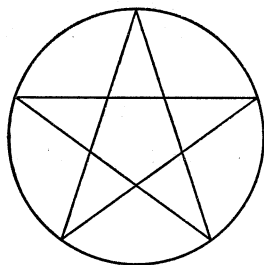


**NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT**

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 3



OSLO 1955

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Suomen matematiikan ja fysiikan opettajien liitto – Finlands matematik- och fysiklärarförbund.

Íslenska stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

REDAKSJON:

David Fog, Carl-Erik Fröberg, Regnar Norgil,

E. J. Nyström, Karl Persson, Kay Piene, Hans Rådström,

Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.

Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSE:

Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

HISTORISKA SYNPUNKTER I SAMBAND MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN

INKERI SIMOLA

Föredrag hållet vid matematik- och fysiklärarkongressen i Aarhus 6. 8. 54, något förkortat.

I Finlands rundradio upptogs en söndag i februari 1954 frågan om linjedelningen i gymnasialstadiet vid våra läroverk till diskussion. Deltagarna var representanter för Skolstyrelsen, Tekniska Högskolan samt läroverken och dessutom två studenter, av vilka den ene hade valt matematiska linjen i studentexamen. Den unge mannen, som för närvarande studerar vid Tekniska Högskolan, beklagade livligt, att även den så kallade matematiska linjen i våra skolor har alltför snävt tilltagen kurs i matematik. Detta medför, att högskolestudierna i de matematiska ämnena nödvändigtvis måste utgå från en avsevärt lägre nivå än vad fallet är i de övriga nordiska länderna. En orsak till att matematikkursen är så begränsad, sade han, utgör det stora rum, som undervisningen i historia intar i undervisningsplanen i våra skolor. Historisk undervisning ges under de egentliga historietimmarna, som är rikligt representerade i timplanen, men även i naturhistoria, musikhistoria, konsthistoria, kyrkohistoria, litteraturhistoria — ja, till och med fysikundervisningen består någon gång övervägande av fysikens historia. Ett ämne fanns det dock, fortfarande enligt studentens åsikt, som lyckligtvis är fritt från historiska ingredienser. Detta ämne är matematiken.

I stora drag förhåller det sig som den unge mannen sade, åtminstone vad matematiken beträffar. I allmänhet blir inga historiska synpunkter beaktade under matematiklektionerna vid läroverken i Finland, ehuru det i själva verket även här vore motiverat att i en viss anspråkslös utsträckning medtaga historiska fakta.

Orsakerna härtill är rätt många. Då samma skäl nästan alltid återopas, när man motsätter sig undervisning i matematikens historia, vill jag här i all korthet anföra de viktigaste av dessa argument.

För det första måste man beakta, att till kursfordringarna för våra matematiklärare vid universitetet ända till hösten 1954 inte har hört någon obligatorisk kurs i matematikens historia. För att vinna insikt i detta

ämne har läraren sålunda varit helt hänvisad till eget initiativ. Undervisningsplanerna och de metodiska anvisningarna, utfärdade av Skolstyrelsen år 1941, innehåller inte heller någon hänvisning eller uppmaning till undervisning i matematikens historia. Dessutom är matematiktim-marnas antal i skolan ganska ringa i jämförelse med den kurs, som måste genomgå. Mången lärare är helt enkelt rädd att använda lektionstiden till annat än behandlingen av det ordinarie undervisningsstoffet. Och slutligen bör vi också beakta, att lönestandarden i vårt land är sådan, att åtminstone en familjeförsörjare för att ekonomiskt reda sig är tvungen att överta ett stort antal timmar. Klasserna är stora och därför upptar hemarbete, korrigerig av prov o. dyl. nästan all överbliven tid. Det kan även framstå som viktigare att ägna tid åt nya didaktiska metoder, nya läroböcker och annat, som står i direkt kontakt med undervisningsstoffet, varigenom tiden blir totalt upptagen och inte ger läraren tillfälle att sysselsätta sig med historia.

Erfarenheten lär oss å andra sidan, att man alltid brukar finna tid för det, som man är intresserad och fånglad av. Därför synes det mig, att *bristande intresse hos lärarna bär största skulden till att matematikundervisningen i skolan ej tar någon hänsyn till historiska aspekter*; denna brist må sedan bero på vilka orsaker som helst. Om lärarens eget intresse och hans entusiasm för saken kunde väckas, då torde väl alla ovan uppräknade skäl lätt kunna elimineras. Ifall läraren själv blir övertygad om att han blir en bättre matematiklärare, om han vid sin undervisning även kan befatta sig med kulturhistoriska fakta, som berör de matematiska begreppen, vilka står under behandling, då fördjupar han sig i matematikens historia, då undervisar han i den.

Men blir han då en bättre lärare? Lönar det mödan att offra tid för undervisningen i matematikens historia? I det följande vill jag försöka framföra några tankar om detta spörsmål.

Det är känt att skolan vid sidan av sina andra syften även vill ge eleverna en bild av den mänskliga kulturen i dess utveckling från förhistoriska tider till den dag som i dag är. I första hand fullföljes denna plan under historietimmar; det, som därvid framhålls om matematikens bidrag till evolutionen, kan med goda skäl betecknas som synnerligen obetydligt. Och detta är ju helt naturligt, ty en vanlig historielärare kan ej förutsättas äga en så omfattande överblick över matematikens betydelse i kulturinsatsen, som är möjlig för en historieforskare eller en matematiker. Det är så många olika synpunkter, som historieläraren har att ägna sin uppmärksamhet åt, att matematiken får nöja sig med att bli flyktigt omnämnd i samband med behandlingen av de skilda kultur-

perioderna. Sålunda ger pyramiderna i Egypten anledning till att berätta något om bestämningen av deras måttförhållanden, babyloniernas astrologi omtalas ävensom deras talsystem med 60 som bas, men helt säkert får eleven intet begrepp om deras synnerligen högtstående matematik — den Pythagoreiska satsen hade ju redan kommit till användning hos babylonierna. Därefter uppträder matematiken i några anekdoter om Archimedes och Euklides, senare blir den omnämnd i samband med namnen Newton, Cartesius, Leibniz. Stoffet, som kommer till behandling, är givetvis i någon mån varierande allt efter lärarens individualitet, men även i bästa fall måste framställningen vara starkt summarisk.

Det åligger matematikläraren att klargöra för sina elever, i vilken hög grad matematiken har utövat inflytande på de olika kulturformerna, deras uppkomst och utveckling. Han skall öppna deras ögon för den enastående ställning matematiken intar bland skapelserna av den mänskliga anden. Redan fornhistorien ådagalägger, huru det har varit nödvändigt att använda matematik för lösning av problem i det praktiska livet — skatteindrivning, handel, delning av jordområden, konstgjord bevattningsbyggnadskonst etc., medan matematiken å sin sida gjort framsteg tack vare dessa praktiska tillämpningar. Övergången från det praktiska livets problem till den egentliga teorin inträffade sedan under den grekiska kulturperioden — den väsentliga punkten vid denna övergång var ju uppkomsten av gränsvärdebegreppet. Behandlingen av oändlighetsspörsmålet, som begynte med de gamla sofisternas problem — jag omnämner bara Achilles och sköldpaddan — ledde till Eudoxos' exhaustionsbevis, och däri ingår ju redan gränsvärdebegreppet, grundvalen för den moderna matematiken.

När det sedan påvisas för eleverna, hur detta teoretiska forskningssätt, som uppkommit så långt tillbaka i tiden, sedermera utbrett sig i ständigt vidgade kretsar att omfatta även andra vetenskaper, ja till och med konsten i dess olika uttrycksformer, då blir det möjligt för eleven att inse, att man genom att följa matematikens utvecklingsgång kan ledas till iakttagelser av allmänt mänskligt värde. Matematikens forskningsmetoder har övertagits av så gott som alla grenar av praktiskt forskningsarbete. Vare sig det är fråga om en ingenjör, arkitekt, läkare, psykolog eller naturforskare — alla är de i behov av matematik som effektivt hjälpmedel. »Naturens bok är skriven med matematiska bokstäver«, har Galilei sagt, och redan Kant kristalliserade insikten om att den exakta naturvetenskapen endast kan sträcka sig så långt som de matematiska metoderna når. Och det har visat sig att den nytta, som följer med tillämpning av matematiska metoder, ingalunda har kommit uteslutande det praktiska livet till godo. Härvid har nya teoretiska problem uppstått,

som lett till värdefulla resultat på det rent vetenskapliga området. På detta sätt har en befruktande växelverkan mellan teori och praktik uppkommit.

På samma sätt förhåller det sig med konsten. Vi vet, att redan Pythagoras införde matematiken i musiken. Och i Spenglers »Der Untergang des Abendlandes« finner vi följande yttranden (I sid. 77):

»Am Anfang jeder Kultur steht ein archaischer Stil, den man nicht nur in der frühhellenischen Kunst hätte geometrisch nennen können. Es liegt etwas Gemeinsames, ausdrücklich Mathematisches in diesem antiken Stil des 10. Jahrhunderts, im Tempelstil der 4. Dynastie Ägyptens mit seiner unbedingten Herrschaft der geraden Linie und des rechten Winkels, im altchristlichen Sarkophagreliefe und im romanischen Bau und Ornament. — Gotische Dome und dorische Tempel sind steingewordne Mathematik.«

Å andra sidan är matematiskt forskningsarbete väl jämförbart med artistens värv, när han skapar ett konstverk. Konstnärens inspiration och hans intuitiva syn är lika nödvändiga för en sann matematiker. Newton, Gauss och Riemann var personligheter med en konstnärs skapande sinne-lag. Och följande ord av Weierstrass har ofta citerats: »Om ej en matematiker i sitt innersta gömmer även något av en poet, kan han inte vara en riktig matematiker.«

Om eleverna kan bringas till insikt om matematikens direkta eller indirekta inverkan på hela vårt kulturliv, då blir de måhända även medvetna om att den torra teorin, som de tvingas att göra sig förtrogna med och som kanske rentav väckt deras avsky på grund av bristande förståelse för teorins stora mål, är värd uppriktig beundran och att dess studium är något, som man inte ångrar.

När man dessutom klargör för eleverna, att deras egen läroprocess avancerar genom samma stadier som hela vår mänsklighet har genomgått, dvs. när undervisningen inledes med enkla problem, tagna ur det praktiska livet, successivt övergående till temata med allt starkare teoretiskt och abstrakt inslag, då har de även möjlighet att vinna en djupare inblick i den matematiska forskningens utveckling. Hos somliga elever med större matematisk begåvning kan detta kanske leda till en önskan att bli bekanta med matematiken utöver läroböckernas pensum. Här har således läraren möjlighet att framkalla det aktiva intresset, den avgörande förutsättningen för all framgångsrik studieverksamhet.

Därmed har vi kommit till den andra viktiga synpunkten, som talar för undervisning i matematikens historia. *Historien är fängslande och underhållande; den väcker elevernas intresse.*

Varje lärare, som någon gång berättat för sina elever om något av de

urgamla problemen, vinkelns tredelning, cirkelns kvadratur, kubens fördubbling, eller beskrivit någon namnkunnig matematikers levnadshistoria och livsgärning, har säkert lagt märke till det odelade intresse, varmed eleverna lyssnar till ett dylikt föredrag. Åtskilliga gånger har jag anmodat mina elever att nedskriva sina tankar beträffande den anspråkslösa kurs i matematikens historia, som jag har genomgått med klassen. Eleverna ombads att i sina anonyma svar ge uttryck åt sin verkliga åsikt. Dessutom har jag vid detta tillfälle påpekat, att deras lärokurs är rätt omfångsrik med beaktande av det låga timantalet, samtidigt som jag uppfordrat dem att överväga, huruvida det är värt att offra tid åt ett tema, som ej ingår i läroböckerna. Också den frågan togs till övervägande, om det inte skulle vara värdefullare att använda även ifrågavarande tid till övningar i problemlösning. — Svaren utvisar, att nästan alla utan undantag önskar, att matematikens historia fortfarande upptas till behandling. Även i de högsta klasserna med studentexamen alldeles inom synhåll lydde en stor del av svaren: »Mera om matematikens historia; flera sådana problem, som inte omnämnes i kursen.» — Givetvis måste man förhålla sig till elevernas utlåtanden med en viss reservation. Hos somliga har avgörandet helt säkert träffats enligt principen att välja det mindre av tvenne onda; dessa elever skulle med lika stort nöje hälsa varje annat slag av avbrott i lektionens vanliga förlopp, i läxförhöret och i räkneövningarna. Men otvivelsaktigt ådagalägger en del av eleverna ett uppenbart intresse för saken. Ett sådant fall föreligger tydligt, t. ex. när eleven ber att få extra hemuppgifter. Sådana elever ägnar sig med stort intresse åt lösningen av problem, som faller utanför kursen. De sätter sig kanske in i teorin för binära talsystem eller bemödar sig att uppsöka medelpunkterna till två cirklar, som skär varandra, enbart med tillhjälp av linjal, och vanligtvis avböjes till en början lärarens hjälp med orden: »Jag vill ännu hålla på en stund själv». Uppkomsten av ett dylikt personligt intresse hos eleverna är det bästa vittnesbördet om att läraren använder rätt metod.

Till sist vill jag anföra ytterligare en motivering för undervisning i matematikens historia, ett motiv, som är av rent pedagogisk art. Huru nyttigt är det inte både ur lärarens och elevens synvinkel, när det framgår, att samma svårigheter, som möter eleven i samband med ett nytt begrepp, framstått i samma gestalt för hela mänskligheten, då detta begrepp för första gången infördes i matematiken. Ehuru undervisningstekniken funnit metoder, som medger en avsevärd förkortning av lärotiden, är det ändå nödvändigt att inhämta allt undervisningsstoff i tur och ordning med början från elementerna, på samma sätt som de forna matematikerna har fått göra. »Det finns ingen kungsväg i matematiken». För

läraren är det också gott att hålla i minnet, att matematiken endast genom talrika felsteg och misstag kunnat utveckla sig till sin nuvarande nivå. Därför är det varken nytt eller på något sätt klandervärt, när eleven begår fel, och det innebär ej heller någon fara — förutsatt att han drar lärdom av felen och kan undvika dem i framtiden.

Det är inte min avsikt att här diskutera, huru nyttigt det är för läraren själv, att han är förtrogen med den historiska bakgrunden för sitt undervisningsämne, ty detta borde vara klart för var och en. Jag vill blott påpeka, huru varje lärare gärna använder extra material, som gör den sedvanliga, lektion efter lektion fortsatta räkneexercisen lättare. Korta historiska glimtar är särdeles väl ägnade härtill. Just nu diskuteras ofta en planerad omdaning av undervisningen i skolorna. Det är rentav nödvändigt, att personer, som planerar en sådan reform, har klart för sig, vad som tidigare gjorts i detta hänseende ävensom orsakerna till att tidigare planer misslyckats. Detta förutsätter, att de bör känna sin egen vetenskaps utvecklingshistoria. I fråga om matematiken visar historien framför allt, att det varit omöjligt för människan på ett elementärt stadium att uppfatta något utöver det rent åskådliga, som är förknippat med det praktiska livet. Först vid ett senare skede kunde abstraktionsförmågan utbilda sig. Samma sakförhållande bör tagas i betraktande, då det gäller undervisningen i de lägre klasserna. Det är absolut nödvändigt, att man låter komplicerade teorier och svårfattliga framställningar anstå, till dess barnet har nått en sådan intellektuell utveckling, att det kan tillägna sig dem.

I det följande försöker jag granska olika sätt att uppta undervisning i matematikens historia i läroplanen i våra skolor jämte riktlinjer, som kunde följas vid valet av undervisningsmaterial för de olika stadierna i skolan.

Det ligger i sakens natur, att undervisningen i fråga är genomförbar i huvudsak endast i gymnasiet. Men kursen för de lägre stadierna uppvisar dock även sådana punkter, till vilka läraren kan anknyta en framställning av matematikens historia och sålunda avsevärt liva upp undervisningen genom detaljuppgifter om matematikens utveckling och underhållande anekdoter om berömda matematiker. Bland sådana punkter kan jag för det första nämna införandet av talbegreppet samt inledningen till vårt talsystems struktur. Det är ett nöje att för de små eleverna i första klassen redogöra för decimalsystemets ursprung och anordna en lek, där barnen föreställer forntida boskapsräknare, som med tillhjälp av sina egna och sina biträdens fingrar tar reda på antalet av sina djur. Kan sedan dessa elever — ungefär i tioårsåldern — med tillhjälp av tändstickor förvandla

ett i decimalsystem uttryckt tal till ett tal i systemet med 8 som bas, så har läraren uppenbarligen lyckats att klargöra för dem talsystemets strukturprincip.

Ett annat exempel utgör inledningen till undervisningen i geometri. Enligt min åsikt är det välmotiverat att före introduceringen av punkter, linjer och kroppar ge eleverna en bild av geometrins uppkomst och dess forntida användningar samt sedan klargöra, huru den efter hand har vuxit upp till en vetenskap, förutan vilken det vore oss omöjligt att planera och uppgöra ritningar till städer, broar, bostäder och alla byggnadsverk överhuvudtaget. Kanske inser eleverna härvidlag, att liksom kirurgen ej kan åta sig en operation, förrän han är bekant med människokroppens anatomi och lärt sig att handha sin operationskniv, så förutsätter byggnadskonsten — liksom många andra grenar av ingenjörs-hantverket — att man behärskar dess element, geometrin, och har förmågan att använda dess speciella operationsverktyg, algebran.

Och huru lätt är det inte för eleverna att minnas anekdoten om Platons akademi: »Ingen må träda hitin, som inte behärskar geometrin.»

Jag känner en lärare, som vid övergången till läran om geometriska figurers konstruktion enbart med passare och linjal, de klassiska hjälpmedlen, håller ett glänsande anförande om Euklides, läser utdrag ur hans *Elementa* och sedan angriper problemet att draga en cirkel med en given punkt som medelpunkt och en given sträcka som radie. Härvid betonar han särskilt, att problemet kan lösas enbart med hjälp av Euklides' båda bekanta postulat. — Om problemet i fråga behandlas på detta speciella sätt i samband med en historisk exposé och med betonande av principen, att förutsättningarna, som görs vid införandet av nya postulat, inskränks till ett minimum, då försvarar problemet sin plats i vår matematikundervisning, även om det har införts bland postulaten i de flesta av de läroböcker, som för närvarande är i bruk.

Ovan har jag låtit några exempel belysa framställningen av historiska fakta i sådana fall, där temat otvunget ansluter sig till det aktuella, för tillfället behandlade stoffet. Enligt min åsikt torde i mellanskolan denna metod vara den enda möjliga. Även på gymnasialstadiet är den mycket användbar, i synnerhet som möjligheterna att framställa det historiska stoffet då självfallet är avsevärt mångsidigare. Eleverna förfogar ju då redan över relativt omfattande fundamentala kunskaper, och även i andra hänseenden står de på en högre utvecklingsnivå, vilket medför, att de har lättare att fatta lärarens föredrag.

Ja — vad är det då man skall föredra för eleverna? Detta är den centrala frågan; i själva verket är det i hög grad en personlig fråga. Så länge läroplanen inte föreskriver det lärostoff, som skall behandlas, är under-

visningen i matematikens historia starkt beroende av lärarens individuella intresse för de olika specialfrågorna, och det är ju bara lyckligt att läraren har fria händer. Helt säkert råder det inte heller någon brist på material, bland vilket man kan välja. Den ene kan intressera sig särskilt för den pythagoreiska talteorin, medan en annan med förkärlek utbreder sig över talet π :s historia. Personligen har jag alltid känt särskilt intresse för en omständighet, som omedelbart framgår ur framställningen av det gyllene snittets teori. Denna erbjuder i och för sig ett utmärkt tillfälle till intressanta berättelser; när man sedan övergår till att konstruera den reguljära tiohörningen, faller det av sig självt att ta fram det gamla intressanta problemet om i huru många lika stora delar det är möjligt att dela cirkelperiferin med enbart de klassiska hjälpmedlen, passare och linjal. Osökt leder sedan problemets lösning till en skildring av matematikernas konung, Gauss, och hans livsgärning. Det är också roligt att berätta om Göttingen, Gauss' stad, som så länge varit ett centrum för den matematiska forskningen. Göttingen för ju tanken till namnen Klein, Planck, Hilbert och andra, bland dem även Lietzmann, vars metodik är välkänd för oss pedagoger. Och har inte envar, som studerat matematik i Göttingen, sökt upp Gauss' gravvård och förgäves ansträngt sig att på den hitta den berömda reguljära 17-hörningen? — Men anekdoten härom fäster sig i elevernas minne och på samma gång minns de även, vad som sagts om själva problemet.

I det föregående har jag behandlat några isolerade punkter i vårt undervisningsprogram, som erbjuder en naturlig anknytning till matematikens historia. Det är emellertid även möjligt att gå systematiskt till väga vid valet av behandlade ämnen. En regel, som enligt min åsikt borde beaktas, är, att införandet av nya begrepp så vitt möjligt alltid borde åtföljas av en framställning av deras historiska bakgrund. Läran om logaritmerna må tjäna som exempel härpå.

Vid införandet av logaritmerna är det på sin plats att för eleverna berätta om den tidsperiod, då logaritmerna tillkom. Som känt är, sammanfaller denna händelse med den nya tidens början under 1600-talet. De stora geografiska upptäcktsresorna vid övergången från medeltiden till nya tiden hade medfört en enorm utveckling av handel och sjöfart. Långfärderna till nya länder, till kryddöarna och till Amerika hade till resultat en strävan efter allt bättre navigationsmetoder och Ortsbestämningar i öppen sjö. De härtill erforderliga beräkningarna var ytterst tidsödande och svåra att utföra. Å andra sidan förde den livliga handeln till en anhopning av stora förmögenheter. Placeringen av dessa medel förorsakade ett oerhört uppsving i bankväsendet och framkallade kompli-

cerade beräkningar av ränta och ränta på ränta, en uppgift, som utfördes av speciella räknemästare.

Följaktligen var det alldeles naturligt, att man just då uppfann metoder, som möjliggjorde ett enklare utförande av dessa svåra räkneoperationer. Man lärde sig att lösa navigationsproblemen med tillhjälp av trigonometrin, som då befann sig i stark utveckling, och logaritmerna, som helt nyligen införts av Neper och Briggs, användes vid utförande av långa och mödosamma multiplikationer och divisioner.

Det är särdeles intressant att konstatera, att vi den dag som i dag är åter har ett motsvarande behov av nya, väsentligt förbättrade räkne-metoder. Bland annat har atomfysiken med de talrika nya problem, som uppkommit i samband med denna forskningsgren, givit upphov till uppgifter medförande ett så ofantligt mått av räknearbete, att de hjälpmedel, som hittills stått oss till buds, tabeller och räknemaskiner, helt enkelt är ur stånd att bemästra dem. Följden härav har varit uppfinnandet av de nya revolutionerande räkneapparaterna, matematikmaskinerna. Vid sidan av den betydelse dessa maskiner äger i rent räknetekniskt hänseende har de redan utövat ett märkligt inflytande på matematikens utveckling, dels genom att användandet av maskinerna har framkallat helt nya metoder och teorier, dels genom att nya landvinningar har gjorts på gränsområdena till vårt matematiska vetande. Sålunda har man bland annat med dessa maskiner redan kunnat uppvisa mycket större primtal än $2^{127} - 1$, det största kända primtalet före matematikmaskinernas era.

En annan form av undervisningen i matematikens historia skulle jag anse utgöras av en historisk generalöversikt i samband med repetitioner över den del av ämnet, som för tillfället står under behandling. I mån av möjlighet skall denna överblick även innehålla sådant, som utvidgar elevernas perspektiv utöver gränserna för skolkursen. Ett belysande exempel är den analytiska geometrin. Det är nyttigt att vid en repetition klargöra för eleverna att matematikens språk under gamla tiden var rent geometriskt — allt försökte man återge i form av figurer, sträckor, arealer, och volymer — och att det var Descartes, som i sin analytiska geometri gav matematikern ett medel att tala om geometriska begrepp på analysens språk. Geometrin jämte många andra fält kunde därefter »avbildas» på analysen. Och om även vår skolkurs i analytisk geometri endast omfattar problem i ett tvådimensionellt kontinuum, bör läraren ej försumma att ge eleverna en antydning om, huru generalisationen till den tredimensionella rymden kan försiggå och huru det är möjligt för matematikern att på motsvarande sätt behandla fyr- och flerdimensionella världar, oaktat att det inte finns någon möjlighet för oss att bilda oss ett åskådligt

begrepp om dessa. Om en dylik generalisation, som kan tillämpas redan på skolestadiet, ger professor R. Nevanlinna en särdeles lärorik framställning i en artikel, publicerad år 1953 i NMT.

Kursen i analytisk geometri kunde emellertid utvidgas även i en annan riktning. Förutom framställningen om kägelsnitten och de grafiska bilderna av några få hela och brutna funktioner, som ingår i kursen, borde eleverna få veta, att det även finns andra kurvor. Något kunde berättas om cykloiden och dess egenskaper, om kedjelinjen och den Gausska felkurvan; dessa kurvor och deras ekvationer kunde anföras. Detta behöver inte ta ett övermått av tid i anspråk — syftet skulle endast vara att låta eleverna förstå, att matematiken ej tar slut, där skolkursen slutar.

Ett ytterligare exempel på en historisk återblick i samband med repetitioner är behandlingen av talområdet. Samtidigt som eleverna får del av räknelagarnas permanensprincip vid utvidgningen av talområdet med de naturliga talen som utgångspunkt, skall man beskriva, huru svårt det på sin tid varit att ta ut steget från de rationella till de irrationella talen och vidare till de komplexa talen. Här finner läraren åter en möjlighet att ge eleverna en skymt av ett av den nyare tidens forskningsområden, mängdläran, Cantors transfinita tal eller aleph-talen, som ej längre följer de hävdvunna räknereglerna, i det att exempelvis delen kan vara lika stor som det hela. Även detta främjar i sin mån elevernas insikt om att skolmatematiken knappast utgör mer än de allra första elementen av matematikens hela forskningsgebit.

I början av juni 1954 bevistade jag en konferens över frågor rörande läroverken. Ett av föredragen hölls av en av våra universitetsprofessorer, som bl. a. beklagade förhållandet, att många studenter, då de börjar sina studier, till den grad är uppfyllda av sin inbillade visdom, att de är rentav vaccinerade mot faran att »ådraga sig» nya kunskaper. Som betecknande för detta slag av studenter anförde han den gamla historien om en ung studerande, som på sin flickväns suck: »O hur härligt det skulle vara, om man visste *allt*!» svarar: »Ja, det *är* härligt!» — Det är lärarens uppgift att klargöra för eleverna, att de endast står vid början av kunskapens väg, att vetenskapen ej är något slutgiltigt och färdigt, utan att den är en allttjämt fortskridande, levande forskningsprocess, ur vilken ständigt nya problem stiger fram.

Alla glimtar av möjligheter att behandla delar av matematikens historia, som jag här har givit, har omedelbar anslutning till den egentliga uppgiften för varje ifrågavarande lektion. Det förefaller mig, att man på gymnasialstadiet även kunde ägna några lektioner enbart åt matematikens historia. Lärarna skulle då ha tillfälle att tala även om sådant, som ej står i beröring med skolkursen, men som i och för sig är värt att veta

och ägnat att väcka intresse för matematiken. Det viktigaste programmet för dylika lektioner skulle jag se i en viss systematisk framställning av matematikens utveckling. En sådan lärokurs kunde ges eleverna till hemläxa och förhöras i likhet med andra hemuppgifter.

Det är uppenbart, att det område, som en sådan kurs omfattar, ej kan vara särdeles stort. Undervisningsmaterialet, som ingår i vår skolkurs i aritmetik och algebra, består i allmänhet av flera hundra år gammalt vetande, och stoffet i skolgeometrin går till största delen ännu vida längre tillbaka i tiden. Under nya tiden har en långtgående utveckling ägt rum i den matematiska forskningen, både i horisontell riktning mot olika områden och i vertikal riktning, å ena sidan mot precisering av begrepp och å andra sidan mot generalisering. Jag vill endast omnämna, huru t. ex. utvecklingen av de reella funktionernas teori givit möjlighet till en generalisering av integralbegreppet från Cauchy's integral ända till de under ytterst generella villkor definierade Lebesgue-Stieltjesintegralerna samt motsvarande begrepp av ännu mera generell natur. Det är absolut omöjligt att på grundval av skolkursen ge någon som helst begriplig bild av den moderna matematiken, och detta behövs ju inte heller. Likaså är det omöjligt för en lärare utan fleråriga extra studier att kunna redogöra för denna utveckling. Det är därför påtagligt, att en sammanhängande behandling av matematikens historia, som kunde företas i våra skolor, endast kan beröra gamla tiden och medeltiden samt eventuellt renässanstiden. Jag anser dock, att även en så inskränkt historisk översikt skulle vara till stor nytta. Även för en i matematikens historia obevandrad lärare torde det ej medföra synnerliga svårigheter att sätta sig in i saken, ty goda källskrifter finns att tillgå. Bland sådana vill jag blott anföra den för alla danskar välbekanta, av Neugebauer omarbetade boken »Matematikens historie« av Zeuthen.

Som exempel på andra ämnen, som lämpar sig för de egentliga historielektionerna, vill jag nämna en kort framställning av den matematiska forskningens utveckling i det egna landet. För de finska skoleleverna är det säkert av intresse att erfara något om detta, ehuru hjältarna i Kalevala ej torde ha utmärkt sig som vidare framstående matematiker, om ock 23. sången förtäljer, att de kunde utläsa tiden ur himmelstecknen. Ännu vid början av den nya tiden befann sig matematiken i vårt land på ett ganska elementärt stadium. På den första matematikprofessorns vid Åbo universitet, Kexlerus', tid skrevs ett antal läroböcker i matematik, vanligtvis sammanställda ur dissertationer, och dessa böcker ger en god inblick i de problem, vilka sysselsatte den tidens matematiker. Man finner även, att matematiken här, liksom annorstädes i Europa, kunde tillämpas på synnerligen ovanliga områden. Samtidigt som matemati-

kerna i Europa under 1600-talet kunde bemöda sig att räkna ut, när världen hade skapats eller vem som var Uppenbarelsebokens vilddjur, skrev Kexlerus verket »Arithmetica geodaetica denaria«, som bland annat framkastade frågorna: »Kunna trollpackor förvandla människor till vargar och andra oskäligen djur?« och »Bör man gifta sig med en skön kvinna?« Mina läsare skulle kanske känna sig besvikna, om jag undanhöll dem resultaten: svaret på den första frågan blev »nej«, på den andra »ja«.

Först under 1700-talet började den matematiska forskningen i Finland att uppnå en högre nivå, och många av Åbo universitets matematikprofessorer blev då värderade som goda matematiker, och de insatser, som den senare tidens finska matematiker gjort, tål nog jämförelse med motsvarande resultat i andra länder. Om denna utveckling har professor E. Lindelöf skrivit en uppsats i tidskriften *Valvoja-Aika* (1929) samt professor P. J. Myrberg två artiklar i tidskriften *Arkhimedes* (1950 och 1952). Dessas innehåll borde varenda matematiklärare i ett finskt läroverk känna till.

Ytterligare ett tema, som utan tvivel fångar en lärarinnas ävensom kvinnliga elevers intresse, är en redogörelse för kvinnan som matematiker — från Hypatias tid till den dag som nu är. Nutidens kvinnliga matematiker kan ej mera avskräckas med det påstående, som nervläkaren Möbius uttalat för ett halvt sekel sedan: »Kvinnan och matematiken hör ej tillsamman. Om en kvinna sysslar med matematik, är det lika gott, som om hon hade skägg.« Det är dock nyttigt för flickelever att även få höra om de svårigheter Sonja Kowalewski hade att kämpa emot, innan hon blev professor i matematik vid Stockholms Högskola. För den unga kvinnan av i dag står däremot alla möjligheter att studera matematik i mån av begåvning och skicklighet öppna.

Om eleverna i en skola har bildat en särskild klubb för matematiska ämnen, erbjuder sig givetvis vida talrikare tillfällen till framställning av historiska fakta. Jag anser just matematikens historia och behandlingen av historiska problem som en av de viktigaste verksamhetsformerna för en dylik klubb. Läraren å sin sida kunde utvälja det material, som skall behandlas, så att eleverna själva är i stånd att med mindre föredrag delta i undervisningen. Varje föredragshållare skulle på detta vis sätta sig grundligt in i åtminstone ett tema, samtidigt som han skulle få nyttig övning i utarbetandet av en sammanhängande framställning. Förutsättningen för en sådan medverkan från elevernas sida är emellertid, att läraren är kompetent att ge eleverna den nödvändiga handledningen. Han måste själv vara inkommen i saken, han måste fördjupa sig i ämnet genom att läsa litteratur och finna ämnen, som kan intressera eleverna. Han måste ha tillgång till lämpliga källskrifter; således måste han ha

möjlighet att skaffa sig själv eller skolan ett tillräckligt omfattande matematiskt bibliotek.

Ovan har jag framställt några tankar rörande matematikens historia i en form lämplig för läroverken. Självfallet vore det särdeles önskvärt att ha en lärobok omfattande ungefär allt, som kan behandlas i skolan. Ur detta material skulle sedan läraren kunna träffa sitt urval av det han anser intressant och lämpligt för de olika stadierna. En sådan bok, författad av en kännare av matematikens historia, som samtidigt är bevandrad i kursen vid våra läroverk, så att framställningen inte blir för teoretisk, kunde utgöra en grundkurs, som i hög grad skulle underlätta inarbetande av historieundervisning i våra läroprogram. Det vore kanske tänkbart att planera en för alla nordiska länder gemensam kurs, som skulle publiceras av experter i form av artiklar, t. ex. i vår gemensamma tidskrift NMT. På detta sätt skulle den vara lätt tillgänglig för lärarna. I ett senare skede vore det möjligt att sammanfatta bidragen till en särskild bok.

Som sista punkt i mitt anförande vill jag säga några ord om de medel man kunde anlita för att effektivisera undervisningen i matematikens historia i våra skolor. Jag har redan talat om, vilket viktigt hjälpmedel en lämplig lärobok utan tvivel skulle vara. Men huvudsaken är dock att väcka lärarnas intresse. Bästa sättet att nå detta mål vore väl att ålägga dem att redan under sina studier fördjupa sig i ämnet. För graduerade, som är verksamma som lärare, kunde man anordna kurser och studiedagar, som behandlar matematikens historia. I detta hänseende anser jag matematiklärarföreningarna ha en viktig uppgift att fylla, både genom att ge impulser och arrangera själva utbildningen. Det vore säkert lätt att erhålla sakkunnig hjälp från universitetshåll. — Det mest radikala medlet vore givetvis att i skolornas lärokurs uppta en viss obligatorisk kurs i matematikens historia.

När jag till sist sammanfattar allt det, som jag här har framfört, kommer jag till följande korta sammandrag:

I. *Matematikens historia borde upptas i läroverkens program.*

II. *Ändamålet för undervisningen i matematikens historia är:*

1. att ge eleverna ett mera omfattande begrepp av den mänskliga kulturen och att lära dem att uppskatta matematikens andel i dess utveckling,
2. att efter hand få eleverna att uppfatta den stora betydelse övergången från en konkret iakttagelsevärld till abstrakta talbegrepp innebär och att därigenom få dem att sätta värde även på sådana teoretiska betraktelser, som ingår i deras lärokurs,

3. att väcka elevernas håg för matematik och att hos elever med matematisk begåvning medverka till uppkomsten av ett djupt och varaktigt intresse för studiet av dess olikartade problem,
4. att åstadkomma en trevlig och samtidigt saklig omväxling i de vanliga, obligatoriska räkneövningarna.

III. *Undervisningen i matematikens historia kunde ske på följande sätt:*

I realskolan skulle historiska uppgifter meddelas endast vid ett fåtal tillfällen i anslutning till det aktuella lärostoffet.

I gymnasialklasserna skulle matematikens historia undervisas i större omfattning. Undervisningen kunde tänkas försiggå:

1. i direkt anslutning till det egentliga undervisningsstoffet för lektionen, varvid historiska synpunkter särskilt skulle beaktas vid införande av nya begrepp och i samband med repetitioner,
2. i korta fortlöpande lärokurser, med framställning av matematikens utvecklingshistoria under gamla tiden och medeltiden samt av andra punkter, som ej behöver ha anslutning till kurserna.

IV. *För en mera effektiv undervisning i matematikens historia i våra skolor vore det önskvärt:*

1. att en grundkurs i matematikens historia skulle utarbetas för läroverken ävensom en speciell lärobok för detta ändamål,
2. att matematikens historia skulle införas i programmet för lärarutbildningen,
3. att specialkurser och studiedagar med matematikens historia som ämne skulle arrangeras för lärarna,
4. att historiska synpunkter skulle beaktas vid uppställningen av lärokurserna för våra skolor.

I det föregående har jag tagit till behandling rätt elementära och välbekanta saker, men detta är beroende av frågans natur. I våra skolor kan man ej behandla någon hög matematik. Jag har dock försökt framhålla det, som syns mig viktigast: det lönar sig för läraren att sätta sig in i matematikens historia och det är värt att överväga, på vilket sätt denna kan utnyttjas till att liva upp undervisningen. Vi, som tjänstgjort som lärare i årtal, stelnar lätt i former och sätter år efter år i gång samma grammofonskiva, som uttråkar oss själva, och allt, som ej hör till skolkursen, faller efter hand i glömska. Ifall det kommit därhän, är det ej att förundra sig över om våra elever inte känner intresse för matematiken. Genom att fördjupa sig i matematikens historia, framför allt i dess senare utveckling, åtminstone inom något område av matematiken, erhåller läraren en liten möjlighet att bibehålla kontakten med sitt eget fackämne. Och en levande kontakt med själva vetenskapen är dock den största kraft, som en god lärare äger.

DA SANDSYNLIGHEDSREGNING BLEV VIDENSKAB

KAI RANDER BUCH

Uddrag af foredrag, holdt i Selskabet for de eksakte
videnskabers historie 2. december 1952.

1. Sandsynlighedsregningen er en ung disciplin sammenlignet med mange af matematikkens andre områder. Dette er bemærkelsesværdigt af flere grunde. Dels har mennesket gennem tiderne altid været interesseret i at opnå svar på spørgsmål af sandsynlighedsteoretisk art, og dels er behandlingen af den elementære sandsynlighedsregnings problemer set fra et matematisk standpunkt ikke indviklet, idet disses løsning væsentlig beror på overvejelser af kombinatorisk art, og således er rent aritmetiske og kun betjener sig af læren om de hele tal. Alligevel skal man helt frem til midten af det 17. århundrede, før man overhovedet kan tale om sandsynlighedsregning som del af den matematiske videnskab. Fra dette tidspunkt går der en bestandig udvikling op til vore dage, men først i vort århundrede har det været muligt at løsrive emnet fra mange misvisende og uvedkommende filosofiske diskussioner om dets grundlag, og specielt fra vanskeligheder i forbindelse med opstillingen af selve sandsynlighedsdefinitionen.

Gennem grundlæggende arbejder af bl. a. Kolmogoroff er det lykkedes at give sandsynlighedsregningen et strengt aksiomatisk grundlag, således at den optræder på linie med andre aksiomatisk opbyggede matematiske discipliner, såsom geometrien, algebraen, o. s. v. Med nogen ret kan man derfor sige, at vel blev sandsynlighedsregningen optaget blandt videnskaberne i det 17. århundrede, men den er i vort århundrede genfødt i fuld klarhed og tjener nu som logisk opbygget fundament for alle dens rige anvendelsesområder.

Formålet med denne lille artikel skulle være at give nogle spredte glimt fra de tidligste år, idet problemerne også delvis behandles i den mere moderne terminologi. Det vil derfor være på sin plads i største korthed at formulere nogle enkelte af sandsynlighedsregningens sætninger i nutidens sprog.

2. Vi tænker os et eksperiment, der kan gentages vilkårlig ofte under ganske ensartede omstændigheder. Med A betegner vi den hændelse, at eksperimentet giver et ganske bestemt og nærmere præciseret udfald. I så fald siger vi, at hændelsen A er indtruffet. Foretager vi nu en serie bestående af n forsøg, og er q det antal gange blandt de n , hvor hændelsen A indtræffer, siger vi, at brøken q/n er den relative hyppighed for hændelsen A i den givne iagttagelsesserie. Det er klart, at en ny iagttagelsesserie i almindelighed vil give en anden værdi for den relative hyppighed, men det er tillige et erfaringsresultat, at har man mange relative hyppigheder for den samme hændelse A , vil disse tal i en vis forstand fortætte sig om en bestemt værdi. Det er derfor rimeligt til hændelsen A at knytte et tal $S(A)$, som man kalder sandsynligheden for A , og som er det fiktive tal, hvorom de relative hyppigheder fortætter sig.

Lad nu A og B betegne to hændelser, om hvis indbyrdes forhold man intet forudsætter. Med $A+B$ betegner man da den hændelse, at i det mindste een af de to hændelser A og B indtræffer i et forsøg, og med AB betegner man den hændelse, at de to hændelser A og B begge indtræffer i samme forsøg. Man kan da let vise, at der gælder sandsynlighedsregningens additionssætning

$$S(A+B) = S(A) + S(B) - S(AB),$$

og sandsynlighedsregningens multiplikationssætning

$$S(AB) = S(A) \cdot S_A(B),$$

hvor $S_A(B)$ betegner sandsynligheden for, at hændelsen B indtræffer, under den forudsætning, at i hvert fald hændelsen A indtræffer. Hvis specielt de to hændelser A og B udelukker hinanden, d. v. s. ikke samtidig kan indtræffe, har man altså

$$S(A+B) = S(A) + S(B),$$

og hvis hændelsen B er uafhængig af hændelsen A (d. v. s. hvis der gælder $S(B) = S_A(B)$), har man

$$S(AB) = S(A) \cdot S(B).$$

Ved hjælp af ovennævnte formler er man nu let i stand til at udlede et for det følgende betydningsfuldt resultat. Lad A være en hændelse, der har sandsynligheden s for at indtræffe ved et enkelt forsøg. Vi spørger om sandsynligheden for, at hændelsen A i en serie af n af hinanden uafhængige forsøg indtræffer netop p gange. Denne sandsynlighed S_p er givet ved formlen

$$(1) \quad S_p = \binom{n}{p} s^p (1-s)^{n-p},$$

hvor binomialkoefficienten

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

3. Efter dette indskud vender vi atter vort blik tilbage i tiden. Fra en af datidens store spillere, Chevalier de Méré, fik den kendte matematiker Blaise Pascal i 1654 en henvendelse med opfordring om bistand ved løsningen af visse problemer om sandsynligheder. Denne opfordring gav anledning til en brevveksling mellem Pascal og en anden af tidens store matematikere, Pierre Fermat. Det for de Méré vigtigste spørgsmål drejede sig om det såkaldte delingsproblem, der i sin enkleste form lyder: To spillere P og Q gør hver samme indsats W og spiller en række af spil, om hvilke det forudsættes, at i hvert enkelt af spillene har de begge sandsynligheden $\frac{1}{2}$ for at vinde dette spil. Yderligere er forudsætningen den, at den af de to spillere, der først har n vundne spil, skal have hele indsatsen, altså beløbet $2W$. Problemet er da følgende: hvorledes skal indsatsen deles mellem de to spillere, hvis spillet afbrydes, førend nogen af dem har n vundne spil?

Om dette spørgsmål skriver Pascal til Fermat i et brev af 29. juli:

»I det følgende skal jeg give min metode til at bestemme hver spillers andel, når for eksempel to spillere spiller et spil om tre point, og hver har indsat 32 mønter. Antag at den første spiller har vundet to point og den anden spiller eet point. De skal nu spille om yderligere eet point under følgende betingelse: hvis den første spiller vinder, er hele indsatsen, nemlig 64 mønter, hans; hvis den anden spiller vinder, har hver to point, således at de nu står lige, og hvis de derfor skilles uden at spille videre, tilkommer der hver af dem 32 mønter. Derfor, hvis den første spiller vinder, tilfalder der ham 64, og hvis han taber 32. Hvis derfor de to spillere ikke ønsker at spille spillet, men skilles uden at spille det, vil den første sige til den anden: jeg er sikker på 32 mønter, selvom jeg taber dette spil, og om de resterende 32 — måske vil jeg få dem, og måske vil du få dem — vore chancer er lige. Lad os derfor dele disse 32 lige og giv mig yderligere de 32, på hvilke jeg er sikker. Efter dette skal altså den første spiller have 48 og den anden spiller 16«.

Efter at have gennemført det samme ræsonnement i to andre tilfælde af lidt mere kompliceret art går Pascal over til at give to resultater af mere almindelig karakter, dog uden beviser, nemlig:

1) Lad antallet af forlangte vundne spil være $n+1$ og antag, at den første spiller har vundet n spil og den anden spiller ingen, når spillet afbrydes. Pascal angiver da, at den første spiller har et krav på

$$2W - \frac{W}{2^n}.$$

2) Lad antallet af forlangte vundne spil være $n+1$ og antag, at den første spiller har vundet eet spil og den anden ingen, når spillet afbrydes. Den første spiller har da krav på beløbet

$$W + W \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

Pascal tilføjer, at det sidste resultat er vanskeligt at vise, idet udledelsen beror på to matematiske sætninger, den ene af rent aritmetisk art, den anden en sætning om chancer og tilfældigheder.

I samme brev til Fermat kommer Pascal ind på et andet af de Méré's problemer. De Méré havde gjort en iagttagelse, som forundrede ham meget: sandsynligheden for i fire kast med een terning mindst een gang at få 6 øjne viste sig at være større end sandsynligheden for i 24 kast med to terninger mindst een gang at få 6 øjne med begge terningerne. Ved et spil med een terning er der 6 mulige udfald, hvoraf eet er gunstigt, og ved spil med to terninger er der seks gange så mange mulige udfald, hvoraf igen eet er gunstigt. De Méré ræsonnerede derfor, at der måtte foretages seks gange så mange kast i det andet spil som i det første for at få samme sandsynlighed for et gunstigt udfald.

Pascal skriver herom i sit brev:

»Jeg har ikke tid til at sende Dem beviset for en vanskelighed, som forbavsede de Méré meget — han er en stor ånd, men ikke geometer, hvilket, som De erkender, er en stor mangel — han tror for eksempel ikke, at en matematisk linie er delelig i det uendelige, men hævder, at den må være sammensat af punkter i endeligt antal, og jeg har ikke kunnet få ham fra det. Han siger mig også, at han har fundet modsigelser blandt tallene ved dette ræsonnement«

— og efter at have nævnt problemet fortsætter Pascal:

»Se, dette vakte hans forargelse og fik ham højlydt til at påstå, at forholdene ikke var konstanter, og at aritmetikken dementerede det«.

Fermat's svar på dette brev kendes ikke, men svarets natur kan man let slutte sig til af Pascals næste brev til Fermat, hvori han giver et

eksempel på anvendelsen af Fermat's metode for det specielle tilfælde, at den ene spiller P mangler 2 og den anden spiller Q mangler 3 point. Pascal opskrifter samtlige permutationer af bogstaverne P og Q med fire elementer i hver:

$PPPP$	$PQPP$	$QPPP$	$QQPP$
$PP PQ$	$PQPQ$	$QPPQ$	$QQPQ$
$PPQP$	$PQQP$	$QPQP$	$QQQP$
$PPQQ$	$PQQQ$	$QPQQ$	$QQQQ$,

udfra den betragtning, at senest efter endnu fire spil ville spillet have været afsluttet. Han tæller derefter blandt de 16 tilfælde de for spilleren P gunstige, her 11, og de for Q gunstige, her 5, og slutter, at chancerne er som 11 til 5. Pascal er af den opfattelse, at Fermat's metode kun er brugbar for to spillere, men ikke når der er flere, hvilket han dog senere indrømmede var en fejltagelse.

Det er ikke overraskende, at brugbarheden af denne simple ræsonnementsmetode vakte tvivl selv hos Pascal. Endnu i vore dage kræver det, trods sandsynlighedsregningens høje stade, en vis skoling i og tilvænning til begreberne, før man føler sig overbevist om dens rigtighed. Den tanke i sine betragtninger at inddrage spil, der, hvis spillet blev udført i praksis, slet ikke ville blive spillet, virker ved første øjekast chokerende. Til nærmere belysning vil vi fremdrage følgende simple eksempel: Vi tænker os seks personer spille om en gevinst, og vinderen udpeges ved terningkast. De vil da alle føle sig ens og retfærdigt behandlet. Hvis derimod de seks personer efter tur trækker kort af en bunke på seks kort, hvoraf det ene er særligt mærket og derfor giver gevinsten, vil det meget let ske, at een eller flere slet ikke opnår at trække og derfor føler sig uretfærdigt behandlet. Fordeler man derimod de seks kort med bagsiden opad til samtlige personer, ville sikkert alle føle sig tilfredse.

4. I dette afsnit skal vi ved anvendelse af de i 2. nævnte sætninger føre beviser for de to i Pascal's brev ubeviste påstande:

1) Det forlangte antal vundne spil var $n+1$, og P havde allerede n vundne spil, medens Q ingen havde. Den eneste chance for Q er da, at han vinder de følgende $n+1$ spil. Sandsynligheden for, at dette indtræffer, er ifølge sandsynlighedsregningens multiplikationssætning $(\frac{1}{2})^{n+1}$, og følgelig må sandsynligheden for at P vinder være

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Indsatsen bør altså deles mellem P og Q i forholdet $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ til $\frac{1}{2^{n+1}}$, d. v. s. P har krav på beløbet

$$2W \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2W - \frac{W}{2^n}.$$

2) Det forlangte antal vundne spil er $n+1$, og P havde eet vundet spil, medens Q ingen havde. Vi tænker os nu yderligere spillet $2n$ spil, hvilket er det mindste antal, der sikrer os, at netop een af de to spillere har vundet indsatsen, hvorimod intet forhindrer, at een af de to spillere har vundet allerede på et tidligere tidspunkt. Det er klart, at hvis P vinder n eller flere af disse $2n$ spil, skal han have indsatsen. Vinder han derimod færre end n spil, har Q vundet indsatsen. Vi skal altså udregne sandsynligheden for, at P blandt de $2n$ spil vinder mindst n . Ifølge formel (1) er denne sandsynlighed givet ved

$$S = \sum_{i=n}^{2n} \binom{2n}{i} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=n}^{2n} \binom{2n}{i}.$$

Da de $2n+1$ binomialkoefficienter af $2n$ 'te orden som bekendt har summen 2^{2n} , har man let

$$\sum_{i=n}^{2n} \binom{2n}{i} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2n} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n},$$

altså

$$S = \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{1}{2} \cdot 2^{2n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n},$$

og multiplicerer vi dette med indsatsen $2W$, har vi det beløb, som P har krav på

$$W + W \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

Som det fremgår af ovenstående, spiller binomialkoefficienterne og deres egenskaber en fremtrædende rolle i bevisførelsen. Pascal har selv i et arbejde fra 1654, *Traité du triangle arithmétique*, behandlet disse tal, men udfra et andet synspunkt, og man skal helt frem til udgivelsen af Jacob Bernoulli's *Ars Conjectandi* i 1713, før man finder det første bevis for binomialformlen.

5. Delingsproblemet, som vi her har omtalt, optræder i de følgende år hos adskillige forfattere, bl. a. Christian Huygens. Han skrev i 1657

sit arbejde *De Ratiociniis in Ludo Aleæ*. Trods sit ringe omfang fortjener Huygens' indsats en nærmere omtale, når man taler om sandsynlighedsregningens første år. Gennem fjorten små afsnit fremsætter forfatteren delvis uden beviser visse påstande og behandler samtidig enkelte opgaver, der målt med datidens målestok absolut ikke kan kaldes elementære. Det sandsynlighedsteoretiske middelværdibegreb (forventningen) kan således, trods fremstillingens ufuldstændighed, siges at være skabt af Huygens. De første afsnit indeholder således tre påstande om middelværdidannelse, nemlig 1) hvis en spiller har samme sandsynlighed for at vinde beløbene a og b , da er hans forventning $\frac{1}{2}(a+b)$, 2) hvis en spiller har samme sandsynlighed for at vinde beløbene a , b og c , da er hans forventning $\frac{1}{3}(a+b+c)$, og endelig et resultat af en mere almindelig karakter, 3) hvis en spiller har p chancer for at vinde beløbet a og q chancer for at vinde beløbet b , da er hans forventning $\frac{pa+qb}{p+q}$. I de

følgende seks afsnit diskuterer forfatteren delingsproblemet for to eller tre personer. De sidste fire afsnit indeholder undersøgelser over visse terningspil, af hvilke vi mere udførligt til belysning af Huygens' ræsonnementsmetode skal omtale den sidste.

Spørgsmålet er følgende: To personer P og Q spiller med to terninger, P kaster først og vinder indsatsen, såfremt summen af øjnene er 6. Er denne sum ikke 6, kaster Q og vinder, såfremt summen af øjnene er 7; er den ikke 7, kaster P atter på samme betingelse som før, og således fortsættes spillet, til enten P eller Q har vundet indsatsen. Hvad er nu forholdet mellem P 's og Q 's chancer for at vinde spillet?

Med en beskeden modifikation er Huygens' metode nu følgende: Sandsynligheden for i kast med to terninger at få summen 6 er $\frac{5}{36}$, og sandsynligheden for summen 7 er $\frac{6}{36}$. Endvidere indføres to ubekendte x og y ved følgende definition: når P kaster, er Q 's chance for et godt udfald x , og P 's chance altså $1-x$; når Q kaster, er Q 's chance for et godt udfald y og P 's chance $1-y$. På grundlag af Huygens' ovennævnte tredje påstand opstilles da følgende ligninger til bestemmelse af x og y :

$$x = \frac{5 \cdot 0 + 31 \cdot y}{36}, \quad y = \frac{6 \cdot 1 + 30 \cdot x}{36},$$

hvoraf $x = \frac{31}{61}$ og $1-x = \frac{30}{61}$. Det søgte forhold er da som 30 til 31.

Skulle man i dag løse det samme lille problem, ville man sikkert anvende sandsynlighedsregningens additionssætning i generaliseret form for uendelig mange addender og ræsonnere som følger: P kan vinde spillet på uendelig mange måder, der to og to udelukker hinanden. Han kan kaste 6 i første kast, og spillet er afsluttet, men han kan også vinde ved

første gang at få 6 i tredje kast under forudsætning af, at Q ikke har fået 7 i sit første kast o. s. v. Sandsynligheden for at P vinder er da givet ved summen af den uendelige række

$$\frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} + \dots$$

Denne er en kvotientrække med kvotienten $\frac{930}{1296}$ og har følgende summen

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{930}{1296}} = \frac{30}{61}.$$

Huygens' arbejde, som vi her har omtalt i større udførlighed, var afslutningen på det 17. århundredes studier inden for området, og først med de store navne Bernoulli, de Moivre og Laplace i det 18. og begyndelsen af det 19. århundrede fremstod teorien med et fundament af mere almen karakter.

For de læsere, der efter denne spinkle introduktion kunne ønske nærmere orientering, henvises til nedenstående litteraturfortegnelse.

LITTERATUR

- [1] I. TODHUNTER: *A History of the Mathematical Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company, New York 1949.
- [2] OYSTEIN ORE: *Cardano, The Gambling Scholar*. Princeton, N. J. 1953. (Giver et udtømmende billede af sandsynlighedsregningens udvikling i tiden før Pascal.)
- [3] NIELS ARLEY — K. RANDER BUCH: *Sandsynlighedsregning*. G. E. C. Gads Forlag, København 1950.
- [4] HARALD CRAMÉR: *Sannolikhetskalkylen*. Hugo Gebers förlag, Uppsala 1949.
- [5] A. KOLMOGOROFF: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin 1933.

SPEIELLA KONISKA YTOR

E. J. NYSTRÖM

Överensstämmer i huvudsak med en artikel »Toisen asteen kartioista«
tryckt i Arkhimedes, 1952, sid. 35–38.

Betraktelser över den räta cirkelkonen eller rotationskonen ha som känt berikat det elementärgeometriska kunskapsstoffet med de koniska sektionerna eller kurvorna av andra graden: ellipsen, parabeln, hyperbeln. Vilken som helst sådan kurva kan erhållas som plant snitt av en given rät cirkelkon, varvid i fråga om en given hyperbel konens toppvinkel dock måste vara större än vinkeln mellan hyperbelns asymptoter. Parallella plan ge likformiga snittkurvor.

Projicerar man en konisk sektion från en punkt utanför dess plan, erhåller man en »allmän kon« av andra graden¹. En rotationskon uppkommer endast om projektiionscentrum ligger på en viss ortlinje (även den en konisk sektion).

Liksom en kurva av andra graden är bestämd genom fem av dess punkter eller fem tangenter, är en kon av andra graden bestämd genom fem av dess alstringslinjer eller fem tangentplan. Äro endast fyra alstringslinjer eller fyra tangentplan givna, utgöra dessa gemensamma element för en enparametrisk skara koner av andra graden. Tre alstringslinjer, resp. tre tangentplan bestämma en tvåparametrisk skara koner.

I det följande skola vi betrakta speciella enparametriska skaror av koniska ytor, särskilt sådana med kinematiska egenskaper, och angiva åskådliga alstringssätt för dem. Det karakteristiska vid ifrågavarande specialisering är i regel rätvinkligt (ortogonalt) läge av vissa linjer, resp. plan.

Vi anföra till en början satser som ha betydelse i det följande.

En kon av andra graden har i allmänhet tre mot varandra vinkelräta symmetriplan. Problemet att bestämma dessa leder till en tredjegrads-ekvation. Man kan det oaktat utföra konstruktionen med passare och linjal i ett plan vars skärningskurva med konen är uppritad förutsatt att kurvan icke är en cirkel.

Med de tre symmetriplanen som koordinatplan är ekvationen för konen

¹ I den högre geometrien betraktas konen som en yta, icke som en kropp.

$$(k) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

vari ingå två parametrar nämligen koefficientförhållandena $a:b:c$. Vi anta i det följande att a, b och $c > 0$ och vidare att $a \geq b$.

Den allmänna teorien för ytor av andra graden gäller jämväl för koner, särskilt ifråga om cirkelsektioner, harmoniska punkter, räta linjer och plan ävensom fokalegenskaper. Endast egenskaper hos de båda skarorna av alstringslinjer kunna icke utan vidare överföras till konen, ty skarorna sammanfalla på konen i en enda.

Cirkelsektionerna äro parallella med tvenne plan, vilka gå genom x -axeln och ha ekvationerna

$$(c) \quad (a^2 - b^2) \frac{y^2}{b^2} - (a^2 + c^2) \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Medelpunkterna i vardera cirkelskaran ligga på en rät linje s. k. *centrallinje*. Den är harmoniskt konjugerad med cirklarnas plan i avseende å konen. På den räta konen sammanfalla de båda cirkelskarorna i en enda.

Emedan varje kon av andra graden har cirkelsektioner, kan man betrakta varje sådan kon som en (i allmänhet sned) cirkelkon. För den räta konen är det karakteristiskt att den har oändligt många symmetriplan.

Även de koniska sektionernas fokalegenskaper ha som nämnt sin motsvarighet hos konerna av andra graden: Summan eller skillnaden mellan de vinklar en godtycklig alstringslinje på konen bildar med tvenne fasta räta linjer genom konens spets, de s. k. *fokalaxlarna*, är konstant. Liksom de koniska sektionerna kunna ritas medels en åskådlig »trådkonstruktion», erhållas konerna av andra graden mekaniskt så att man fäster en böjlig men icke tänjbar hinna vid fokalaxlarna och spänner den medels en stav vridbar kring konens spets. Staven kan då vridas som en alstringslinje s på konen. Konens tangentplan längs s bilda lika stora vinklar med de plan som sammanbinda s med fokalaxlarna.

Fokalaxlarnas ekvationer äro

$$(f) \quad y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

Deras polarplan i avseende å konen äro *direktrisplan*. Konen utgör geometriska orten för de punkter i rymden vilkas avstånd från någondera fokalaxeln och motsvarande direktrisplan ha ett givet förhållande.

Alla i avseende å koordinatplanen symmetriska koner av andra graden bilda en tvåparametrig skara. Ur denna välja vi några speciella en-parametriga skaror för närmare betraktelse.

Främst nämna vi den *räta konen* eller rotationskonen, även kallad cirkelkon. Hos den sammanfalla fokalaxlarna med konens axel och skär alla cirklarnas plan vinkelrätt i deras medelpunkter. Med den sammanfalla alltså även centrallinjerna.

Ekvationen (k) representerar en rät kon eller rotationskon alltid och endast om

$$(1) \quad a = b.$$

Härefter anför vi speciella arter av koner parvis enligt den kända *dualitet* där räta linjer genom en punkt och plan genom en punkt motsvara varandra. Låta vi homologa räta linjer och plan vara vinkelräta, få vi den dualitet som i den sfäriska trigonometrien spelar en stor roll. Man kan då använda benämningen *reciprocitet*.

Lägga vi genom spetsen av en kon av andra graden normalplan till konens alstringslinjer, erhålla vi som envelopp för dessa plan likaså en kon av andra graden och kunna betrakta de reciproka konerna

$$(k) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (k') \quad a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0.$$

Man finner härvid att vardera konens fokalaxlar äro vinkelräta mot reciprokalkonens cirkelsektioner. Vardera konens direktrisplan äro vinkelräta mot reciprokalkonens centrallinjer. Dessa egenskaper komma i det följande till användning varvid vi utföra betraktelserna för konen (k).

Om konen (k) har tre mot varandra vinkelräta alstringslinjer, kallas den enligt Schröter *liksidig*. Det visar sig att konen har antingen en oändlig skara sådana grupper av alstringslinjer eller inga.

Om konen (k) har tre mot varandra vinkelräta tangentplan, kallas den *dualt liksidig*. Det visar sig att konen har antingen en oändlig skara sådana grupper av tangentplan eller inga.

De tre betraktade, mot varandra vinkelräta alstringslinjerna eller tangentplanen bilda ett s. k. »kubhörn» och vi kunna därför säga:

Ett kubhörn kan rulla som inskrivet i vilken som helst liksidig kon och endast i liksidiga koner.

Som villkor för att konen (k) skall vara liksidig kan man härleda följande:

$$(2) \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Ett kubhörn kan rulla såsom omskrivet kring vilken som helst dualt liksidig kon och endast kring dualt liksidiga koner.

Som villkor för att konen (k) skall vara dualt liksidig kan man härleda följande:

$$(3) \quad a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

En kon (k), för vilken relationen (2) är uppfylld, går genom de räta linjerna

$$\pm x = \pm y = z.$$

Dessa kunna betraktas som de fyra huvuddiagonalerna i en kub och man kan därför säga:

Varje liksidig kon är omskriven kring en kub, d. v. s. kubens hörnpunkter ligga på konen.

De liksidiga och de dualt liksidiga konernas form beror av koefficientförhållandet $a:b$, vilket kan väljas godtyckligt¹.

De plan som av konen (k) utskära cirklar, äro i allmänhet icke vinkelräta mot någon av konens alstringslinjer. Om det emellertid finnes tvenne alstringslinjer som äro ortogonala mot var sin skara cirkelplan, säger man enligt Schröter att konen (k) är *ortogonal*.

Villkoret för att konen (k) skall vara ortogonal är

$$(4) \quad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0.$$

De sålunda erhållna ortogonala konerna karakteriseras av att de innehålla de räta linjerna

$$\frac{x}{\pm i} = \frac{y}{\pm 1} = \frac{z}{1},$$

och de äro således alla omskrivna kring ett och samma imaginära fyrsidiga hörn.

Rör sig en rät diedervinkel så att dess plan glida genom tvenne fasta, varandra skärande men icke

En kon (k) för vilken relationen (3) är uppfylld, tangerar planen

$$\pm x \pm y + z = 0.$$

Dessa kunna betraktas som fyra sidoplan i en reguljär oktaeder och man kan därför säga:

Varje dualt liksidig kon är inskriven i ett oktaederhörn.

I allmänhet äro inga tangentplan till konen (k) vinkelräta mot någondera fokallaxeln. Om det emellertid finnes mot fokallaxlarna ortogonala tangentplan, säger man att konen (k) är *dualt ortogonal*.

Villkoret för att konen (k) skall vara dualt ortogonal är

$$(5) \quad -a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

De erhållna dualt ortogonala konerna karakteriseras av att de tangera de fyra planen

$$\pm x \pm iy + z = 0,$$

och de äro således alla inskrivna i ett och samma imaginära fyrsidiga hörn.

Rör sig en rät vinkel med fast spets så att dess ben beskriva tvenne fasta, icke ortogonala plan, så

¹ Lämpliga modeller kunna konstrueras med värdena

$$a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{3}}, c = \frac{1}{2}; \quad a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{3}}, c = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

ortogonala räta linjer, så beskriver diederns kant en ortogonal kon¹. De fasta linjerna äro symmetrilinjer på konen och ligga i centrallinjernas plan.

Om axlarna till tvenne direkt kongruenta planknippen skära varandra men icke vinkelrätt, så är orten för motsvarande plans skärningslinje en ortogonal kon. Nämn- da axlar ligga symmetriskt på konen¹.

Satserna till vänster äro tydligen generaliseringar till rymden av vissa kända egenskaper hos cirkeln. De kunna lätt bevisas elementärgeometriskt. Även satserna till höger kunna tydas på samma sätt men erhållas även lätt om man ersätter de i satserna till vänster betraktade räta linjerna och planen med deras normalplan, resp. normaler genom en punkt.

Om genom spetsen av en kon gå tvenne axlar a_1 och a_2 sådana att varje genom någondera av dem lagt plan av konen utskär en rät vinkel, benämnes konen med Pappus' namn. Axlarna äro konens centrallinjer.

För att konen (k) skall ha nämnda egenskap, fordras att

$$(6) \quad b = c,$$

d. v. s. konens toppvinkel i yz -planet skall vara rät.

Enveloppen för alla plan genom en punkt, vilka bilda lika stora vinklar med en given rät linje och ett därmed icke parallellt plan, är en Pappus' kon. Den givna linjen och det givna planet äro centrallinje och ett cirkelplan för ifråga- varande kon.

är enveloppen för vinkelns plan en dualt ortogonal kon. De fasta planen tangera konen längs symmetrilinjer belägna i fokalaxlarnas plan.

Om tvenne direkt kongruenta plana strålnippen ha gemensamt centrum, så är enveloppen för alla plan genom motsvarande strålar en dualt ortogonal kon. Nämn- da plan tangera konen symmetriskt.

Om spetsen av en kon är centrum för tvenne plana strålnippen α_1 och α_2 sådana att de genom en- var stråle till konen lagda tangentplanen äro vinkelräta, benämnes konen med Hachette's namn. Planen äro konens direktrisplan.

För att konen (k) skall ha nämnda egenskap, fordras att

$$(7) \quad a = c,$$

d. v. s. konens toppvinkel i xz -planet skall vara rät.

Orten för alla punkter med lika stort avstånd från en given rät linje och ett därmed icke parallellt plan är en Hachette's kon. Linjen och planet äro fokalaxel och tillhörande direktrisplan för ifråga- varande kon.

¹ Skära de givna räta linjerna icke varandra, uppstår en ortogonal enmantlad hyperboloide. Sådana ytor spela en roll bl. a. i fotogrammetrien.

Som ytterligare exempel kan nämnas: Varje storcirkel på en sfär projicieras från en godtycklig punkt på sfären medels en Pappus' kon. Normalplanen mot projektiionsstrålarna genom en fast punkt tangera en Hachette's kon.

Kartongmodeller bestående av ett antal cirkelsektioner av en kon äro som känt *deformabla*. Ett slags normalläge uppkommer då de båda cirkelskarornas plan äro vinkelräta mot varandra. Då föreligger en Reye's kon. Som analytiskt villkor härför har man

$$(8) \quad \frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0.$$

Den nämnda konstruktionen av en kon medels en vid dess fokalaxlar fäst hinna ger koner, vilkas form varierar med vinkeln mellan fokalaxlarna. Ett normalfall uppkommer då fokalaxlarna bilda en rät vinkel. Som analytiskt villkor härför har man

$$(9) \quad -a^2 + 2b^2 + c^2 = 0.$$

Det torde av ovanstående ha framgått att konerna av andra graden icke endast utgöra relativt ointressanta special- eller gränsfall av allmänna ytor utan att dessa koner även i sig själv förtjäna uppmärksamhet och att sådana uppträda i olika sammanhang.

NUMERISKA BERÄKNINGAR PÅ SIFFERMASKINER

CARL-ERIK FRÖBERG

Inledning. För någon tid sedan inträffade det att en svensk tidning hörde sig för, huruvida man för dess räkning kunde åtaga sig att lösa studenttalen i matematik på matematikmaskin. Vederbörande journalist torde i andanom ha sett hurusom man via elektrisk skrivmaskin befordrade uppgifterna in i maskinen, vilken sedan blixtnabbt löste problemen och automatiskt skrev ut svaren. Detta betraktelsesätt är nog inte ovanligt hos den breda allmänheten, som endast känner till matematikmaskinerna från mer eller mindre sensationella rapporter i dagspressen, men även om man inte faller för så grova överdrifter, känner man sig nog ibland osäker om matematikmaskinernas möjligheter. Avsikten med denna artikel är att ge en översikt härav, och det ligger då i sakens natur, att den som redan ingående sysslat med numeriska beräkningar på siffermaskiner inte rimligen kan vänta sig att här finna några epokgörande eller ens nya synpunkter.

För att det fortsatta resonemanget skall ha något att bygga på är det nödvändigt med en kortfattad beskrivning av en siffermaskin ur fysikalisk synpunkt. Då vi endast intressera oss för det rent principiella, kan denna beskrivning göras mycket litet teknisk; den som vill veta mera härom kan utan svårighet få sitt lystmäte på annat håll [1—8].

Numeriska beräkningar kräver ett aritmetiskt organ, som är i stånd att utföra de enklaste aritmetiska operationerna.

Det är vidare klart att lösandet av ett problem kräver ett stort antal operationer i en viss förutbestämd ordning och med hänsyn till vissa alternativa möjligheter. Följaktligen behövs ett administrativt organ, som ombesörjer dessa uppgifter. Vidare måste vi också ha en möjlighet att »anteckna» och »stryka ut» både räkneprogram, behövliga konstanter, mellanresultat och de slutliga värdena. Alla dessa uppgifter omhänderhas av minnet. Slutligen kräves också organ som ombesörjer kommunikation mellan maskinen och omvärlden. För inskrivande användes ofta hålremsor och för utskrivande elektrisk skrivmaskin.

Till en början arbetade man med mekaniska eller elektromekaniska metoder, men först sedan man tagit elektroniken till hjälp har man

uppnått de höga hastigheter, som äro en förutsättning för framgångsrikt numeriskt arbete med stora problem. Vad själva minnet beträffar är det elektrostatiske f. n. det snabbaste, medan en magnetostatisk typ anses mycket lovande för framtiden. Tekniskt sett har en oerhörd utveckling ägt rum under de senaste 10 åren, och antalet maskiner växer nästan lavinartat. Medan man ännu i slutet av 40-talet kände till varje enskilt projekt och nästan kände sig som personlig vän till varje existerande matematikmaskin, är det numera omöjligt för en enda person att hålla reda på alla projekt eller ens färdiga maskiner.

Självfallet har under denna tid en utveckling ägt rum även för de numeriska metoderna, men den har av naturliga skäl varit mindre iögonfallande. I fortsättningen skall vi först syssla med hur maskinen instrueras att lösa problem och sedan ge en rad exempel på enkla numeriska metoder, som med fördel kan användas vid arbeten med siffermaskiner och endast i förbigående beröra mera avancerad metodik.

Representation av tal. Först betrakta vi några enkla fakta som spela en roll vid val av talsystem. Man kan då genast göra den iakttagelsen, att maskinens grundelement till sin natur äro binära. Ett elektronrör kan vara ledande eller icke-ledande, på ett magnetiskt material kan man lagra dipoler i ena eller andra riktningen, på skärmen i ett katodstrålerör kan man lagra elektriska laddningar på hög eller låg potential, en liten ferritkärna kan befinna sig i övre eller nedre delen av hysteresiskurvan osv. Det är då knappast överraskande, att man för det stora flertalet maskiner valt det binära talsystemet, speciellt som detta även är väl lämpat för rent logiska operationer. I det binära systemet ha vi endast siffrorna 0 och 1, och ett godtyckligt tal framställs i formen:

$$a_m 2^m + \dots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 + a_{-1} 2^{-1} + \dots + a_{-n} 2^{-n}; a_k = 0 \text{ eller } 1.$$

T. ex. är $10011 = 19$, $0.101 = \frac{5}{8}$ och $110.11 = 6.75$. Man finner lätt, att ett tal skrivet i binär notation blir ungefär tre gånger så långt som i decimal notation. Ofta sammanfattar man därför fyra binära siffror till en hexadecimal siffra (bas 16). Därvid betecknas vanligen talen 10, 11, 12, 13, 14 och 15 med A, B, C, D, E och F . T. ex. är $3E8 = 3 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 8 = 1000$; $0.1C71C71\dots = 1/16 + 12/16^2 + 7/16^3 + 1/16^4 + \dots = \frac{1}{6}$. Konversion från ett system till ett annat är i princip en enkel procedur, vars detaljer överlämnas till läsaren. Då det rör sig om större mängder av tal, brukar man låta maskinen ombesörja översättningen.

Det ligger i sakens natur att maskinen endast kan arbeta med en viss förutbestämd noggrannhet, vilken beror av konstruktionen. Vanligen ligger denna noggrannhet mellan 30 och 45 binära siffror, dvs. ungefär

10—15 decimala siffror. Visserligen kan man genom särskilda arrangemang öka denna noggrannhet till den dubbla, tredubbla osv., men samtidigt stiger räknetiden starkt (omkring 7 gånger vid en fördubbling av noggrannheten). I princip måste alltså i normala fall alla från noll skilda positiva tal i maskinen ligga mellan 2^p och 2^{p-q} , där q är ungefär $= 40$. Valet av p är rent konventionellt, t. ex. $p = 0$ (BESK i Stockholm, IAS Electronic Computer i Princeton), $p = 2$ (SEAC i Washington) och p variabel mellan -63 och $+63$ (BARK i Stockholm). Värdet $p = 0$ torde vara det vanligaste och medför, att produkten av två tal också kommer att ligga inom det tillåtna området. Denna begränsning av maskinens talområde har vissa konsekvenser vid användningen. Man måste alltid förvissa sig om att man vid addition och subtraktion ej får ett resultat, som är numeriskt större än 1, och vid division måste man först kontrollera, att dividenden är numeriskt mindre än divisorn. Man kan då fråga sig, hur man på maskin kan beräkna t. ex. $4+7$, då varken själva talen eller summan kan skrivas in i maskinen. Svaret är enkelt: man beräknar i stället t. ex. $4 \cdot 2^{-10} + 7 \cdot 2^{-10}$ och behöver sedan endast göra sig fri från skalfaktorn 2^{-10} .

Vi skall i detta sammanhang också i korthet beröra representationen av negativa tal. Här användes i stort sett två principer. Dels kan man skriva ett tal som dess absolutbelopp med plus- eller minustecken, dels kan man låta första siffran vara teckensiffra, varvid alla tal definieras modulo 2. Vanligen låter man då 0 betyda plus och 1 minus. Sålunda skall 0.11 betyda $+\frac{3}{4}$ och 1.011 betyda $1+\frac{3}{8}-2 = -\frac{5}{8}$. Denna konvention medför naturligtvis vissa konstruktionsmässiga komplikationer för multiplikationen, men dessa visa sig vara ganska lätt överkomliga. Divisionen utföres enkelt genom successiva additioner och subtraktioner allteftersom dividenden och divisorn ha motsatt eller samma tecken.

Operationer. Vi skall nu också betrakta övriga operationer, som maskinen bör kunna utföra. Först ha vi då en grupp order, varigenom tal kunna flyttas från en plats till en annan. Dessa order äro principiellt enkla och fordra knappast någon kommentar. Så ha vi de elementära aritmetiska operationerna, vilka vanligen kompletteras med skift och logisk multiplikation. Skiftoperationen innebär multiplikation med en positiv eller negativ potens av 2; genom t. ex. 5 stegs vänsterskift multipliceras talet med 32. Logisk multiplikation innebär multiplikation siffra för siffra. Denna mycket användbara operation kan begagnas på följande sätt. Om man önskar extrahera siffrorna nummer 3—7 i ett givet tal, kan man göra detta genom logisk multiplikation med talet 0011111000...

Förutom de förut nämnda inläsnings- och utskrivningsorderna ha vi

till sist en grupp mycket viktiga administrativa order. Det visar sig nämligen vid formuleringen av ett räkneprogram att man förr eller senare måste bestämma det fortsatta arbetet med hänsyn till de resultat, som maskinen tidigare har kommit till. Rent matematiskt kan ett sådant villkor alltid formuleras: Om $a \geq 0$ skall maskinen följa en viss på förhand given rutin, och om $a < 0$ skall i stället en annan på förhand given rutin följas. Här betyder a ett av maskinen beräknat villkorstal. Denna villkorliga hopporder kompletteras sedan med en ovillkorlig hopporder, vilken man kan använda, då man efter utnyttjande av alternativa möjligheter vill återgå till huvudrutinen. Det är ingen överdrift att påstå, att dessa order ger maskinerna deras stora flexibilitet, och man kan lugnt säga, att iteration av vissa delar av programmet är själva kärnan i automatiseringen av numeriska beräkningar.

Planering och kodning. Vi skall nu närmare betrakta vilka moment som ingår i en numerisk behandling av ett problem. Först kommer som regel en omfattande matematisk planering. Vi skall senare granska olika detaljer i denna planering och även ge en del exempel. Planeringen syftar till val av numerisk metod, som approximerar det givna problemet, undersökning av felens storlek, val av intervalllängder och skalfaktorer där sådana behövas samt bestämmande av checkningsprocedur. Genom planeringen brytes problemet ner i sina elementära delar, och det gäller sedan att översätta detta till ett för maskinen begripligt språk. Denna översättning sker genom kodningen. Till hjälp vid kodens utarbetande brukar man vanligen rita ett flödesdiagram (»flow diagram»), som åskådliggör det logiska sammanhanget i beräkningen. Ett diagram visande beräkningen av e^{-x} för $0 \leq x < 1$ finns i fig. 1.

Observera, att efter box II såväl u_{n-1} som s_{n-1} äro kända (eftersom just

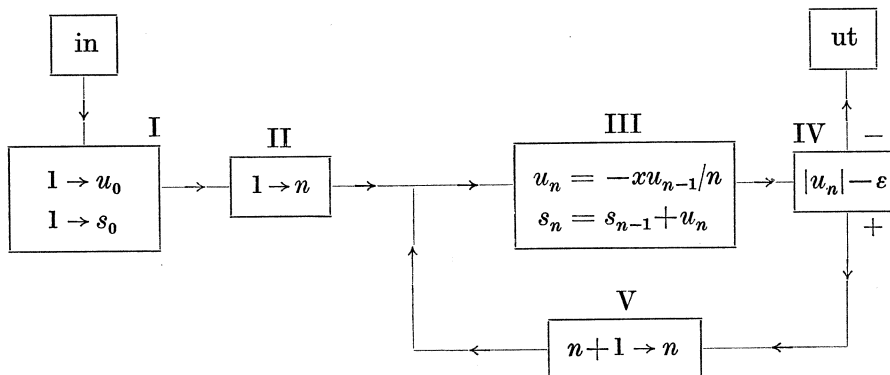


Fig. 1

här n är $= 1$) och att formlerna i box III alltså fungerar redan från början. Beräkningen slutar då $|u_n| < \varepsilon$ och för detta n -värde har man $s_n = e^{-x}$ med ett fel av storleksordningen ε .

Erfarenheten visar, att en kod praktiskt taget aldrig är korrekt redan från början. För att underlätta felsökningen brukar man skära sönder programmet i mindre stycken och låta maskinen göra halt efter varje sådant stycke och jämföra dess resultat med på förhand beräknade värden. Men även om man lyckats få programmet korrekt, kvarstår alltså möjligheten, att maskinen gör sporadiska fel, som kunna undgå att upptäckas. Många förslag ha under åren framförts för att eliminera dylika enstaka missöden. Man har exempelvis tänkt sig att göra maskinen självcheckande genom viss överrepresentation, att bygga två identiska maskiner, som räkna parallellt och efter varje operation jämföra sina resultat, att låta maskinen beräkna varje sak på två olika sätt och jämföra resultaten osv. Alla dessa metoder äro kostsamma men leda ändå inte till någon hundra procentig säkerhet. De flesta maskiner har därför inte inbyggd checkning, utan man måste särskilt koda de checkar man önskar.

Enkla exempel på hur en sådan checkning fungerar är följande. Om man på vanligt sätt vill beräkna $\cos x$ ur dess potensserie, räknar man även ut $\sin x$ och kontrollerar sedan, att $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Antag vidare, att vi söker de båda fundamentallösningarna u och v till ekvationen $y'' + P(x)y = 0$ genom numerisk integration enligt någon standardmetod. Genom insättning av u och v i ekvationen samt elimination finner man omedelbart $u''v - uv'' = 0$, som ger det kända villkoret $u'v - uv' = \text{konstant}$. Detta erbjuder en enkel och i vissa sammanhang användbar metod för checkning. Att den inte är vattentät inser man genom att ersätta u med $au + bv$ och v med $cu + dv$, då man får samma värde på konstanten, om $ad - bc = 1$. Det trigonometriska exemplet framgår f.ö. som specialfall för $P(x) = 1$. — En ofta mycket effektiv check är att helt enkelt göra om integrationen med annan steglängd.

Det är nu en naturlig sak, att i många problem vissa gemensamma beräkningar uppträda. Exempel på sådana äro översättning från decimal till binär form och omvänt, beräkning av vissa vanliga funktioner, räkning med variabla skalfaktorer (s. k. flytande binärpunkt), räkning med dubbel noggrannhet, numerisk integration och matrisinversion. För att inte behöva koda dessa operationer särskilt varje gång använder man s. k. subrutiner, som man kodat en gång för alla. En subrutin för logaritmen behöver endast förse med värdet på x , så lämnar den ifrån sig värdet på $\log x$, och man behöver inte närmare bekymra sig för de mellanliggande räkningarna. Dessa subrutiner kunna lagras direkt i minnet, om detta är

tillräckligt stort, eller också kan man samla dem på hålremсор i ett särskilt bibliotek.

Om fel. Vi ha tidigare i korthet nämnt hur man i viss utsträckning kan undgå tillfälliga fel, beroende på förbiseenden vid kodningen eller bristande funktionering hos maskinen. Låt oss nu även betrakta ett par typer av mera »reguljära» fel. Vi observera då först, att vi i många fall måste göra matematiska approximationer, t. ex. ersätta en derivata med en differenskvot eller en integral med en summa. Fel av denna karaktär brukar benämnas trunkeringsfel och kan i allmänhet göras godtyckligt små genom tillräckligt fin intervallindelning.

Man måste nu hålla i minnet, att maskinen endast kan räkna med ett visst antal siffror. Betecknas detta antal med N , ger addition och subtraktion i tillåtna fall ånyo N siffror, multiplikation $2N$ siffror och division i allmänhet ett oändligt antal siffror. I de båda senare fallen är det alltså nödvändigt att avkorta resultaten. Det fel som härvid uppstår, avrundningsfelet, är av storleksordningen $2^{-(N+1)}$. Även om man kan räkna med att avrundningsfelen i stor utsträckning kompensera varandra, orsaka de vid långa räkningar en allvarlig förlust i antalet signifikanta siffror. I vissa fall kan man t. o. m. förlora all signifikans, och slutresultatet säger ingenting. Botemedlet måste här bli räkning med dubbel noggrannhet, och i övrigt bör man i förekommande fall söka avpassa intervalllängd etc. så att summan av trunkeringsfel och avrundningsfel minimeras (en ändring av steglängden påverkar de båda feltyperna i olika riktningar).

Matematisk planering. Vi övergå nu till den matematiska planeringen och skall särskilt uppehålla oss vid sådana beräkningsmetoder, som inte kan sägas höra till de konventionella. Redan tidigare har påpekats, att karakteristiskt för matematikmaskinernas funktionssätt är just iteration av vissa delar av programmet. Detta kan vara en mycket allmän form av iteration genom att maskinen successivt också kan modifiera sitt eget program. Detta innebär bl. a. att man inte på förhand vet vilket program maskinen i verkligheten kommer att följa. Vi ge nu först ett par enkla men typiska exempel på iterativa metoder. Antag, att vi söker $\sqrt{a}$, där $0 \leq a < 1$. Välj $x_0 = \frac{1}{2}(1+a)$ och sedan $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$. Man finner då lätt att x_n bildar en monotont avtagande följd, som konvergerar mot den sökta kvadratroten. Betecknas felet med ε_n finner man $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2/x_n$. Detta innebär, att om man har 6 riktiga siffror i en approximation, kan man vänta sig 12 i nästa osv. Liknande iterativa metoder kan lätt konstrueras även i andra fall, t. ex. för division, kubik-

rötter och n :e rötter. I detta sammanhang kan också erinras om den kända formeln för den fullständiga elliptiska integralen $K(k) = \frac{1}{2}\pi \cdot M(1, k')^{-1}$, där $k^2 + k'^2 = 1$ och M betecknar aritmetisk-geometrisk mediet.

De särskilt intressanta numeriska problemen uppträder i samband med lineära ekvationssystem av hög ordning, ordinära differentialekvationer med givna randvärden i två punkter, partiella differentialekvationer, integralekvationer och integrodifferentialekvationer, grupp teori, kombinatorik, talteori samt lineära olikheter av hög ordning. Härtill kommer problem, som inte låter sig inrangeras i någon bestämd grupp och som i vissa fall kräver metoder helt utanför de konventionella för sin lösning. Det kan i detta sammanhang inte bli tal om någon systematisk genomgång av alla gängse numeriska metoder, som kan tillämpas för lösning av dessa problem, utan vi får nöja oss med ett antal typiska exempel.

Algebraiska ekvationer. Låt oss först betrakta en vanlig algebraisk ekvation med komplexa koefficienter och gradtalet m , och antag att vi söker de m rötterna. Då man räknar för hand har man möjlighet att använda olika teorem för rötternas lokalisering och därvid ta hänsyn till ekvationens speciella utseende. På en siffermaskin däremot vill man helst ha en enhetlig metod, och det kan då visa sig praktiskt att använda formeln:

$$n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C \frac{P'(z)}{P(z)} dz,$$

där n är antalet rötter till ekvationen $P(z) = 0$ innanför konturen C . Exempelvis kan man dela in en del av planet i ett antal kvadrater och sedan utföra integrationen för varje kvadrat med början i övre vänstra hörnet. Sedan tryckes varje n -värde, och då en vågrät rad kvadrater är klar, låter man skrivmaskinen börja på ny rad samtidigt som nästa rad påbörjas. För $m = 20$ kan man då få en figur av vidstående utseende.

Det kan f. ö. nämnas, att denna metodik att direkt vid utskriften låta skrivmaskinen framställa resultatet i diagramliknande form ofta användes, och i tillämpliga fall kan man sedan

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	2	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	3	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	2	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fig. 2

också rita nivåkurvor. Vid maskinell beräkning av vissa molekylstrukturer får man direkt från skrivmaskinen en grov översiktsbild genom

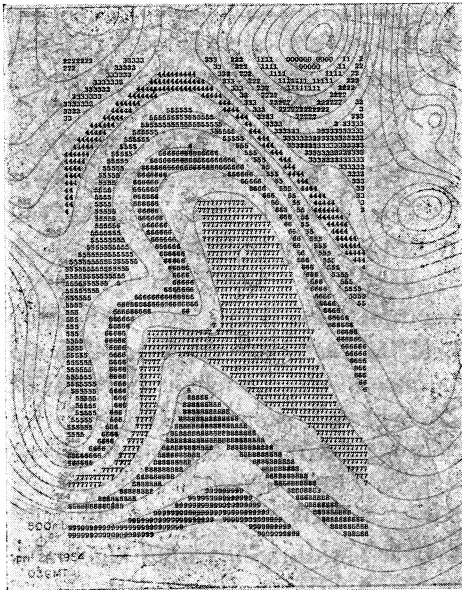


Fig. 3. Höjden av 500 millibar-yan den 24 april 1954. (Från Tellus 6, 2, maj 1954).

att maskinen trycker ett tecken när en beräknad storhet över-skrider ett visst på förhand gi-vet minimivärde ([6] p. 204, [7] p. 200). Genom detta konst-grepp kan man bemästra det stora siffermaterial, som en funktion av två variabler er-bjuder, och framför allt är det möjligt att direkt göra det åskådligt utan en föregående tidsödande analys. (Se fig. 3.) På några maskiner har man också ett katodstrålerör, som kan ge en bild av en beräknad funktion av en variabel.

Lineära ekvationssystem och egenvärdesproblem. Vi be-traktar ett lineärt ekvations-system skrivet i formen

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Välkända, direkta lösningsmetoder, väsentligen byggande på elimination, ha angivits av bl. a. Gauss, Jordan och Choleski. Men vi kan också betrakta problemet rent geometriskt (se Stiefel [9], p. 43). Vi bildar funktionen

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k - \sum_i b_ix_i,$$

där vi nu antaga $a_{ik} = a_{ki}$ och söker minimera F . På vanligt sätt erhålles $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_k a_{ik}x_k - b_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), dvs. just det ekvationssystem vi betraktar. Med sedvanliga matris- och vektorbeteckningar kan vi kortare skriva: $F(x) = \frac{1}{2}x'Ax - b'x$, $Ax - b = 0$, om x är lösningsvektorn. Tag nu en vektor $y \neq x$, så har vi $F(y) = \frac{1}{2}y'Ay - b'y$ och $Ay - b = r$, där r är en residualvektor som blir 0 för $y = x$. Ekvationen $F(y) = C$ kan geometriskt uppfattas som en skara ellipsoider i n dimensioner (vi antar den kvadratiske formen positivt definit). Vi söker nu successivt tvinga ned r mot 0 . Först konstaterar vi, att grad $F(y) = r$, dvs. r är normal till den genom y gående ellipsoiden. Välj nu $y_1 = y + cp$ och sätt $r_1 = Ay_1 - b$,

så följer $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + c\mathbf{A}\mathbf{p}$. Men eftersom vi vill göra $\mathbf{r}_1$ så liten som möjligt är det lämpligt att välja c så att $\mathbf{y}_1$ kommer att hamna på en ellipsoid så långt in mot medelpunkten som möjligt. (Detta ger visserligen inte minimum, men man bör här tänka sig ellipsoiderna som ett slags nivååtor.) Då måste vektorn $\mathbf{p}$ utgående från $\mathbf{y}$ vara tangent till denna ellipsoid, dvs. $\mathbf{r}'_1\mathbf{p} = 0$. Ur detta villkor kan c lätt bestämmas: $c = -\mathbf{r}'\mathbf{p}/\mathbf{p}'\mathbf{A}\mathbf{p}$. Ännu förfoga vi fritt över vektorn $\mathbf{p}$. Ofta väljer man helt enkelt $\mathbf{p} = -\mathbf{r}$ (»Method of steepest descent«). Ett ännu bättre val är emellertid möjligt, nämligen att låta $\mathbf{p}_k$ vara konjugerad riktning till $\mathbf{p}_{k-1}$, alltså $\mathbf{p}'_k \cdot \mathbf{A}\mathbf{p}_{k-1} = 0$ (»Conjugate gradient method«). Man inser lätt, att man på detta sätt kommer fram till ellipsoidens centrum, dvs. lösningen av systemet, i exakt n steg.

$$\text{Numeriskt exempel: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = -\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{r}'_0\mathbf{p}_0 = 37, \quad \mathbf{p}'_0\mathbf{A}\mathbf{p}_0 = 171, \quad c_0 = 37/171$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + c_0\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 379/171 \\ 393/171 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 384/171 \\ -64/171 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (\text{alltså } \mathbf{p}'_1\mathbf{A}\mathbf{p}_0 = 0)$$

$$-\mathbf{r}'_1\mathbf{p}_1 = 64, \quad \mathbf{p}'_1\mathbf{A}\mathbf{p}_1 = 1368, \quad c_1 = 8/171$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + c_1\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{som ger lösningen.}$$

I detta sammanhang skall vi också i korthet beröra beräkning av egenvärden till en matris. Dylika problem uppträda t.ex. vid beräkning av atomernas och atomkärnornas energispektrum. För enkelhetens skull antar vi $\mathbf{A}$ vara en symmetrisk, positivt definit matris och nöjer oss till en början med att söka största egenvärdet. Antag att egenvärdena är $c_1, c_2, \dots$ och motsvarande egenvektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$. Då kan en godtycklig vektor $\mathbf{x}$ skrivas som en lineärkombination av egenvektorer: $\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots$ med okända koefficienter $a_1, a_2, \dots$. Vi har $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = c_k\mathbf{x}_k$ och antar, att c_1 är det största egenvärdet. Bilda nu successivt $\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}^2\mathbf{x}, \dots$, så erhålles

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x}/c_1^n = a_1\mathbf{x}_1 + (c_2/c_1)^n a_2\mathbf{x}_2 + \dots \approx a_1\mathbf{x}_1.$$

Då egenvektorn är bestämd så när som på en konstant faktor, inses, att man erhåller den mot största egenvärdet svarande egenvektorn genom att upprepade gånger multiplicera en godtycklig vektor med $\mathbf{A}$. Egen-

värdet fås lätt ur två på varandra följande approximationer till egenvektorn.

Numeriskt exempel: Matrisen $\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ får upprepade gånger operera på $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och ger: $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 74 \\ 51 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1342 \\ 903 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 24206 \\ 16179 \end{pmatrix}$; ... De övre komponenterna ger 20, 18.5, 18.135, 18.037, ... medan de undre komponenterna ger 15, 17, 17.706, 17.917, ... som approximationer till det största egenvärdet 18; motsvarande egenvektor är $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Om man vill ha fatt i samtliga egenvärden och egenvektorer, kan detta förfaringssätt inte med fördel användas. En elegant metod beskrevs redan av Jacobi och går i korthet ut på följande. Man utväljer det största icke-diagonala elementet a_{ik} och utför en vanlig vridning i två dimensioner, varvid transformationsmatrisen har ettor i huvuddiagonalen och nollor för övrigt, utom på platserna (i, i) , (i, k) , (k, i) och (k, k) . Efter vridningen skall elementet a_{ik} (liksom $a_{ki} = a_{ik}$) ha övergått till 0. Proceduren upprepas, och för varje steg får huvuddiagonalen en allt starkare dominans. I slutstadiet får vi alla egenvärdena i huvuddiagonalen och egenvektorerna som kolonner i den totala transformationsmatrisen.

Ordinära differentialekvationer. Vi betraktar nu ett exempel på ordinära differentialekvationer med givna randvärden i två punkter. Den vanliga metoden är att konstruera en funktionsföljd, där varje funktion satisfierar differentialekvationen samt uppfyller randvillkoren i ena punkten, och från denna skara söka plocka fram en funktion, som uppfyller randvillkoren även i den andra punkten. Denna metod är naturligtvis fullt användbar även på en siffermaskin. Emellertid kan man i stället utgå från en funktion, som uppfyller randvillkoren i båda punkterna men däremot inte differentialekvationen. Genom ett lämpligt iterationsförfarande frambringar man en serie nya funktioner, som alltjämt uppfylla randvillkoren och som dessutom allt bättre satisfiera differentialekvationen. Om denna funktionsföljd har en gränsfunktion, kan man vänta sig, att denna utgör lösningen på problemet.

Följande exempel anföres av Hartree ([1], p. 125). Vi söker lösningen till ekvationen $y''' + (1+y^2)y'' = 0$ med randvillkoren $y(0) = y'(0) = 0$, $y'(\infty) = 1$ och betraktar en funktionsföljd, som är definierad av $y_{i+1}''' + (1+y_i^2)y_{i+1}'' = 0$. Lösningen kan skrivas:

$$y_{i+1} = \frac{\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \cdot \exp\left(-\int_0^\eta (1+y_i^2) d\zeta\right)}{\int_0^\infty d\eta \cdot \exp\left(-\int_0^\eta (1+y_i^2) d\zeta\right)}.$$

Som utgångsfunktion kan man välja $y_0 = x$ (trots att den ej uppfyller randvillkoret $y'(0) = 0$), och den fortsatta räkningen kan göras numeriskt med stor noggrannhet. Denna metodik är mycket väl lämpad för maskinell räkning. — Naturligtvis finns det en mängd andra metoder, av vilka många ännu ej på allvar prövats på siffermaskiner. I vissa fall kan man representera lösningen till en differentialekvation genom en bestämd integral. Denna är då ofta mycket invecklad men behärskas ändå lätt med hjälp av en siffermaskin. I andra fall kan differentialekvationen betraktas som Euler-ekvation till ett variationsproblem osv.

Partiella differentialekvationer. Vid numerisk behandling av sådana ekvationer med traditionella metoder brukar man approximera med en lämplig differensekvation. Om ursprungsekvationen är linjär, får man ett system av linjära ekvationer (se t.ex. [10]). Antag sålunda, att vi har två oberoende variabler samt att vi kan indela planet i $10 \cdot 10$ maskor (vilket i många fall säkert är en grov approximation). Detta ger då ett ekvationssystem med 100 obekanta, visserligen med de flesta koefficienterna $= 0$, men ändå erbjudande aktningsvärda svårigheter. I högre dimensionsantal blir situationen självfallet ändå allvarligare. I många fall kan emellertid relaxationsmetoder användas med stor framgång (se [11, 12]).

Tag som exempel ekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varphi(x, y)u = \psi(x, y)$ med givna randvärden $u = f(x)$ för $y = x$ och $u = g(x)$ för $y = 0$ samt $u = 0$ i ∞ . Vi söker lösningen för $x > 0$ och $0 < y < x$. I detta område utmärker vi alla gitterpunkter (ih, kh) , där i och k är heltal. Värdet av u i punkten (ih, kh) i en viss approximation betecknas med u_{ik} och i nästa approximation med u'_{ik} . Uttrycket $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ approximeras som vanligt med:

$$(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik})/h^2.$$

Sedan detta insatts i ekvationen, ersätter vi u_{ik} med u'_{ik} och motsvarande för $u_{i-1,k}$ och $u_{i,k-1}$, varigenom följande likhet erhålles:

$$u'_{ik} = \frac{u_{i+1,k} + u'_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u'_{i,k-1} - h^2 \psi_{ik}}{4 - h^2 \varphi_{ik}}.$$

Från början tilldelas alla inre punkter värdet 0. Relaxationsprocessen börjar i punkten $(2h, h)$, fortsätter sedan med $(3h, h)$, $(3h, 2h)$, $(4h, h)$, $(4h, 2h)$ osv. Genom processen tvingas hela tiden, bildligt talat, randvärdesmateria att flyta in i området, utan att randvärdena själva på

något sätt influeras, och strömningen slutar först då jämvikt uppnåtts, dvs. då vi har kommit fram till lösningen på ekvationen.

Vid numerisk behandling av partiella differentialekvationer genom att i stället lösa motsvarande differensekvation uppträder vissa karakteristiska svårigheter. Redan 1928 visade Courant, Friedrichs och Lewy i ett känt arbete [13] att för hyperboliska ekvationer förhållandet mellan masklängderna måste satisfiera en viss olikhet om konvergens skall erhållas. Under 40-talet har liknande frågor studerats av bl. a. v. Neumann [14, 15, 16], och det har då visat sig, att när den numeriskt erhållna lösningen avvikit avsevärt från den riktiga, så är det ofta brist på konvergens (dvs. hur lösningen till differensekvationen närmar sig lösningen av differentialekvationen) snarare än brist på stabilitet (dvs. avvikelser på grund av avrundningsfel) som åstadkommit detta.

Slutligen må nämnas, att man f. n. är intensivt sysselsatt med numerisk behandling av en rad partiella differentialekvationer emanerande från meteorologien, bl. a. i syfte att erhålla säkrare långtidsprognoser för vädret. En närmare redogörelse för beräkningarna på Besk finns i [17].

Talteori. Till sist anför vi även ett talteoretiskt exempel, som nyligen behandlats på Princeton-maskinen av v. Neumann och Goldstine [18].

De Kummerska summorna $S_p = \sum_{v=0}^{p-1} \cos \frac{2\pi v^3}{p}$ där p är ett primtal av formen $6k+1$, är bildade i analogi med de Gausska summorna och undersöktes ingående av Kummer. Han bevisade, att de satisfierar ekvationen $x^3 - 3px - pA = 0$, där A är ett heltal, som entydigt bestämmes ur villkoren: $4p = A^2 + 27B^2$; $A-1$ jämnt delbart med 3; B heltal. Exempelvis blir $A=1$ för $p=7$ och $A=-5$ för $p=13$. Man har vidare $S_7 = 4.74$, vilket är den största roten till ekvationen $x^3 - 21x - 7 = 0$, och $S_{13} = 1.82$, vilket är den mellersta roten till ekvationen $x^3 - 39x + 65 = 0$. Kummer beräknade själv de 45 första summorna och trodde sig finna, att största, mellersta resp. minsta roten var representerade i proportionerna 3:2:1. Sedan 611 summor nyligen undersökts, fann man i stället de ungefärliga proportionerna 4:3:2, vilket resultat möjligen kunde utgöra grundval till ett försök att bevisa en asymptotisk fördelningsformel.

I detta sammanhang må också nämnas, att K. Goldberg med maskinell hjälp (SEAC, Washington) funnit ett nytt Wilsonskt primtal [19]. Enligt Fermats kända sats är $(p-1)! + 1$ jämnt delbart med p om p är primtal. Om uttrycket även är delbart med p^2 , kallas p ett Wilsonskt primtal. Välkända exempel är $p=5$ och $p=13$, och man fann nu, att även $p=563$ är ett sådant tal.

Sedan Lucas 1876 upptäckte, att $2^{127} - 1$ var primtal, har många

försök gjorts att finna större primtal, men först på den allra senaste tiden har försöken varit framgångsrika. Sålunda kunde Ferrier med hjälp av en vanlig bordsmaskin visa, att $(2^{148}+1)/17$ var primtal. Därefter bevisade Wheeler och Miller med hjälp av EDSAC, Cambridge, att $1+k(2^{127}-1)$ var primtal för $k=114, 124, 388, 408, 498, 696, 738, 744, 780, 934$ och 978 , liksom $180(2^{127}-1)^2+1$. Slutligen har man på SWAC, Los Angeles, beräknat inte mindre än 5 nya Mersenneska primtal, varför man nu känner 17 stycken, nämligen 2^n-1 för $n=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203$ och 2281 . Det sista av dessa, $2^{2281}-1$, har 687 siffror och synes f.n. samtidigt vara det största kända primtalet. En utmärkt uppsats behandlande dessa problem har nyligen publicerats av Bang i NMT [20].

I detta sammanhang må slutligen också nämnas Selters arbeten med lösning av obestämda kubiska ekvationer på Princetonmaskinen, vilka närmare beskrivas i efterföljande artikel i detta häfte [21].

Diverse problem. För åtskilliga typer av problem har man inte någon konventionell metod. Här skall endast erinras om att man ibland med framgång kan använda den i NMT tidigare beskrivna Monte Carlo-metoden (Dahlquist [22]), vilken är utomordentligt väl lämpad för en siffermaskin. Särskilt gäller detta vissa atomfysikaliska tillämpningar, kombinatoriska problem och en del matematiskt ytterst säregna problem härrörande från bl.a. operationsanalysen. I somliga fall kan också en mer eller mindre systematisk trial-and-error-teknik erbjuda en framkomlig väg.

En nära till hands liggande reflexion är att de beskrivna metoderna lika gärna kunde användas vid handräkning. Detta är en viktig sak att lägga märke till: En maskin kan inte göra mer än en mänsklig räknare, den kan endast göra det fortare. I åtskilliga fall kan detta vara väsentligt för problemets lösning. Om nämligen problemet är så beskaffat att alla räkningar måste göras i bestämd ordning, kan man inte nedbringa lösningstiden genom att låta ett stort antal personer arbeta med problemet. En modern elektronisk maskin uträttar på 1 timme lika mycket som en mänsklig räknare på 1 år (detta är en högst ungefärlig siffra!), och det är lätt att inse, att stora grupper av problem tack vare matematikmaskinerna kommit inom räckhåll för numerisk behandling. Orsaken till att man ibland söker sig mindre konventionella vägar fram till en lösning kan då helt enkelt vara, att den konventionella metoden då det gäller stor noggrannhet egentligen är underlägsen men ändå ger en någorlunda hygglig approximativ lösning utan alltför mycket arbete.

Icke-numeriska problem. Trots att detta avsnitt egentligen faller utom ramen för ämnet, ger vi som komplettering några exempel på dylika problem, desto hellre som de erbjuda ett ganska stort allmänt intresse. Först må då nämnas, att man ganska ingående spekulerat över möjligheterna att låta en matematikmaskin spela en rad olika spel såsom nim eller schack, och speciellt om den därvid rentav skulle kunna slå sin konstruktör. (Att den, efter lämplig instruktion, kan frambringa musik har med stor framgång demonstrerats på BESK.) En närmare redogörelse för dessa och likartade frågor skulle här föra för långt, och den intresserade hänvisas till [5].

Därnäst kan också anföras, att man konstruerat en särskild maskin för logiska operationer (Logical Truth Calculator, New York; [5], p. 144), närmast avsedd för användning i affärslivet. Självfallet kan en siffermaskin begagnas för samma ändamål.

Slutligen må även omnämnas, att man sedan flera år arbetat på ett projekt att maskinellt utföra översättning från ett språk till ett annat. Detta har också verkligen utförts i det att tysk matematisk text översförts till engelska, visserligen grammatikaliskt rätt väsentligt förenklad men dock fullt begriplig (Swac, Los Angeles).

Av de nämnda exemplen framgår klart, att en siffermaskin kan användas för de mest skiftande ändamål. Orsaken härtill är väl ytterst, att maskiner faktiskt är i stånd till att utföra arbete inom en stor sektor av det mänskliga intellektets område, närmare bestämt den sektor, som är avhängig av minne och instruktion. Det är alldeles uppenbart att numeriska beräkningar faller inom denna sektor. Vissa författare vill rentav gå ännu längre och mena sig kunna påvisa, att en maskin t.ex. kan lära av sina misstag. Även om detta delvis är riktigt, synes åtskilliga argument som framförts som stöd för denna uppfattning inte helt övertygande.

Det är sed, att varje artikel, som mer eller mindre handlar om matematikmaskiner, slutar med en entusiastisk programförklaring om dessa maskiners utomordentliga framtidsutsikter, och författaren har inte velat bryta mot denna tradition, desto mindre som han själv i någon mån tillhör de övertygades skara. Ett talande tecken utgör i varje fall det ständigt växande antalet maskiner, trots tidigare pessimistiska spådomar, att ingen maskin någonsin skulle fungera tillräckligt länge för att lösa ett problem, eller »optimistiska« funderingar om att redan den första maskinen på några veckor skulle räkna slut på alla problem som fanns.

Siffermaskiner i Norden. I Sverige finns två större siffermaskiner i arbete: relämaskinen BARK och elektronrörsmaskinen BESK, båda tillhörande Matematikmaskinnämnden i Stockholm. Vid Lunds Universitet

bygges f.n. en förenklad kopia av BESK kallad SMIL, och vidare projekteras ytterligare en kopia av BESK vid en svensk storindustri. Dessutom finns 11 stycken IBM 604 och 2 stycken IBM CPC. I Danmark skall byggas en kopia av BESK, och i Norge har man dels byggt en kopia av en Boothmaskin, dels beställt en Ferranti-maskin från England. I Finland är en maskin under byggnad. Såvitt förf. har sig bekant finns ännu inga siffermaskiner byggda eller projekterade på Island.

REFERENSER

- [1] D. R. HARTREE: *Calculating Instruments and Machines*. Cambridge 1950.
- [2] D. R. HARTREE: *Calculating Machines*. Cambridge 1947.
- [3] F. J. MURRAY: *The Theory of Mathematical Machines*. New York 1947.
- [4] C. B. TOMPKINS—J. H. WAKELIN—W. W. STIFLER JR.: *High Speed Computing Devices*. New York 1950.
- [5] E. C. BERKELEY: *Giant Brains*. New York 1949.
- [6] B. V. Bowden: *Faster than Thought*. London 1953.
- [7] A. D. BOOTH—K. H. V. BOOTH: *Automatic Digital Calculators*. London 1953.
- [8] *Proceedings of the Association for Computing Machinery*, Pittsburgh Meeting 1952.
- [9] *Simultaneous Linear Equations and the Determination of Eigenvalues*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 29, Washington 1953.
- [10] O. KARLQVIST: *Numerical Solution of Elliptic Difference Equations by Matrix Methods*. Tellus 4 (1952), pp. 374–384.
- [11] R. V. SOUTHWELL: *Relaxation Methods in Engineering Science*. Oxford 1943.
- [12] R. V. SOUTHWELL: *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. Oxford 1946.
- [13] R. COURANT—K. FRIEDRICH—H. LEWY: *Über die Partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik*. Math. Ann. 100 (1928), pp. 32–74.
- [14] J. v. NEUMANN—R. D. RICHTMYER: *A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks*. J. Appl. Phys. 21 (1950), pp. 232–237.
- [15] M. A. HYMAN: *On the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Diss. Tekn. Högskolan, Delft (1953).
- [16] G. DAHLQUIST: *Convergence and Stability for a Hyperbolic Difference Equation with Analytic Initial Values*. Math. Scand. 2 (1954), pp. 91–102.
- [17] Staff Members, Inst. of Meteorology, Univ. of Stockholm: *Results of Forecasting with the Barotropic Model on an Electronic Computer (BESK)*. Tellus 6, 2 (1954), pp. 139–149.
- [18] J. v. NEUMANN—H. H. GOLDSTINE: *A Numerical Study of a Conjecture by Kummer*. MTAC VII (1953), pp. 133–134.
- [19] K. GOLDBERG: *A table of Wilson quotients and the third Wilson prime*. Journ. London Math. Soc. 28 (1953), pp. 252–256.
- [20] T. BANG: *Store primtal*. NMT 2 (1954), pp. 157–168.
- [21] E. SELMER: *Den ubestemte ligning $X^3 + Y^3 = AZ^3$* . NMT 3 (1955), pp. 48–56.
- [22] G. DAHLQUIST: *Monte Carlo-metoden*. NMT 2 (1954), pp. 27–43.

DEN UBESTEMTE LIGNING $X^3 + Y^3 = AZ^3$

ERNST S. SELMER

Utdrag av foredrag i Dansk matematisk forening 15. febr. 1954.

Læren om ubestemte eller diofantiske ligninger er en meget gammel gren av matematikken; den har sitt navn etter Diophantus fra Alexandria, som levet i det 3dje århundre. — Slike ligninger har alltid vært meget populære (ikke minst blant norske matematikere). I Dickson's »History of the Theory of Numbers«, i tre bind, er hele bind 2 viet til omtalen av diofantiske ligninger. Populariteten er lett forklarlig; i få grener av matematikken er vel problemstillingen — løsbarehet eller ikke løsbarehet i rasjonale eller særlig i *hele tall* — så umiddelbart forståelig selv for ikke-matematikere. En annen sak er at teorien for de ubestemte ligninger byr på en rekke vanskelige og tildels uløste oppgaver. For å gi et inntrykk av noen av de problemer man møter og de metoder som benyttes, skal jeg nedenfor gi en kort omtale av en type ligninger som jeg selv har arbeidet endel med.

Vi tar vårt utgangspunkt i tredjegradskurven

$$(1) \quad x^3 + y^3 = A, \quad A \text{ et helt tall.}$$

Alt ettersom vi søker heltallige eller rasjonale punkter på denne kurve, får vi to helt forskjellige problemstillinger.

Ifølge en alminnelig sats av Thue har kurven (1) bare *et endelig antall heltallige punkter*. Det er vanligvis ingen sammenheng mellom de enkelte løsninger; hvert punkt må bestemmes for seg.

Hvis vi derimot spør etter *rasjonale* løsninger av (1), altså $x = X/Z$, $y = Y/Z$, gir dette den *homogene* ligning

$$(2) \quad X^3 + Y^3 = AZ^3,$$

med heltallige X , Y og Z . Denne ligning skal være vårt videre utgangspunkt. — Det er klart at vi kan anta A positiv og kubusfri. Den trivielle løsning $X = -Y$, $Z = 0$ ser vi bort fra i det følgende.

Med $A = 1$ får vi tilfellet $n = 3$ av den berømte *Fermats ligning*

$$X^n + Y^n = Z^n,$$

som har spillet en stor rolle for utviklingen av tallteori og algebra. Uløselbarheten for $n > 2$ er fortsatt ikke bevist i alminnelighet, men umuligheten for $n = 3$ har vært kjent meget lenge. (Se f. eks. Hardy & Wright: »Theory of Numbers«.)

Ligningen (2) med $A > 1$ er studert av en rekke matematikere, særlig i slutten av forrige århundre, da bl. a. Sylvester og Pepin bidro med uløselbarhetsbevis eller løsninger for en rekke verdier av A . I min doktoravhandling¹ har jeg systematisert de tidligere resultater og tilføyet en rekke nye; bl. a. har jeg behandlet ligningen (2) for alle A opp til 500.

La P_1 og P_2 være to rasjonale punkter på (1); vi søker *kurvens tredje skjæringspunkt* med tangenten i P_1 og med korden P_1P_2 henholdsvis. Dette skjæringspunkt bestemmes av en rasjonal 3djegradsligning med to kjente rasjonale røtter; følgelig vil også den siste rot være *rasjonal*.

Ved gjentatt bruk av en slik »tangent-korde-prosess« kan vi derfor vanligvis konstruere et ubegrenset antall rasjonale punkter på kurven ut fra et endelig antall grunnpunkter. En berømt sats av Mordell — som gjelder for en vilkårlig rasjonal 3djegradskurve — sier nå at *samtlig rasjonale punkter på kurven kan nåes ut fra en endelig basis av grunnpunkter*. Disse punkter kalles også *generatorene*, og deres (minimale) antall for kurvens *rang*.

Vi skal se på en metode til bestemmelse av rangen for kurven (1). Vi betrakter den homogene form (2), hvor venstresiden kan faktoriseres:

$$X^3 + Y^3 = (X + Y)(X^2 - XY + Y^2).$$

Den klassiske fremgangsmåte (Sylvester, Pepin) består i å betrakte egenskapene ved den *kvadratiske form* $X^2 - XY + Y^2$. Imidlertid er det, som først påpekt av Hurwitz, lettere å faktorisere denne form videre ved hjelp av de komplekse tredjerøtter av enheten:

$$\varrho = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) \text{ og } \varrho^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = -1 - \varrho$$

(altså de komplekse røtter i ligningen $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$). Da kan nemlig (2) skrives som

$$(3) \quad (X + Y)(X + Y\varrho)(X + Y\varrho^2) = AZ^3.$$

Vi går derfor over til å operere i den *algebraiske tallkropp* $K(\varrho)$. Et *helt tall* i tallkroppen defineres ved $a + b\varrho$ med hele rasjonale a og b . Ved *normen* av et tall forstår vi produktet av tallet og det konjugerte:

$$N(a + b\varrho) = (a + b\varrho)(a + b\varrho^2) = a^3 - ab + b^2$$

¹ »The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ «, Acta Math. 85 (1951), pp. 203–362. Denne avhandling inneholder en omfangsrik litteraturfortegnelse.

(altså nettopp lik kvadratet av modulen til det komplekse tall $a+b\varrho$). *Enhetene* er de tall

$$\varepsilon = \pm 1, \pm \varrho, \pm \varrho^2$$

som har norm 1.

Et *primtall* i tallkroppen $K(\varrho)$ defineres på vanlig måte ved at det ikke kan spaltes i to faktorer som begge er forskjellig fra en enhet. Det er da lett å vise at de vanlige delelighetsregler gjelder i tallkroppen, slik at ethvert helt tall spaltes på *entydig* måte i primfaktorer (bortsett fra en ubestemthet som opptrer p. g. a. enheter).

For å bestemme primtallene i $K(\varrho)$, skiller vi mellom de *rasjonale* primtall av formen

$$q = 3h-1 \quad \text{og} \quad r = 3h+1.$$

Det viser seg da at primtallene q *forblir primtall* i $K(\varrho)$, mens primtallene r *spaltes* i to konjugerte primfaktorer:

$$(4) \quad r = \pi_r \bar{\pi}_r = (a+b\varrho)(a+b\varrho^2) = N(a+b\varrho),$$

f. eks. $7 = (1+3\varrho)(1+3\varrho^2), \quad 13 = (-1+3\varrho)(-1+3\varrho^2).$

Det rasjonale primtall 3 spaltes som

$$3 = -\varrho^2 \lambda^2 = -\varrho^2(1-\varrho)^2,$$

hvor $N(\lambda) = N(1-\varrho) = 3$. Her er $\lambda = 1-\varrho$ et primtall i $K(\varrho)$, og $-\varrho^2$ er en enhet.

Vi vender så tilbake til ligningen (3), hvor vi tydeligvis kan forutsette at de hele rasjonale tall X , Y og Z er parvis uten felles faktorer. Da et primtall q forblir primtall i $K(\varrho)$, kan det ikke gå opp i $X+Y\varrho$ eller $X+Y\varrho^2$ uten å gå opp i både X og Y , mot forutsetningen ovenfor. *Enhver primfaktor q i A må derfor gå opp i $X+Y$. En primfaktor r i A kan selvsagt også gå opp i $X+Y$, men da r ifølge (4) spaltes i $K(\varrho)$, kan her π_r gå opp i $X+Y\varrho$:*

$$(5) \quad \pi_r | X+Y\varrho, \quad \text{altså} \quad \bar{\pi}_r | X+Y\varrho^2.$$

Delelighet med primtallet $\lambda = 1-\varrho$ må behandles særskilt; det viser seg at vi må betrakte tre forskjellige tilfelle. Ett av disse (faktisk den eneste mulighet for en rekke former av A) er gitt ved

$$(6) \quad \lambda | X+Y\varrho, \quad 9 | X+Y.$$

Hvis videre alle primfaktorer i A er av formen q , har vi sett ovenfor at vi må ha $A | X+Y$. For å få frem tredjepotensen Z^3 i (3) må vi da sette

$$(7) \quad X+Y = 9Aw^3, \quad X+Y\varrho = \varepsilon\lambda(u+v\varrho)^3,$$

hvor ε er en enhet. Her blir

$$(X + Y\varrho)(X + Y\varrho^2) = N(X + Y\varrho) = \underbrace{N(\varepsilon)}_1 \cdot \underbrace{N(\lambda)}_3 \cdot N(u + v\varrho)^3.$$

Innsetting i (3) viser at

$$Z = 3w \cdot N(u + v\varrho) = 3w(u^2 - uv + v^2).$$

Fortegnet for enheten ε er tydeligvis likegyldig. Det viser seg at i de fleste tilfelle er $\varepsilon = 1$ den eneste brukbare mulighet. Av 2. ligning i (7) finner vi da ved å sammenligne de reelle og de rent imaginære partier at

$$X = u^3 + 3u^2v - 6uv^2 + v^3, \quad Y = -(u^3 - 6u^2v + 3uv^2 + v^3).$$

Ved addisjon og sammenligning med 1. ligning i (7) får vi

$$(8) \quad uv(u - v) = Aw^3.$$

Her må u og v være uten felles faktor (da en slik vil gå opp i X og Y). Vi slutter derfor at det må finnes tre hele tall x, y, z og en faktorisering $A = abc$, slik at (det negative fortegn for u er hensiktsmessig):

$$-u = ax^3, \quad v = by^3, \quad u - v = cz^3, \quad \text{altså} \quad w = -xyz.$$

Addisjon av de tre første ligninger gir

$$(9) \quad ax^3 + by^3 + cz^3 = 0, \quad abc = A.$$

Vi har altså funnet følgende meget viktige setning (allerede kjent av Euler):

Enhver løsning av ligningen $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ gir en løsning av ligningen $X^3 + Y^3 = abcZ^3$.

Formlene for X, Y og Z uttrykt ved x, y og z blir tydeligvis av *niende grad*, så selv en enkel løsning (x, y, z) kan gi anledning til en meget stor løsning (X, Y, Z) . — Det viser seg at de øvrige muligheter for delelighet med λ (smlgn. (6)) alltid leder til samme ligning (9), såfremt vi velger $\varepsilon = 1$ i ligningene svarende til (7).

En mulighet for faktorisering av A er selvsagt

$$(10) \quad a = b = 1, \quad c = A,$$

slik at ligningen (9) er identisk med den opprinnelige ligning (2), men (som man lett viser) med *en mindre tallverdi av Z* . Vi bruker da et *resonnement* som spiller en fundamental rolle i teorien for ubestemte ligninger, det såkalte *«infinite descent»*: Blant alle løsninger av ligningen (2) er det én (eventuelt flere) for hvilken $|Z|$ har et minimum. Hvis vi tar vårt utgangspunkt i denne løsning, vil derfor tilfellet (10) være *utelukket*.

I alminnelighet vil vi kalle overgangen fra (2) til (9) for en *«descent»*.

Mer spesifikt vil vi tale om descent av *type I*, idet vi ifølge (5) også kan bruke en prinsipielt ny faktorisering når A inneholder rasjonale primfaktorer $r = 3h + 1$. La f. eks. $A = rA_1$, hvor r spaltes i $K(\varrho)$ etter formelen (4). Da kan vi erstatte (7) med

$$X + Y = 9A_1w^3, \quad X + Y\varrho = \lambda(a + b\varrho)(u + v\varrho)^3,$$

idet enheten ε kan trekkes inn i $a + b\varrho$. Ved å gå frem som ovenfor finner vi at ligningen (8) nå erstattes med

$$(11) \quad bu^3 + 3(a - b)u^2v - 3auv^2 + bv^3 = 3A_1w^3.$$

Av denne kan vi imidlertid ikke få noen ny ligning, som ved utledningen av (9) fra (8) ovenfor.

Vi kaller overgangen fra (2) til (11) for en *descent av type II*. I denne kan vi også inkludere tilfellet $\varepsilon = \varrho$ i (7), ved å velge $a = 0$, $b = 1$ og $A_1 = A$.

Vi skal særlig betrakte descent av type I, altså ligningen (9). Denne kan ofte vises uløsbar ved enkle *kongruensbetraktninger*. Som kjent betyr kongruens modulo n ,

$$s \equiv t \pmod{n},$$

at s og t gir samme rest ved divisjon med n , altså at differensen $s - t$ er delelig med n . Kongruenser kan adderes, subtraheres og multipliseres som vanlige ligninger.

Det er nå lett å se ved enkle kongruensbetraktninger at f. eks. følgende ligninger av typen (9) er uløsbare:

$$(12) \quad x^3 + 2y^3 = 5z^3 \text{ og } x^3 + 2y^3 = 7z^3.$$

Den første er umulig modulo 9, da man lett ser at for enhver 3djepotens er

$$x^3 \equiv 0 \text{ eller } \pm 1 \pmod{9}$$

ettersom

$$x \equiv 0 \text{ eller } \pm 1 \pmod{3},$$

idet

$$(3h \pm 1)^3 = 9(3h^3 \pm 3h^2 + h) \pm 1.$$

En kombinasjon av 0 eller ± 1 (leddet x^3) med 0 eller ± 2 (leddet $2y^3$) kan bare gi 0 eller ± 5 i tilfellet $0 + 0 = 0$, altså for x, y og z alle delelige med 3. Men en slik felles faktor kan vi tenke oss fjernet på forhånd.

Den annen ligning i (12) er på samme måte umulig modulo 7, da enhver 3djepotens er $\equiv 0$ eller $\pm 1 \pmod{7}$. Vi sier at ± 1 er de eneste (egentlige) *kubiske rester* av 7. (Det er tilstrekkelig å vise at $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$ for $x = 1, 2, 3, 4, 5$ og 6.) I alminnelighet har et primtall $r = 3h + 1$ bare $\frac{1}{3}(r - 1)$ inkongruente (egentlige) kubiske rester.

Det viser seg at *alle* tall er kubiske rester av et primtall $q = 3h - 1$. (Eksempel: $0^3 \equiv 0$, $1^3 \equiv 1$, $2^3 \equiv 3$, $3^3 \equiv 2$, $4^3 \equiv 4 \pmod{5}$.) De eneste kongruensbetingelser for ligningen (9) får vi modulo 9 og modulo de primtall r som går opp i koeffisientene. Det er følgende en enkel sak å undersøke om ligningen kan utelukkes ved kongruensbetraktninger; i motsatt fall sier vi at den er *mulig for enhver modul*.

La oss nå betrakte to enkle, men typiske eksempler på *uløsbare* ligninger $X^3 + Y^3 = AZ^3$. I begge tilfelle er descent av type I, altså ligningen (9), den eneste mulighet.

1) $A = 5$, altså et primtall $q = 3h - 1$. Den eneste mulige faktorisering er gitt ved (10), men den ble utelukket ved »infinite descent«.

2) $A = 10 = 2 \cdot 5$, altså et produkt av to primtall q . Den eneste faktorisering forskjellig fra (10) er $A = 1 \cdot 2 \cdot 5$, som nettopp leder til den første av de utelukkede ligninger (12).

Eksempelene ovenfor er spesialtilfelle av en alminnelig sats av Sylvestre, om uløsbarehet for visse former av A .

La oss så betrakte $A = 14 = 2 \cdot 7$. Ifølge siste ligning (12) er her descent av type I utelukket, men p. g. a. primfaktoren $r = 7$ må vi også betrakte type II, altså ligningen (11), med $A_1 = 2$, $a + b\varrho = \pi_7 = 1 + 3\varrho$. Det viser seg at også denne ligning kan *utelukkes ved kongruensbetraktninger*, som nå blir atskillig vanskeligere. Endel slike utelukkelse ble allerede gjennomført av Sylvester og Pepin (bl. a. for tilfellet $A = 14$ ovenfor), men deres bevis er tunge. Ved hjelp av den såkalte »*kubiske resiprositetssats*« i tallkroppen $K(\varrho)$ har jeg kunnet forenkle og systematisere studiet av ligningen (11). Som et resultat kan jeg nevne følgende alminnelige setning (som for $q = 2$, $r = 7$ gir talleksempel ovenfor):

Hvis $q = 3h - 1$ er kubisk ikkerest av $r = 3h + 1$, så er ligningen $X^3 + Y^3 = AZ^3$ uløsbar hvis A (kubusfri) har en av formene

$$A = qr, qr^2, q^2r \text{ eller } q^2r^2, A \not\equiv \pm 1 \pmod{9}.$$

La oss vende tilbake til ligningen (9), som vi nå vil forutsette mulig for enhver modul. Kan vi da si noe om *løsbarhet* i hele tall, med andre ord om *tilstrekkeligheten av kongruensbetingelsene*? Spørsmålet er meget nærliggende, da man for homogene *kvadratiske* ligninger — for øvrig i et vilkårlig antall variable — har det kjente resultat at kongruensbetingelsene er tilstrekkelige for løsbarehet (såfremt det overhodet finnes reelle løsninger).

Under et foredrag i Oslo høsten 1948 fremkastet Mordell den hypotese at kongruensbetingelsene er tilstrekkelige også for kubiske ligninger av typen (9). Imidlertid lykkedes det meg året etter, mens jeg studerte

hos Mordell i Cambridge, å motbevise hans hypotese. *Kongruensbetingelsene er ikke tilstrekkelige for løsbare av homogene kubiske ligninger i tre ukjente.* (I fire ukjente har jeg derimot påvist tilstrekkeligheten i visse tilfelle.)

Jeg skal bare ganske kort skissere metoden: Etter multiplikasjon med a^2 og substitusjon av x for $-ax$ kan ligningen (9) skrives som

$$(13) \quad x^3 - my^3 = nz^3.$$

Hvis vi innfører $\sqrt[3]{m} = \vartheta$, altså $my^3 = (y\vartheta)^3$, kan venstresiden faktoriseres:

$$(x - y\vartheta)(x^2 + xy\vartheta + y^2\vartheta^2) = nz^3.$$

Vi opererer da i den algebraiske tallkropp $K(\vartheta) = K(\sqrt[3]{m})$. Hvis dennes »klassetall« er > 1 , gjelder her ikke de vanlige delelighetsregler for tall i tallkroppen; vi må innføre de såkalte »idealer«.

Resultatet av slike betraktninger er at vi ledes til et endelig antall ligninger av formen

$$(14) \quad x - y\vartheta = \mu\alpha^3 = (e + f\vartheta + g\vartheta^2)(u + v\vartheta + w\vartheta^2)^3,$$

hvor μ (kjent) og α (ukjent) er hele tall i $K(\vartheta)$. Ved å betrakte den tilsvarende kongruens (for passende moduler), ledes man til et studium av *kubiske rester* i tallkroppen. Det viser seg da at vi i en rekke tilfelle (jeg har et gjennomsnitt på 30% i mine tabeller) kan bevise *uløsbareheten* av (14) og dermed av (13), selv om den siste ligning er mulig for enhver modul.

Lignende betraktninger, men atskillig mer kompliserte, har jeg også gjennomført for ligningen (11), i den kubiske tallkropp som defineres ved venstresiden.

Ligningen (14) uttrykker egentlig at vi må bestemme de hele tall u, v og w slik at *leddet med ϑ^2 faller bort* når vi multipliserer ut høyresiden. Utfører vi dette, og benytter oss av at $\vartheta^3 = m$, får vi en kubisk ligning mellom u, v og w :

$$(15) \quad \begin{cases} g \cdot (u^3 + mv^3 + m^2w^3 + 6muvw) \\ + 3f \cdot (u^2v + muw^2 + mv^2w) \\ + 3e \cdot (u^2w + uv^2 + mvw^2) = 0. \end{cases}$$

En løsning av denne vil gi en løsning av ligningen (13), og dermed av (9). Formlene for x, y og z uttrykt ved u, v og w blir av tredje grad. Da som nevnt X, Y og Z i (2) igjen er uttrykt som polynomer av grad 9 i x, y og z , forstår vi at selv beskjedne løsninger av (15) kan gi meget store løsninger av (2). De største i mine tabeller forekommer for $A = 382 =$

2·191, hvor 2-sifrede løsninger i u , v og w ga 6 sifre i x , y og z , og hele 53 desimalsifre i de endelige svar for X , Y og Z . Og dette er vel å merke den *enkleste* løsning av ligningen $X^3 + Y^3 = 382Z^3$.

De ligninger — av forskjellig slag — som ikke kan utelukkes, må ihvertfall oppfylle visse, ofte strenge kongruensbetingelser for de ukjente. Dette benyttet jeg meg av når det gjalt å finne løsninger for de ikke utelukkede ligninger. Kongruensbetraktningene gir jo *ingen tilstrekkelige løsningsbetingelser*, og den eneste måte å konstatere løsbarehet på er faktisk å *lete seg frem til en løsning*. I de fleste tilfelle fant jeg løsningene ved hjelp av de relativt enkle ligninger (9) eller (11), men noen ganger måtte jeg bruke den nokså uhåndterlige ligning (15). Og selv da var det endel ligninger hvor jeg måtte gi opp å lete etter løsninger på en vanlig bordregnemaskin. I min doktoravhandling er det ca. 10 åpne »hull« for uløste ligninger i tabellene opp til $A = 500$.

Våren 1952 fikk jeg imidlertid anledning til å »kode« mine uløste ligninger for den elektroniske regnemaskin ved Institute for Advanced Study i Princeton, og kjørte dem selv på maskinen. Det var ligninger av begge typer (11) og (15), og programmet var laget slik at maskinen ville stoppe ved den først funne løsning. Det var virkelig spennende å sitte ved kontrollbordet og vente på at flimringen av katodestrålerørene og neonylsene skulle stanse. Ville maskinen (som nettopp var tatt i bruk) oppføre seg pent? Hadde jeg kodet problemet korrekt? Og i dette spesielle tilfelle: *Hadde* mine ligninger virkelig løsninger innenfor det område for de variable som var fastlagt ved maskinens egen kapasitet?

Alt gikk heldigvis som det skulle, og maskinen løste alle ligninger, etter en samlet effektiv regne-tid på noen timer. (Det er for øvrig ingen kort tid for en maskin som prinsipielt kan utføre 20000 addisjoner eller 2000 multiplikasjoner av 12-sifrede desimaltall pr. sekund.) Jeg har derfor nå *komplette tabeller for ligningen $X^3 + Y^3 = AZ^3$ opp til $A = 500$* (de nye løsninger er publisert i Acta Math. 92, 1954). Med »komplett« menes her at for hver løsbare ligning er det gitt et fullstendig sett av generatorer eller *grunnløsninger*, i et antall lik rangen (som for øvrig aldri overskrider 2 for $A \leq 500$).

Den siste bemerkning leder oss tilbake til vårt utgangspunkt, bestemmelsen av *rangen* for kurven (1) eller (2). — Det viser seg at antallet av (vesentlig forskjellige) *løsbare* ligninger (9) (descent av type I) alltid er gitt ved formelen

$$N = \frac{1}{2}(3^n - 1),$$

altså $N = 0, 1, 4, 13, \dots$ for $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Man finner da at *det tilsvarende antall grunnløsninger er lik eksponenten n* .

På samme måte er antall løsbare ligninger (11) (descent av type II) gitt ved en helt analog formel, hvor eksponenten angir bidraget til rangen. Og hvis descent av både type I og II er mulig, blir den totale rang av kurven (2) lik *summen* av de to eksponenter.

De første resultater av denne art skyldes Faddeev, som beviste setningen under forutsetning av at bare descent av type II opptrer. Senere har jeg utvidet resultatet til også å inkludere type I. Dette var jo en meget naturlig generalisering, men beviset voldt meg større vansker enn noe annet punkt i avhandlingen.

Overgangen fra (13) til (14) — eller en tilsvarende overgang fra ligning (11) — kan sies å representere *en ny descent*, som altså gir nye kongruensbetingelser og dermed flere utelukkede ligninger enn den opprinnelige descent i tallkroppen $K(\varrho)$. De *nødvendige* betingelser er altså skjærpet, men som allerede nevnt gir de fremdeles *ikke tilstrekkelige* betingelser for løsbarehet. For $A \leq 500$ har jeg ett tilfelle som viser utilstrekkeligheten, nemlig $A = 473 = 11 \cdot 43 = q \cdot r$. Her er det én mulig ligning (9) og én ligning (11) som ikke kan utelukkes ved ny descent. Dette skulle gi $1+1 = 2$ generatorer hvis betingelsene hadde vært tilstrekkelige, men ligningen $X^3 + Y^3 = 473Z^3$ kan vises uløsbare ved en annen lignende metode (som for øvrig heller ikke gir tilstrekkelige betingelser).

I alminnelighet kan man si at den uløste oppgave, å finne *tilstrekkelige betingelser for eksistensen av rasjonale punkter på en tredjegradskurve*, er ett av de sentrale — og vanskeligste — problemer i teorien for ubestemte ligninger.

OM KONVEXA KURVOR

ARNE PLEIJEL

Låt C beteckna en sluten, konvex kurva och låt $\rho(u)$ vara dennas krökningsradie, uttryckt som funktion av den vinkel u , som kurvans stömlinjer (tangenter) bildar med en fast riktning i planet. Låt vidare L beteckna kurvans omkrets, F den av kurvan inneslutna ytan samt D största och d minsta avståndet mellan parallella stömlinjer till kurvan.

Antag nu, att krökningsradien, som är en integrerbar funktion av u , har blott ett ändligt antal diskontinuitetspunkter och i alla punkter uppfyller villkoren $0 \leq \rho(u) \leq R$, där R är ett fast tal. Härur följer då $L \leq 2\pi R$ och $F \leq \pi R^2$ (se t. ex. Blaschke: *Kreis und Kugel*, § 24, II sid. 116). Denna uppsats kommer att behandla följande problem: Låt L och R vara givna. Sök maximum för D , minimum för d samt maximum och minimum för F .

Jag bevisar först följande hjälpsats: Låt AB vara en given sträcka och AA' och BB' två åt samma håll riktade normaler mot AB . Låt vidare ACB och ADB vara två genom A och B gående konvexa kurvbågar, belägna inom det av AB och nämnda normaler begränsade området. Om då ACB ligger inom segmentet $ADBA$ så finns det alltid minst en punkt E på kurvbågen ACB sådan, att krökningsradien i E är större än krökningsradien i den punkt på ADB , vars stömlinje har samma riktning som stömlinjen till ACB i E .

För beviset antar jag, att krökningsradien på ACB har formen $\rho_1(u)$ och på ADB formen $\rho_2(u)$. Med lättförståeliga beteckningar är då (se fig. 1)

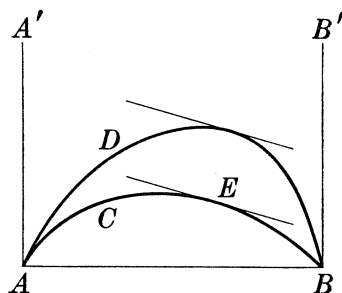


Fig. 1

$$AB = \int_{u_1}^{u_2} \rho_1(t) \cos t dt = \int_{v_1}^{v_2} \rho_2(t) \cos t dt,$$

där $-\frac{\pi}{2} \leq v_1 \leq u_1 < u_2 \leq v_2 \leq \frac{\pi}{2}$. I de betraktade intervallen är $\cos t \geq 0$.

Då får jag

$$\int_{u_1}^{u_2} [\varrho_1(t) - \varrho_2(t)] \cos t dt \geq 0,$$

varav hjälpsatsens riktighet framgår.

Jag vill nu visa, att följande påståenden gäller: *Maximum för D , minimum för d och minimum för F uppnås endast för en linsformad figur, bestående av två cirkelbågar med radien R och längderna $\frac{1}{2}L$ vardera. Maximum för F uppnås för en cirkel med omkretsen L . Är $L < 2\pi R$ och fordrar man, att krökningsradien i någon punkt på kurvan skall anta värdet R , så existerar icke någon kurva, för vilken F är störst, ty man kan finna kurvor inom den betraktade mängden, som kommer nämnda cirkel hur nära som helst medan själva cirkeln icke tillhör mängden.*

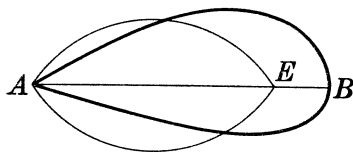


Fig. 2

För att bevisa det första påståendet ovan betraktar jag en kurva, för vilken avståndet mellan två parallella stödlinjer har sitt största värde, när stödlinjerna beröra kurvan i punkterna A och B . Sträckan AB är då dubbelnormal till kurvan (se t. ex. Bonnesen—Fenchel: *Theorie der konvexen Körper*, sid. 52). Jag placerar sedan en linsformad figur med samma omkrets som den givna kurvan (och radien R) så, att cirkelbågarnas gemensamma korda AE faller utefter AB och dess ena ändpunkt i A (se fig. 2). Skulle nu punkten E falla inom eller på kurvan, så kan man på den ena av cirkelbågarna finna två skärningspunkter med den givna kurvan så att denna senare mellan dessa fölle innanför cirkelbågen. (En konvex kurva, som ligger helt inom en annan konvex kurva, har mindre omkrets än denna.) Enligt hjälpsatsen skulle då på kurvan finnas en punkt, där krökningsradien vore större än R , vilket strider mot förutsättningarna. Punkten E måste alltså falla utanför kurvan, varmed påståendet är bevisat. Detta ger

$$(1) \quad D \leq 2R \sin \frac{L}{4R},$$

och likhetstecknet i denna olikhet gäller endast för den linsformade figuren.

Riktigheten av det andra påståendet kan man inse sålunda: Låt FG vara en korda, vars längd är = minsta avståndet mellan två parallella stödlinjer (se fig. 3). FG är dubbelnormal

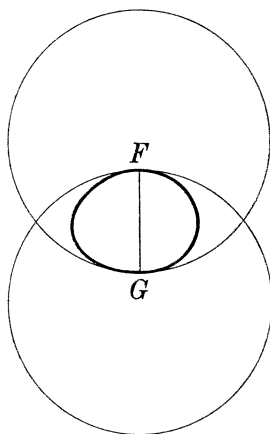


Fig. 3

til kurvan (Bonnesen—Fenchel, loc. cit.). Konstrueras två cirklar med centra på FG eller dess förlängningar och gående genom F resp. G , så kommer kurvan att ligga helt inom den gemensamma delen av cirkelarna (Blaschke, loc. cit.). Denna gemensamma del, som är en linsformad figur, har alltså större omkrets än kurvan (se ovan) och dess kortaste avstånd mellan parallella stödlinjer är alltså större än motsvarande storhet för den omkretslika linsformade figuren. Härmed är påståendet bevisat och jag får

$$(2) \quad d \geq 2R \left(1 - \cos \frac{L}{4R} \right),$$

där likhetstecknet gäller endast för den linsformade figuren.

För att bevisa det tredje påståendet bemärker jag först, att varje kurva ur den betraktade klassen kan med hur stor noggrannhet som helst approximeras medelst konvexa cirkelbågspolygoner med radierna R . Detta är en följd, dels av den bevisade hjälpsatsen, dels av det faktum, att varje konvex kurva kan med godtycklig noggrannhet approximeras medelst rätlinjiga polygoner. Betraktar jag nämligen en av dessa senare och sammanbinder hörnen med cirkelbågar med radien R till en konvex cirkelbågspolygon, så måste enligt hjälpsatsen varje cirkelbåge falla mellan den rätlinjiga polygonen och kurvan. Approximationen blir alltså noggrannare med cirkelbågspolygonen än med den rätlinjiga. Kan jag alltså visa, att av alla cirkelbågspolygoner med samma omkrets och radierna R den linsformade är den, som innesluter den minsta ytan, så gäller detta påstående även för godtyckliga kurvor med samma omkrets och med krökningsradien $\leq R$. Den enda svårigheten är att visa, att den linsformade figuren är den enda, för vilken detta minimum uppnås, då detta icke utan vidare framgår för godtyckliga kurvor även om påståendet är riktigt för cirkelbågspolygoner. Jag kommer emellertid att visa även entydigheten hos lösningen.

Riktigheten av påståendet, att den linsformade figuren innesluter den minsta ytan av alla cirkelbågspolygoner med samma omkrets framgår av följande sats: *Har jag en sluten konvex figur, bestående av en rätlinjig sträcka AB och två cirkelbågar AC och BC med radierna $= R$ och är AB konstant $= 2a$ och summan av cirkelbågarna konstant $= 2b$, så har den av figuren inneslutna ytan sitt största värde, när cirkelbågarna är lika stora, och avtar, när den ena av cirkelbågarna minskar (och den andra ökar) till dess att figuren upphör att vara konvex, d. v. s. när cirkelbågen tangerar AB .*

Betecknar jag cirkelbågen AC med x och följaktligen BC med $2b-x$, får jag följande uttryck för ytan:

$$f(x) = Rb - R^2 \sin \frac{b}{R} \cos \frac{b-x}{R} + T,$$

där

$$T = \sqrt{4a^2 R^2 \sin^2 \frac{x}{R} - \left(a^2 - R^2 \sin \frac{b}{R} \sin \frac{b-x}{R}\right)^2}$$

betecknar ytan av den rätlinjiga triangeln ABC .

Genom att derivera med avseende på x får jag efter förenkling:

$$f'(x) = \frac{1}{N} R \sin \frac{b-x}{R} \left(R^2 \sin^2 \frac{b}{R} - a^2 \right)^2,$$

där N är ett uttryck, som lätt visas vara positivt om hänsyn togs till att $a \leq R \sin \frac{b}{R}$. Således har $f'(x)$ samma tecken som $b-x$ och härur framgår satsens riktighet.

Betraktar jag nu en cirkelbågspolygon med omkretsen L (och radierna $= R$) och med minst tre hörn kan jag alltid konstruera en ny sådan polygon med samma omkrets men inneslutande mindre yta. Detta sker på följande sätt. Tag tre på varandra följande hörn P , Q och S i polygonen och drag kordan PS . Enligt föregående sats kan jag nu alltid ersätta hörnet Q med ett annat hörn Q' så, att den av $PQ'S$ inneslutna ytan blir mindre än motsvarande storhet för figuren PQS medan omkretsen är oförändrad. Detta kan alltid göras så, att ett av hörnen P eller S försvinner och i stället blir en punkt på en sida. Den nya polygonen har alltså ett hörn mindre än den ursprungliga och detta förfarande kan upprepas till dess att blott två hörn återstår. Men den figur, jag på så sätt erhållit (efter ett ändligt antal konstruktioner) är just den linsformade figuren, vilken alltså är den av alla omkretslika cirkelbågspolygoner, som innesluter den minsta ytan (och t. o. m. den enda).

Nu kan alltid en godtycklig konvex kurva med krökningsradien $\leq R$ hur nära som helst approximeras medelst cirkelbågspolygoner (med radien R) och härav framgår, att ytan av en dylik kurva säkert icke kan vara mindre än ytan av en linsformad figur med samma omkrets. Som tidigare nämnts, framgår emellertid icke av detta, att den linsformade figuren är den enda, för vilken minimiytan uppnås. För att bevisa, att så är fallet, antar jag, att det existerar en annan figur C , vars yta är lika med minimiytan. Avståndet mellan parallella stödlinjer till C har ett största värde, som säkert är mindre än motsvarande storhet för den linsformade figuren. Låt nu AB vara en korda i C , vars längd är lika med nämnda största avstånd. En linsformad figur med AB som största korda (och radien R) ligger då helt inom C . Konstruerar jag två cirklar med

radierna R , som har sina medelpunkter på AB eller dess förlängningar och som går genom A resp. B så faller kurvan C helt inom det gemensamma området D till dessa cirklar. Jag konstruerar nu en svit av cirkelbågspolygoner $C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$, inskrivna i C och sådana, att var och en av dem har ett hörn i A och ett i B . Vidare skall var och en av dem ha samma hörn som den föregående och dessutom minst två till, ett på varje sida om AB . Det är tydligt, att sviten kan konstrueras så, att $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$.

Kurvorna C_n delas nu av AB i två delar, en på varje sida om AB . För varje sådan del konstruerar jag den cirkelbågspolygon (öppen), som går genom A och B , har samma längd som motsvarande del av C_n , är belägen helt inom D och med AB innesluter minsta möjliga yta (se fig. 4). Dessa minimumpolygoner består nu av en del av D 's begränsning, som jag på grund av symmetriskäl kan anta har A till sin ena ändpunkt. Den andra ändpunkten betecknar jag med E_n . Vidare består den av en cirkelbåge med radien R från B till E_n . För den andra delen av C_n får jag en motsvarande figur $AF_n + BF_n$, där F_n ligger på den del av D 's begränsning, som går genom A . Jag får på detta sätt en svit

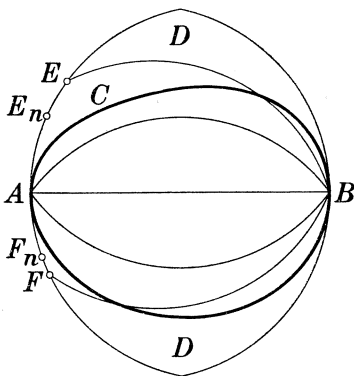


Fig. 4

av cirkelbågstrianglar BE_nF_n med samma omkretsar som C_n men inneslutande mindre ytor. Var och en av punktsviterna E_n och F_n är monoton och begränsad och har alltså en gränspunkt E resp. F . Cirkelbågstriangeln BEF har samma omkrets som kurvan C och innesluter säkert inte större yta än denna. Den har emellertid säkert större yta än den linsformade figuren med samma omkrets och vi har alltså kommit till en motsägelse genom antagandet, att kurvan C inneslöt samma yta som den linsformade figuren. Detta ger nu

$$(3) \quad F \geq \frac{LR}{2} - R^2 \sin \frac{L}{2R},$$

där likhetstecknet gäller endast för den linsformade figuren.

Vad beträffar maximumproblemet för ytan, ligger lösningen till detta i cirkelns isoperimetriska egenskap. Ytan är alltså maximum, när kurvan är en cirkel med omkretsen L . Fordrar jag emellertid, att krökningsradien i någon punkt på kurvan skall anta värdet R (och är $L < 2\pi R$), är problemets lösning icke cirkeln, då dennas krökningsradie överallt är

mindre än R . Konstruerar jag emellertid en svit av reguljära cirkelbågs-polygoner med radierna R och omkretsen L så kommer för tillräckligt stort sidoantal ytan hos dessa polygoner cirkelns yta hur nära som helst, vilket visar, att i detta fall ingen kurva existerar, för vilken maximumytan uppnås.

I det föregående har jag antagit, att undre gränsen för krökningsradien är $= 0$. Har jag nu en konvex kurva, vars krökningsradie varierar mellan de positiva talen r och R ($r \leq R$), så kan jag alltid konstruera en inre konvex parallellkurva till denna på avståndet r . (En parallellkurva till en konvex kurva konstrueras på följande sätt: Man uppritar normaler i alla punkter P på kurvan och avsätter på dessa normaler lika långa sträckor $PQ = h$. Parallellkurvan är då geometriska orten för Q , när P beskriver den ursprungliga kurvan. Ligger Q utanför kurvan, får man en yttre parallellkurva och ligger Q inuti kurvan, får man en inre parallellkurva. Den yttre parallellkurvan till en konvex kurva är oberoende av h :s storlek alltid konvex, medan den inre parallellkurvan är konvex endast, om h är mindre än eller lika med minimumvärdet för kurvans krökningsradie. Vidare är krökningsradien hos den yttre parallellkurvan = den ursprungliga kurvans krökningsradie, ökad med h , och krökningsradien hos den inre parallellkurvan = den ursprungliga kurvans krökningsradie, minskad med h .) Parallellkurvans krökningsradie kommer då att variera mellan gränserna 0 och $R-r$. Den ursprungliga kurvans omkrets och yta kan beräknas ur parallellkurvans medelst Steiners formler (se t. ex. Blaschke, loc. cit. § 21, IV):

$$L_r = L + 2\pi r, \quad F_r = F + Lr + \pi r^2.$$

Här betyder L_r och F_r omkrets och yta hos den yttre parallellkurvan på avståndet r . I samband härmed kan också nämnas, att för en kurva, vars krökningsradie varierar mellan r och R gäller

$$2\pi r \leq L \leq 2\pi R, \quad \pi r^2 \leq F \leq \pi R^2.$$

Skriver jag nu om de funna olikheterna (1)–(3) för kurvor, vilkas krökningsradier varierar mellan 0 och $R-r$ och sedan tillämpar de Steinerska formlerna, erhåller jag olikheter för konvexa kurvor, vilkas krökningsradier varierar mellan r och R :

$$\begin{aligned} D - 2r &\leq 2(R-r) \sin \frac{L - 2\pi r}{4(R-r)} \\ 2R - d &\leq 2(R-r) \cos \frac{L - 2\pi r}{4(R-r)} \\ F &\geq \frac{L(R+r)}{2} - \pi Rr - (R-r)^2 \sin \frac{L - 2\pi r}{2(R-r)}, \end{aligned}$$

där likhetstecknen gäller endast för den linsformade figurens (med radier $R-r$) yttre parallellkurva på avståndet r .

Genom kvadrering och addition av de två första olikheterna ovan får jag den av L oberoende olikheten

$$(D-2r)^2 + (2R-d)^2 \leq 4(R-r)^2,$$

och likhetstecknet gäller här naturligtvis endast för nämnda parallellkurva.

Betraktar jag så det »isoperimetriska deficitet» $L^2 - 4\pi F = \Delta$ för en av de ovan undersökta kurvorna, får jag

$$\Delta \leq [L - \pi(R+r)]^2 - \pi^2(R-r)^2 + 4\pi(R-r)^2 \sin \frac{L-2\pi r}{2(R-r)} = y.$$

För fixa r och R är ovanstående uttryck y en funktion av L . Denna funktion är noll för $L = 2\pi r$ och $L = 2\pi R$ och positiv mellan dessa värden. Den har alltså minst ett maximum i nämnda intervall. För att bestämma detta maximum bildar jag första och andra derivatorna, och får

$$y' = 2L - 2\pi(R+r) + 2\pi(R-r) \cos \frac{L-2\pi r}{2(R-r)}$$

$$y'' = 2 - \pi \sin \frac{L-2\pi r}{2(R-r)}.$$

y'' har i det betraktade intervallet endast två nollställen (inkl. ändpunkterna) och y' kan alltså i samma intervall endast ha tre nollställen. Dessa tre nollställen är $L = 2\pi r$, $L = \pi(R+r)$ och $L = 2\pi R$. Det mellersta av dessa ger maximumvärdet, vilket lätt inses genom insättning i y'' eller ur tidigare resonemang. Genom insättning av detta L -värde i y får jag

$$L^2 - 4\pi F \leq \pi(4-\pi)(R-r)^2.$$

Likhetstecknet här gäller endast för en kurva med omkretsen $\pi(R+r)$, vars inre parallellkurva på avståndet r är linsformad. Extremalkurvan är sammansatt av fyra kvartcirkelbågar, två med radien R och två med radien r . Den i olikheten ingående konstanten $\pi(4-\pi)$ är den bästa möjliga, vilket framgår ur härledningen av olikheten, som dessutom är en förbättring av ett tidigare resultat

$$L^2 - 4\pi F \leq \pi^2(R-r)^2,$$

funnet av Bottema (*Eine obere Grenze für das isoperimetrische Defizit einer ebenen Kurve*, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. Bd. 36 (1933), s. 442—446).

BOKMELDINGER

G. POLYA: *Mathematics and plausible reasoning*, I and II. Princeton University Press, Princeton, 1954. 16+280 sider og 10+190 sider. \$ 5.50 og \$ 4.50. Begge bind \$ 9.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 67.)

I matematikken kan påstandene underbygges med *logiske beviser*, men i andre vitenskaper og i det praktiske liv må man nøye seg med *plausible resonnementer*. Imidlertid brukes plausible resonnementer også i stor utstrekning i matematikken, især ved nye oppdagelser og ved løsning av oppgaver (øvelsesoppgaver og praktiske oppgaver). Forfatterens grunnidé er at man i matematikkundervisningen bør ta sikte på at elevene ikke bare lærer å bevise, men også å gjette fornuftig.

Et sted i slutten av annet bind presiseres formålet med verket slik: »This book is designed to serve various categories of readers: those who wish to understand guessing, those who wish to learn guessing, and those who wish to teach guessing.«

Første bind som har titelen »Induction and analogy in Mathematics«, behandler begreper som generalisering, spesialisering, analogi, induksjon og plausibilitet. Alt er illustrert med tallrike eksempler fra de forskjellige områder: tallteori, geometri, analyse, matematisk fysikk, o. s. v. Som eksempel på at en matematiker godt kan vise hvordan han er kommet frem til sine resultater (ikke bare stille dem opp med etterpåkonstruerte beviser) siteres in extenso (i engelsk oversettelse) en åtte-siders artikkel av Euler, »Discovery of a most extraordinary law of the numbers concerning the sum of their divisors«. Dette eksemplet må betegnes som meget velvalt, og vel verd ettertanke, ikke minst hos redaktørene av matematiske tidsskrifter; hvis noen i våre dager sendte inn et slikt manuskript, er det fare for at han ville få det i retur med anmodning om å forkorte det ned til en fjerdedel.

Annet bind bærer titelen »Patterns of plausible inference«. I analogi med skjemaene for strengt logisk resonnement, som f. eks.

A impliserer B
A riktig
B riktig

A impliserer B
B gal
A gal

stiller forfatteren her opp skjemaer for plausibel slutning. Slike er f. eks.

A impliserer B	A analog til B
B riktig	B riktig
A mere trolig	A mere trolig
A impliserer B	A impliserer B
B utrolig i seg selv	B trolig i seg selv
B riktig	B riktig
A meget mer trolig	A bare litt mer trolig

Forfatteren har også gitt seg i kast med å diskutere de forskjellige betydninger av ordet »sannsynlig«, og han påviser en parallellitet mellom sannsynlighetsregningens formler og reglene for plausibel slutning, som må betegnes som meget interessant.

Etter anmelderens mening kan det være meget nyttig, især for den som skal undervise, å bli seg bevisst strukturen i de plausibilitetsbetraktninger som man stadig benytter seg av. Men man må være på vakt mot å ville tvinge den skapende fantasi inn i for stramme tøyler; man må aldri føle seg *bundet* av resonnement-skjemaer som ikke gir sikre resultater.

Er man først klar over dette, kan man ha stort utbytte av å studere disse to bøkene, især hvis man gir seg tid til å fordype seg i den overveldende mengde av eksempler, som man nesten kunne fristes til å betegne som det mest verdifulle ved verket.

I. Johansson

FR. FABRICIUS-BJERRE: *Lærebog i Geometri, II. Differentialgeometri, kinematisk geometri*. 2. udg. Jul. Gjellerups Forlag, København, 1955. 181 s., 76 fig. D. kr. 31.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 67.)

I föreliggande nya upplaga av andra bandet av Geometri som lärobok vid Danmarks tekniske højskole behandlas differentialgeometrin och den kinematiska geometrin till stor del medels vektorer. Omläggningen av studieplanerna vid högskolan har medfört en minskning av bokens omfång från 212 til 181 sidor jämförd med första upplagan. Till en del beror minskningen på att förenklingar kunnat göras. Men bl. a. har inversionen och den stereografiska projektionen helt bortlämnats. Även övningsuppgifternas antal har minskats, nämligen från 193 till 153. — Framställningen jämte exempel är teoretisk men klar och lättfattlig. Det som är sagt i slutet av anmälan av första bandet (NMT, Bind 1, s. 171) gäller även nu.

E. J. Nyström

MOTTATTE BØKER

A. Benoit — R. Canapale: *Arithmétique*. (Classes de Math. et de Sci. expér.) Librairie Vuibert, Paris, 1954. 244 pp.

Nombres entiers. Addition et soustraction 5–22 * Multiplication et division 23–52 * Puissances. Racines carrées 53–67 * Divisibilité. Nombres premiers 68–118 * Fractions 119–172 * Nombres décimaux. Valeurs approchées 173–216 * Combinaisons. Probabilités 217–222 * Exercices 223–240.

Gerrit Bol: *Projektive Differentialgeometrie*, II. (Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher 9.) Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1954. 5+372 S. DM 38.00.

Halbinvarianter Aufbau der Flächentheorie 1–73 * Geometrie im allgemeinen Bezugssystem 74–150 * Kurven und Kurvensysteme auf einer Fläche 151–296 * Flächentheorie im WILCZYNSKISCHEN System 297–362 * Namen- und Sachverzeichnis 363–370.

Lothar Collatz: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. Zweite, neubearb. Aufl. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 60.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 15+526 S., 118 Fig. DM 56.00, ganzl. DM 59.60.

Hilfsmittel. Einige allgemeine Prinzipien: Einteilung der Aufgaben, Differenzenrechnung und Interpolationsformeln, Fehlerabgleichsprinzipien, Hilfsmittel aus der Analysis und aus der Funktionalanalysis 1–45 * Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: Das Runge-Kutta-Verfahren, Differenzenschemaverfahren 45–134 * Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: Das gewöhnliche Differenzenverfahren mit Verbesserungen, allgemeine Verfahren, das RITZsche Verfahren, Reihenansätze, spezielle Verfahren für Eigenwertaufgaben 134–242 * Anfangs- und Anfangsrandwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen: Das gewöhnliche Differenzenverfahren mit Verbesserungen, partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine gesuchte Funktion, Charakteristikenverfahren bei Systemen von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung 242–320 * Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen: Das gewöhnliche Differenzenverfahren mit Verbesserungen, der Randmaximumssatz und Schranken für Lösungsfunktionen, allgemeine Methoden, das RITZsche und das TREFFTzsche Verfahren 320–435 * Integral- und Funktionalgleichungen: Allgemeine Methoden bei Integralgleichungen, spezielle Verfahren bei linearen Integralgleichungen, singuläre Integralgleichungen, VOLTERRASche Integralgleichungen, Funktionalgleichungen 435–498 * Anhang (Tafeln I–X) 499–517 * Namenverzeichnis 518–520 * Sachverzeichnis 521–526.

Fr. Fabricius-Bjerre: *Lærebog i geometri, II. Differentialgeometri, kinematisk geometri*. 2. udg. Jul. Gjellerups Forlag, København, 1955. 181 s., 76 fig. D. kr. 31.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 65.)

Kurver og vektorfunktioner 1–14 * Plane kurver 15–53 * Rumkurver 54–69 * Kinematisk geometri 70–121 * Flader 122–157 * Opgaver 158–179 * Register 180–181.

O. Haupt—G. Aumann—C. Y. Pauc: *Differential- und Integralrechnung*. Band III: Integralrechnung. Zweite, neubearb. Aufl. Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1955. 12 + 319 S. Ganzl. DM 28.00.

Einführung in die Theorie der Booleschen Verbände 1–27 * Allgemeine Sätze über Inhalte und Masse 27–47 * Erweiterung von Inhalten und Massen 47–71 * Zu einem Mass gehöriges Unterteilungsintegral 72–109 * Additive Funktionen beliebigen Vorzeichens 109–130 * Lineare stetige Funktionale 130–159 * Masse und Integrale in Produkträumen. Mehrfache Integrale 159–173 * An eine Topologie adaptierte Masse und Inhalte. Zugehörige Integrale 174–202 * σ -additive Funktion als Stammfunktion 203–227 * Additive Funktion als Stammfunktion 227–278 * Dehnungsbeschränkte Funktionen und Flächenstücke im E_n 279–309 * Anhang 309–312 * Literaturangaben 313–315 * Sachverzeichnis 316–319.

Hans Hermes: *Einführung in die Verbandstheorie*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 73.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955. 8 + 164 S., 24 Fig. DM 19.80, ganzl. DM 22.80.

Grundlagen 1–40 * Die einfachsten Verbandsklassen 40–68 * Modulare Verbände 68–105 * Distributive und BOOLESCHE Verbände 105–136 * Verschiedenes 136–151 * Anhang 151–159 * Namen- und Sachverzeichnis 160–164.

G. Polya: *Mathematics and plausible reasoning, I and II*. Princeton University Press, Princeton, 1954. 16 + 280 pp. and 10 + 190 pp. \$ 5.50 and \$ 4.50. The set \$ 9.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 64.)

I. *Induction and analogy in mathematics*: Induction 3–11 * Generalization, specialization, analogy 12–34 * Induction in solid geometry 35–58 * Induction in the theory of numbers 59–75 * Miscellaneous examples of induction 76–89 * A more general statement, 90–107 * Mathematical induction 108–120 * Maxima and minima 121–141 * Physical mathematics 142–167 * The isoperimetric problem 168–189 * Further kinds of plausible reasons 190–209 * Final remark 210–212 * Solutions to problems 213–278 * Bibliography 279–280.

II. *Patterns of plausible inference*: Some conspicuous patterns 3–17 * Further patterns and first links 18–54 * Chance, the everpresent rival of conjecture 55–108 * The calculus of probability and the logic of plausible reasoning 109–141 * Plausible reasoning in invention and instruction 142–170 * Solutions to problems 171–188 * Bibliography 189–190.

S. Slade — L. Margolis: *Mathematics for technical and vocational schools*. 4th ed. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955. 9+574 pp., 404 figs. \$ 4.48.

Common fractions 1–25 * Decimal fractions 26–45 * Percentage 46–51 * Ratio and proportion 52–59 * Mensuration 60–153 * Practical computation 154–163 * Logarithms 164–180 * The slide rule 181–200 * Miscellaneous problems 201–212 * Graphs 213–230 * Measuring instruments 231–242 * Practical algebra 243–262 * Geometrical constructions 263–281 * The essentials of trigonometry 282–310 * Strength of materials 311–321 * Work and power 322–331 * Woodwork 332–343 * Tapers 344–364 * Speed ratios of pulleys and gears 365–380 * Screw threads 381–413 * Cutting speed and feed 414–431 * Gears 432–475 * Milling machine work 476–495 * Belting 496–505 * Tables 506–568 * Index 569–574.

Hermann Weyl: *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Dritte, vollst. umgearb. Aufl. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1955. 8+162 S., 13 Fig. Halbl. DM 22.00.

I. Begriff und Topologie der Riemannschen Flächen: Weierstrass' Begriff der analytischen Funktion. Begriff des analytischen Gebildes. Verhältnis der Begriffe »analytische Funktion« und »analytisches Gebilde« zu einander. Begriff der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Beispiele von Flächen. Spezialisierung, insbesondere differentiiierbare und Riemannsche Flächen. Orientierung. Überlagerungsflächen. Differentiale und Linienintegrale. Homologie. Dichte und Flächenintegrale. Der Residuensatz. Schnittzahl 1–81 * II. Funktionen auf Riemannschen Flächen: Dirichletsches Integral und harmonische Differentiale. Ansatz zur Konstruktion der aus einer Doppelquelle entspringenden Potentialströmung. Durchführung des Beweises. Die Elementardifferentiale. Die Symmetriegesetze. Die eindeutigen Funktionen auf $\mathfrak{F}$ als Unterklasse der additiven und multiplikativen Funktionen auf $\hat{\mathfrak{F}}$. Riemann-Rochscher Satz. Abelsches Theorem. Das Umkehrproblem. Der algebraische Funktionenkörper. Uniformisierung. Riemannsche Fläche und Nicht-Euklidische Bewegungsgruppen. Fundamentalbereiche. Poincarésche θ -Reihen. Konforme Abbildung einer Riemannschen Fläche auf sich selbst 82–158 * Verzeichnis der Begriffsnamen 159–162.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 50–55 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Holmen, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. juli 1955.

De øvrige oppgaver er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillerens egen løsning.

50. Den ubestemte ligning $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ er selvsagt alltid *løsbar* når f. eks. $a + b = c$, med $x = y = 1$, $z = -1$. Vis at ligningen alltid er *mulig for enhver modul* (smlgn. NMT, dette hefte, s. 52–53), når

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

altså når koeffisientene er *Pytagoreiske tall*.

Ernst S. Selmer

51. K är en sluten kurva, som har en kontinuerligt varierande tangent. Inuti K finns en fix punkt O sådan att varje linje genom O skär kurvan i precis två punkter (en på vardera sidan om O). Vidare gäller att tangenterna i de två ändpunkterna av en godtycklig sådan korda genom O äro parallella. Visa, att O är mittpunkt på varje korda genom O , dvs. att O är medelpunkt till K .

H. Gask

52. In which region of the complex plane does the following series converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos ncz)^{-1},$$

c being a given complex number?

Martin G. Beumer

53. Der startes en klub af rationale funktioner $\neq 0$ i een ubestemt x over det rationale tallegeme. Et nyt medlem kan da og kun da optages, hvis det er reciprok til et medlem eller differens mellem to medlemmer.

a) x er eneste medlem af klubben ved starten. Bestem alle hele n , for hvilke x^n kan blive medlem.

I alle følgende spørsmål er 1 og x de eneste medlemmer ved starten.

b) Vis, at enhver rational funktion $f(x) \neq 0$ kan blive medlem.

c) Vis, at x^n ($n \geq 2$) kan blive medlem, uden at medlemstallet overstiger $3n+4$. Vis, at denne grænse kan lægges lavere for ulige n .

d) Vis, at $x^2, x^3, \dots, x^n$ kan blive medlemmer, uden at medlemstallet overstiger $5n$.

e) Vis, at $x^2, x^4, \dots, x^{2^n}$ kan blive medlemmer, uden at medlemstallet overstiger $6n+2$.

Anders Bager

54. Under samme forutsetninger som i oppg. 53 a) skal en vise at medlemstallet minst må være 7 dersom x^3 er medlem. Og under samme forutsetninger som i 53 b-e) skal en vise at medlemstallet minst må være 8 dersom x^2 er medlem.

Red.

55. La $\varphi(x)$ være definert ved

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{(n^2 - x^2)(n^2 - 4x^2)}$$

og sett

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x+n).$$

Vis at $\psi(x)$ blir en periodisk funksjon som oppfyller funksjonallikningen

$$\psi(x) + \psi(1-x) = 0.$$

R. Tambs Lyche

56. La n være et naturlig tall, og sett

$$a_n = \sum_{2d+1|n} (-1)^d,$$

slik at summen utstrekkes over alle oddetall som går opp i n . Vis at funksjonen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

er regulær for $|z| < 1$, men ikke kan fortsettes analytisk utenfor denne sirkelen.

57. La n være hel og ≥ 0 . Vis at $J_n(1)$ er et irrasjonalt tall når $J_n(x)$ er Besselfunksjonen

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!}.$$

58. La m og n være slike naturlige tall at $m < n$. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} (n-k)^m = (-1)^{n+m-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^m = n^m.$$

LØSNINGER

Oppgave 44.

Påst.: Den heltalige likheten

$$\sum_{v=0}^n (a-v)^k = \sum_{v=1}^n (a+v)^k$$

gäller för $k=2$ med villkor att $a=2n(n+1)$, men aldrig för $k=3$ eller 4.

Bevis: Likheten kan omformas på följande sätt:

$$a^k = \sum_{v=1}^n \{(a+v)^k - (a-v)^k\} = 2 \sum_{v=1}^n \left\{ k a^{k-1} v + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} a^{k-3} v^3 + \dots \right\}.$$

Eftersom

$$\sum_{v=1}^n v = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{v=1}^n v^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

så får man vidare

$$\text{för } k=2: a^2 = 2an(n+1),$$

$$\text{för } k=3: a^3 = 3a^2n(n+1) + \frac{1}{2}[n(n+1)]^2,$$

$$\text{för } k=4: a^4 = 4a^3n(n+1) + 2a[n(n+1)]^2.$$

Den första likheten gäller med villkor att $a=2n(n+1)$. De båda andra likheterna äro däremot omöjliga. Skulle nämligen endera av dem bestå, så borde $n(n+1)$ vara delbar med a , vilket är omöjligt, emedan det högra membrum i den vederbörliga likheten då vore större än det vänstra.

Antti Issakainen

Også løst av N. E. Andersen, Anders Bager, Heimer Dahl, V. Gamst, Hans Killingbergtrø, Anders Lødemel, Otto Marstrander og Henrik Meyer.

Oppgave 45.

Det søkes løsninger med kontinuerlige partielle deriverte $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. La Σ

være den lukkede flate $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = \varrho^2$. Ligger origo i det område som begrenses av den lukkede flate S , velges ϱ så liten at Σ også ligger i dette område. S og Σ begrenser da et område som kalles V . Ligger origo utenfor det område som begrenses av S , kalles dette V . Gauss' divergensteorem gir da

$$\int_S f(x)(x, n) dS + \int_\Sigma f(x)(x, n) d\Sigma = \int_V \left(x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + kf(x) \right) dV.$$

I det andre tilfellet (origo innenfor S) gjelder samme likning når integralet over Σ sløyfes.

For at integralet over alle flater av den første type skal ha samme verdi, og integralet over alle flater av den andre type skal ha samme verdi, er det nødvendig og tilstrekkelig at

$$x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + kf(x) \equiv 0.$$

Er betingelsen oppfylt blir integralet over Σ uavhengig av ϱ , og en kan la ϱ gå mot null slik at likningen gjelder uforandret for alle flater av den første type. For å finne når betingelsen er oppfylt settes $y_i = tx_i$. Da kan $f(y) = f(tx)$ oppfattes som en funksjon av t , og

$$\frac{df(y)}{dt} = \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \cdot \frac{y_i}{t} = -\frac{kf(y)}{t}$$

gir $f(y) = Ct^{-k}$ eller $f(tx) = f(x)t^{-k}$. Dette viser at betingelsen bare er oppfylt når $f(x)$ er homogen av graden $-k$. Omvendt finnes ved å derivere $f(tx) = f(x)t^{-k}$ og sette $t=1$, at den er oppfylt for alle slike funksjoner. Satsen er da bevist, når S ikke deformeres fra den ene type til den andre.

Anders Lødemel

Oppgave 46.

Skal de to tallfølger konvergere mot positive grenseverdier a og b så må $a^2 = \alpha a \cdot \beta b$ og $2b = \alpha a + \beta b$, og da må

$$(1) \quad \beta = \frac{2}{1 + \alpha^2}.$$

I. La nå vilkåret (1) være oppfylt.

Dersom der finnes et slikt n at $a_n = \alpha \beta b_n$, blir $a_{n+p} = a_n$, $b_{n+p} = b_n$ for alle p .

La så m være et fritt valt naturlig tall. For et valt $p > 0$ blir da a_{m+p} en funksjon av a_m og b_m ,

$$a_{m+p} = \varphi_p(a_m, b_m).$$

Om vi her tenker oss en av størrelsene a_m, b_m holdt fast, mens den andre vokser, vil åpenbart $\varphi_p(a_m, b_m)$ vokse. Antar vi derfor $a_m > \alpha\beta b_m$, blir

$$a_{m+p} > \varphi_p(\alpha\beta b_m, b_m) = \alpha\beta b_m \quad \text{og} \quad a_{m+p} < \varphi_p\left(a_m, \frac{a_m}{\alpha\beta}\right) = a_m,$$

slik at

$$(2a) \quad \alpha\beta b_m < a_{m+p} < a_m.$$

Er $a_m < \alpha\beta b_m$, får vi på tilsvarende måte

$$(2b) \quad a_m < a_{m+p} < \alpha\beta b_m.$$

Vi får derfor for alle m og p

$$(3) \quad |a_{m+p} - a_m| \leq |a_m - \alpha\beta b_m|.$$

Setter vi $a_n = \alpha\beta b_n x^2$, så finner vi

$$a_{n+1} - \alpha\beta b_{n+1} = \frac{a_n - \alpha\beta b_n}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{1 - \alpha^2 x}{1 + x},$$

og da $\left| \frac{1 - \alpha^2 x}{1 + x} \right| < \text{maks}(1, \alpha^2)$ for $x > 0$ vil

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \alpha\beta b_n) = 0.$$

Av (3) følger da at $\{a_n\}$ konvergerer mot et tall a som ifølge (2a) eller (2b) er positivt. Av (4) følger da at $\{b_n\}$ konvergerer mot et tall b hvor $a = \alpha\beta b$.

II. La så $\beta < 2/(1 + \alpha^2)$. Da gis det et tall $\gamma > \alpha$ slik at $\beta < 2/(1 + \gamma^2) = \delta$. Tallfølgene $\{A_n\}$ og $\{B_n\}$ som fåes ved å sette $A_1 = a_1$ og $B_1 = b_1$ og ellers erstatte α med γ og β med δ konvergerer mot positive grenseverdier. Settes

$$\text{maks}\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right) = k < 1,$$

så fåes $a_2 \leq kA_2$ og $b_2 \leq kB_2$, og ved induksjon

$$a_n \leq k^{n-1}A_n \quad \text{og} \quad b_n \leq k^{n-1}B_n.$$

Det vil si at begge de gitte tallfølger konvergerer mot 0.

Når $\beta > 2/(1 + \alpha^2)$ får vi på tilsvarende måte at begge tallfølgene divergerer mot uendelig.

III. Ifølge det foregående konvergerer de to tallfølgene mot en felles positiv grenseverdi når, og bare når

$$\beta = \frac{2}{1 + \alpha^2} \quad \text{og} \quad \alpha\beta = 1, \quad \text{d: } \alpha = \beta = 1.$$

Otto Marstrand

Også løst av Heimer Dahl og Anders Lødemel.

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1954 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

DANSK MATEMATISK FORENING.

- 25.1 N. E. Nørlund: *Om hypergeometriske funktioner.*
11.2 Øystein Ore, New Haven, Connecticut: *Sandsynlighedsregningens tidligste historie.* (Fælles for Dansk Matematisk Forening og Selskabet for de eksakte videnskabers historie.)
15.2 E. S. Selmer, Oslo: *En ny hypotese i teorien for ubestemte ligninger.*
15.3 B. Fuglede: *Lukkede lineære differentialoperatorer.*
3.4 A. Marcușevič, Moskva: *Einige Resultate aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen.*
8.4 T. Nagell, Uppsala: *Om tals fremstilling som en sum av to kvadrattal i en kvadratisk talkropp.*
9.4 T. Nagell: *Problem i potensresternes teori.*
13, 15, 17.9 H. S. M. Coxeter, Toronto: *Non-euclidean networks and quadratic forms.*
13, 15, 17.9 D. Montgomery, Princeton, New Jersey: *Topological groups and transformation groups.*
24.9 B. L. van der Waerden, Zürich: *Babylonische und griechische Algebra.*
27.9 H. Davenport, London: *Problems of packing and covering.*
4.10 A. Ostrowski, Basel: *Analytische Fortsetzung von Taylorsche und Dirichletschen Reihen.*
29.11 H. Busemann, Los Angeles: *Problems of convex bodies in Minkowskian geometry.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG SEMINARIER I DANMARK.

Forelæsningsrækker for matematiklærere:

- B. Jessen: *Emner fra mængdelæren og de reelle funktioners teori.* (Forårssemestret.)
H. Busemann, Los Angeles: *The geometry of geodesics.* (Efterårssemestret.)

Møderne ved kongressen i Aarhus:

- 3.8 P. Rubinstein og M. Pihl: *Områder for samarbejde inden for fysik-, kemi- og matematikundervisningen* (forhandling).
4.8 J. Nielsen: *Det internationale samarbejde inden for naturvidenskaberne.*
P. Rubinstein: *Metode til indførelse af logaritmer i realklassen* (forhandling).
A. Gjelsvik, Norge: *Eksamensoppgaver og undervisning* (forhandling).
5.8 V. O. Laine, Finland: *Försöken att förnya geometriundervisningen i Finland.*
A. F. Andersen: *Om nøjagtighedsbestræbelser i den danske gymnasieundervisning i matematik* (forhandling).

- 5-6.8 S. Bundgaard: *Nyere betragtninger vedrørende grænseovergang*, I-II.
 6.8 I. Simola, Finland: *Historiska synpunkter i samband med matematikundervisningen* (forhandling).

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 20.1 P. Kustaanheimo: *Tensorilaskun aksiomatiikasta* [Om tensorkalkylens axiomatik].
 17.2 F. Nevanlinna: *Cauchy-Goursat'n lauseesta* [Om Cauchy-Goursats sats].
 17.3 G. Järnefelt: *Yritys finitisoita harmonisen oskillaattorin teoria* [Ett försök att finitisera teorin för den harmoniska oscillatorn].
 7.4 R. Nevanlinna: *Differentiaaliyhtälöiden teorian eksistenssi- ja yksikäsitteisyyslauseista* [Om existens- och entydighetssatser i teorin för differentialekvationer].
 5.5 U. Grenander, Stockholm: *En klass av egenvärdesproblem*.
 15.9 B. L. van der Waerden, Zürich: *Grundlagen der algebraischen Geometrie*.
 22.9 M. Ohtsuka, Nagoya: *On analytic functions bounded in the unit circle*.
 6.10 O. Heckmann, Hamburg: *Über die Vermessung des Himmels*.
 20.10 P. J. Myrberg: *Automorfisista thetafunktionista* [Om automorfa thetafunktioner].
 17.11 Y. Juve: *Ahlforsin verzerrungslauseen yleistämisestä* [Om generalisering av Ahlfors' »Verzerrungssatz«].
 15.12 O. Lehto: *Analyttisten funktioiden reuna-arvoista* [Om analytiska funktioners egenvärden].

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND.

- 4.2 Årsmöte i Helsingfors. Förhandlingar och val. Lektor S. Hollo och fil. dr. U. Kuuskoski berättade om resor som de företagit såsom representanter för förbundet.
 28.2-2.3 Föreläsningsdagar i fysik (med praktiska övningar). Föreläsare dr. A. Lindberg, Köln.

Över 60 medlemmar deltog i Den andra nordiska matematik-, fysik- och kemi-lärarkongressen i Aarhus 3-6. augusti.

Inom förbundet verkar fortfarande 7 lokala klubbar. Helsingforsklubben sammanträdde 5 gånger. Föredrag och diskussioner i fackfrågor samt exkursioner i samtliga klubbar.

ÍSLENZKA STERÐFRÆÐAFÉLAGIÐ.

- 2.2 Þorbjörn Sigurgeirsson: *Beregninger i forbindelse med protonbaner i en kosmotron*.
 2.4 Leifur Ásgeirsson: *Om visse uligheder i algebra*.
 10.7 Sigurður Helgason: *Om Banach algebra*.
 2.11 Bjarni Jónsson: *Representationsproblemer for »lattices«*.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 11.2 R. Gran Olsson: *Integrasjon av visse likninger i dynamikken*.
 2.3 Th. Skolem: *»Elementære« aritmetiske funksjoner*.

- 9.4 E. R. Lorch, New York: *On certain extensions of the concepts of volume.*
 6.5 S. Selberg: *Om et problem med tilknytning til primtallenes fordeling.*
 28.9 V. Brun: *De kjente formler for $\ln 2$ og $\pi/4$ fremstillet slik at de kan bli sett med øynene.*
 26.10 A. A. Fraenkel, Jerusalem: *The axiom of choice.*
 23.11 M. Hestenes, Los Angeles: *Hilbert space methods in the calculus of variations.*

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

Om disse foredragene foreligger det melding:

- 2.5 i Kristiansand krets. K. Kolden: *Den spesielle relativitetsteori.*

Matematikkseksjonen i Oslo:

- 16.2 K. Alfsen: *Hva bør være pensum i matematikk på naturfaglinjen?*
 14.9 O. Lindstad: *Bruken av matematikk i fysikkundervisningen.*
 18.11 A. Kullerud: *Problemer fra undervisningen i funksjonsteori.*

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

- 13.3 Möte i Stockholm:

H. Bergström: *Gränsfördelingen för normerade summor.*
 L. Carleson: *Ett bevis för en olikhet av Carleman.*
 A. Pleijel: *Om konveksa funktioner.*
 H. Rådström: *Minkowskicirkelns båglängd.*

- 12.6 Möte i Uppsala:

E. Hallén: *Itererade integralsinus- och integralcosinusfunktioner och deras amplitudfunktioner.*
 S. Lundqvist: *Undertoner av hög ordning vid ickelinjära system.*
 G. Nordlander: *Slumpvis konvergens i Hilbertrymder.*
 F. Niordson: *Transversalsvängningar i rör, som genomströmmas av vätska.*
 Y. Rollof: *Krig och matematik. Teorien för strategiska spel.*

- 30.10 Möte i Stockholm:

H. Tornehave, København: *Middelbevægelsesproblemer.*
 F. Hogner: *En metod för bestämning av fartygs vågmotstånd.*
 F. Eriksson: *Om avstånd på ytor med begränsad totalkrökning.*
 K. G. Odqvist: *Om en icke linjär partiell differentialekvation, som uppträder vid en ny metod för bestämning av egenspanningar hos svetsfogar.*
 T. Ganelius: *En sats om positiva harmoniska funktioner.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I LUND.

- 11.4 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 2, s. 78.

- 21.11 Höstmöte. Föredrag av

T. Wetterblad: *Studentskrivningarna i fysik (diskussion).*

Vidare diskussion om gymnasiekurserna i fysik med T. Wetterblad och L. Minnhagen som inledare.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM.

4-5.1 Årsmöte. Se referat i NMT, Bind 2, s. 79.

FORENINGSNYTT

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING

avhöll årsmöte den 23 februari 1955. Till styrelse valdes: Kansler P. J. Myrberg, ordf., prof. G. Järnefelt, v.ordf., dr. K. Karhunen, skattm., dr. O. Lehto, sekr., och prof. P. Laasonen.

Lindelöfs pris för 1954 har tilldelats fil. mag. G. Tollet.

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND

anordnar *studiedagar* med föredrag och exkursioner den 2-4 juli 1955 i Uleåborg, Finland. Samtidigt firas förbundets 20-årsjubileum. Nordiska gäster är välkomna.

Lektor Bror Gustaver, Stockholm, har kallats till hedersmedlem i förbundet.

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

Professor Arne Beurling valdes til hedersledamot den 30 oktober 1954. Han är nu professor vid Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING I LUND

avhöll sitt årsmöte på Fysiska Institutionen i Lund den 16-17 april 1955. Styrelsen omvaldes, och till medlemmar i arbetsutskottet utsågos professorerna Edlén, Gustafson och Smith, lektor B. Adell och lektor A. Leide. Därefter följde diskussion om atomlärans fördelning på fysik och kemi med inledningsanföranden av lektor B. Adell och lektor A. Leide. Slutligen vidtogs en två-dagars demonstration av ett stort urval försök ägnade atomläran i skolan.

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM

avhöll sitt årsmöte den 7-8 januari 1955, första dagen i Byggnadsföreningens lokaler och andra dagen i Tekniska läroverket. Till styrelse valdes: lektor E. Knave, ordf., lektor F. Ehrnst, v.ordf., lektor B. Gustaver, sekr. och skattm. Arbetsutskott: ordf., v.ordf., sekr., lektor K. Persson och adjunkt I. Stål. Efter årsmötet hölls följande föredrag:

I. Bolin: *Några nya gifter i människans tjänst.*

O. Lindstad, Oslo: *Et mer korrekt matematisk sprog i fysisk litteratur.*

C.-E. Sjöstedt: *De nya metodiska anvisningarna i matematik på gymnasiet* (diskussion).

O. Franzén: *Television.* Utsändning av ett televisionsprogram.

M. Clemenz, Wuppertal: *Trefasväxelström och elektriska motorer.*

E. Nordahl-Svendsen, Sorø: *Energi.*

A. Nordhult höll ett orienterande föredrag om Tekniska läroverket i Stockholm.

Därefter visning av läroverkets institutioner.

T. Wetterblad: *De metodiska anvisningarna i fysik på gymnasiet* (diskussion).

UTNEVNELSER

Til amanuensis ved Københavns Universitet: B. Fuglede.

Til lektor ved Københavns Universitet: Dr. phil. T. Bang.

Till lektor ved Åbo Akademi: Fil. dr. B. Qvist.

Till professor vid Stockholms Högskola: Fil. dr. L. Carleson.

Till professor vid Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm: Fil. dr. L. G. Borg.

Till laborator vid Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm: Fil. dr. U. J. Hellsten och Fil. dr. H. V. Rådström.

Till laborator vid Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg: Fil. dr. A. Broman.

Till docent vid Lunds Universitet: Fil. dr. T. H. Ganelius.

Till docent vid Uppsala Universitet: Fil. dr. B. Stolt.

DEN INTERNASJONALE MATEMATIKERKONGRESS

Amsterdam 2.-9. sept. 1954

Det skal ikke her gis noe fullstendig referat fra denne kongressen, men bare en kort omtale av den del av kongressens virksomhet som må antas å være av særlig interesse for NMT's lesere.

Matematikkundervisning var sammen med filosofi og historie anbrakt i seksjon VII. Dessuten var det under kongressen møte i Den internasjonale kommisjon for matematikkundervisning (C. I. E. M.). Fra de nordiske land var disse representanter i kommisjonen: A. F. Andersen og S. Bundgaard (Danmark), I. Johansson og R. Tambs Lyche (Norge), O. Frostman og L. Sandgren (Sverige). Kommisjonens president er A. Chatelet (Frankrike), visepresidenter D. Kurepa (Jugoslavia) og S. Mac Lane (U. S. A.). Sekretær er H. Behnke (Tyskland).

I forbindelse med kongressen var det en utstilling av lærebøker i matematikk arrangert av Centre National de Documentation Pédagogique i Paris med deltagelse fra ti land, deriblandt Danmark (ved S. Bundgaard) og Sverige (ved L. Sandgren).

I C. I. E. M. ble det holdt en del foredrag under hovedtitlene: Matematikkundervisning for alderstrinnet 16-21 år og Matematikken og matematikeren i samtiden («The part of mathematics and the mathematician in contemporary life»). Fra de nordiske land talte S. Bundgaard om matematikkundervisningen i Danmark og O. Frostman om matematikkundervisningen i Sverige.

I seksjon VII som ble ledet av Dr. L. N. H. Bunt som er dosent i matematisk didaktikk ved universitetene i Groningen og Utrecht var det fra de nordiske land foredrag av H. H. Hansen: Geometrie und Wirklichkeit og av K. Piene: School mathematics for universities and for life.

Det kan ikke være tvil om at de mange foredrag om problemer for matematikkundervisningen, diskusjonene, lærebokutstillingen og det personlige samværet mellom foredragene og på ekskursjonene ga mange verdifulle impulser.

I de første to tiår av århundret var det en slags gullalder med hensyn til interessen for matematikkundervisningen, ikke minst på grunn av de impulser man fikk gjennom Felix Klein og I. M. U. K. Siden fulgte en viss stagnasjon. Mye taler for at Amsterdamkongressen vil bety litt av et vendepunkt, at de kontakter som her ble knyttet og de problemer som her ble reist, kan gi støtet til livligere utveksling av meninger og erfaringer landene imellom. At tiden stiller økte krav

til matematikk og dermed til matematikklærerne, er det i hvert fall ikke tvil om. Mye av det tradisjonelle lærestoffet trenger å bli erstattet av mer verdifullt. (I Nederland pågår et interessant eksperiment: i det klassiske gymnasium er vanlig matematikk erstattet av 1) historisk matematikk (med kildetekster) og 2) elementær statistikk.) Lærebøkene kan moderniseres og selve undervisningen må i høyere grad baseres på forskningsresultater. I første omgang er det viktig at matematikklærerne i de enkelte land på en grei måte kan få opplysninger om hvordan deres kolleger i andre land arbeider. I den forbindelse kan det nevnes at lærebokutstillingen fra Amsterdam vil stå til disposisjon for de foreninger som vil gjøre bruk av den. Her vil en også finne en nettopp utkommet rapport fra den tyske underkomite i C. I. E. M., skrevet med tanke på Amsterdamkongressen. Under titelen *Der mathematische Unterricht für die sechzehn- bis einundzwanzigjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland* (Göttingen 1954) er det samlet en rekke meldinger om matematikkens plass i tyske skoler. Det er blitt en bok på over 300 store sider — rik på informasjon og inspirasjon.

K. P.

RESULTAT AV PRISTÄVLINGEN FÖR SVENSKA GYMNASISTER

(Uppgifterna i NMT 2 (1954), s. 190.)

Enligt prisenämndens mening är intet av de inlämnade bidragen av sådan kvalitet, att utdelandet av ett första pris vore berättigat. I stället utdelas två andra pris om 50 kr. samt fyra extrapris med gratisprenumeration på NMT. Pristagare:

Andra pris: Ulf Ottoson, Kommunala gymnasiet, Malmö och Hans Thörnblad, Östermalms h. a. läroverk, Stockholm. Extrapris: Bengt Bjärngård, Hässleholms h. a. läroverk (2 årg.), Bo Heiman, h. a. läroverket för gossar i Malmö (2 årg.), Lars Högberg, Karolinska h. a. läroverket, Örebro (1 årg.) samt Karl Soop, Enskede h. a. läroverk (1 årg.).

SUMMARY IN ENGLISH

INKERI SIMOLA: *Historical aspects in the teaching of mathematics.*

Based on her own experience as a teacher in the Finnish high school, the author suggests that selected topics from the history of mathematics should be included in the curriculum. By showing the pupils how mathematics has been an integrating part of the general cultural life, it would rouse their interest in the subject as a whole, apart from being a pleasant change in the ordinary exercises. In the lower classes, historical aspects can only be introduced by way of selected examples. In the higher classes, it might also be possible to give a more systematic account of the history of mathematics, at least in ancient and medieval times. Such an extension of the curriculum would necessitate suitable textbooks, and a strengthening of the teachers' education on this point.

KAI RANDER BUCH: *When calculus of probability became science.*

After a short introduction to the additive and multiplicative laws of probability, the article treats the discussion between Pascal and Fermat concerning two game problems of Chevalier de Méré. Two results stated by Pascal are proved in modern terminology. Finally, a problem of probability solved by Huygens is treated.

E. J. NYSTRÖM: *On special cones.*

Starting from the cone $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$, several general properties are first mentioned, concerning circular sections and focal lines. Imposing one condition, usually orthogonal intersection of some elements, a set of one-parametric cones is obtained. Several cases are studied: Equilateral and orthogonal cones, the cones of Pappus, Hachette, Reye etc. The treatment is given in dualistic form, corresponding to the reciprocal cones $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ and $a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0$.

CARL-ERIK FRÖBERG: *Numerical calculations on digital computers.*

The article starts with a short introduction of digital computers, their logical structure and fundamental operations, binary representation of numbers, planning and coding of problems, truncation and round-off errors. Applications of computers are then discussed in the following cases: Algebraic equations, matrix inversion (by the conjugate gradient method) and eigenvalues, ordinary and partial differential equations, number-theoretical problems, non-numerical problems and other applications. The existing and projected high-speed computers in the Scandinavian countries are mentioned.

ERNST S. SELMER: *The indeterminate equation $X^3 + Y^3 = AZ^3$.*

The author gives an account of some results from his earlier paper "The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ ", Acta Math. 85 (1951), pp. 203–362. By operating in the field $K(\varrho)$, $\varrho = e^{2\pi i/3}$, an important connection between the equations $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ and $X^3 + Y^3 = abcZ^3$ is established. The latter equation is shown insoluble in some cases by means of congruence conditions for the former equation. Even when all such conditions are satisfied, insolubility can be proved in many cases by a treatment in certain cubic fields.—A method of determining the number of generators (basic rational points) is mentioned.

ARNE PLEIJEL: *On convex curves.*

Given a closed convex curve of length L and maximum radius of curvature R , the following inequalities are proved:

$$D \leq 2R \sin \frac{L}{4R}, \quad d \geq 2R \left(1 - \cos \frac{L}{4R} \right), \quad F \geq \frac{LR}{2} - R^2 \sin \frac{L}{2R}.$$

Here F is the area enclosed by the curve, and D and d are the greatest and the smallest distance between parallel tangents. Equality in each case is attained only for the lens-shaped curve composed of two circular arcs of radius R .

If also a lower limit r is given for the radius of curvature, it is shown that the isoperimetric deficit $\Delta = L^2 - 4\pi F \leq \pi(4 - \pi)(R - r)^2$. The upper limit is the best possible, attained by the outer parallel-curve (at a distance r) to a lens with radius $R - r$ and perimeter $\pi(R - r)$. This is an improvement of an earlier result by Bottema.