

OM DEN PTOLEMÆISKE LÆRESÆTNING OG MENELAOS' SÆTNING

OLAF SCHMIDT

Foredrag holdt for matematiklærere i København i april 1954.

1. Den ptolemæiske læresætning og Menelaos' sætning spiller nu en så underordnet rolle i matematikundervisningen, at sætningerne — i reglen ret umotiveret — blot omtales i et eksempel eller en opgave. På de følgende sider skal det vises, at disse to sætninger engang har indtaget en så fremtrædende plads inden for trigonometrien, at de med en vis ret kan kaldes hovedsætninger inden for henholdsvis den plane og den sfæriske trigonometri. Der gælder nemlig, som vi skal se, det resultat, at alle beregningsopgaver inden for den plane trigonometri kan løses ved hjælp af en ud fra den ptolemæiske læresætning beregnet kordetavle, medens alle beregningsopgaver inden for den sfæriske trigonometri kan løses ved hjælp af Menelaos' sætning på kuglen i forbindelse med den forømtalte kordetavle.

De følgende sider kan imidlertid også siges at være skrevet med det formål for øje at give en fremstilling af den første trigonometri, som vi har kendskab til gennem primære kilder. Man ville vel nok ret naturligt først søge sådanne primære kilder blandt de babylonske kileskrifttekster; det er nemlig velkendt, at den babylonske astronomi i årene -300 til 0 var i stand til at forudberegne positionerne for sol, måne og planeter, og på forhånd ville man anse det for umuligt at foretage den slags beregninger med en tålelig nøjagtighed uden brug af trigonometriske hjælpemidler. Men det er netop et overraskende moment ved den babylonske astronomi, at den ved sindrig anvendelse af de såkaldte lineære zigzag-funktioner (og uden anvendelse af trigonometriske metoder) var i stand til at forudberegne de nævnte positioner.

Det bliver således ikke hos babylonerne, vi finder den første trigonometri, men hos grækerne. De tre store navne inden for den græske matematik er Euklid, Archimedes og Apollonios, men hos ingen af disse findes trigonometriske beregninger. Sådanne foreligger derimod inden for den

græske astronomi, og det er i *Almagest*, skrevet af Ptolemæos i Alexandria omkring år 150 e. Kr., vi møder ikke alene de første trigonometriske beregninger, men også en fuldt udviklet trigonometri, der er i stand til at løse alle de beregningsopgaver, der dukker op inden for den sfæriske astronomi, og som stort set er de samme problemer, som vi løser den dag idag. *Almagest* er oversat til tysk af Karl Manitius: *Des Klaudius Ptolemæus Handbuch der Astronomie*, Bd. I, II; B. G. Teubner, Leipzig 1912–13. Endvidere findes der en fransk oversættelse af Halma: *Compositions mathématiques de Claude Ptolémée*, Tome I, II; Paris 1813–16. (Genoptrykt i to bind i Paris 1927.) Endelig findes der en engelsk oversættelse: *The Almagest by Ptolemy*, translated by R. C. Taliaferro, pp. 1–478 in vol. 16 of the *Great Books of the Western World*; Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago 1952.

Det må dog fremhæves, at det ikke er den ældste trigonometri, vi møder i *Almagest*. Theon, en sengræsk kommentator, der levede i slutningen af det 4. århundrede e. Kr., citerer således kordetavler af både Hipparch (ca. 150 f. Kr.) og Menelaos (ca. 100 e. Kr.), men disse arbejder er gået tabt, sandsynligvis fordi de er blevet overflødiggjort af det mere omfattende arbejde, *Almagest*, der for eftertiden har indtaget samme stilling inden for astronomien som Euklids *Elementer* inden for geometrien. Vi vil ikke her diskutere denne før-ptolemæiske trigonometri; vi nøjes simpelthen med at give en udredning af trigonometrien — både den plane og den sfæriske — i *Almagest*, og derved vil vi automatisk nå til det resultat, som vi nævnte i indledningen.

2. I første bog, kapitel 10 af *Almagest* udvikler Ptolemæos trigonometrien for dernæst at bruge den ustandselig i de følgende astronomiske beregninger. Han begynder med at udarbejde en kordetavle, der skal indeholde sammenhørende værdier af en cirkelbue og den tilhørende korde. Hele cirklen inddeles i 360 dele; herved er enheden til måling af cirkelbuer fastlagt. Diameteren i cirklen inddeles i 120 lige store dele, hvorved den længdeenhed, der skal bruges til måling af korder, er fastlagt. Ptolemæos stiller sig nu den opgave at finde de korder, der svarer til cirkelbuer på $\frac{1}{2}^\circ$, 1° , $1\frac{1}{2}^\circ$, ..., 180° .

Her må vi indskyde den bemærkning, at Ptolemæos overalt i det følgende skriver brøker i 60-talssystemet, åbenbart noget som er lånt fra den babylonske astronomi, hvor jo både brøker og hele tal skrives i dette talsystem. Ptolemæos selv kommenterer ikke dette nøjere. Han siger blot, at han vil regne med sexagesimalbrøker, fordi de almindelige brøker er så besværlige. Med denne bemærkning hentydes til regning med

stambrøker, som går tilbage til den ægyptiske matematik. Skriver vi altså i det følgende $127;23,20,37$, da skal dette betyde $127 + 23 \cdot 60^{-1} + 20 \cdot 60^{-2} + 37 \cdot 60^{-3}$.

Som et første skridt henimod beregningen af en kordetavle findes (ved hjælp af sætninger fra Euklids Elementer) korderne til buerne på 60° , 120° , 90° , 36° og 72° . Korden til 60° er lig med radien, altså lig med 60 af de enheder, hvori korder måles. Korder til buer på 120° og 90° findes ved anvendelse af den pythagoræiske læresætning. Korden til 36° , den såkaldte k_{10} , findes ved en højdeling af radien, medens k_5 er bestemt ved at være hypotenusen i en retvinklet trekant, hvori k_{10} og k_6 er kateter. Når korden til en bue b er kendt, kan man finde korden til en bue $\bar{b} = 180^\circ - b$. Således findes korden til en bue på 144° ud fra korden til en bue på 36° . På denne måde findes:

b	k
36°	37; 4,55
60°	60; 0, 0
72°	70; 32, 3
90°	84; 51,10
120°	103; 55,23
144°	114; 7,37.

Inden vi fortsætter beregningen af kordetavlen, vil vi gøre os klart, at en kordetavle i det væsentlige er det samme som en moderne sinustavle, thi udfra relationen

$$k = 2r \sin \frac{1}{2}b = 120 \sin \frac{1}{2}b$$

følger, at hvis tallene i b -søjlen halveres, fås en tavle, der på nær faktoren 120 giver sammenhørende værdier mellem en bue og sinus til denne bue.

3. For nu at finde korder til buer på $\frac{1}{2}^\circ$, 1° , $1\frac{1}{2}^\circ$, ... ud fra de allerede fundne korder udledes først den såkaldte *ptolemæiske læresætning*, der siger:

I en firkant ABCD indskrevet i en cirkel er diagonalernes produkt lig med summen af de modstående sideres produkter, altså

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

Beviset, som Ptolemæos giver for denne sætning, er det, der den dag idag findes i vore lærebøger. Her er det derfor tilstrækkeligt at minde om, at beviset kommer i stand ved at trække hjælpelinien BE (E er et

punkt på diagonalen AC bestemt således, at $\angle ABE = \angle DBC$), hvorved der fremkommer to sæt ensvinklede trekanter.

Ptolemæos anvender nu »sin« sætning til at finde 1) differenskorden til to givne korder, 2) sumkorden til to givne korder samt 3) korden til en bue, halvt så stor som den bue, en given korde spænder over. For en ordens skyld fremhæver vi, at det er en stiltiende forudsætning hos Ptolemæos, at de buer, der optræder i det følgende, alle er positive samt mindre end 180° , thi kun sådanne buer vil optræde i kordetavlen. Forekommer der altså i det følgende f. eks. en bue $b_1 + b_2$, da er ikke blot b_1 og b_2 hver for sig mindre end 180° , men dette gælder også $b_1 + b_2$.

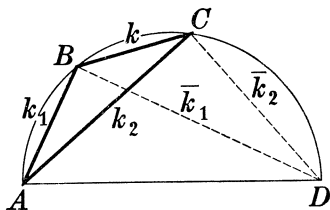


Fig. 1

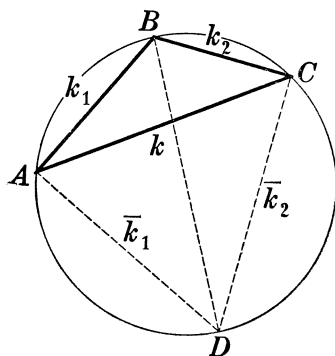


Fig. 2

Ved bestemmelsen af differenskorden foreligger der to ulige store buer $b_1 < b_2$ samt de to tilhørende korder k_1 og k_2 ; opgaven består i at finde korden til en bue på $b_2 - b_1$ grader. Denne bestemmelse foretages således: De to buer afsættes (fig. 1) ud fra samme punkt A , således at den mindre bue AB udgør en del af den større bue AC . Korde BC er da den søgte korde k . Punkterne B og C forbindes med A 's diametralt modsatte punkt D . Idet nu korder til en bue på $180^\circ - b_1 = \bar{b}_1$ og $180^\circ - b_2 = \bar{b}_2$ kaldes henholdsvis $\bar{k}_1$ og $\bar{k}_2$, får man ved at anvende den ptolemæiske læresætning på den indskrevne firkant $ABCD$:

$$k_2 \cdot \bar{k}_1 = k_1 \cdot \bar{k}_2 + k \cdot 120$$

eller

$$(1) \quad 120 \cdot k = k_2 \cdot \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \cdot k_1.$$

Da de korder, der optræder på højre side af (1), er kendt, er k dermed bestemt.

Ved bestemmelsen af sumkorden foreligger der to buer b_1 og b_2 samt de tilhørende korder k_1 og k_2 ; opgaven består i at finde korden til en bue på $b_1 + b_2$ grader. Denne bestemmelse foretages således: De to buer af-

sættes (fig. 2) i fortsættelse af hinanden, således at bue $AB = b_1$ og bue $BC = b_2$. Korde AC er da den søgte korde k . Punktet B forbindes med sit diametralt modsatte punkt D , og AD og DC tegnes. Ved anvendelse af den ptolemæiske læresætning på firkant $ABCD$ fås

$$(2) \quad 120 \cdot k = k_1 \cdot \bar{k}_2 + \bar{k}_1 \cdot k_2,$$

hvormed k er bestemt.

I parentes kan det bemærkes, at Ptolemæos finder sumkorden k på en anden og lidt besværligere måde; han tegner først de to diametre AE og BD gennem henholdsvis A og B (diametere AE er ikke indtegnet på fig. 2), og ved derpå at anvende »sin« sætning på firkant $BCED$ finder han $\bar{k}$, ud fra hvilken k kan findes.

I (1) genkender vi umiddelbart formelen for $\sin(u-v)$; thi indsættes i (1) $k = 120 \sin \frac{1}{2}(b_2 - b_1)$ samt de analoge udtryk for k_1 , k_2 , $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, fås efter division med 120^2 , at

$$\sin \frac{1}{2}(b_2 - b_1) = \sin \frac{1}{2}b_2 \cdot \sin \frac{1}{2}\bar{b}_1 - \sin \frac{1}{2}\bar{b}_2 \cdot \sin \frac{1}{2}b_1.$$

Ved analog omskrivning af (2) fås en tilsvarende formel for $\sin \frac{1}{2}(b_2 + b_1)$. Viser således, at additionsformlerne umiddelbart følger ud fra den ptolemæiske læresætning, og det er denne kendsgerning, der betinger sætningens mange anvendelser.

Ved den tredie af de ovenfor nævnte opgaver foreligger der en bue $b = \widehat{AC}$ (fig. 3) samt den tilhørende korde $K = AC$. Opgaven består i at finde korden $k = AB$ til buen $\frac{1}{2}b$.

Denne bestemmelse kunne foretages ved anvendelse af den ptolemæiske læresætning på firkant $ABCD$, hvorved man ville få

$$(3) \quad K \cdot \bar{k} = k \cdot \bar{K} + k \cdot 120.$$

Her er K og dermed $\bar{K}$ givet, men da k , som vi søger, også indgår i $\bar{k} = \sqrt{120^2 - k^2}$, ser vi, at bestemmelsen af k ud fra (3) kræver løsningen af en andengradsligning. Ptolemæos former derfor regningerne på en anden måde, hvorved han opnår at finde et udtryk for k^2 , og derudfra findes så k . Hans løsning er følgende: På fig. 3 er punktet E bestemt således, at $DE = DC = \bar{K}$. Da nu trekantene DBC og DBE er kongruente, er $BE = BC$, og altså er trekant ABE ligebenet. Fra B nedfældes den vinkelrette BF på AE . Da er $AF = \frac{1}{2}(AD - DE) = \frac{1}{2}(120 - \bar{K})$. Af den retvinklede trekant ABD fås $k^2 = AB^2 = AD \cdot AF = 120 \cdot AF$ eller

$$(4) \quad k = \sqrt{60(120 - \bar{K})}.$$

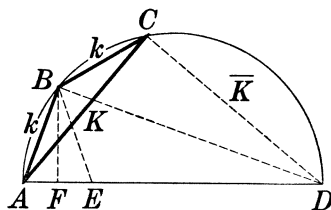


Fig. 3

Erstattes her k med $120\sin\frac{1}{4}b$ og $\bar{K}$ med $120\sin\frac{1}{2}\bar{b}$, genfinder vi formelen for sinus til en vinkel udtrykt ved cosinus til den dobbelte vinkel.

4. De tre formler (1), (2) og (4) sætter nu Ptolemæos i stand til at udvide det brudstykke af en kordetavle, som i afsnit 2 blev fundet udfra sætninger i Euklids Elementer. Anvendes således formelen for differenskorder på korder hørende til buer på 60° og 36° , findes korden til en bue på 24° , og ved gentagen anvendelse af (4) findes dernæst korden til buer på 12° , 6° , 3° , $1\frac{1}{2}^\circ$ og $\frac{3}{4}^\circ$. Endelig fører anvendelse af reglerne for sum- og differenskorder til korder hørende til buer på $1\frac{1}{2}^\circ$, 3° , $4\frac{1}{2}^\circ$, 6° , ..., eller udtrykt med Ptolemæos' egne ord: man finder korder til buer, som efter multiplikation med 2 er delelige med 3. Men det var jo ikke helt det, Ptolemæos ønskede. Han stillede sig den opgave at beregne en tavle, der giver korden svarende til buer på $\frac{1}{2}^\circ$, 1° , $1\frac{1}{2}^\circ$, 2° , ..., 180° .

For den moderne læser er det klart, at den opgave at finde korden til en bue på 1° er langt vanskeligere og af en helt anden karakter end f. eks. den opgave at finde korden til en bue på $1\frac{1}{2}^\circ$. Korden til buer på $n \cdot 1\frac{1}{2}^\circ$ (n hel) kan jo som vist ovenfor findes ved gentagen løsning af første- og andengradsligninger, hvis koefficienter er hele tal eller »fleretagers« kvadratrødder af hele tal, hvorimod vi nu ved, at korden til en bue på 1° ikke kan findes ud fra sådanne ligninger, thi det ville jo medføre, at den regulære 360-kant kunne konstrueres ved hjælp af passer og lineal. Takket være Gauss ved vi imidlertid, at de eneste regulære n -kanter, der er konstruerbare, er sådanne, for hvilke

$$(5) \quad n = 2^m \cdot p_1 p_2 \dots p_r,$$

hvor m er hel og $p_1, p_2, \dots, p_r$ er indbyrdes forskellige primtal af formen $2^{2^k} + 1$. De fire mindste primtal af denne form er 3, 5, 17 og 257. Da $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, ser vi, at 360 ikke er af den form, der omtales i (5), og den regulære 360-kant kan derfor ikke konstrueres ved passer og lineal.

Hvorvidt Ptolemæos har været klar over, at han ved bestemmelsen af en korden til en bue på 1° står overfor en opgave, der er langt vanskeligere end de opgaver, han har løst i det foregående, er ikke helt klart, men i alle tilfælde er det for den moderne læser interessant at se, hvordan han overvinder vanskelighederne på en fuldt ud tilfredsstillende måde. Først vises, at

$$(6) \quad \text{når } b_2 > b_1, \text{ da er } \frac{k_2}{k_1} < \frac{b_2}{b_1},$$

og dernæst anvendes denne ulighed to gange. Ptolemæos' bevis for (6)

gengives ikke her; men vi vil nøjes med at vise, hvordan han ud fra (6) finder korden til en bue på 1° med to rigtige sexagesimaler. I det foregående har Ptolemæos fundet nedenstående sammenhørende værdier af b og k :

b	k
1;30	1;34,15
0;45	0;47, 8 .

Kaldes nu korden til 1° for k , fås ved anvendelse af (6), at

$$k < \frac{1;00}{0;45} \cdot 0;47, 8 = 1; 2,50,40$$

$$k > \frac{1;00}{1;30} \cdot 1;34,15 = 1; 2,50, 0 .$$

Altså, siger Ptolemæos, er korden til 1° uden nævneværdig fejl lig med 1; 2,50. Herefter kan Ptolemæos konstruere en kordetavle, der indeholder de i afsnit 3 foreskrevne buer.

5. Efter at Ptolemæos således har konstrueret en kordetavle, ville man vente at finde en nærmere redegørelse for brugen af denne tavle. Specielt ville man vente — som vi er vant til det i vore lærebøger — at finde en anvisning på, hvordan trekanter skal løses i de forskellige trekantstilfælde. Men Ptolemæos nævner ikke et ord i denne retning, simpelthen fordi det ikke er nødvendigt. Det er nemlig muligt at løse samtlige opgaver inden for den plane trigonometri ved hjælp af

- I) den pythagoræiske læresætning,
- II) sætningen om forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede trekanter,
- III) sætningen om måling af periferivinkler,
- IV) en kordetavle (eller en sinustavle).

Ptolemæos formulerer ikke dette resultat explicit, men hans løsning af plane opgaver etableres netop ved hjælp af disse fire hjælpemidler. Her vil vi indse rigtigheden af ovennævnte påstand ved først at vise, hvordan man kan finde de ubekendte stykker i en retvinklet trekant, hvori to stykker er kendt, og vi kan nøjes med at løse en trekant, hvori de to kateter a og b er givet, thi de resterende tilfælde løses på ganske analog måde. Lad os da antage, at $a=3$ og $b=4$. Ud fra den pythagoræiske læresætning findes $c=5$. I trekantens omskrevne cirkel, der tegnes, kender

man da de tre korder a , b og c , hvor c tillige er diameteren. Sætter man nu $c = 120$, bliver $a = \frac{3}{5} \cdot 120 = 72$, og $b = \frac{4}{5} \cdot 120 = 96$. Ved hjælp af kordetavlen findes da buerne $\widehat{AC}$ og $\widehat{CB}$ og derudfra trekantens vinkler som periferivinkler.

Vi skal dernæst vise, hvordan en ikke-retvinklet trekant, hvori 3 stykker er givet, kan løses. Lad os antage, at der er givet to sider b og c samt den mellemliggende vinkel A . Nedfældes højden $h = BD$, kan alle stykker i den retvinklede trekant ABD findes; i den retvinklede trekant BDC kender vi da to kateter, og derfor kan alle stykker i denne trekant findes, hvormed opgaven er løst. Det er morsomt at bemærke, at Ptolemæos i alle den slags opgaver hver gang tegner den omskrevne cirkel til hver af de foreliggende retvinklede deltrekanter.

De andre trekantstilfælde behandles på en analog måde; kun i det tilfælde, hvor 3 sider er givet, forløber regningerne lidt anderledes. Vi fælder i dette tilfælde højden $h = BD$ på den største side b , og idet $AD = x$ og $DC = b - x$, fås:

$$h^2 + x^2 = c^2, \quad h^2 + (b - x)^2 = a^2,$$

hvoraf

$$2bx = b^2 + c^2 - a^2.$$

Heraf findes x , og hver af de to retvinklede deltrekanter kan derpå løses som ovenfor.

Denne gennemgang af den plane trigonometri hos Ptolemæos viser, at det er muligt at opbygge en trigonometri, der som eneste hjælpemiddel har en kordetavle i forbindelse med sætningerne I, II og III. Den illustrerer altså på en iøjnefaldende måde, at når man vil give afkald på visse af de lettelser, som vor trigonometri giver ved den praktiske udførelse af beregninger, vil det formelapparat, der er nødvendigt, kunne reduceres i tilsvarende grad.

6. Vi vender os nu til den sfæriske trigonometri, og ligesom den plane trigonometri virker den ptolemæiske trigonometri på kuglen meget enkelt, idet alle beregningsproblemer løses ved hjælp af en eneste formel, nemlig den såkaldte Menelaos' sætning på kuglen.

Her begynder vi med at minde om, at Menelaos' sætning for en plan trekant siger, at når en trekant ABC (fig. 4) skæres af en transversal PQR , da vil punkterne P , Q og R dele siderne AB , BC og CA i forhold, hvis produkt er 1, altså

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{AR} = 1.$$

Beviset, som Ptolemæos giver i *Almagest*, bog 1, kap. 13, føres ved tegning af en hjælpelinie gennem C parallel med AB , hvorved der frem-

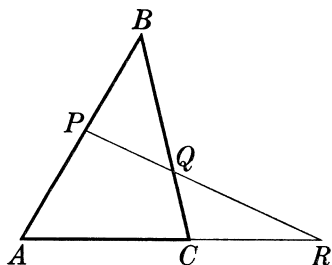


Fig. 4

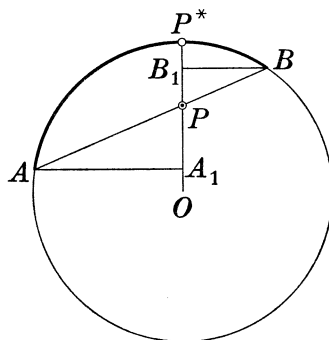


Fig. 5

kommer to sæt ensvinklede trekanter. Det kan tilføjes, at Ptolemæos også viser sætningen i det tilfælde, hvor transversalen PQR skærer forlængelserne af alle tre sider i den forelagte trekant ABC .

For nu at kunne overføre denne sætning til kuglen viser Ptolemæos først to små hjælpesætninger. På en cirkel med centrum O (fig. 5) afsættes to buer AP^* og P^*B i forlængelse af hinanden. Linien OP^* skærer AB i punktet P . Hjælpesætning 1 siger nu, at

$$(7) \quad \frac{k(2\widehat{AP^*})}{k(2\widehat{BP^*})} = \frac{AP}{BP},$$

hvor eksempelvis $k(2\widehat{AP^*})$ betyder korden til en bue, der er dobbelt så stor som $\widehat{AP^*}$. Punkterne A og B projiceres på OP^* i henholdsvis A_1 og B_1 ; rigtigheden af (7) følger da straks ud fra sætningen om ensvinklede trekanter, idet $\frac{1}{2}k(2\widehat{AP^*}) = AA_1$

og $\frac{1}{2}k(2\widehat{BP^*}) = BB_1$.

Afsættes buerne AP^* og BP^* til samme side af punktet P^* , vil forlængelsen af OP^* skære forlængelsen af AB , og hjælpesætning 2 siger da, at (7) også gælder i dette tilfælde.

Ved anvendelse af disse to hjælpesætninger overfører Ptolemæos nu Menelaos' sætning til følgende sætning på kuglen (fig. 6):

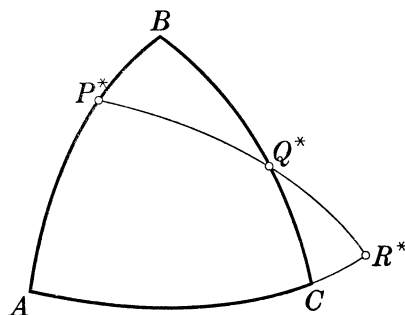


Fig. 6

Når en sfærisk trekant ABC skæres af en transversal (storcirkel) $P^*Q^*R^*$, da vil

$$(8) \quad \frac{k(\widehat{2AP^*})}{k(\widehat{2BP^*})} \cdot \frac{k(\widehat{2BQ^*})}{k(\widehat{2CQ^*})} \cdot \frac{k(\widehat{2CR^*})}{k(\widehat{2AR^*})} = 1.$$

Idet fig. 6 er gentaget på fig. 7, hvor man ser hele kuglen, kan beviset for formel (8) føres på følgende måde: Radierne OP^* , OQ^* og OR^* skærer

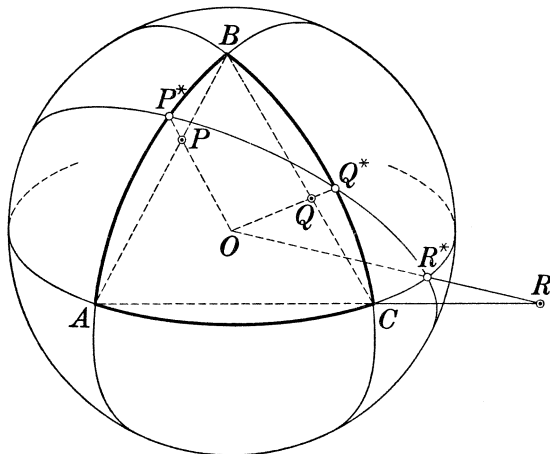


Fig. 7

AB , BC og CA i henholdsvis P , Q og R . Disse tre punkter ligger på ret linie, nemlig på skæringslinien mellem planen ABC og storcirkelplanen $P^*Q^*R^*$. Ud fra hjælpesætningerne følger da, at de tre faktorer i (8) er lig med henholdsvis

$$\frac{AP}{BP}, \quad \frac{BQ}{CQ} \quad \text{og} \quad \frac{CR}{AR},$$

og produktet af disse tre faktorer er ifølge Menelaos' sætning for en plan trekant netop lig med 1.

Ptolemæos beviser også (8) i det tilfælde, hvor transversalen $P^*Q^*R^*$ skærer forlængelserne af alle tre sider i den forelagte trekant ABC .

7. Der rejser sig nu ganske naturligt det spørgsmål, hvordan Menelaos' sætning kan anvendes til løsning af sfæriske beregningsopgaver. Her kommer Ptolemæos med den overraskende bemærkning, at alle sådanne beregningsopgaver kan løses ud fra denne ene sætning. Han godtgør

imidlertid ikke denne påstand på anden måde end ved at henvise til, at alle de beregninger, der skal udføres i *Almagest*, kan udføres ved hjælp af Menelaos' sætning.

Her vil vi føre et bevis for Ptolemæos' påstand på den måde, at det først vises, at alle retvinklede sfæriske trekanter kan løses ved hjælp af Menelaos' sætning, og dernæst, at enhver sfærisk trekant kan løses ved deling i retvinklede trekanter.

Beviset for, at enhver retvinklet sfærisk trekant kan løses ved hjælp af Menelaos' sætning, kan føres ved at godtgøre, at de $\binom{5}{3} = 10$ formler, der hver indeholder tre af trekantens stykker, kan udledes ud fra Menelaos' sætning. Det er imidlertid tilstrækkeligt at vise nedenstående 3 formler:

$$(9) \quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

$$(10) \quad \cos A = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$$

$$(11) \quad \cos c = \cos a \cos b,$$

idet de resterende 7 formler kan udledes ud fra disse. Yderligere kan man nøjes med at betragte trekanter, hvis kateter a og b er mindre end 90° , idet formelsystemets almene gyldighed derefter kan indses ved overgang til nabotrekanten.

Lad nu ABC være en sådan retvinklet trekant (fig. 8). Vi forlænger AC ud over C , så $\widehat{CP} = \widehat{b} = 90^\circ - b$, og CB ud over B , så $\widehat{BR} = \widehat{a} = 90^\circ - a$. Punktet R vil da være pol for storcirklen AC , således at $\widehat{PR} = 90^\circ$ og $\angle P = 90^\circ$. Videre ses, at PR vil skære forlængelsen af AB i Q , og da A er pol for PR , vil $\widehat{BQ} = \widehat{c}$, $\widehat{PQ} = A$ og $\widehat{QR} = \widehat{A}$.

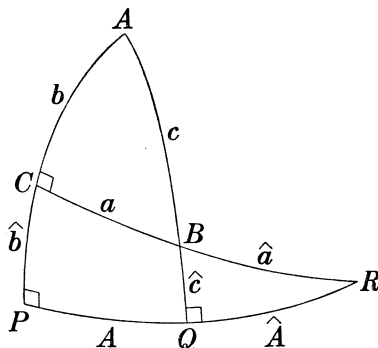


Fig. 8

Opfatter vi nu fig. 8 som bestående af trekant QBR , skåret af transversalen ACP , fås ved anvendelse af Menelaos' sætning

$$\frac{2r \sin 90^\circ}{2r \sin c} \cdot \frac{2r \sin a}{2r \sin 90^\circ} \cdot \frac{2r \sin 90^\circ}{2r \sin A} = 1,$$

hvoraf

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Opfatter vi dernæst fig. 8 som bestående af trekant PAQ , skåret af transversalen CBR , fås på lignende måde

$$\frac{2r \sin \hat{b}}{2r \sin b} \cdot \frac{2r \sin c}{2r \sin \hat{c}} \cdot \frac{2r \sin \hat{A}}{2r \sin 90^\circ} = 1,$$

hvoraf

$$\cos A = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.$$

Betragter vi endelig figuren som bestående af trekant CAB , skåret af transversalen PQR , fås

$$\frac{2r \sin \hat{b}}{2r \sin 90^\circ} \cdot \frac{2r \sin 90^\circ}{2r \sin \hat{c}} \cdot \frac{2r \sin \hat{a}}{2r \sin 90^\circ} = 1,$$

hvoraf

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Ud fra disse tre formler kan man som nævnt udlede de resterende 7 formler; vi nøjes her med at angive en af disse, som bruges i det følgende, nemlig

$$(12) \quad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

8. Selv om det nu således er godtgjort, at de 10 formler, der gælder for en sfærisk retvinklet trekant, kan udledes ud fra Menelaos' sætning, er det dog ikke dermed vist, at retvinklede trekanter kan beregnes ved hjælp af denne sætning og en kordetavle. Lad os f. eks. antage, at a og b er givet. Da findes A af (12), men hvordan finder man A ved hjælp af en kordetavle, når $\operatorname{tg} A$ er givet? Vi kan indskyde, at højre side af (12) jo let lader sig beregne ved hjælp af en kordetavle, idet

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\sin b} = \frac{\sin a}{\sin \hat{a} \sin b} = t.$$

Men hvordan bestemmer man nu A af $\operatorname{tg} A = t$? Man kunne finde A ved hjælp af den sætning, der bruges til løsning af ligning (13) i afsnit 9, men simplere er det først at bestemme c af (11), og dernæst finde A af (9). Ptolemæos former i virkeligheden også sine regninger på denne måde, men det medfører, at man for at finde en vis størrelse ofte først må beregne en anden, og i denne henseende er Menelaos' sætning vore formler underlegen.

Til ovenstående bevis for, at Menelaos' sætning så at sige i sig inde-

holder de 10 formler for den retvinklede sfæriske trekant, kan vi tilføje, at selv om Ptolemæos naturligvis ikke har ført dette bevis, ligger den fremgangsmåde, som han anvender i sine beregninger, tæt op ad tankegangen i beviset. Han sørger altid for — ved at forlænge passende sider — at få en figur, på hvilken Menelaos' sætning kan anvendes, og som indeholder flere buer på 90° .

9. Endelig skal det til sidst godtgøres, at en *vilkårlig* sfærisk trekant kan løses ved hjælp af Menelaos' sætning i forbindelse med en kordetavle. De tilfælde, hvor der blandt de tre givne stykker forekommer både en vinkel og en side, giver ikke anledning til særlige vanskeligheder. De kan løses ved, at man fælder en passende højde. Derimod støder man på et særligt problem, når alle tre sider eller alle tre vinkler er givet. Her må jeg nu straks indskyde den bemærkning, at jeg ikke kender et eneste problem i Almagest, der fører til en sådan trekantsberegning; de trekanten, der skal beregnes, indeholder i alle tilfælde både en kendt side og en kendt vinkel. Når tilfældet (tre sider eller tre vinkler givet) alligevel omtales her, sker det da dels for at gøre ovenstående fremstilling komplet, og dels for at henlede opmærksomheden på en lille hjælpesætning hos Ptolemæos, som finder en naturlig anvendelse på dette problem.

Simple overvejelser fører til det resultat, at man altid — evt. ved at betragte en nabotrekant til den givne — kan løse en forelagt trekant med tre givne sider ved at løse en trekant, hvori højst een af siderne er større end 90° . Lad nu den største side i en sådan trekant være b ; da vil det ene skæringspunkt D mellem storcirklen gennem A og C og storcirklen gennem B vinkelret på AC ligge mellem A og C . Sættes $BD = h$ og $AD = x$, bliver $DC = b - x$, og ud fra de to retvinklede trekanten ABD og CBD fås da

$$\cos h \cos x = \cos c, \quad \cos h \cos(b - x) = \cos a,$$

og ved division

$$(13) \quad \frac{\cos x}{\cos(b - x)} = \frac{\cos c}{\cos a}.$$

Er der givet tre vinkler i trekanten, fældes en højde fra den vinkelspids, hvor den største vinkel ligger, og man føres da atter til en ligning af formen (13), hvor der nu blot i stedet for sider indgår vinkler.

I (13) er højre side kendt, men spørgsmålet er nu, hvordan x kan bestemmes af en sådan ligning ved hjælp af en kordetavle. Som ovenfor

omtalt findes der en sætning i Almagest, der netop synes at være formuleret med løsningen af ovennævnte lille opgave for øje. Sætningen siger (Almagest, bog 1, kap. 13; Manitius p. 47):

Når en bue $\widehat{AC} = b_1 + b_2$ samt $\frac{k(2b_1)}{k(2b_2)}$ er givet, da kan man også bestemme

buerne $b_1 = \widehat{AB}$ og $b_2 = \widehat{BC}$ hver for sig.

Som man ser, sætter denne sætning os i stand til at løse (13). For at bevise sætningen (se fig. 9) bemærkes først,

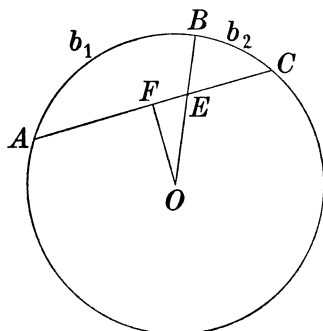


Fig. 9

at da forholdet $\frac{k(2\widehat{AB})}{k(2\widehat{BC})}$ vokser monotont fra

0 til ∞ , når B gennemløber buen $\widehat{AC}$, vil der være et og kun eet punkt B , for hvilket forholdet er lig det givne tal. Lad nu B på fig. 9 være den entydigt bestemte løsning (bevist for, at B er entydigt bestemt, findes ikke hos Ptolemæos); da bue $\widehat{AC}$ er kendt, kan korde AC findes, og da ifølge (7)

$$\frac{k(2b_1)}{k(2b_2)} = \frac{AE}{EC},$$

kan nu også AE og EC hver for sig bestemmes. Lad nu OF være den vinkelrette fra O på AC ; da er $AF = FC = \frac{1}{2}AC$. Vi kan da finde FE og FO og dermed vinkel FOE og endelig $b_1 = \widehat{AB}$ og $b_2 = \widehat{BC}$.

Der kan næppe være nogen tvivl om, at den ovenfor nævnte sætning fra Almagest netop er udledt som et middel til løsning af ligninger af formen (13). I Zeuthen, Matematikkens Historie i Oldtiden (1949), p. 215 hentydes der til denne sætning, og det fremhæves, at den svarer til vor formel

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y).$$

Denne transkription til moderne symboler er naturligvis rigtig, men den giver næppe udtryk for sætningens egentlige formål.

10. Den omstændighed, at samtlige beregningsopgaver på kuglen kan løses ud fra een eneste formel, har ganske naturligt vakt opmærksomhed. Således skriver Zeuthen (Bibliotheca Mathematica, 1900, pp. 20-21): »Selon moi un tel commencement serait même inouï dans l'histoire des

mathématiques, où l'on connaît ordinairement les solutions particulières des principales questions résolues plus tard par une méthode générale avant de construire cette méthode. Il est donc à supposer qu'on ait résolu d'une manière plus directe les questions de trigonométrie sphérique dont s'occupe Ptolémée, ou du moins une partie de ces questions avant d'en réduire toutes les solutions à l'application du théorème de Menelaos.»

Da man som nævnt i indledningen ikke har opbevaret trigonometriske beregninger fra tiden forud for Ptolemæos, kan man kun angive plausibilitetsgrunde for en sådan påstand, og sådanne anfører Zeuthen også. Dette emne skal ikke uddybes nærmere her, men til slut skal dog fremhæves, at Menelaos' formel, trods det at alle beregningsopgaver kan løses ved hjælp af den, ikke er så velegnet til beregninger, som man kunne ønske. Der kræves nemlig — hvad læseren jo let kan overbevise sig om — adskillige overvejelser, inden man finder frem til den måde, hvorpå en forelagt figur skal opdeles og suppleres, for at sætningen kan anvendes. Dertil kommer, at bestemmelsen af et enkelt stykke ud fra visse givne stykker ofte først kan gennemføres, når andre stykker, som man iøvrigt ikke er interesseret i, er fundet. Derfor er Menelaos' formel af araberne blevet erstattet af flere andre, blandt andet sinusrelationen for en sfærisk trekant, som netop blev kaldt »erstatningssætningen«, idet den i visse tilfælde kunne erstatte Menelaos' formel. Men de herhen hørende spørgsmål falder uden for nærværende fremstilling, hvis formål det var at give et indblik i den første beregnende trigonometri.

HALVREGELBUNDNA KEDJEBRÅK

NILS PIPPING

1. *Euklides' algoritm* för bestämning av den största gemensamma divisorn till två naturliga tal är välbekant. Om algoritmen tillämpas på 19 och 13, erhåller man likheterna

$$19 = 1 \cdot 13 + 6, \quad 13 = 2 \cdot 6 + 1, \quad 6 = 6 \cdot 1.$$

Den sist använda divisorn, i detta fall 1, är talens största gemensamma divisor.

Då de två första likheterna, skrivna i formen

$$\frac{19}{13} = 1 + \frac{6}{13} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{6}}, \quad \text{resp.} \quad \frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{6},$$

sammanställas, får man

$$\frac{19}{13} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}$$

eller med enklare beteckning

$$19/13 = [1, 2, 6].$$

Detta är den s. k. *regelbundna kedjebraöksutvecklingen* (*RK*) av det rationella talet $19/13$. Utvecklingens *hela beståndsdel* är 1, dess *delnämnamre* 2 och 6. De motsvarande *deltäljarena*, som båda äro $+1$, behöva icke markeras, emedan samtliga *deltäljare* i varje *RK* ha värdet $+1$.

RK-utvecklingen av ett godtyckligt reellt tal ω blir bestämd, i det man tillämpar Euklides' algoritm på talen ω och 1. Man erhåller t. ex. för $\omega = \sqrt{26} = 5,09 \dots$:

$$\sqrt{26} = 5 + (\sqrt{26} - 5) = 5 + \frac{1}{\sqrt{26} + 5}, \quad \sqrt{26} + 5 = 10 + \frac{1}{\sqrt{26} + 5}$$

och således

$$\sqrt{26} = 5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10 + \dots}} = [5, 10, 10, \dots].$$

Utvecklingen är *periodisk* med perioden 10. En ytterligare förenkling innebär i detta fall beteckningen

$$\sqrt[10]{26} = 5(10).$$

Vid *RK*-utveckling av ω ge de s. k. *konvergenterna*,

$$A_\nu/B_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

goda rationella approximationer av ω . De framgå, då utvecklingen avbrytes efter den hela beståndsdelen b_0 , efter den första delnämnnaren b_1 , efter den andra delnämnnaren $b_2, \dots$. För $\omega = \sqrt[10]{26}$ har man alltså

$$A_0/B_0 = [5], \quad A_1/B_1 = [5, 10], \quad A_2/B_2 = [5, 10, 10], \dots,$$

och dessa konvergenter bestämmas enklast ur utgångsvärdena

$$A_{-2} = 0, \quad B_{-2} = 1, \quad A_{-1} = 1, \quad B_{-1} = 0$$

medels rekursionsformlerna

$$A_\nu = A_{\nu-2} + b_\nu A_{\nu-1}, \quad B_\nu = B_{\nu-2} + b_\nu B_{\nu-1} \quad (\nu \geq 0).$$

Man erhåller schemat

ν	-2	-1	0	1	2	.
b_ν			5	10	10	.
A_ν	0	1	5	51	515	.
B_ν	1	0	1	10	101	.

Beträffande approximationens noggrannhet gäller bl. a., att varje konvergent A_ν/B_ν ($\nu \geq 1$) ansluter sig bättre till ω än vilket annat bråk som helst, vars nämnare är $\leq B_\nu$. Bland alla bråk, vilkas nämnare icke överstiger 101, ger alltså 515/101 den bästa rationella approximationen av $\sqrt[10]{26}$.

Konvergensen är alltså anmärkningsvärt god. I många fall ligger likafullt en förbättring av densamma inom räckhåll; man övergår till en s. k. *halvregelbunden kedjebråksutveckling* (*HRK*), vid vilken utom värdet +1 också -1 kommer i fråga för deltäljarena. I det följande eftersträvas *HRK*-utvecklingar, vilkas konvergens är snabb och jämn.

2. Kedjebråket

$$\frac{23}{9} = 3 - \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}$$

är halvregelbundet. Med förenklande beteckning skriva vi

$$23/9 = [3, 2', 4] \quad (HRK).$$

Allmänne: om b_0 är den hela beståndsdel och $b_\nu \geq 1$ ($\nu = 1, 2, \dots$) delnämnnarna i ett *HRK*, beteckna vi detta

$$[b_0, b_1, b_2', b_3', b_4, \dots],$$

varvid accenterna i fråga om b_2 och b_3 ange, att de motsvarande deltäljarena äro -1 , icke $+1$. Som gemensam benämning för b_ν' ($\nu \geq 1$) och b_ν ($\nu \geq 0$) använda vi *element*, streckat eller ostreckat.

Emedan $[a, 1, b]$ och $[(a+1), (b+1)']$ båda äro $= (ab+a+b)/(b+1)$, gäller formeln

$$(1) \quad [b_\nu, 1, b_{\nu+2}] = [(b_\nu+1), (b_{\nu+2}+1)'],$$

med vars tillhjälp man ur ett *RK* helt eller delvis kan bortskaffa eventuella delnämnnare 1. Det *RK*, från vilket man utgår, transformeras härvid i ett *HRK*.

Vi betrakta t. ex.

$$(2) \quad \omega = 275/76 = [3, \underline{1}, 1, 1, 1, 1, 1, \underline{1}, 3] \quad (RK)$$

och tillämpa (1) på delnämnnarna $b_1 = b_7 = 1$ (understreckade). Härvid erhålles ett s. k. *diagonalkedjebråk* (*DK*), nämligen

$$(3) \quad \omega = [4, 2', 1, 1, 1, 2, 4'] \quad (DK).$$

Av konvergenterna

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{29}{8}, \frac{47}{13}, \frac{76}{21}, \frac{275}{76}$$

för (2) äro de båda, $3/1$ och $47/13$, som ge den relativt sett minst goda approximationen, eliminerade. De sju återstående bråken äro konvergenterna för (3), och beträffanda dem alla gäller

$$(4) \quad \left| \frac{A_\nu}{B_\nu} - \omega \right| < \frac{1}{2B_\nu^2},$$

medan intet annat bråk A/B ($B > 0$, A och B relativa primtal) ger en approximation av karaktären (4). Då dessa båda villkor äro uppfyllda, säges det betraktade kedjebråket vara ett *DK*.

Minkowski [2] påvisade existensen av en *DK*-utveckling för varje reellt tal $\neq [b_0, 2]$. Härvid utnyttjades geometriska betraktelser, som motivera kedjebråkens benämning. Av Perron ([4] sid. 183–84) härrör en metod att avgöra, på vilka delnämnnare 1 i den motsvarande *RK*-

utvecklingen formeln (1) bör tillämpas, för att man skall erhålla ett DK . Dessa ettor må benämnas *singulära* (enligt Perron auszeichnende), de övriga *regulära*. En analys av Perrons förfarande har gett några enkla regler (jfr. [6] och nedan nr 5), med stöd av vilka man ofta omedelbart kan åtskilja de singulära ettorna från de regulära. Så sluter man t. ex. utan svårighet, att i (2) de båda understreckade ettorna äro singulära, de övriga regulära. Härav följer, att (3) är ett DK .

Emedan (4) gäller för varje v , är konvergensen vid DK påfallande jämn. I nr 4 visas, att dess tempo kan påskyndas genom modifikation av utvecklingen.

3. Med D må betecknas ett naturligt tal, som icke är en jämn kvadrat. Då man utvecklar $\sqrt{D}$ i RK , erhålles en periodisk utveckling, och periodiciteten börjar redan vid delnämnnaren b_1 ; en ytterligare lagbundenhet består däri, att perioden alltid är av formen

$$b_1, b_2, \dots, b_{v-1}, b_v, b_{v-1}, \dots, b_2, b_1, 2b_0$$

eller

$$b_1, b_2, \dots, b_{v-1}, b_{v-1}, \dots, b_2, b_1, 2b_0,$$

med varianterna

$$b_1, 2b_0 \quad \text{eller} \quad 2b_0$$

([4] § 25). Ett dylikt RK beteckna vi (jfr. nr 1):

$$\sqrt{D} = b_0(b_1, b_2, \dots, b_2, b_1, 2b_0)$$

och ha t. ex. ([4] sid. 101):

$$(5) \quad \begin{aligned} \sqrt{19} &= 4(2, 1, 3, 1, 2, 8), \quad \sqrt{29} = 5(2, 1, 1, 2, 10), \\ \sqrt{27} &= 5(5, 10), \quad \sqrt{26} = 5(10). \end{aligned}$$

Då $2b_0$ lämnas å sido, är perioden symmetrisk, och som förf. [6] visat, fördela sig vid övergång $RK \rightarrow DK$ också de singulära ettorna symmetriskt inom denna del av perioden. Detta har till följd, att samma lagbundenhet, som ovan angetts beträffande delnämnnarna vid RK -utveckling av $\sqrt{D}$, också gäller vid DK -utveckling av $\sqrt{D}$.

Man har t. ex. DK -utvecklingarna

$$\sqrt{19} = 4(3, 5', 3', 8), \quad \sqrt{29} = 5(2, 1, 1, 2, 10),$$

ty vid RK för $\sqrt{19}$ (jfr. (5)) äro periodens båda ettor singulära, medan de vid RK för $\sqrt{29}$ äro regulära (jfr. nedan nr 5).

Patz [3] har utvecklat $\sqrt{D}$ i RK intill $D = 10000$, ett mödosamt arbete, som utförts med föredömlig omsorg. Utgående från Patz' tabell

har förf. ([5] och [6]) medels övergång $RK \rightarrow DK$ bestämt motsvarande DK -utvecklingar för $D \leq 1000$.

4. Låtom oss återgå till exemplet (2):

$$275/76 = [3, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 3].$$

Vi betrakta nu delnämnnarna $b_1 = b_3 = b_5 = b_7 = 1$ (understreckade) som »singulära» och tillämpa (1) på dem. Vi erhålla

$$(6) \quad 275/76 = [4, 3', 3', 3', 4']$$

med konvergenterna

$$\frac{A_v}{B_v} = \frac{4}{1}, \frac{11}{3}, \frac{29}{8}, \frac{76}{21}, \frac{275}{76}.$$

Vid sidan av $3/1$ och $47/13$, som eliminerades vid övergång till DK , ha också $7/2$ och $18/5$ bortfallit, vilket givetvis innebär, att konvergensens ytterligare har påskyndats. Numerisk kontroll visar f. ö., att igen just de två konvergenterna, som ge den relativt sett minst goda approximationen, blivit uteslutna. Man har nämligen

$$\begin{aligned} 4/1 - 275/76 &= 0,76 \dots / 2 \cdot 1^2, & 275/76 - 7/2 &= 0,94 \dots / 2 \cdot 2^2, \\ 11/3 - 275/76 &= 0,86 \dots / 2 \cdot 3^2, & 275/76 - 18/5 &= 0,92 \dots / 2 \cdot 5^2, \\ 29/8 - 275/76 &= 0,84 \dots / 2 \cdot 8^2, & 76/21 - 275/76 &= 0,55 \dots / 2 \cdot 21^2. \end{aligned}$$

Emedan (6) ej innehåller någon delnämnnare 1, kan eliminationen av konvergenterna med stöd av (1) icke drivas längre.

Enligt det anförda är valet av singulära ettor vid övergång $RK \rightarrow HRK$ av fundamental betydelse. I det följande träffas dylika val av olika slag. Genomgående förutsättes härvid:

- (7) Om det RK , från vilket man utgår, är ändligt, har dess sista delnämnnare ett värde > 1 .

Antagandet innebär ingen väsentlig inskränkning, emedan

$$[b_0, b_1, \dots, b_v, 1] = [b_0, b_1, \dots, b_v + 1].$$

5. Det ställer sig rätt omständligt att fullständigt utreda de singulära ettornas fördelning vid övergång $RK \rightarrow DK$ ([6] och [7]). Vi nöja oss därför med att anföra ett par resultat, som äro väsentliga för den följande framställningen.

Med en *mellanliggande etta* må förstås en delnämnnare 1, vars båda angränsande delnämnnare också äro = 1. Under förutsättningen (7) gäller:

(8) Varje mellanliggande etta är regulär.

Därjämte kan visas:

(9) Vid en följd delnämnnare $b, 1, 1, \bar{b}$ med $b > 1, \bar{b} > 1$ är den etta, som står invid den mindre delnämnnaren b eller $\bar{b}$, regulär; för $b = \bar{b}$ äro båda ettorna regulära. Om b betecknar den hela beståndsdelen b_0 , är $b_2 = 1$ regulär.

Som konsekvens av (8) och (9) framgår ytterligare:

(10) Av två angränsande ettor är åtminstone den ena regulär.

Detta möjliggör successiv tillämpning av (1) på samtliga singulära ettor. Observeras bör blott, att varje delnämnnare, som står mellan två singulära ettor, blir höjd med två enheter som t. ex. i fallet

$$\sqrt{19} = 4(2, \underline{1}, 3, \underline{1}, 2, 8) = 4(3, 5', 3', 8) \quad (DK).$$

Här äro delnämnnarena 1 *isolerade ettor*, omgivna av delnämnnare > 1 . Man sluter då lätt, att de äro singulära. Men det finnes ogynnsamma fall, då en mer eller mindre omfattande undersökning måste genomföras, innan ettans karaktär, singulär eller regulär, kan fastställas.

6. De ovan nämnda ogynnsamma fallen vålla, att ingen lag beträffande singulära ettor med fördel kan utnyttjas för definition av *DK*. Men låtom oss träffa enklare val av »singulära» ettor och undersöka, vilka *HRK*, som härvid erhållas. På denna väg återfinna vi bl. a. två sedan gammalt välkända *HRK*.

FÖRESKRIFT 1. I varje obruten följd delnämnnare 1 väljas de med udda ordningsnummer från vänster räknat som singulära.

Vi strecka igen under de singulära ettorna och ha t. ex. (jfr. nr 4 och [4] sid. 101):

$$275/76 = [3, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 3], \quad \sqrt{97} = 9(\underline{1}, 5, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, 5, \underline{1}, 18).$$

Då (1) tillämpas, erhålla vi alltså

$$275/76 = [4, 3', 3', 3', 4'] \quad (HRK, 1), \quad \sqrt{97} = 10(7', 3', 3', 2', 6, 20')$$

(*HRK*, 1).

Härvid gäller:

$$(11) \quad \begin{aligned} & b_\nu \geq 2 \quad (\nu \geq 1); \\ & b_\nu \geq 3 \quad (\nu \geq 1), \text{ då } b_\nu \text{ eller } b'_\nu \text{ efterföljes av ett streckat element.} \end{aligned}$$

Alla och blott de HRK , vilkas delnämnnare uppfylla villkoren (11), äro enligt Perron ([4] § 39) »Kettenbrüche nach nächsten Ganzen«, som ingående undersökts av Hurwitz [1]. I anslutning till dennes benämning »Kettenbrüche erster Art« har ovan använts den förkortande beteckningen HRK , 1. Allmänt består

SATS 1. Då föreskrift 1 följes vid övergång $RK \rightarrow HRK$, erhålles ett HRK , 1.

BEVIS. Beträffande delnämnnarna $b_{\lambda+1}$ ($\lambda \geq 0$) i det RK , som betraktas, föreligga sex möjligheter:

- 1:0 $b_{\lambda+1} = 1$ är singulär $= \underline{1}$;
- 2:0 $b_{\lambda+1} = 1$ är regulär vid en följd $\underline{1}, b_{\lambda+1}, \underline{1}$;
- 3:0 $b_{\lambda+1} = 1$ är regulär vid en följd $\underline{1}, b_{\lambda+1}, b_{\lambda+2} > 1$;
- 4:0 $b_{\lambda+1} = 2$ efterföljes av $b_{\lambda+2} = \underline{1}$;
- 5:0 $b_{\lambda+1} = 2$ efterföljes av $b_{\lambda+2} > 1$;
- 6:0 $b_{\lambda+1} \geq 3$.

Vi verkställa övergång $RK \rightarrow HRK$ och beteckna med b_ν , resp. b'_ν det element i HRK , som motsvarar $b_{\lambda+1}$ i RK . Härvid gäller i de sex olika fallen: 1:0 elementet saknas; 2:0 $b'_\nu = 3'$; 3:0 $b'_\nu = 2'$ efterföljes av $b_{\nu+1}$; 4:0 $b_\nu \geq 3$, vare sig elementet är streckat eller icke; 5:0 $b_\nu = 2$ eller $b'_\nu = 3'$ efterföljes av $b_{\nu+1}$; 6:0 $b_\nu \geq 3$, vare sig elementet är streckat eller icke. I den mån b_ν eller b'_ν ($\nu \geq 1$) alls ingår i HRK , är alltså $b_\nu \geq 2$ för varje $\nu \geq 1$. I de fall, då $b_\nu = 2$ (eller $b'_\nu = 2'$), är det efterföljande elementet ostreckat (jfr. 5:0 och 3:0). Alltså gäller (11), d. v. s. $HRK = HRK$, 1, så att sats 1 är bevisad.

FÖRESKRIFT 2. I varje obruten följd delnämnnare 1 väljas de med udda ordningsnummer från höger räknat som singulära.

I motsats till föreskrift 1 är denna icke fullt entydig. Vi betrakta ett periodiskt RK med 1 som period, alltså $b, 1, 1, 1, \dots$ ($b = b_0$ eller $b =$ en delnämnnare > 1). De båda valen $b, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, \dots$ och $b, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \dots$ stå i samklang med föreskrift 2, och vi erhålla t. ex.

$$(\sqrt{5}-1)/2 = [0, \underline{1}, 1, \underline{1}, \dots] = [1, 3', 3', \dots] \quad (HRK, 2)$$

och vid sidan härav

$$(\sqrt{5}-1)/2 = [0, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, \dots] = [0, 2, 3', 3', \dots] \quad (HRK, 2).$$

Denna villkorlighet kan dock lätt hävas. Man behöver blott komplettera föreskrift 2 med bestämmelsen, att ordningsnumren räknas från vänster vid en oändlig följd delnämnnare 1.

Då $275/76$ och $\sqrt{97}$ betraktas, få vi de entydigt bestämda utvecklingarna

$$\begin{aligned} 275/76 &= [3, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 3] = [4, 3', 3', 3', 4'] & (HRK, 2), \\ \sqrt{97} &= 9(\underline{1}, 5, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 5, \underline{1}, 18) = 10(6', 2, 3', 3', 7', 20') & (HRK, 2). \end{aligned}$$

Härvid gäller:

$$(12) \quad b_\nu \geq 2 \ (\nu \geq 1); \quad b_\nu \geq 3 \ (\nu \geq 1), \text{ då elementet är streckat,}$$

medels vilka relationer Perron ([4] § 40) definierar »singulära Kettenbrüche». Dessas egenskaper ha först undersökts av Hurwitz [1], och i anslutning till dennes benämning »Kettenbrüche zweiter Art» har ovan använts den förkortande beteckningen $HRK, 2$. Allmänt består

SATS 2. Då föreskrift 2 följes vid övergång $RK \rightarrow HRK$, erhålles ett $HRK, 2$.

BEVIS. Beträffande delnämnnarna $b_{\lambda+1}$ ($\lambda \geq 0$) i det RK , som betraktas, föreligga sex möjligheter:

- 1:0 $b_{\lambda+1} = 1$ är singulär $= \underline{1}$;
- 2:0 $b_{\lambda+1} = 1$ är regulär vid en följd $\underline{1}, b_{\lambda+1}, \underline{1}$;
- 3:0 $b_{\lambda+1} = 1$ är regulär vid en följd $b_\lambda, b_{\lambda+1}, \underline{1}$ ($b_\lambda > 1$);
- 4:0 $b_{\lambda+1} = 2$ föregås av $b_\lambda = \underline{1}$;
- 5:0 $b_{\lambda+1} = 2$ föregås av $b_\lambda > 1$;
- 6:0 $b_{\lambda+1} \geq 3$.

Vi verkställa övergång $RK \rightarrow HRK$ och beteckna med b_ν , resp. b'_ν det element i HRK , som motsvarar $b_{\lambda+1}$ i RK . Härvid gäller i de sex olika fallen: 1:0 elementet saknas; 2:0 $b'_\nu = 3'$; 3:0 $b'_\nu = 2$; 4:0 $b'_\nu = 3'$; 5:0 $b_\nu \geq 2$; 6:0 $b_\nu \geq 3$ vare sig elementet är streckat eller icke. I den mån b_ν eller b'_ν ($\nu \geq 1$) alls ingår i HRK , är alltså (jfr. (12)) $b_\nu \geq 2$, $b'_\nu \geq 3$, då elementet är streckat, d. v. s. $HRK = HRK, 2$, så att sats 2 är bevisad.

7. Jämfört med DK ha $HRK, 1$ och $HRK, 2$ obestriddligen företräderna: utvecklingarna erhållas synnerligen enkelt vid övergång från RK ; därjämte är konvergenssnabb, emedan de singulära ettorna ligga så tätt som möjligt inom varje obruten ändlig eller oändlig följd delnämnnare 1.

Men i andra avseenden utfaller en jämförelse till DK :s förmån:

approximationen (4) är allmängiltig, vilket innebär jämn konvergens, och vid DK för $\sqrt{D}$ består den i nr 3 angivna lagbundenheten beträffande delnämnnarna. I vissa fall sakna HRK , 1 och HRK , 2 dessa egenskaper. Som exempel må betraktas

$$\sqrt{13} = 3(\underline{1}, 1, 1, \underline{1}, 6) = 4(2', 2, 8') \quad (DK),$$

$$\sqrt{13} = 3(\underline{1}, 1, \underline{1}, 1, 6) = 4(3', 2', 7) \quad (HRK, 1),$$

$$\sqrt{13} = 3(1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 6) = 3(2, 3', 7') \quad (HRK, 2)$$

med konvergenterna

$$4/1, 7/2, 18/5, \dots, \text{ resp. } 4/1, 11/3, 18/5, \dots, \text{ resp. } 3/1, 7/2, 18/5, \dots$$

Konvergenterna $11/3$ vid HRK , 1 och $3/1$ vid HRK , 2 återfinnas ej bland DK :s konvergener, varför approximationen (4) icke gäller för dem. Varken vid HRK , 1 eller vid HRK , 2 för $\sqrt{13}$ består den i nr 3 angivna lagbundenheten; orsaken är givetvis de singulära ettornas osymmetriska fördelning.

Den senare olägenheten kan ej generellt hävas, om man håller fast vid önskemålet om så snabb konvergens som möjligt. I fråga om utvecklingen

$$\sqrt{29} = 5(2, 1, 1, 2, 10) \quad (RK = DK)$$

innebär kravet på symmetri, att periodens båda delnämnnare 1 äro regulära, medan konvergensens takt ökas, om den ena av dem betraktas som singulär.

Saken ligger emellertid annorlunda till beträffande den förstnämnda och väsentligare olägenheten. Som i följande avsnitt visas, kan den hävas medels en modifikation av föreskrifterna 1 och 2.

8. I varje obruten följd delnämnnare 1 tilldelas envar ett ordningsnummer, vilket räknas från vänster, och två alternativa föreskrifter ges.

FÖRESKRIFT 3. Som singulära ettor väljas

1:0 i varje ändlig eller oändlig följd av $2k+1$ ($k = 0, 1, \dots$) delnämnnare 1 de med ordningsnumren $1, 3, \dots, 2k+1$;

2:0 i varje ändlig följd av $2k$ ($k = 2, 3, \dots$) delnämnnare 1 de med ordningsnumren $1, 3, \dots, 2k-3, 2k$ (det sista alltså $2k$ och icke $2k-1$);

3:0 i följden $b_0, 1, 1, \bar{b}$ med $\bar{b} > 1$ ettan b_1 och i följden delnämnnare $b, 1, 1, \bar{b}$ med $b > 1, \bar{b} > 1$ ettan invid den större delnämnnaren b eller $\bar{b}$ eller, om $b = \bar{b}$, ettan invid b .

FÖRESKRIFT 4. Som singulära ettor väljas

1:0 som i föreskrift 3;

2:0 i varje ändlig följd av $2k$ ($k = 2, 3, \dots$) delnämnnare 1 de med ordningsnumren 1, 4, 6, $\dots$, $2k$ (det första alltså 1 och icke 2);

3:0 som i föreskrift 3 utom att ettan invid $\bar{b}$ väljes som singulär, då $b = \bar{b}$.

De HRK , som erhållas vid övergång från RK medels (1) enligt dessa båda föreskrifter, beteckna vi med HRK , 3, resp. HRK , 4. Vid övergångarna i fråga äro de regulära ettorna enligt (8) och (9) regulära också vid övergång $RK \rightarrow DK$, varav följer, att alla konvergenter för HRK , 3 och HRK , 4 i överensstämmelse med vår önskan uppfylla villkoret (4).

Som exempel anföras några utvecklingar (jfr. [4] sid. 101), vid vilka valen av singulära ettor skilja sig från varandra.

$$\begin{aligned}\sqrt{29} &= 5(2, 1, 1, 2, 10) & (RK = DK), \\ &= 5(2, \underline{1}, 1, 2, 10) = 5(3, 2', 2, 10) & (HRK, 3), \\ &= 5(2, 1, \underline{1}, 2, 10) = 5(2, 2, 3', 10) & (HRK, 4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{53} &= 7(3, 1, 1, 3, 14) & (RK = DK), \\ &= 7(3, \underline{1}, 1, 3, 14) = 7(4, 2', 3, 14) & (HRK, 3), \\ &= 7(3, 1, \underline{1}, 3, 14) = 7(3, 2, 4', 14) & (HRK, 4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{58} &= 7(\underline{1}, 1, 1, 1, 1, \underline{1}, 14) = 8(2', 1, 1, 2, 16') & (DK), \\ &= 7(\underline{1}, 1, \underline{1}, 1, 1, \underline{1}, 14) = 8(3', 2', 2, 16') & (HRK, 3), \\ &= 7(\underline{1}, 1, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 14) = 8(2', 2, 3', 16') & (HRK, 4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{85} &= 9(4, 1, 1, 4, 18) & (RK = DK), \\ &= 9(4, \underline{1}, 1, 4, 18) = 9(5, 2', 4, 18) & (HRK, 3), \\ &= 9(4, 1, \underline{1}, 4, 18) = 9(4, 2, 5', 18) & (HRK, 4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{88} &= 9(2, 1, 1, 1, 2, 18) & (RK = DK), \\ &= 9(2, \underline{1}, 1, \underline{1}, 2, 18) = 9(3, 3', 3', 18) & (HRK, 3 = HRK, 4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{97} &= 9(\underline{1}, 5, \underline{1}, 1, 1, 1, 1, \underline{1}, 5, \underline{1}, 18) = 10(7', 2', 1, 1, 2, 7', 20') & (DK), \\ &= 9(\underline{1}, 5, \underline{1}, 1, \underline{1}, 1, 1, \underline{1}, 5, \underline{1}, 18) = 10(7', 3', 2', 2, 7', 20') & (HRK, 3), \\ &= 9(\underline{1}, 5, \underline{1}, 1, 1, \underline{1}, 1, \underline{1}, 5, \underline{1}, 18) = 10(7', 2', 2, 3', 7', 20') & (HRK, 4).\end{aligned}$$

Beträffande övriga utvecklingar av $\sqrt{D}$ ($D < 100$) gäller: i 33 fall uppvisar RK ingen delnämnnare 1, varför $RK = DK = HRK$, 3 = HRK , 4, medan i 51 fall de singulära ettorna äro identiska vid övergång från RK till DK , HRK , 3 och HRK , 4, så att $RK \neq DK = HRK$, 3 = HRK , 4.

Slutligen må nämnas, att Krishnaswami (jfr. referat av Lehmer i *Mathematical Reviews*, vol. 5, sid. 92) på helt annat sätt än det ovan angivna definierat en *HRK*-utveckling, som synes vara identisk med *HRK*, 3, dock endast för $\omega = \sqrt{D}$. Krishnaswamis undersökningar gälla nämligen blott detta speciella fall.

LITTERATUR

- [1] A. HURWITZ: *Über eine besondere Art der Kettenbruchentwicklung reeller Grössen*. Acta Math. 12 (1889), pp. 367–405.
- [2] H. MINKOWSKI: *Über die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen*. Ges. Abh. I, pp. 320–352, Teubner, Leipzig und Berlin, 1911. (Math. Annalen 54, pp. 91–124.)
- [3] W. PATZ: *Tafel der regelmässigen Kettenbrüche für die Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen von 1—10 000*. Akad. Verlagsges. Becker & Erler, Kom.-Ges., Leipzig, 1941.
- [4] O. PERRON: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. 2. Auflage, Teubner, Leipzig und Berlin, 1929.
- [5] N. PIPPING: *Tafel der Diagonalkettenbrüche für die Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen von 1—500*. Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. XV, 10 (1947).
- [6] N. PIPPING: *Diagonalkettenbrüche*. Ibid. XVI, 5 (1949).
- [7] N. PIPPING: *Über die Elemente der Diagonalkettenbrüche*. Ibid. XIX, 6 (1954).

AN APPROXIMATION FORMULA FOR THE DETERMINATION OF AREAS

K. ZEUTHEN HEIDAM

Let a curve represented by the equation

$$y = f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

be determined by passing through two given points (x_{p-1}, y_{p-1}) and (x_p, y_p) , at which points the inclinations of the tangents are known as $f'(x_{p-1})$ and $f'(x_p)$.

The constants of the equation as well as the area between the x -axis

and the curve within the interval from x_{p-1}

to x_p of length $d_p = x_p - x_{p-1}$ (we shall say

»the interval d_p «) are easily determined.

To facilitate the computations, let us use

another system of coordinates (ξ, η) for

which the axes are parallel to those of the

original system, and the origin is bisecting

the line $P_{p-1}P_p$ (cf. fig. 1). The equation

of the curve will then be of the form

$$\eta = \varphi(\xi) = k_0 + k_1\xi + k_2\xi^2 + k_3\xi^3.$$

According to the above conditions the

following four equations should be satisfied:

$$\varphi(-\tfrac{1}{2}d_p) = \tfrac{1}{2}[f(x_{p-1}) - f(x_p)] = k_0 - \tfrac{1}{2}k_1d_p + \tfrac{1}{4}k_2d_p^2 - \tfrac{1}{8}k_3d_p^3$$

$$\varphi(\tfrac{1}{2}d_p) = -\tfrac{1}{2}[f(x_{p-1}) - f(x_p)] = k_0 + \tfrac{1}{2}k_1d_p + \tfrac{1}{4}k_2d_p^2 + \tfrac{1}{8}k_3d_p^3$$

$$\varphi'(-\tfrac{1}{2}d_p) = f'(x_{p-1}) = k_1 - k_2d_p + \tfrac{3}{4}k_3d_p^2$$

$$\varphi'(\tfrac{1}{2}d_p) = f'(x_p) = k_1 + k_2d_p + \tfrac{3}{4}k_3d_p^2.$$

The solution of these equations gives

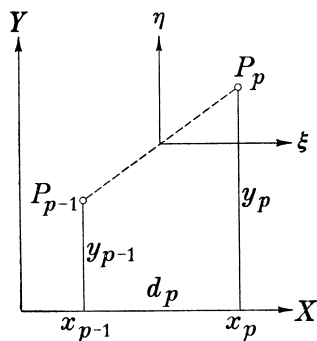


Fig. 1

$$\begin{aligned}
k_0 &= \frac{d_p[f'(x_{p-1}) - f'(x_p)]}{8} \\
k_1 &= -\frac{6[f(x_{p-1}) - f(x_p)] + d_p[f'(x_{p-1}) + f'(x_p)]}{4d_p} \\
k_2 &= -\frac{f'(x_{p-1}) - f'(x_p)}{2d_p} \\
k_3 &= \frac{2[f(x_{p-1}) - f(x_p)] + d_p[f'(x_{p-1}) + f'(x_p)]}{d_p^3}.
\end{aligned}$$

The area bounded by the curve, the ξ -axis, and the ordinates through P_{p-1} and P_p is then

$$F_p^{(1)} = \int_{-d_p/2}^{d_p/2} \varphi(\xi) d\xi = k_0 d_p + \frac{1}{12} k_2 d_p^3 = \frac{1}{12} d_p^2 [f'(x_{p-1}) - f'(x_p)].$$

The area between the x -axis and the ξ -axis is

$$F_p^{(2)} = \frac{1}{2} d_p [f(x_{p-1}) + f(x_p)].$$

Hence, the total area $F_p = F_p^{(1)} + F_p^{(2)}$ within the interval d_p :

$$(1) \quad F_p = \frac{1}{2} d_p \{f(x_{p-1}) + f(x_p) + \frac{1}{6} d_p [f'(x_{p-1}) - f'(x_p)]\}.$$

If several points of the curve are known, the area from the first to the last ordinate is $F = \sum_1^n F_p$:

$$(2) \quad F = \sum_1^n \frac{1}{2} d_p \{f(x_{p-1}) + f(x_p) + \frac{1}{6} d_p [f'(x_{p-1}) - f'(x_p)]\}.$$

The first part, $\sum \frac{1}{2} d_p [f(x_{p-1}) + f(x_p)] = \sum F_p^{(2)}$, is obviously the ordinary trapezoidal formula, while the latter part is a corrective term.

If a series of pairs of observations $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ have been made to determine a curve which is otherwise unknown, such curves as are represented by equations of the form stated above may constitute an expedient approximation. The total area from the first to the last ordinate can then approximately be obtained from formula (2). With regard to the inclinations of the tangents, which are normally not observed, a reasonable judgment is generally the only way out. It seems rational to choose, arbitrarily, the inclination of the tangent through each of the points P_p parallel to $P_{p-1}P_{p+1}$ ($p = 1, 2, \dots, n-1$). At the first and the last point the inclinations of the tangents cannot, however, be determined in this way. We will then let the tangent through P_0 intersect the tangent through P_1 in the middle of the interval d_1 , whereas the tangent through P_n is made to intersect the tangent through P_{n-1}

in the middle of d_n (cf. fig. 2). The choice of the latter inclinations renders the curves parabolas ($k_3=0$).

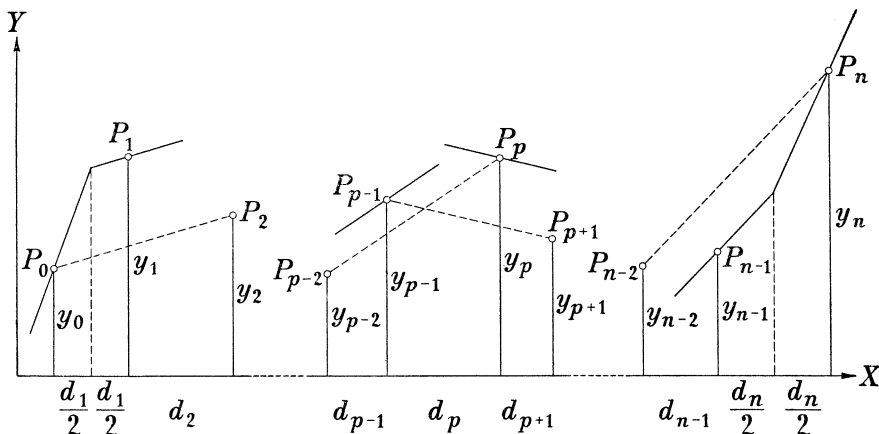


Fig. 2

The inclinations chosen can be expressed as follows:

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_p = -\frac{f(x_{p-1}) - f(x_{p+1})}{d_p + d_{p+1}} & (p = 1, 2, \dots, n-1) \\ \alpha_0 = -\alpha_1 - \frac{2[f(x_0) - f(x_1)]}{d_1} \\ \alpha_n = -\alpha_{n-1} - \frac{2[f(x_{n-1}) - f(x_n)]}{d_n} \end{cases}$$

Especially for $n=2$ we get

$$(2a) \quad F = \frac{d_1 + d_2}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{d_1 - d_2}{3} [f(x_0) - f(x_2)],$$

which is the formula given by Viggo Brun (Nordisk Matematisk Tidsskrift 1 (1953), pp. 10-15).

For a *known* function $y=g(x)$ the error Δ of the approximation can be determined:

$$(4) \quad \Delta = \int_{x_0}^{x_n} g(x) dx - \sum_1^n \frac{1}{2} d_p \{ f(x_{p-1}) + f(x_p) + \frac{1}{6} d_p [\alpha_{p-1} - \alpha_p] \},$$

where $f(x_{p-1}) = g(x_{p-1})$ and $f(x_p) = g(x_p)$. If, especially, the known function is a polynomial of 3rd degree or less, the above expression can be reduced:

$$(4a) \quad \Delta = \frac{1}{12} \sum_1^n d_p^2 \{g'(x_{p-1}) - g'(x_p) - \alpha_{p-1} + \alpha_p\}.$$

We apply the formulae (2) and (2a) to the example

$$f(x) = e^x, \quad \int_0^{\ln 5} e^x dx = 5 - 1 = 4.$$

The interval is divided into four sections by

$$(5) \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \ln 2, \quad x_2 = \ln 3, \quad x_3 = \ln 4, \quad x_4 = \ln 5.$$

The corresponding *ordinates* have the simple values 1, 2, 3, 4 and 5. Since here $f'(x)=f(x)$, it means that also the difference between the inclinations of the tangents at either end of the four intervals is constant = 1.

Substituting (5) and

$$f(x_{p-1}) = f'(x_{p-1}) = p, \quad p = 1, 2, 3, 4, 5,$$

in formula (2), we get

$$F = \frac{1}{2} \ln 2 \{1 + 2 - \frac{1}{6} \ln 2\} + \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2) \{2 + 3 - \frac{1}{6} [\ln 3 - \ln 2]\} \\ + \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 3) \{3 + 4 - \frac{1}{6} [\ln 4 - \ln 3]\} + \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 4) \{4 + 5 - \frac{1}{6} [\ln 5 - \ln 4]\}.$$

With an initial accuracy of 6 decimals, this gives

$$F = 3.9996, \text{ i.e. } \Delta = 4 - 3.9996 = 0.0004.$$

From Brun's formula (2a), we get

$$F = \frac{1}{6} \ln 3 \cdot (1 + 4 \cdot 2 + 3) + \frac{1}{3} (\ln 2 - (\ln 3 - \ln 2)) (1 - 3) \\ + \frac{1}{6} (\ln 5 - \ln 3) (3 + 4 \cdot 4 + 5) + \frac{1}{3} (\ln 4 - \ln 3 - (\ln 5 - \ln 4)) (3 - 5) = 4.0057.$$

The error $\Delta = -0.0057$ is considerably larger than by the previous method.

If we use the same examples as those used by Brun and apply the formulae (3) and (4a) for $f(x)=x^2$ and $f(x)=x^3$, we get the same expressions for the errors. (As for the latter example, the formula is exact only for $a=b$ and $a=\frac{1}{3}(\sqrt{13}+2)b$ but not for $a=\frac{1}{3}(\sqrt{13}-2)b$, which a re-calculation will easily show.) With regard to the function $f(x)=x^4$, formula (4a) must be replaced by (4) because the function is a polynomial of a higher degree than 3. In this case we likewise obtain the same expression for the error. However, the error $\Delta=0$ for $1.11\dots b < a < 1.12\dots b$ and $2.60\dots b < a < 2.61\dots b$, $a=1.12b$ and $a=2.60b$ being the better approximations respectively. (These values differ slightly from those given by Brun.)

BOKMELDINGER

OSKAR BECKER: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. (Sammlung Orbis.) Verlag Karl Alber Freiburg, München, 1954. 11 + 422 S., 62 Fig. DM 26.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 114.)

Denne bok gir som titelen sier en sammenhengende fremstilling av den historiske utvikling av matematikkens fundamentale idéer og metoder fra oldtiden til idag. Den vender seg ikke bare til den aktive matematiske forsker, men også til alle som har historiske og filosofiske interesser knyttet til matematikken. Det er nok så, at den vitenskapelig arbeidende matematiker vil være mere interessert nettopp i den moderne grunnlagforskning som man finner utførligere fremstilt i slike bøker som f. eks. de nylig av Rosenbloom, Kleene, Rosser o. a. publiserte, men en slik samlet historisk fremstilling av grunnlagforskningen gjennom tidene som den foreliggende bok gir vil interessere alle som på noen måte har med matematiske fag å gjøre, lærere, studerende osv.

For å gi et så fullstendig bilde av bokens rike innhold som mulig vil jeg gi en oppregning av dens forskjellige deler med kort angivelse av hver dels innhold. Den består av 5 kapitler. Det første omtaler babylonsk og egyptisk matematikk. Det annet med overskriften »Begrunnelsen av den vitenskapelige matematikk ved grekerne« består av 5 avsnitt A–E. I A omtales den tidlige greske matematikk fra omkring år 600 før Kr. Her fortelles om de talltegn som dengang var i bruk og begynnelsen til geometrien, således Hippokrates kvadratur av »halvmåner«. B omtaler begynnelsen til infinitesimale betraktninger, således Eudoxos exhaustionsmetode og Archimedes kvadratur av parabelen. C handler om proporsjonslæren. D gjengir Euklids aksiomatiske begrunnelse av geometrien. Her nevnes den av Zeuthen påpekte meget interessante omstendighet, at begrepet eksistens i gresk geometri opfattes konstruktivt, altså eksistens = konstruerbarhet. E er av filosofisk innhold og gjengir betraktninger av Platon, Proklos, Aristoteles og pythagoréerne.

Det tredje kapitel omhandler grunnleggelsen i det 17de århundre av den nyere tids matematikk. I det første avsnitt A nevnes en Nicole Oresme som skal ha kjent til den grafiske fremstilling av funksjoner, og noen naive »integrasjoner« av Galilei og Kepler omtales. Avsnittene B og C

omtaler henholdsvis Descartes oppdagelse av den analytiske geometri og oppfinnelsen av infinitesimalregningen ved Newton og Leibniz.

Fjerde kapitel har overskriften »Det 19de århundres kritiske matematikk«. I første avsnitt A omtales studiet av geometriens grunnlag fra Gauss betraktninger gjennom Kleins Erlanger program til Paschs og Hilberts aksiomsystemer. Videre gjengis Poincarés og Dinglers anskuelser om de geometriske aksiomers natur. B har overskriften »Grunnlag for aritmetikken, analysen og mengdelæren«. Her omtales innførelsen av de imaginære tall, Dedekinds og Cantors definisjoner av irrasjonale tall samt etter bemerkninger fra Bolzanos »Paradoxien des Unendlichen« nokså utførlig Cantors alminnelige mengdelære.

I femte kapitel som er det siste, og det der særlig vil interessere fagmatematikere, omtales den moderne grunnlagforskning. Selvsagt tar forfatteren her for seg de 3 hovedretninger: logisismen, intuisjonismen og den Hilbertske bevisteori. Hva logisismen angår, omtales Freges og Russells arbeider, for den sistes vedkommende særlig typeteorien som middel til fjernelse av antinomiene. For intuisjonismens vedkommende gjøres omhyggelig rede for Kroneckers synsmåter foruten Borels innvendinger mot diskontinuerlige funksjoner av alminneligste art; men fremfor alt omtales naturligvis Brouwers oppfatninger. Den Brouwerske intuisjonismes tolkning som regning med oppgaver ifølge Kolmogoroff blir forklart. Weyls artikkel »Grundlagenkrise der Mathematik« blir utførlig gjengitt. Det viktigste som meddeles angående Hilberts bevisteori er en forklaring hentet fra Gentzens bevis for aritmetikkens motsigelsesfrihet av, hvordan han må benytte transfinit induksjon opptil det minste ε -tall i 2nen tallklasse. Tilslutt omtales her Lorenzens konstruktive begrunnelse av matematikken. Egentlig kan vel denne siste ikke tas til inntekt for den spesifikt Hilbertske retning.

Bokens innhold er som man ser meget rikholdig. Imidlertid kan den vel neppe sies å være helt à jour hva den moderne forskning angår. Man savner f. eks. omtale av læren om de rekursive funksjoner som er blitt av stor betydning for grunnlagforskningen. Videre forekommer det referenten, at erkjennelsen av at ethvert formal-logisk system som den aksiomatiske mengdelære eller typeteorien, eller hva det nå er, ikke krever absolutt ikke tellbart uendelige totaliteter, burde vært ettertrykkelig nevnt, da dette betyr en fundamental avvikelse fra den Cantorske eller klassiske oppfatning av det uendelige. Riktignok finnes en bemerkning om dette i boken; men den er bortgjemt i en parentes i »Schlusswort« side 402.

Boken bør ikke savnes i høyere skolars eller matematiske institutters biblioteker. Den er lærerik og vil være til både nytte og glede.

Th. Skolem

WALTER RUDIN: *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1953. 10 + 227 pp. sh. 37/6.

(Innholdsfortegnelse i NMT 1 (1953), s. 128.)

De vanlige lærebøker i matematisk analyse er mer eller mindre preget av at deres formål er dobbelt: på den ene siden å gjøre leseren fortrolig med den systematiske oppbygning av denne grenen av matematikken; på den andre siden å gi leseren, helst så raskt som mulig, det fortreffelige verktøy i hende som analysen er for utallige anvendelser. Dette gjelder dog ikke de meget bredt anlagte framstillinger som f. eks. Jordan's *Cours d'Analyse* o. l. bøker, der forfatteren uten sidehensyn tar for seg hele systematikken i stoffets oppbygning.

Den foreliggende bok av Rudin vil være et ypperlig hjelpemiddel for den som allerede har lagt bak seg en mindre, eller middels stor, lærebok i analysen, og som ønsker nettopp en mere systematisk preget innføring i emnet. Som begynnerbok vil den neppe egne seg, til tross for at den ikke bygger på noen spesielle forutsetninger utover, la oss si våre artiumsfordringer. Begynneren vil vanligvis gjerne komme raskt fram til det »nyttige« stoffet og vil neppe forstå behovet for en så »teoretisk« preget framstilling. Desto større glede vil en ha av boken dersom en på forhånd kjenner stoffet i hovedtrekkene, slik at en virkelig kan vurdere utvidelsene og den generelle problemstilling som fører fram til dem.

Framstillingen er etter min mening mesterlig; intet er overflødig, men alle trekk i tankebygningen er samvittighetsfullt tatt med. Eksempler og oppgaver, valt med sikker sans for å få poengene fram, vil være til største nytte for leseren.

Foruten det stoff som forekommer i enhver lærebok i analyse er Stieltjes- og Lebesgue-integraler tatt med.

Som tittelen antyder er det ikke en vanlig lærebok det er tale om. Forfatteren gir bare de prinsippene teorien hviler på; så snart disse er klarlagt, og de generelle setninger utledet, forlater han emnet og tar fatt på et nytt.

En ubehagelig feil har innsneket seg i behandlingen av Riemann-Stieltjes-integralet, idet forfatterens formulering av fundamentalteoremet »6.11« s. 92 ikke er almenngyldig ut fra de valte definisjoner. Forhåpentlig vil der snart komme en ny utgave av denne ellers så fortrinlige bok der dette er rettet.

R. Tambs Lyche

MOTTATTE BØKER

Heinz Bachmann: *Transfinite Zahlen*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 1.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 7 + 204 S. DM 29.80.

Einleitung: Allgemeine mengentheoretische Vorbemerkungen 1–15 * Ordnungszahlen und transfinite Funktionen 16–45 * Arithmetik der Ordnungszahlen 45–105 * Arithmetik der Mächtigkeiten und Kardinalzahlen ohne Auswahlaxiom 105–132 * Die Konsequenzen des Auswahlaxioms und der Alephhypothese in der Kardinalzahlenarithmetik 132–164 * Probleme des Kontinuums und der zweiten Zahlklasse 164–176 * Unerreichbare Zahlen 176–189 * Literaturverzeichnis 190–200 * Sachverzeichnis 201–204.

Oskar Becker: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. (Sammlung Orbis.) Verlag Karl Alber Freiburg, München, 1954. 11 + 422 S., 62 Fig. DM 26.00.

(Anmeldet i NMT, dette hefte, s. 111.)

Blick auf die Grundlagen der vorgriechischen Mathematik: Rechentechnik. Algebra. Ägyptische und babylonische Geometrie 3–21 * Die Begründung der wissenschaftlichen Mathematik durch die Griechen: Die frühgriechische Mathematik. Die Grundlegung der Mathematik des Infinitesimalen. Die Theorie der Proportionen. Die systematische Grundlegung der griechischen Mathematik innerhalb ihrer selbst. Die philosophische Reflexion auf die »elementare« Grundlegung und das Wesen der Mathematik 22–129 * Die Grundlegung der neueren abendländischen Mathematik im 17. Jahrhundert: Vorstadien der Infinitesimalrechnung. Die Entdeckung der analytischen Geometrie durch Descartes. Die Erfindung des Infinitesimalkalküls 130–167 * Die kritische Mathematik des 19. Jahrhunderts: Grundlagen der Geometrie. Die Grundlagen der Arithmetik, Analysis und Mengenlehre 168–316 * Die Grundlagenforschung des 20. Jahrhunderts: Logizismus. Intuitionismus. Beweistheorie (Formalismus) 317–401 * Schlusswort 402 * Quellenverzeichnis 403–407 * Textkritische Anmerkungen 408–409 * Bibliographie 410–414 * Namenverzeichnis 415–419 * Sachverzeichnis 420–422.

Ludwig Bieberbach: *Analytische Fortsetzung*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 3.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 4 + 168 S. DM 24.80.

Grundlegende Sätze 1–43 * FABRYsche Sätze 43–68 * Weiteres über Lücken und Koeffizientendichten 68–91 * Die Häufigkeit der fortsetzbaren und der nicht fort-

setzbaren Reihen 91–104 * Zusätze zum HADAMARDSchen Multiplikationssatz 105–114 * Arithmetische Eigenschaften der Koeffizienten 114–138 * Die Koeffizienten als Funktionen der Nummer 138–155 * Literaturverzeichnis 155–166 * Namenverzeichnis 166–167 * Sachverzeichnis 168.

H. Boerner: *Darstellung von Gruppen*. Mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 74.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 11 + 287 S., 15 Fig. DM 33.00, ganzl. DM 36.60.

Matrizen 1–24 * Gruppen 24–42 * Allgemeine Darstellungstheorie 43–92 * Die Darstellungen der symmetrischen Gruppen 92–111 * Die Darstellungen der vollen linearen, unimodularen und unitären Gruppen 112–163 * Charaktere der linearen und der Permutationsgruppen. Die alternierende Gruppe 164–190 * Charaktere und eindeutige Darstellungen der Drehgruppe 190–236 * Spindarstellungen, Infinitesimalring, gewöhnliche Drehgruppe 236–263 * Die LORENZ-Gruppe 264–277 * Literaturverzeichnis 278–282 * Namen- und Sachverzeichnis 283–287.

R. Courant: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*. Band I: Funktionen einer Veränderlichen. Dritte, verbesserte Aufl. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 11 + 450 S., 126 Fig. Ganzl. DM 33.00.

Vorbereitungen 3–70 * Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung 70–121 * Differential- und Integralrechnung der elementaren Funktionen 122–179 * Weiterer Ausbau der Integralrechnung 180–223 * Anwendungen 223–268 * Die TAYLORSche Formel und die Annäherung von Funktionen durch ganz rationale 268–302 * Exkurs über numerische Methoden 302–320 * Unendliche Reihen und andere Grenzprozesse 320–373 * FOURIERSche Reihen 373–425 * Die Differentialgleichungen der einfachsten Schwingungsvorgänge 426–442 * Sachverzeichnis 443–450.

H. S. M. Coxeter: *The real projective plane*. Second edition. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1955. 12 + 226 pp. sh. 27/6.

A comparison of various kinds of geometry 1–10 * Incidence 11–24 * Order and continuity 25–40 * One-dimensional projectivities 41–58 * Two-dimensional projectivities 59–78 * Conics 79–100 * Projectivities on a conic 101–114 * Affine geometry 115–137 * Euclidean geometry 138–160 * Continuity 161–170 * The introduction of coordinates 171–185 * The use of coordinates 186–216 * Appendix: The complex projective plane 217–218 * Bibliography 219–220 * Index 221–226.

Jean Dieudonné: *La géométrie des groupes classiques*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 5.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 7 + 115 S. DM 19.60.

Collinéations et corrélations 1–35 * Structure des groupes classiques 36–72 * Caractérisations géométriques des groupes classiques 72–85 * Automorphismes et

isomorphismes des groupes classiques 85–108 * Table des notations 108–110 * Index des définitions et des principaux théorèmes 110–111 * Bibliographie 111–115.

H. Hadwiger: *Altes und Neues über konvexe Körper*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkte aus.) Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1955. 116 S. Brosch. SFr. 13.50.

Konvexe Körper 7–22 * Approximations- und Symmetrisierungssätze 23–29 * Die vier fundamentalen Masszahlen 30–49 * Ungleichungen 50–82 * Formeln und Lehrsätze der Integralgeometrie 83–102 * Literaturverzeichnis 103–115 * Sachverzeichnis 116.

Lothar Heffter: *Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 8 + 63 S., 13 Fig. DM 12.60.

Vorkenntnisse 1–29 * Verschiedene Wege zur Begründung der Funktionentheorie: Definition der »analytischen Funktion«. Cauchy (1814) und Goursat (1900). Looman-Menchoff (1933). Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit. Benutzung von Polarkoordinaten. Vergleich der Voraussetzungen 30–55 * Originalliteratur mit Inhaltsangaben 55–61 * Verzeichnis der Begriffe 62–63.

Paul Lorenz: *Anschaungsunterricht in mathematischer Statistik*. S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1955. 7 + 134 S., 29 Fig. Ganzl. DM 15.30.

Bildliche Darstellung statistischer Reihen: Kartesische und logarithmische Darstellungen, Abklüngungen, Summenzeichen, kleinste Quadratsumme 1–40 * Begriffsbildungen für die zusammenfassende Beschreibung statistischer Reihen: Häufigster Wert, Merkmalwert, Zentralwert, Median, arithmetisches und logarithmisches Mittel, endliche Differenzen, Streuungsmass, Normierung, Potenzmoment, Kollektivmass, Zweidimensionale Verteilungen, Korrelation, Regression 41–129 * Literatur 130 * Namenliste 131 * Sachregister 132–134.

Ross R. Middlemiss: *Analytic Geometry*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 9 + 310 pp. sh. 28/–.

Introduction 1–15 * Plane analytic geometry: Rectangular coordinates, fundamental definitions and theorems 19–45 * Functions and graphs. Equation of a locus 46–63 * The line 64–82 * Polynomials 83–89 * Rational fractional functions 90–98 * Transformation of coordinates 99–104 * The circle 105–111 * The parabola, ellipse, and hyperbola 112–138 * Algebraic curves of higher degree 139–149 * The trigonometric curves 150–167 * The exponential and logarithmic curves 168–181 * Parametric equations 182–193 * Polar coordinates 194–215 * Curve fitting 216–234 * Solid analytic geometry: Preliminary definitions and formulas 237–252 * Planes and lines 253–271 * Surfaces and curves 272–284 * Numerical tables 285–296 * Answers 297–306 * Index 307–310.

Carlo Miranda: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 2.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 8 + 222 S. DM 28.80.

Problemi al contorno per le equazioni lineari 1–18 * Funzioni rappresentate da integrali 18–39 * Traduzione in equazioni integrali dei problemi al contorno 39–79 * Soluzioni generalizzate dei problemi al contorno 79–111 * Maggiorazione a priori delle soluzioni del problema di Dirichlet 111–137 * Equazioni non lineari 137–169 * Altre ricerche sulle equazioni ellittiche. Equazioni di ordine superiore. Sistemi di equazioni 169–191 * Bibliografia 192–219 * Indice per autori 220–222.

T. Rado – P. V. Reichelderfer: *Continuous transformations in analysis*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 75.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 7 + 442 S., 53 Fig. Ganzl. DM 59.60.

Background in topology 1–110 * Topological study of continuous transformations in R^n 110–190 * Background in analysis 190–212 * Bounded variation and absolute continuity in R^n 212–292 * Differentiable transformations in R^n 292–377 * Continuous transformations in R^2 377–438 * Index 439–441 * Bibliography 442.

P. Samuel: *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 4.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 9 + 133 S. DM 23.60.

I. Théorie globale élémentaire: Idéaux et ensembles algébriques affines. Ensembles algébriques dans l'espace projectif. Projections. Produits. Intersections d'ensembles algébriques. Normalisation. Extension du corps de base. Variétés. Propriétés vraies presque partout. Cycles. Coordonnées de CHOW. Correspondances 1–58 * II. Géométrie algébrique locale. Multiplicités d'intersection: L'anneau local d'un point, ou d'une sous-variété. Points normaux. Cône des tangentes. Espace tangent de ZARISKI. Points simples. Théorie locale des multiplicités d'intersection. Intersections de cycles locaux et de cycles 59–111 * Rappel algébrique 111–124 * Annexe historique 124–128 * Annexe terminologique 128–129 * Index alphabétique 130–133.

A. Spitzbart – R. H. Bardell: *College algebra and plane trigonometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Cambridge (Mass.), 1955. 14 + 408 pp. \$ 4.50.

Number systems and fundamental operations 1–14 * Special products and factoring 15–21 * Fractions 22–29 * Exponents and radicals 30–40 * Exercises 41–43 * Functions and graphical representation. The trigonometric functions 44–76 * Linear and quadratic functions 77–103 * Circle relations. Right triangles 104–127 * Graphs of the trigonometric functions 128–149 * Polynomials of higher degree 150–166 * Inverse trigonometric, exponential, and logarithmic functions 167–197 * Properties of the trigonometric functions 198–234 * Mathematical induction and the binomial formula 235–250 * Systems of equations 251–270 * Complex numbers 271–286 * The solution of oblique triangles 287–311 * Determinants 312–326 * Progressions 327–340 * Permutations, combinations, and probability 341–357 * Answers to exercises 358–384 * Tables 386–399 * Index 401–408.

Karl Strubecker: *Differentialgeometrie*, I. (Sammlung Götschen 1113/1113a.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1955. 150 S., 18 Fig. DM 4.80.

Literaturverzeichnis 4 * Theorie der ebenen Kurven 5–58 * Theorie der Raumkurven 59–145 * Namen- und Sachverzeichnis 146–150.

F. G. Tricomi: *Vorlesungen über Orthogonalreihen*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 76.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 8 + 264 S., 13 Fig. DM 34.00, ganzl. DM 37.60.

Einleitung 1–5 * Orthogonale Funktionensysteme 6–44 * Allgemeine Theorie der trigonometrischen Reihen 44–76 * Konvergenzeigenschaften der trigonometrischen Reihen 77–121 * Allgemeine Eigenschaften von orthogonalen Polynomen 122–142 * Orthogonale Polynome mit endlichem Grundintervall 143–212 * Orthogonale Polynome mit unendlichem Grundintervall 212–254 * Tabelle der Konstanten der orthogonalen Polynome 255 * Literaturverzeichnis 256–257 * Namenverzeichnis 258–259 * Sachverzeichnis 260–264.

E. P. Vance: *Unified algebra and trigonometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Cambridge (Mass.), 1955. 9 + 354 pp. \$ 4.50.

Numbers and elementary operations 1–23 * Fractions, exponents, and radicals 24–40 * Coordinate systems, functions, and graphical representation 41–66 * The circular functions 67–84 * Circular functions involving more than one angle 85–99 * Linear and quadratic functions 100–140 * Determinants 141–159 * Functions and equations of higher degree 160–173 * Inverse functions 174–184 * Circular function graphs with applications 185–199 * Mathematical induction and the binomial theorem 200–210 * Exponential and logarithmic functions 211–230 * Solution of triangles 231–248 * Identities and related subjects 249–267 * Complex numbers 268–281 * Progressions 282–294 * Permutations, combinations, and probability 295–311 * Answers to problems 312–334 * Tables 335–348 * Index 349–354.

C. R. Wylie, Jr.: *Plane trigonometry*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1955. 8 + 381 pp. sh. 30/–.

The six trigonometric functions 1–32 * Elementary identities and reduction formulas 33–54 * The solution of right triangles 55–88 * The graphs of the trigonometric functions 89–113 * Functions of composite angles 114–134 * The inverse trigonometric functions 135–153 * Trigonometric equations 154–168 * Logarithms 169–194 * The solution of oblique triangles 195–217 * Complex numbers and de Moivre's theorem 218–236 * Trigonometric series 237–264 * Hyperbolic functions 265–272 * Appendix (including tables) 273–362 * Answers to exercises 363–374 * Index 375–381.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 59–62 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Holmen, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. nov. 1955. Med samme frist kan også sendes løsninger av oppgavene 50, 53 og 54 (i forrige hefte), som det ikke er kommet noen løsning av. Redaksjonen har heller ikke mottatt noen løsning av oppgavene 25 og 43 fra forrige årgang.

De øvrige oppgaver i dette hefte er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

59. For en plan kurve vil avstanden fra et fast punkt O til et variabelt kurvepunkt P , altså radius vektor $r = OP$, være en funksjon af buelængden s . Sættes $r^2 = F(s)$, skal man vise, at kurvens krumningsradius ρ i punktet P kan bestemmes af formlen

$$\rho^2 = \frac{F(s) - \left(\frac{1}{2}F'(s)\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2}F''(s)\right)^2}.$$

Fr. Fabricius-Bjerre

60. Visa, att om A är reellt och $0 < A < 1$, har ekvationen

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = A$$

alla sina rötter i cirkelringen $\frac{1-A}{1+A} < |z| < 1$, $n = 2, 3, 4, \dots$.

Sture Danielson

61. Om $[a]$ betecknar det största heltal x , som uppfyller $x \leq a$, visa att

$$[(5 + \sqrt{19})^n] = \text{ett udda tal, } n = 0, 1, 2, \dots$$

Beräkna även

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (5 + \sqrt{19})^n - [(5 + \sqrt{19})^n] \right\}.$$

Hans Riesel

62. Evaluate

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2}.$$

Martin G. Beumer

63. Bevis for $k > r$ følgende identitet mellom binomialkoeffisienter:

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} \binom{k}{\nu} = \sum_{\nu=0}^{r-1} \binom{k-\nu-1}{r-\nu-1} 2^{\nu}.$$

Jakob Nielsen

64. På en sirkelbue AB ligger n punkter $A_1, A_2, \dots, A_n$. Hvor mange konvekse brukne linjer kan en trekke fra A til B med knekkpunkter i ett eller flere av punktene $A_1, \dots, A_n$?

65. Gitt en rotasjonskjegle og et punkt P innenfor den. Søk de plane snitt som har P til brennpunkt.

LØSNINGER

Oppgave 51.

K er givet i polære koordinater (ϱ, θ) med pol O ved $\varrho = f(\theta)$, hvor $f(\theta)$ er positiv, differentiabel og periodisk med perioden 2π ($-\infty < \theta < +\infty$). Endvidere er

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$$

periodisk med perioden π . Heraf fås ved integration $\log f(\theta + \pi) = \log f(\theta) + k$. Da man kan ombytte $f(\theta)$ og $f(\theta + \pi)$, er $k = 0$, $f(\theta + \pi) = f(\theta)$, q. e. d.

Anders Bager¹

Også løst av H. Killingbergtrø, Johannes Kvamsdal, Leif Thorsen og Helge Tverberg.

Oppgave 52.

For reelle verdier av cz er $0 \leq |\cos ncz| \leq 1$, og rekken divergerer.

Når $|I(cz)| = v > 0$ er

$$|\cos ncz| \geq \frac{1}{2}(e^{nv} - e^{-nv}) > \frac{1}{2}e^{nv}(1 - e^{-v}),$$

hvorav

$$|\cos ncz|^{-1} < \frac{2}{1 - e^{-v}} e^{-nv},$$

og rekken konvergerer.

¹ Oppgaveløseren bemerker at forutsetningen om at tangentretningen varierer kontinuerlig, er overflødig.

Rekken konvergerer altså overalt i det komplekse plan utenfor den rette linje $I(cz)=0$.

Johannes Kvamsdal

Også løst av Henrik Meyer.

Oppgave 55.

Ved hjelp av rekkeutviklingen

$$\pi \cotg \pi x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

kan $\varphi(x)$ skrives

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{x}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 - 4x^2} - \frac{1}{n^2 - x^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{12} [2 \cotg \pi x - \cotg 2\pi x] - \frac{1}{8x}. \end{aligned}$$

Herav

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x+n) = \frac{\pi}{12} [2 \cotg \pi x - \cotg 2\pi x],$$

og følgelig er $\psi(x)$ en ulike, periodisk funksjon, og

$$\psi(x) + \psi(1-x) = 0. \quad \text{Johannes Kvamsdal}$$

Også løst av Henrik Meyer og Leif Thorsen.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen våren 1955 på de matematiske gymnasielinjer i de nordiske land.

DANMARK

Matematik I.

1. Angiv de værdier af x , for hvilke

$$x+8 \leq \frac{3x-2}{x-4} < 4.$$

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

Beregn arealet af den lukkede figur, som begrænses af kurven og den rette linie $3x - 2y = 5$.

3. I en omdrejningskegle med toppunkt O er sidelinien 16 og radius i grundfladen $4\sqrt{2}$. AB er en diameter i grundfladen, og C et punkt på sidelinien OB således beliggende, at $OC = 12$.

Gennem punktet C og tangenten til grundfladecirklen i punktet A lægges en plan α .

Bevis, at plan α står vinkelret på OB , og beregn akserne i den ellipse, som er skæringskurven mellem keglens krumme overflade og α .

Beregn endvidere afstanden fra det ene endepunkt af ellipsens lilleakse til keglens grundflade.

Matematik II.

1. Find x af ligningen

$$(1-i)x^2 - (3-i)x + 4 - 2i = 0.$$

Idet α betegner den af de fundne rødder, hvis modulus (numeriske værdi) er mindst, og β den anden rod, skal man dernæst beregne værdien af udtrykket

$$(\alpha - 1)^6 + (\beta - i)^6.$$

Såvel den givne lignings rødder som resultatet af det beregnede udtryk skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I firkant $ABCD$ er vinkel $A = 90^\circ$, siden $AD = 2,383$, siden $BC = 6,823$ og diagonalen $BD = 4,842$; endvidere halverer diagonalen AC vinkel A .

Beregn firkantens ubekendte sider og vinkler.

3. Givet cirklen $x^2 + y^2 = r^2$, hvis centrum betegnes med O .

P er et vilkårligt punkt på cirklen og Q dette punkts symmetriske punkt med hensyn til absisseaksen. S er et punkt på forlængelsen af OP ud over P , således at $OP = PS$.

Idet R betegner punktet $(-r, 0)$, skal man finde ligningen for det geometriske sted for skæringspunktet mellem de rette linier OQ og RS , når P gennemløber cirklen.

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

FINLAND

Längre kursen.

1. Ett positivt tal ökas med $p\%$ och dess nya värde igen med $p\%$. Det så erhållna talet minskas med $p\%$ och det minskade värdet med ytterligare $p\%$. Med huru många % har det givna talet förändrats (från sitt ursprungliga värde till sitt slutliga)? Kan slutvärdet överstiga det givna?

2. Från punkten O utgå 8 halvstrålar $l_1, l_2, \dots, l_8$, vilkas mellanliggande vinklar $= 45^\circ$. Från den punkt P_1 på l_1 , vars avstånd från O är a , drages en rät linje som skär l_2 i P_2 så, att vinkeln $OP_1P_2 = v$. Genom P_2 drages därpå en linje som skär l_3 i P_3 så, att även vinkeln $OP_2P_3 = v$ och detta förfarande upprepas obegränsat. Huru bör vinkeln v väljas för att längden av den brutna linjen $P_1P_2P_3 \dots$ (d. ä. summan av sträckorna $P_1P_2, P_2P_3, \dots$) må vara ändlig och vilken är i så fall dess längd? Angiv resultatet för $v = 45^\circ$ och bestäm för detta fall förhållandet mellan den brutna linjens längd och perimetern av triangeln OP_1P_2 .

3. Bestäm det polynom av 2. graden, som för $x=2$ får sitt extrema värde $=2,5$ och för $x=1$ och $x=5$ antar motsatta värden.

4. Bestäm *alla* genom punkten $(2, 0)$ gående räta linjer, av vilka linjerna $y=x$ och $y=-x$ avskära en sträcka, vars projektion på x -axeln $=2$. Pröva resultatet genom mätning.

5. Härled formeln för den stympade cirkelkonens volym.

6. Dela sträckan a i två delar x och y samt delen y ytterligare i två delar z och u så, att $x:y=z:u$. Beräkna förhållandet $x:u$.

7. Två cirklar ha en gemensam korda AB , som av den ena cirkeln avskär en 60° , av den andra en 90° båge; deras medelpunkter falla på samma sida om AB . I vilket förhållande delas den större cirkels area av den mindres periferi? (Exakt värde och närmevärde med 2 decimaler.)

8. En given reguljär tetraeder $ABCD$ skäres av ett med basen ABC parallellt plan. Den i skärningstriangeln inskrivna cirkeln och dennas projektion på planet ABC utgöra baser i en cylinder. Bestäm det skärande planet så, att volymen av denna cylinder blir så stor som möjligt.

9. Lös fullständigt ekvationen $\sin x = \cot x$.

10. Åt variabeln x i funktionen $\log x$ gives, utgående från ett värde x_0 , det positiva tillskottet k . Visa, att det tillskott funktionen därvid erhåller, är desto mindre ju större x_0 är, då k förblir oförändrat. Bestäm x_0 så, att även funktionens tillskott blir $=k$. Angiv resultatet för a) $k=1$, b) $k=2$. (Logaritmerna äro Briggs'ska.)

ÍSLAND

I.

1. Givet $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$.

1. Beregn modulus og argument for tallet z .

2. Beregn z^6 .

3. Anvend resultaterne til at udtrykke $\cos 75^\circ$ og $\sin 75^\circ$.

2. Bestem maximum og minimum for funktionen $y = x^2 e^{-x}$, og skitser kurven i hovedtræk.

Beregn arealet af det område, som begrænses af kurven, X -aksen og linierne $x=0$ og $x=2$.

3. Sidefladerne i tetraedret $ABCD$ er indbyrdes kongruente trekanten. I trekanten ABC er siden $a=57$ mm, siden $c=65$ mm og højden $h_a=60$ mm.

1. Tegn trekanten ABC i naturlig størrelse, og beregn dens sider og vinkler.

2. Tegn tetraedret $ABCD$ ($AD=57$, $DC=65$), og beregn vinklerne i et af dets hjørner.

3. En med kanterne AC og BD parallel plan skærer de andre kanter i P , Q , R og S , således at f. eks. $AS = n \cdot AB$ (S ligger på AB og $0 < n < 1$). Bevis, at denne plan deler tetraedrets samlede overflade i det samme forhold, hvori den deler de kanter, som den skærer.

II.

1. Parablen $y^2 = px$ har toppunkt i O . På parablen ligger punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ på hver sin side af parablens akse. En ret linie gennem A parallel med X -aksen skærer forlængelsen af korden BO i punktet C , medens korden AB skærer aksens i D . Bevis, at parabeltangenten i A går igennem midtpunktet af liniestykket DC .

2. Beregn

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(1 + \ln x) - x^3}{1 - \cos(2 - 2x)} \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\operatorname{tg} \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}}{9^x - 2\sqrt{2\frac{1}{2} - x^2}}.$$

3. En gæld på 100.000 kr. skal amortiseres på 30 år med lige store ydelser, første gang 1 år efter gældens stiftelse. Renten er 6% p. a.

1. Hvor stor er den årlige ydelse?
2. Hvor stor bliver restgælden, når det tyvende afdrag lige er blevet betalt?
3. Hvor mange hele år senere end forudsat måtte afbetalingerne begynde, når den årlige ydelse ikke må overskride 12% af den oprindelige gæld?

NORGE

Reallinjen.

1. I $\triangle ABC$ er $\angle C = 90^\circ$, og M er midtpunktet på kateten AC . Kall kateten AC for b , $\angle A$ for x og $\angle ABM$ for v .

1) Konstruer $\triangle ABC$ når b og v er gitt. Utfør konstruksjonen med $b = 7$ cm og $v = 15^\circ$. Finn (av figuren) den betingelsen som v må oppfylle for at konstruksjonen skal være mulig.

2) Finn $\operatorname{tg} x$ uttrykt ved $\operatorname{tg} v$. Drøft den funne formelen og sammenhold resultatet av denne drøftingen med resultatet av drøftingen av konstruksjonen.

2. I en regulær, firkantet pyramide er siden i grunnflaten a og høyden x . Vis at radien (r) i pyramidens omskrevne kule da er gitt som funksjon av x ved

$$r = \frac{2x^2 + a^2}{4x}.$$

Finn den minste verdien r kan ha og den tilsvarende verdi av x . Hvor stor blir i dette tilfellet sidekanten, og hvor stor blir sideflatens bøyningvinkel med grunnflaten?

I det tilfellet da radien er minst mulig, er det lagt et plan gjennom en side i grunnflaten. Finn bøyningvinkelen mellom dette planet og grunnflaten, når planet deler kuleflaten i to deler, slik at disse har forholdet 2:1.

3. Finn koordinatene for polen P til den rette linjen $y=kx$ med hensyn til ellipsen $4(x-3)^2+9y^2=36$.

Finn så likningen for det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom den rette linjen $y=kx$ og en parallell med x -aksen gjennom P , når k varierer.

Det geometriske stedet blir en parabel med likningen $y^2=\frac{4}{3}x$. Regn ut koordinatene til skjæringspunktene mellom denne parabelen og den gitte ellipsen, og tegn begge kurvene på millimeterpapiret med 2 cm som enhet på aksene.

Beregn flateinnholdet av det lukkede areal som ligger over x -aksen og er begrenset bare av de to kurvene.

SVERIGE

Realgymnasiet, allmän kurs.

1. I en konvergent uendelig geometrisk serie är fjärde termen $3\frac{3}{4}$. Seriens summa är 5 enheter mindre än summan av de båda första termerna. Vilken är serien?

2. I en rät cirkulär kon, vars sida är lika stor som basytans diameter, är en sfär inskriven. Bestäm förhållandet mellan volymerna av de båda delar av konen, som ligger utanför sfären.

3. Lös ekvationen $\cos 3x - \cos x = 0$. Ordna de erhållna vinklarna i grupper, så att i varje grupp perioden blir 360° . Beräkna därefter värdet av funktionen $\sin x - 3\sin 3x$ för de olika gruppernas vinklar.

4. I rektangeln $OABC$ ligger punkten P på sidan OA och punkten Q på sidan OC . Sammanbindningslinjerna CP och AQ skär varandra i punkten R . Punkten S är det fjärde hörnet i en rektangel, vars övriga hörn är O , P och Q . Bevisa med hjälp av analytisk geometri, att punkterna B , S och R ligger på en rät linje.

5. $f(x)$ är en funktion med derivatan $f'(x) = x + 3$. De geometriska motsvarigheterna till funktionerna $y=f(x)$ och $y=f'(x)$ i samma rätvinkliga koordinatsystem skär varandra under rät vinkel i en av skärningspunkterna. Bestäm $f(x)$.

6. Fyra klot är så belägna, att vart och ett tangerar de övriga utantill. Tre av kloten är lika stora, medan det fjärde klotets radie förhåller sig till de andras som 7:6. Beräkna förhållandet mellan radierna i de båda klot, som tangerar alla fyra kloten.

7. Upprita kurvan $3y = x^2(6-x^2)$ i dess huvuddrag. Undersök därefter, hur antalet tangenter till kurvan från en punkt P på y -axeln varierar, när P genomlöper nämnda axel.

8. Undersök kurvan $10y = x^4 - 8x^3 + 2ax^2$ med avseende på maximi- och minimipunkter för olika värden på konstanten a , och åskådliggör i skilda koordinatsystem exempel på de olika huvudtyper av kurvor, som kan förekomma.

Specialkurs.

1. Visa, att funktionen $y = \sqrt{x^2 + C}$ satisfierar ekvationen $y^3 \frac{d^2y}{dx^2} = y^2 - x^2$ för alla värden på konstanten C .

2. P är en rörlig punkt på parabeln $y^2 = 2px$, F är parabelns fokus. Sök och konstruera orten för mittpunkten M på sträckan FP , när P beskriver parabeln. Visa också, att tangenterna i P och M till respektive kurvor är parallella.

3. Två kongruenta hyperbler i samma plan har gemensam medelpunkt, och vinkeln mellan deras transversalaxlar är rät. Kurvorna skär varandra under 45° vinkel. Bestäm deras excentricitet.

4. För funktionen $y = f(x)$ gäller, att $\frac{d^3y}{dx^3} = 6x$. Bestäm funktionen så, att motsvarande kurva får en inflexionspunkt i punkten $(-1; 0)$ och tangenten i denna punkt blir parallell med linjen $y = 4x$. Undersök därefter kurvan med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter, samt upprita densamma.

(Med $\frac{d^3y}{dx^3}$ menas derivatan av $\frac{d^2y}{dx^2}$ med avseende på x .)

5. I en likbent triangel är basen och höjden mot basen lika stora. I triangeln inskrives en ellips på så sätt, att dess ena axel faller utefter den nämnda höjden. Bestäm excentriciteten så, att ellipsens yta blir så stor som möjligt.

6. Bestäm avståndet r från origo O i ett rätvinkligt koordinatsystem till en punkt P på kurvan $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ som funktion av den vinkel v — räknad i positiv led — som bildas mellan positiva x -axeln och sträckan OP . Undersök, hur detta avstånd varierar, då vinkeln v ändras, och ange speciellt avståndets största och minsta värde. Upprita även kurvan med användning av de erhållna resultaten eller på annat sätt.

7. Undersök kurvan $y = ax - \sin x$ med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter för olika positiva värden på konstanten a , och åskådliggör i skilda koordinatsystem exempel på de olika huvudtyper av kurvor, som kan förekomma.

KRONIKK

UTNEVNELSER

Till professor i matematik vid Uppsala Universitet: Fil. dr. L. Carleson.

Till docenter i matematik vid Lunds Universitet: Fil. dr. Carl Hyltén-Cavallius och fil. dr. Lennart Sandgren.

RESULTAT AV DEN FÖRSTE INTERNORDISKE PRISOPPGAVE

(Oppgavene sto i NMT 2 (1954), s. 128–130.)

Det kom inn ialt 15 besvarelser: 6 danske, 1 islandsk, 5 norske og 3 svenske. Et utvalg av de beste løsninger vil bli publisert i neste hefte av NMT.

Etter at konkurransen ble kunngjort, har dampskipselskapet Eimskipafélag Íslands oppstillet som første premie en fri reise tur-retur mellom København og Reykjavík. Vinneren vil få fritt opphold i noen uker i Reykjavík, som den islandske matematiske forenings gjest.

Blant de innkomne besvarelser var det fire som var særlig gode. Bedømmelseskomiteen har innstilt som vinner *Peter Winge*, III G mn, Sortedam Gymnasium, København. Det disponible premiebeløp, n. kr. 225, ble delt likt mellom *Helgi Jónsson*, 6. kl. (mat. linje), Menntaskolánum á Akureyri, Ísland, *Per Wennerberg Karlsson*, III G mn, Vestre Borgerdydskole, København, og *Asmus L. Schmidt*, III G mn, Ribe Katedralskole, Danmark.

NMT takker alle deltakerne for den utviste interesse. En ny internordisk konkurranse vil antagelig bli utskrevet i 1956.

PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

I prisopgavekonkurrencen for 1955, arrangeret af den danske matematiklærerforening, indkom 21 besvarelser. 1. præmie (100 kr.) tildeltes *Erik Jansen*, III G mn, Christianshavns Gymnasium, København. 2. præmie (50 kr.) tildeltes *Peter Kirkegaard*, II G mn, Metropolitanskolen, København. Opgavernes tekst findes i NMT 2 (1954), s. 187–189.

SUMMARY IN ENGLISH

OLAF SCHMIDT: *On the theorems of Ptolemy and Menelaus.*

(Written in Danish.)

The article deals with the plane and spherical trigonometry in Ptolemy's *Almagest*, which is the oldest extant text that contains trigonometric calculations. In this text the theorem of Ptolemy was used in constructing a table of chords for arcs increasing from $\frac{1}{2}^\circ$ to 180° by steps of $\frac{1}{2}^\circ$ (in other words a table of sines for angles from $\frac{1}{4}^\circ$ to 90° by steps of $\frac{1}{4}^\circ$). All problems within plane trigonometry could then be solved by means of such a table, the pythagorean theorem, and a few other theorems from elementary geometry. Astronomical problems which we now would solve by using formulas from spherical trigonometry were solved by Ptolemy by means of the theorem of Menelaus applied to the sphere (and a table of chords). That all such problems actually can be solved in this way is mentioned without proof by Ptolemy; in the article this fact is proved by showing that any spherical triangle in which three parts are given can be solved by Menelaus' theorem.

NILS PIPPING: *Semi-regular continued fractions.*

(Written in Swedish.)

In a regular continued fraction (c.f.) of a number ω , one or more denominators 1 can be removed by the formula

$$a + \frac{1}{1 + 1/b} = a + 1 - \frac{1}{b + 1}.$$

The resulting c.f., with numerators $+1$ or -1 , is said to be *semi-regular*. By an appropriate removal of "singular" denominators 1, we get a *diagonal* c.f., where

the convergents A_ν/B_ν represent *all* the rational numbers satisfying the inequality

$$(1) \quad \left| \frac{A_\nu}{B_\nu} - \omega \right| < \frac{1}{2B_\nu^2}.$$

The determination of the "singular 1's" is sometimes difficult, and the author therefore studies a more systematic removal of denominators. By selecting every other 1 in each consecutive row of 1's, he gets two types of semi-regular c.f., which are shown to coincide with Hurwitz' "Kettenbrüche erster und zweiter Art". The convergents will not necessarily satisfy (1), but this can be obtained by a certain systematic modification of the selection. Some of the convergents satisfying (1) are, however, lost in the process.

As an application, the author considers (p. 105) the six values $\omega = \sqrt{D}$ for $D \leq 100$ where his new semi-regular c.f. differ from the diagonal ones. The symmetric property of a regular (and diagonal) c.f. for a quadratic surd is no longer preserved.

K. ZEUTHEN HEIDAM: *An approximation formula for the determination of areas.*

(Written in English.)

Let a curve $y=f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ be determined by passing through two given points with abscissae x_{p-1} and x_p , at which points the inclinations of the tangents are known. The area between the curve and the x -axis from x_{p-1} to x_p is then given by

$$F_p = \frac{1}{2}d_p\{f(x_{p-1})+f(x_p)+\frac{1}{6}d_p[f'(x_{p-1})-f'(x_p)]\},$$

where $d_p = x_p - x_{p-1}$. If several points of the curve are known, the total area from the first to the last ordinate is a sum of such expressions. This formula can be used for approximate calculation of the area under a curve which is determined by a series of pairs of observations. For the inclination $f'(x_p)$ of the tangent through an interior point (which is usually not observed), it seems reasonable to choose the inclination of the chord through the nearest points at either side. As for the inclination of the end-point tangents, another assumption (stated in the article) is necessary. Especially for a curve through three points, Brun's approximation formula (NMT 1 (1953), pp. 10-15) is obtained.

A numerical example for the curve $y=e^x$, using five points from $x=0$ to $x=\ln 5$, reveals a much better approximation by the new formula than by the formula of Brun.