des déclarations 83–140 * Le jeu de la carte 141–208 * Les règles de la marque et la meilleure ligne de jeu 209–253 * Compléments théoriques sur le battage des cartes 254–266 * Dénombrement des permutations d'une donne 267–283 * Sur les probabilités virtuelles 284–299 * Remarque sur le jeu de la carte 300–306 * Sur les équipes de forces inégales 307–310 * Sur la variation des probabilités au cours du jeu 311–339 * Complément à la méthode des coefficients 340–353 * Deux erreurs de raisonnement à éviter 354–371 * Sur une problème d'impasse 372–381 * Applications pratiques de la formule de Bayes 382–413 * Addenda 414 * Vocabulaire 415–416 * Table des tableaux 417–420.

Earl A. Coddington — Norman Levinson: *Theory of ordinary differential equations*. (International series in pure and applied mathematics.) McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 12+429 pp. sh. 64/–.

Existence and uniqueness of solutions 1–61 * Linear differential equations 62–107 * Linear systems with isolated singularities: Singularities of the first kind

108–137 * Singularities of the second kind 138–173 * Asymptotic behavior of linear systems containing a large parameter 174–185 * Self-adjoint eigenvalue problems on a finite interval 186–207 * Oscillation and comparison theorems for second-order linear equations and applications 208–221 * Singular self-adjoint boundary-value problems for second-order equations 222–260 * Singular self-adjoint boundary-value problems for n th-order equations 261–283 * Algebraic properties of linear boundary-value problems on a finite interval 284–297 * Non-self-adjoint boundary-value problems 298–313 * Asymptotic behavior of nonlinear systems: Stability 314–347 * Perturbation of systems having a periodic solution 348–370 * Perturbation theory of two-dimensional real autonomous systems 371–388 * The Poincaré-Bendixson theory of two-dimensional autonomous systems 389–403 * Differential equations on a torus 404–416 * References 417–422 * Index 423–429.

H. S. M. Coxeter: *Reelle projektive Geometrie der Ebene*. (Blaschke, Math. Einzelschriften 3.) Nach der 2. engl. Aufl. übersetzt von W. Buraу. Verlag R. Oldenbourg, München, 1955. 190 S., 140 Fig. DM 18.60.

Ein Vergleich der verschiedenen Arten von Geometrie 11–18 * Inzidenz 18–28 * Ordnung und Stetigkeit 29–41 * Eindimensionale Projektivitäten 41–56 * Zweidimensionale Projektivitäten 56–72 * Kegelschnitte 72–89 * Projektivitäten auf einem Kegelschnitt 89–100 * Affine Geometrie und das Erlanger Programm 100–118 * Euklidische Geometrie 119–136 * Stetigkeit 136–143 * Die Einführung von Koordinaten 143–155 * Die Benutzung von Koordinaten 156–181 * Anhang. Die komplexe projektive Ebene 182–183 * Literaturverzeichnis 184–185 * Sach- und Namenverzeichnis 186–190.

H. Dölp — E. Netto: *Differential- und Integralrechnung*. 22., verbesserte Aufl. Verlag Alfred Töpelmann, Berlin, 1955. 201 S. Brosch. DM 4.80.

I. Differentialrechnung: Funktionen einer unabhängigen Variablen 3–93 * Funktionen von zwei unabhängigen Variablen 94–102. II. Integralrechnung: Unbestimmte Integrale 103–161 * Bestimmte Integrale 161–168 * Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie 169–201.

Lester R. Ford: *Differential equations*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 12+291 pp. sh. 37/6.

Introduction to differential equations 1–32 * Special methods for the equation of the first order 33–59 * Linear equations of the second order 60–83 * General linear equations 84–108 * The method of successive approximations 109–119 * Systems of ordinary equations 120–149 * Certain classical equations 150–173 * Interpolation and numerical integration 174–206 * The numerical solution of differential equations 207–224 * Partial differential equations of the first order 225–250 * Partial differential equations of the second order 251–278 * Answers 279–288 * Index 289–291.

Paul Lorenzen: *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 78.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 7+298 S., 1 Fig. DM 38.40, ganzl. DM 42.00.

Einleitung 1-8 * I. Logik: Protologik 9-37 * Logische Partikeln 38-84 * Erweiterungen der Logik 84-118 * II. Konkrete Mathematik: Arithmetik 119-164 * Sprachkonstruktionen 165-194 * Analysis 194-238 * III. Abstrakte Mathematik: Allgemeine Strukturtheorie 239-254 * Spezielle Strukturen 255-273 * Literaturverzeichnis 274-275 * Bezeichnungen 276-279 * Sachverzeichnis 280-298.

Frederic H. Miller: *College algebra and trigonometry*. 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, 1955. 14+342 pp. \$ 4.50.

Fundamental algebraic operations 3-26 * Variables, functions, and graphs 27-36 * The fundamentals of trigonometry 37-68 * Identities and conditional equations 69-92 * Linear equations and determinants 93-122 * Functions of several angles 123-149 * Mathematical induction and the binomial theorem 150-159 * Complex numbers 160-173 * Equations in quadratic form 174-193 * Progressions 194-208 * Inequalities 209-218 * Inverse functions 219-228 * Functional variation 229-244 * Exponential and logarithmic functions 245-266 * Rational integral equations 267-295 * Permutations, combinations, and probability 296-308 * Appendices 309-319 * Answers to exercises 321-335 * Index 337-342.

Günter Pickert: *Projektive Ebenen*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 80.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 7+343 S., 60 Fig. DM 44.80, ganzl. DM 48.60.

Erläuterungen 1-2 * Grundbegriffe 2-42 * Gewebe 42-63 * Der Satz von Desargues 63-108 * Desarguessche Ebenen 108-134 * Der Satz von Pappos 134-157 * Alternativkörper 157-186 * Moufang-Ebenen 186-198 * Translationsebenen 199-220 * Angeordnete Ebenen 221-261 * Topologische Ebenen 261-274 * Möbius-Netze 274-286 * Endliche Ebenen 286-314 * Anhang 314-328 * Literaturverzeichnis 329-337 * Verzeichnis der Formelnummern 338 * Zeichenszusammenstellung 339 * Sachverzeichnis 340-343.

Kay Piene: *The place of mathematics in the Norwegian secondary schools*. Akademisk Forlag, Oslo, 1955. 22 s. N. kr. 1.50.

Horst von Sanden: *Praxis der Differentialgleichungen*. Vierte, erw. Aufl. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1955. 114 S., 21 Fig. Ganzl. DM 6.80.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit Anfangswerten: Differentialgleichungen erster Ordnung 6-40 * Differentialgleichungen zweiter Ordnung 40-57 * Systeme von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung 58-61 * B. Gewöhnliche Differentialgleichungen als Randwertaufgaben: Die lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstantem Beiwert als Randwertaufgabe 62-70 * Die lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht-konstantem Beiwert 71-86 * Die lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Randwerten 87-99 * Die Methode von Ritz zur Behandlung von Randwertaufgaben 99-114 * Ausblick und Literatur 114.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 66–70 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Holmen, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. febr. 1956.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

I siste hefte etterlyste vi løsninger av endel eldre oppgaver (noen av disse er løst nedenfor). Vi overså imidlertid at vi også mangler en løsning av oppgave 37 fra forrige årgang.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

66. Wallis' formel kan skrivas på formen

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right).$$

Visa, att för tillräckligt stora N gäller

$$\frac{1}{2\pi(N+1)} \leq \left| \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) - \frac{2}{\pi} \right| \leq \frac{2}{\pi(4N-3)}.$$

Arne Pleijel

67. Låt L och L' vara längden av en regulär polygon P , resp. av dess ortogonalprojektion P' , då projektionsvinkeln är v . Visa att

$$2L' \geq L(1 + \cos v).$$

Magnus Tideman

68. Polynomet $P(x)$ har endast enkla nollställena $a, b, \dots, m$. Visa, att om gradtalet av $P(x)$ är $> \mu + 1$, så gäller

$$\frac{a^\mu}{P'(a)} + \frac{b^\mu}{P'(b)} + \dots + \frac{m^\mu}{P'(m)} = 0 \quad (\mu \text{ heltal och } \geq 0).$$

Lennart Busch

69. Vis at

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{1}{15} \pi^4, \quad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \frac{7}{120} \pi^4.$$

Åge Ramberg

70. I oppgave 49 ble det hevdet at rekken

$$\sum_{(n)} \frac{1}{n},$$

utstrakt over alle n som skrevet i titallsystemet ikke inneholder siffret 9, er konvergent. Finn en øvre skranke for summen, helst så liten som mulig.

R. Tambs Lyche

71. Gjennom en terning av tre borer en tre sylindriske hull med samme diameter, hvert av dem fra midtpunktet av en sideflate til den motstående. Hvor stort blir volumet av den resterende del av terningen?

72. Funksjonen $f(x)$ er definert i et åpent intervall som inneholder punktet x . En vet at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = g$$

eksisterer. Undersøk om $f''(x)$ eksisterer og om i så fall $g = f''(x)$.

73. En funksjon $f(x)$ defineres i intervallet $0 < x \leq 1$ på følgende måte: Skriver en x som en uendelig dyadisk brøk:

$$x = \frac{1}{2^{c_1}} + \frac{1}{2^{c_2}} + \dots + \frac{1}{2^{c_n}} + \dots \quad (0 < c_1 < c_2 < \dots),$$

er

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i - 2}{2^{2c_i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^{c_i}} \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{c_j}}.$$

Vis at $f(x)$ er kontinuerlig for alle x i intervallet og deriverbar for alle »dyadisk irrasjonale« x , men ikke deriverbar for »dyadisk rasjonale« x — dvs. for x av formen $m/2^n$.

LØSNINGER

Oppgave 25.

(Oppgavens ordlyd: Om α är ett tal > 1 skall man beräkna volymen av det n -dimensionella område, som definieras av olikheterna

$$x_1 \geq x_2^\alpha, x_2 \geq x_3^\alpha, \dots, x_{n-1} \geq x_n^\alpha, x_n \geq x_1^\alpha.)$$

Området w i det n -dimensionale rum er definert ved ulighederne (hvor $x_{n+1} = x_1$):

$$(1) \quad x_i > 0, x_i \geq x_{i+1}^\alpha \quad (1 \leq i \leq n).$$

Indføres de nye variable

$$(2) \quad y_i = x_i^{-1} x_{i+1}^\alpha \quad (1 \leq i \leq n),$$

går ulighederne (1) over i

$$0 < y_i \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n),$$

og man har derfor

$$(3) \quad V = \int_w dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{i,j} \right| dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Ved (2) udregnes let $\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$; den får kun 2 led, der sammentrækkes til $(-1)^{n-1}(\alpha^n - 1)(x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-2}$, der ved (2) omformes til

$$(-1)^{n-1}(\alpha^n - 1)(y_1 y_2 \dots y_n)^{(\alpha-2)/(\alpha-1)}.$$

Da nu $\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) = \left[\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \right]^{-1}$, fås ved indsætning i (3):

$$V = \frac{1}{\alpha^n - 1} \left(\int_0^1 y^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} dy \right)^n = \frac{(\alpha-1)^n}{\alpha^n - 1}.$$

Anders Bager

Oppgave 53.

Det medlemstall som er tilstrekkelig for at $y, z, \dots, u$ skal kunne være medlemmer betegner vi med $k(y, z, \dots, u)$, og når betegnelsen brukes antar vi at de nevnte medlemmer er opptatt.

La y_1 og y_2 være medlemmer og $y_1 y_2 \neq 1$. Vi kan da oppta følgende medlemmer:

$$(1) \quad \begin{aligned} y_3 &= \frac{1}{y_1}, \quad y_4 = \frac{1}{y_2}, \quad y_5 = y_2 - y_3, \quad y_6 = \frac{1}{y_5}, \quad y_7 = y_4 - y_6, \\ y_8 &= \frac{1}{y_7}, \quad y_9 = y_2 - y_8, \quad y_{10} = y_8 - y_2 \quad \text{og} \quad y_{11} = \frac{1}{y_{10}}. \end{aligned}$$

Her er

$$y_9 = y_1 y_2^2, \quad y_7 = \frac{1}{y_2 - y_1 y_2^2} \quad \text{og} \quad y_{11} = \frac{-1}{y_9}.$$

a) Det er klart at alle medlemmer må være ulike funksjoner av x . Hvis x^n er medlem velger vi i (1) $y_1 = x^n$ og $y_2 = x$ og får $y_9 = x^{n+2}$. Herav følger at x^n kan bli medlem når og bare når n er ulike.

c) Vi lar x^2 bli medlem ved i (1) å velge $y_1 = 1$ og $y_2 = x$, og lar x^3 bli

medlem ved i (1) å velge $y_1 = y_2 = x$. Vi får da $k(x^n, x^{-1}) \leq 8$ for $n = 2$ og for $n = 3$.

Vi antar $k(x^n, x^{-1}) \leq 3n + 2$ for n like og $\leq 3n - 1$ for n ulike, og velger i (1) $y_1 = x^n$ og $y_2 = x$. Vi får da $y_3 = x^{n+2}$ og da y_1, y_2 og y_4 er medlemmer fra før får vi ved induksjon at vår antagelse er riktig.

d) Vi antar $k\left(x^2, x^3, \dots, x^n, \frac{1}{x^{n-1} - x^n}, \frac{-1}{x^n}\right) \leq 5n$ og opptar følgende 5 medlemmer:

$$\frac{1}{x^{n-1} - x^n} + \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n - x^{n+1}}, \quad x^n - x^{n+1}, \quad x^{n+1}, \quad -x^{n+1} \quad \text{og} \quad \frac{-1}{x^{n+1}}.$$

Da vi ved i (1) å velge $y_1 = 1$ og $y_2 = x$ ser at vår antagelse er riktig for $n = 2$, får vi ved induksjon at den er riktig for alle n . Dessuten får vi:

$$k(x^2, x^3, \dots, x^n) \leq 5n - 2.$$

e) Vi antar $k(x^2, x^4, \dots, x^{2^n}) \leq 6n + 2$ og velger i (1) $y_1 = 1$ og $y_2 = x^{2^n}$. Vi får da $y_3 = x^{2^{n+1}}$ og da y_1, y_2 og y_3 er medlemmer fra før, får vi ved induksjon at vår antagelse er riktig, idet den er riktig for $n = 1$.

b) La y og z være forskjellige medlemmer. Vi kan da oppta

$$y - z, \quad -z, \quad y + z \quad \text{og} \quad z + z.$$

Da vi under c) har vist at x^n kan bli medlem for alle n følger herav ved induksjon at enhver hel funksjon med hele koeffisienter kan bli medlem, og dermed også den resiproke til en slik funksjon.

La $f(x) = g(x)/h(x)$ hvor $g(x)$ og $h(x)$ er hele funksjoner med hele koeffisienter, og $g(x) \neq 1$. Vi velger i (1) $y_1 = g(x)h(x)$ og $y_2 = 1/h(x)$ og får $y_3 = f(x)$.

Otto Marstrand

Oppgave 54.

a) Alle medlemmer kan skrives som en brøk hvor teller og nevner er hele funksjoner av x . Med medlemmets grad mener vi differensen mellom gradene av teller og nevner. Vi betegner det n -te medlem med y_n .

Det er klart at gradene av de 4 første medlemmer må være $+1$ eller -1 ; y_5 må derfor få en grad ≤ 1 og kan ikke være lik x^3 . For at y_6 skal kunne få en grad > 1 må $y_6 = 1/y_5$. Hvis da $y_6 = x^3$ så er $y_5 = x^{-3}$ og da kunne vi, ved fra y_3 av å bytte om x med x^{-1} , oppnå en annen medlemsfortegnelse hvor $y_5 = x^3$, og det er umulig.

b) En innser lett at gradene av de 5 første medlemmer må være $+1$, 0 eller -1 .

I. Hvis x^{-1} blir opptatt som medlem kan vi sette $y_3 = x^{-1}$. Ved å resonnerer videre som under a), idet indeksene forhøyes med 1 og x^3 erstattes med x^2 , finner vi at hverken y_6 eller y_7 kan bli lik x^2 eller x^{-2} .

II. Hvis x^{-1} ikke blir opptatt som medlem har vi ifølge I at y_6 ikke kan bli x^2 eller x^{-2} . Hvis da $y_7 = x^2$ så må y_7 være dannet som differens mellom to tidligere medlemmer. Minst ett av disse måtte være av 2. grad, og det er umulig.

Otto Marstrander

Oppgave 59.

Betrakta båglängden s som oberoende variabel. Sätt $\frac{dx}{ds} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{ds^2} = \ddot{x}$ osv. Då fås uttrycket för krökningsradien i punkten (x, y) som $\varrho = \dot{x}/\ddot{y}$. Vi har $r^2 = F(s) = x^2 + y^2$; derivering två gånger ger (1) $\frac{1}{2}F'(s) = x\dot{x} + y\dot{y}$; (2) $\frac{1}{2}F''(s) - 1 = y\ddot{y} + x\ddot{x}$. Under beaktande av att $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$, och därav $\dot{x}\ddot{x} = -\dot{y}\ddot{y}$, fås efter kvadrering av (1) och (2) samt addition

$$\varrho^2[\frac{1}{2}F''(s) - 1]^2 = F(s) - [\frac{1}{2}F'(s)]^2,$$

dvs.

$$\varrho^2 = \frac{F(s) - [\frac{1}{2}F'(s)]^2}{[1 - \frac{1}{2}F''(s)]^2}.$$

Otto Valdimarsson

Også løst av J. Bjørnsen, Lennart Busch, T. J. Engelskjøn, Odd G. Eriksen, Th. Godal, K. Zeuthen Heidam, H. Killingbergtrø, Johannes Kvamsdal, Otto Marstrander, Arne Sandum og Helge Tverberg.

Oppgave 60.

For $|z| < 1 - A < 1$ er

$$\left| \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| \geq \frac{1 - |z|^n}{1 + |z|} \geq \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|} = 1 - |z| > A,$$

og ligningen har følgelig ingen røtter innenfor sirkelen $|z| = 1 - A$.

Ligningen kan ikke ha roten $z = 1$ fordi $n > A$.

En rot i den gitte ligning må også være rot i ligningen $Az + 1 - A = z^n$.

Men er $|z| = 1$, $z \neq 1$, så er

$$|Az + 1 - A| < A|z| + 1 - A = 1 = |z^n|,$$

og er $|z| > 1$, så er

$$|Az + 1 - A| \leq A|z| + 1 - A < A|z| + (1 - A)|z| = |z| < |z^n|.$$

Den gitte ligning har derfor heller ingen røtter på eller utenfor sirkelen $|z| = 1$.

Den gitte ligning har dermed alle sine røtter i området $1 - A \leq |z| < 1$, og likhetstegnet gjelder bare for $n = 2$.

Dette er oppgavens påstand i skjerpet form.

Johannes Kvamsdal

Også løst av Lennart Busch, Jarl C. Dyekjær, Odd G. Eriksen, Bent Fuglede, Th. Godal, Per Chr. Kristiansen, Henrik Meyer, Helge Tverberg og Otto Valdimarsson. I den skjerpede form også av Otto Marstrander.

Oppgave 61.

Skrives $(5 + \sqrt{19})^n = A_n + B_n \sqrt{19}$, hvor A_n og B_n er hele tal, bliver $(5 - \sqrt{19})^n = A_n - B_n \sqrt{19}$ og derfor

$$(5 + \sqrt{19})^n = 2A_n - (5 - \sqrt{19})^n.$$

Nu er $0 < 5 - \sqrt{19} < 1$ og derfor $0 < (5 - \sqrt{19})^n < 1$, så at $[(5 + \sqrt{19})^n] = 2A_n - 1$. Endvidere ses, at $(5 + \sqrt{19})^n - [(5 + \sqrt{19})^n] = 1 - (5 - \sqrt{19})^n \rightarrow 1$, når $n \rightarrow \infty$.

Bent Fuglede

Også løst av Anders Bager, J. Bjørnsen, Lennart Busch, Odd G. Eriksen, H. Killingbergtrø, Johannes Kvamsdal, H. Kyhl, Otto Marstrander, Henrik Meyer og Otto Valdimarsson.

Opgaven generaliseres let:

$$[(a + \sqrt{b})^n] = \text{ulige tal}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

naar $0 < a - \sqrt{b} < 1$, a og b hele og positive.

Henrik Meyer

Oppgave 62.

Lad først $x > 0$ være fast. Funktionen $f(u) = ux/(u^2 + x)^2$ antager for $u > 0$ sin største verdi for $u = \sqrt{x/3}$, og $f(\sqrt{x/3}) = 3\sqrt{3}/16\sqrt{x}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2 + x)^2} = \int_1^{\infty} \frac{ux}{(u^2 + x)^2} du + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x+1} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2 + x)^2} = \frac{1}{2}.$$

Henrik Meyer

Også løst av Bent Fuglede, Johannes Kvamsdal og Otto Marstrander.

(For øvrigt gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{(n^2+x)^2} = \frac{i\sqrt{x}}{2} [g(i\sqrt{x}) - g(-i\sqrt{x})],$$

hvor

$$g(s) = \frac{d^2}{ds^2} \log \Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+s)^2}.$$

Heraf fås den asymptotiske rækkefremstilling

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{(n^2+x)^2} = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{B_{2v}}{x^v},$$

hvor $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, ... er Bernoulli's tal.)

Bent Fuglede

PRISTÄVLING FÖR FINSKA LÄROVERKSELEVER

Finlands matematik- och fysiklärarförbund utlyser för andra gången en pristävling i matematik. Alla läroverkselever har rätt att delta. Av de sex tävlingsuppgifterna bör minst fyra lösas. Lösningarna renskrivas med bläck, figurerna ritas med blyerts eller tusch. Deltagare bör i sitt tävlingsbidrag uppges namn, adress, sin skola och klass samt bifoga en egenhändigt skriven försäkran om att han eller hon självständigt har löst uppgifterna utan annan hjälp än matematisk litteratur.

Vid bedömningen beaktas särskilt antalet av de lösta uppgifterna samt att lösningarna utförts redigt, kortfattat och omsorgsfullt.

Första priset är 5000 mk och andra priset 3000 mk. Tilläggspris kan ifrågakomma.

Vid valet av tävlingsproblem har kommittén utnyttjat även uppgifter av prof. F. Iversen och doc. O. Tammi.

Lösningarna bör insändas till Pristävlingskommittén före den 15 februari 1956 under adress fil. dr. Inkeri Simola, Rajasaarenkatu 5, Helsinki.

1. $K_1(x, y) = 0$ och $K_2(x, y) = 0$ är ekvationerna för två cirkellinjer, vilkas medelpunkter ligger på x -axeln. Undersök kurvan som bestäms av ekvationen $K_1 + hK_2 = 0$, då h antar olika värden.

2. Undersök förtecknet för funktionen

$$x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 - x + y$$

i olika delar av planet, då x och y är koordinaterna för en punkt i planet.

3. Om $(a+x)^n$, där n är ett positivt helt tal, utvecklas till ett polynom, erhålles ett polynom av formen

$$(a+x)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} x + c_2 a^{n-2} x^2 + \dots + c_n x^n.$$

Härled ett allmänt uttryck för en koefficient c_k genom att derivera funktionen tillräckligt många gånger och insätta $x=0$ i den erhållna likheten.

Visa vidare, att det i utvecklingen av $(4x+3)^{34}$ finnes två på varandra följande termer, i vilka koefficienterna för potenserna av x är lika stora.

4. Lös ekvationen $|\sin 2x| = \sin 3x$.

5. Mantelytan av en rät stympad cirkelkon tangerar en halvsfär med radien r och konens ena basyta ligger i samma plan som halvsfärens basyta. Bestäm den minsta av alla de stympade koner, som uppfyller dessa villkor, då konens höjd $h > r$ förblir konstant. Tillämpa resultatet på fallet $h = r\sqrt{\frac{3}{2}}$.

6. Fyra räta linjer begränsar fyra trianglar. Bevisa, att dessas omskrivna cirklar går genom samma punkt.

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASELEVER

Oppgavekonkurranse for 1956, arrangert av Norsk Matematisk Forening.

Det kom ikke inn noen besvarelser i forrige års konkurranse. *Oppgavene fra ifjor stilles derfor opp på ny*; de står i NMT 2 (1954), s. 186–187 (hefte 4). Særtrykk av oppgavene kan fåes ved henvendelse til redaksjonssekretæren. En gjør uttrykkelig oppmerksom på at det ikke er nødvendig å besvare *samtlig*e oppgaver for å kunne delta i konkurransen.

Den beste samlingen besvarelser vil bli tildelt H. K. H. Kronprins Olavs premie på 100 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med og dessuten de som tok examen artium i 1955, men ingen kan vinne hovedpremien mer enn en gang. Oppgavene er slik at en kommer fram ved hjelp av realgymnasets pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som råd er.

En sender løsninger til rektor Kay Piene, Skjerstadvn. 2A, Smestad, Oslo, innen 1. 5. 1956, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

PRISTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Liksom föregående år anordnar Nordisk Matematisk Tidskrift en pristävling för svenska gymnasister. Var och en av de tre utgivande svenska föreningarna har

ställt 50 kr. till disposition, varigenom ett första pris om 100 kr. och ett andra pris om 50 kr. kan utdelas.

För deltagande i tävlingen fordras, att lösningar insändas till minst fyra av nedanstående oppgifter. Gymnasister från övriga nordiska länder kunna deltaga utom tävlan.

Lösningar, åtföljda av en försäkran att de äro självständigt utarbetade, insändas senast den 1 mars 1956 till: Nordisk Matematisk Tidskrift, Matematiska Institutionen, Lund. Bifoga uppgift om namn, klass och läroverk.

1. Med $|x|$ menas numeriska värdet av x . Sök minimum av funktionen $f(x) = a \cdot |x|^\alpha + b \cdot |1-x|^\alpha$ då $a > 0$, $b > 0$ och $\alpha > 0$.

2. I triangeln ABC är A' mittpunkten på BC . Vinkeln $AA'B$ betecknas med α , och analogt definieras β och γ . Visa, att

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = 0.$$

3. Visa, att ekvationen $\sin x = kx$, där $0 < k < 1$, har en rot x , som uppfyller olikheten

$$\pi(1-k) < x < \frac{\pi}{1+k}.$$

4. De punkter på en rät linje AB , som ligger mellan A och B , jämte ändpunkterna A och B bilda ett intervall. Visa, att om man på en rät linje har ett antal intervall, och två godtyckliga av dem har minst en gemensam punkt, så har alla intervallen minst en gemensam punkt.

5. Visa, att om två höjder i en tetraeder skära varandra, så skära också de båda andra höjderna varandra.

6. En person önskar sända två varor A och B i ett paket till utlandet. Vikten på paketet får inte överstiga 10 kg. Kilopriserna på de båda varorna äro 9 och 4 kr. resp. i Sverige samt 13 och 7 kr. resp. i utlandet. Vilken sammansättning skall paketet ha för att vinsten skall bli maximal, då personen har 60 kr. till förfogande för inköpen?

INTERNORDISK PRISOPPGAVE

Publisering av de beste løsninger er utsatt til neste hefte.

KRONIKK

AVSKJEDER

Dr. phil. N. E. Nørlund og dr. phil. Jakob Nielsen fratræder som professorer ved Københavns Universitet fra 1/2 1956. Professor Nørlund er fratrådt som direktør for Geodætisk Institut fra 1/11 1955.

Viggo Brun fratræder som professor ved Universitetet i Oslo fra 1/1 1956.

Dr. philos. Henrik L. Selberg er fratrådt som professor ved Norges Tekniske Høgskole fra 1/7 1955.

UTNEVNELSER

Til professorer ved Københavns Universitet: Professor ved Danmarks tekniske højskole, dr. phil. W. Fenchel og amanuensis, dr. phil. Th. Bang.

Til direktør for Geodætisk Institut, København: Statsgeodæt, dr. phil. Einar Andersen.

SUMMARY IN ENGLISH

HANS RÅDSTRÖM: *Some elementary functional equations and Hilbert's fifth problem.* (Swedish.)

A mainly expository article about the two related functional equations

$$(A) \quad f(\varphi(x, y)) = f(x) + f(y)$$

$$(B) \quad \varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z)).$$

The equation B expresses that the operation φ is associative.

After a few examples, the following result is established: If φ satisfies B in an interval I , which contains a number e such that $\varphi(x, e) = \varphi(e, x) = x$ for all x in I ,

and if $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ and continuous in I , then

$$f(x) = k \cdot \int_e^x \frac{dt}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, e)}.$$

This is the general differentiable solution of A in I .

To avoid the condition of differentiable solutions, a system (F) of conditions is established for the operation φ , essentially equivalent to the definition of a local group. Under these conditions, $\varphi(x, y)$ will be an increasing function of both x and y in an interval U containing e , which again implies a continuous and increasing solution f of A in U . Apart from a multiplicative constant, this solution is unique. The proof of this is based on an elegant proof of the uniqueness in the classical case $\varphi = x + y$, $f = kx$.

After a short survey of the laws of groups, including topological and local groups, the above-mentioned system F is interpreted as "group-conditions". In this notation,

the established solubility of A can be formulated in the following way: Every one-parametric local group is locally isomorphic to the group of real numbers under addition.

The last result gives the answer (yes) for $n=1$ to the famous fifth problem of Hilbert: Is it always possible, in every n -parametric local group, to introduce coordinates in such a way that the functions defining the group-operation are analytic?—A few historical remarks concerning this problem concludes the article.

MOGENS PIHL: *From the history of the lever principle.* (Danish.)

A "proof" of the lever principle is defined as an attempt to reduce this law to still simpler principles, such as the equilibrium of *equal* weights etc. The article treats the proofs by Archimedes, Euclid, Huygens and Ole Rømer. The law of the lever is also applied to the moment of forces, equilibrium on the inclined plane and the determination of the centre of oscillation of a compound pendulum.

DAVID FOG: *A small problem from the theory of surfaces.* (Danish.)

It is shown that the function

$$z = y^2 - 2x^2y + \frac{3}{4}x^4 = (y - \frac{1}{2}x^2)(y - \frac{3}{2}x^2)$$

does not have a minimum for $x=y=0$, in spite of the fact that for the corresponding surface, all the normal sections through the origin have a minimum at this point.

VIGGO BRUN: *On the problem of partitioning the circle so as to visualize Leibniz' formula for π .* (English.)

The article first gives a few historical remarks concerning some mathematicians' desire to visualize their results geometrically. Examples of such "visible" procedures are the bisection-summation in Archimedes' squaring of the parabola, and lord Brouncker's elegant and nearly forgotten geometrical deduction of the series for $\ln 2$ (fig. 2 p. 161). The author uses similar bisection-summations to express as sums of infinite series the area

$$A_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

and also the area $\frac{1}{4}\pi$ of a quadrant of the unit circle (fig. 7 and formula (4) p. 165). Transforming the latter result into a double-infinite series, changing the order of summation in this, and utilizing the above-mentioned formula for A_n , the author arrives at the well-known Leibniz-Gregory series for π .

LENNART SANDGREN: *Regarding a prize problem.* (Swedish.)

Based on the results of a mathematical prize competition (published by NMT) among Swedish high school pupils, the author has some criticism and advice concerning the teaching of elementary function theory in Sweden.

INNHOLDSFORTEGNELSE

VIGGO BRUN: On the problem of partitioning the circle so as to visualize Leibniz' formula for π	159-166
KAI RANDER BUCH: Da sandsynlighedsregning blev videnskab.....	19- 26
DAVID FOG: Et lille problem fra fladeteorien.....	157-158
CARL-ERIK FRÖBERG: Numeriska beräkningar på siffermaskiner.....	33- 47
K. ZEUTHEN HEIDAM: An approximation formula for the determination of areas.....	107-110
E. J. NYSTRÖM: Speciella koniska ytor.....	27- 32
MOGENS PIHL: Træk af vægtstangsreglens historie.....	148-156
NILS PIPPING: Halvregelbundna kedjebråk.....	96-106
ARNE PLEIJEL: Om konvexa kurvor.....	57- 63
HANS RÅDSTRÖM: Några elementära funktionalekvationer och Hilbert's femte problem.....	129-147
LENNART SANDGREN: Apropå en pristävlingsuppgift.....	167-169
OLAF SCHMIDT: Om den ptolemæiske læresætning og Menelaos' sætning.	81- 95
ERNST S. SELMER: Den ubestemte ligning $X^3 + Y^3 = AZ^3$	48- 56
INKERI SIMOLA: Historiska synpunkter i samband med matematikunder- visningen.....	5- 18
Bokmeldinger	
OSKAR BECKER: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwick- lung (TH. SKOLEM).....	111
FR. FABRICIUS-BJERRE: Lærebog i Geometri, II. Differentialgeometri, kinematisk geometri (E. J. NYSTRÖM).....	65
G. POLYA: Mathematics and plausible reasoning, I and II (I. JOHANSSON)	64
WALTER RUDIN: Principles of mathematical analysis (R. TAMBS LYCHE)	113
Mottatte bøker.....	66, 114, 170
Oppgaver	
Oppgaver til løsning.....	69, 119, 173
Løsninger.....	71, 120, 174
Eksamensoppgaver.....	121
Prisoppgaver for gymnasiaster.....	179
Kronikk.....	74, 126, 182
Summary in English.....	79, 127, 182