

OM ÄNDLIGA GEOMETRIER OCH DERAS TILLÄMPNING

P. KUSTAAHEIMO och B. QVIST

Inledning. Till de problem, som förefaller enkla men i alla fall kan vara nog så besvärliga att lösa, hör problemen inom kombinatoriken. Tag till exempel Sylvesters kända skolflicksproblem. Det består i att gruppera 15 skolflickor i grupper på tre varje dag under en veckas tid så, att efter en vecka varje flicka varit i samma grupp som var och en av de övriga en och endast en gång. Bekant är även problemet att konstruera »grekisk-romerska» kvadrater. Exempel på en sådan kvadrat är vidstående kvadrat av talpar.

Det för den grekisk-romerska kvadraten typiska
i denna kvadrat är 1° att talen 1, 2, 3 förekommer
både som första och som andra element i samtliga
rader och i samtliga kolonner; 2° att alla talpar
(1, 1), (1, 2), ..., (3, 3) är medtagna.

Att bilda en grekisk-romersk kvadrat av de 36 talparen (1, 1), (1, 2), ..., (6, 6) är omöjligt. Beviset för detta påstående är inte så alldeles lätt. Tarry torde vara den förste som bevisat det.

De kombinatoriska problemen är ohanterliga och därför ofta svåra trots sin vanligen elementära frågeställning. Ingen enhetlig princip lyser genom problemen och de behandlas ofta så att olika delar av problemen bevisas enligt olika principer. Emellanåt dyker en lösning plötsligt upp som en följd av något teorem från ett helt annat område inom matematiken.

Vår avsikt i föreliggande uppsats är att utgående från ett tämligen allmänt kombinatoriskt problem i statistiken leda oss fram till en matematisk gren, den ändliga geometrin, som naturligt ansluter sig till ifrågavarande kombinatoriska problem. Vi följer härvid samma uppställning som F. W. Levi använt i sin förträffliga lilla bok »*Finite geometrical systems*» (Calcutta 1942, 51 sidor).

»**Block design.**» Antag att vi har v olika typer av föremål och att varje typ omfattar r föremål. Dessa vr föremål skall ordnas i b grupper eller s. k. »block» så, att i varje block placeras k ($< v$) föremål av olika typ. Självklart måste

$$(1) \quad vr = bk.$$

Antag vidare, att *varje par* av föremål av olika typ förekommer i exakt λ olika block.

Ett system av block konstruerat efter dessa principer kallas ett »block design». Exempelvis är

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

ett »block design» med $b = v = 7$, $r = k = 3$, $\lambda = 1$. I exemplet finns 7 typer av föremål (tal). Varje typ är representerad av 3 föremål ($r = 3$). Kolonnerna är de sju blocken. Varje talpar förekommer i en och endast en kolonn ($\lambda = 1$).

I varje block finns $\frac{1}{2}k(k-1)$ par av föremål av olika typ. Eftersom varje sådant par förekommer i exakt λ block får vi allt som allt $\frac{1}{2}k(k-1)b/\lambda$ par. Å andra sidan är antalet dylika par $\frac{1}{2}v(v-1)$, och alltså

$$\frac{1}{2}k(k-1)b/\lambda = \frac{1}{2}v(v-1).$$

Eftersom enligt (1) $vr = bk$, förenklas denna ekvation till följande:

$$(2) \quad r(k-1) = \lambda(v-1).$$

För oss är speciellt de *symmetriska* »block design» av intresse. Symmetri innebär att $v = b$ och alltså $r = k$. Vidare behöver vi endast sådana »block design» för vilka $\lambda = 1$. Då ger (2):

$$(3) \quad v = r^2 - r + 1.$$

I det symmetriska fallet med $\lambda = 1$ gäller följande: Varje blockpar har ett och endast ett föremål av samma typ gemensamt. T. ex. följande resonemang ger oss detta. Det finns $\frac{1}{2}v(v-1) = \frac{1}{2}v(r^2-r) = \frac{1}{2}vr(r-1)$ blockpar. Föremål av en viss typ förekommer i r block och alltså i $\frac{1}{2}r(r-1)$ blockpar. I *medeltal* blir det av de v typerna sålunda en typ för varje blockpar. Men ett blockpar kan inte ha två eller flera typer gemensamma, ty då skulle ju de två blocken innehålla samma föremålspar fastän $\lambda = 1$. Enda möjligheten är att varje blockpar har ett och endast ett föremål av samma typ gemensamt.

Vi upprepar: Ett symmetriskt »block design» med $\lambda = 1$ kännetecknas av

1° att vart och ett av de v blocken innehåller r föremål av olika typ så, att varje par av föremål av olika typ förekommer i ett och endast ett block;

2° att varje blockpar innehåller ett och endast ett föremål av samma typ.

Nödvändigt är att $v = r^2 - r + 1$.

Som vi visat följer 2° ur 1° och omvänt kan visas att 1° följer ur 2°.

Exempel: Ordna samtliga kort i en kortlek i en rektangel på 4×13 kort så, att två godtyckliga kolonner på 4 kort har en och endast en valör gemensam, samt så, att varje par av valörer förekommer i en och endast en kolonn.

Detta är tydligen ett symmetriskt »block design» med $v = 13$, $r = 4$ och $\lambda = 1$. Villkoret $13 = 4^2 - 4 + 1$ är uppfyllt. En lösning är t. ex.

Spader:	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
Hjärter:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	A
Ruter:	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	A	2	3	4
Klöver:	7	8	9	10	J	Q	K	A	2	3	4	5	6

Ändliga geometrier. Vi kallar ett block en *linje* och mängden av alla föremål av samma typ en *punkt*. Ett symmetriskt »block design» med $\lambda = 1$ kallar vi en *ändlig geometri*. Då en typ och ett block ha ett föremål gemensamt, säges punkten ligga på linjen.

I denna terminologi kan vi formulera de i föregående avsnitt uppställda utsagorna så här:

1° En ändlig geometri består av v linjer och v punkter.

2° Två linjer skär varandra i en och endast en punkt.

3° Genom två punkter går en och endast en linje.

Nu är ju detta endast ett namnbyte. Men som ofta i matematiken är fallet med namnbyten är det av synnerligen inspirerande natur. Vi kan nämligen omvänt definiera begreppen linje och punkt genom att uppställa 1°–3° som axiom. Dessa axiom, de s. k. incidensaxiomen, är de första inom det axiomsystem som uppstår den Euklidiska geometrin. De har alltså *som sådana rent geometriskt intresse*. Genom att följa den gängse gången i den geometriska axiomatiken kan vi gå vidare och på detta sätt bl. a. kasta ett helt nytt ljus över de »block design» vi just behandlat. Dessa »block design» utgör en sorts grafisk bild av de ändliga geometrierna.

För att inte göra framställningen för lång skall vi utan bevis uppräknat några teorem, som följer ur axiomen 1°–3°. Teoremen förutsätter antagandet att en rät linje har $p+1$ punkter och att det existerar åtminstone 3 linjer. Storheten p är vårt tidigare r minskat med en enhet.

THEOREM 1. Alla linjer har $p+1$ punkter.

TEOREM 2. Genom varje punkt går exakt $p+1$ linjer.

TEOREM 3. Det finns exakt p^2+p+1 punkter och lika många linjer.

Följande teorem är redan något svårare att bevisa.

TEOREM 4. Om p är udda, finns det $p+1$ men icke flera punkter, som är så beskaffade att tre godtyckliga av dem icke ligger på en linje. ($(p+1)$ -kurva eller konisk sektion.)

TEOREM 5. Genom en punkt på en $(p+1)$ -kurva (p udda) går en och endast en tangent till kurvan. En tangent är en linje, som skär kurvan i exakt en punkt.

TEOREM 6. Från en punkt, som icke ligger på en $(p+1)$ -kurva (p udda), kan antingen två eller inga tangenter dragas till kurvan. Om p är jämnt går alla kurvans tangenter genom samma punkt.

Teoremen 1–6 har vi velat ge som exempel på att den enkla axiomatik, som leder till en ändlig geometri, ingalunda utmynnar i någon trivial modell. Säkert ligger många intressanta egenskaper dolda i de ganska litet undersökta ändliga geometrierna. Huruvida dessa upptäckta egenskaper har annat intresse än ett rent akademiskt är naturligtvis omöjligt att uttala sig om.

För att gå vidare uppställer vi följande välkända teorem som axiom:

DESARGUES SATS: Låt $ABCDEFGHIK$ vara 10 punkter sådana att punkttriplerna ABC , ADE , AFG , BDH , CEH , BFI , CGI , DFK och EGK var för sig är kollineära; då är även punkterna HIK kollineära.

Det är klart att detta nya axiom innebär en väsentlig inskränkning. Vi har lämnat de icke-Desargueska geometrierna bakom oss och övergått till den betydligt lättare behärskade Desargueska geometrin. Kanske är det ytterligare skäl att påpeka följande. I tre dimensioner är Desargues teorem en följd av incidensaxiomen. I två dimensioner har man lyckats bevisa att om icke-Desargueska geometrier existerar så är $p \geq 8$. För $p = 9$ och $p = 16$ har man lyckats konstruera dylika geometrier men för intet annat värde på p har man kunnat konstruera icke-Desargueska geometrier.

Vi återgår till Desargues axiom och bortser i fortsättningen från de synnerligen litet kända icke-Desargueska geometrierna. Det visar sig att Desargues axiom drar med sig förvånansvärt kraftigt determinerande konsekvenser. Man kan t. ex. visa att p måste vara ett primtal eller en primtalspotens. (Härur och av ovanstående följer att för $p = 6$ ingen geometri existerar, vilket i sin tur omöjliggör konstruktionen av en

grekisk-romersk kvadrat av talparen $(1, 1), \dots, (6, 6)$. Vidare kan man visa att geometrin kan isomorft avbildas på en del av en ändlig algebra, en s. k. Galois-kropp. M. a. o. man kan övergå till en *analytisk* geometri.

Ändliga analytiska geometrier. I talteorin definieras det fundamentala begreppet »kongruent modulo p «. Två hela tal m och n sägas vara kongruenta modulo p om $m - n$ är divisibelt med p . Beteckningen är

$$m \equiv n \pmod{p}.$$

Nu är ju varje helt tal kongruent modulo p med något av talen

$$(4) \quad 0, 1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Vi kan därför som man säger identifiera alla hela tal som är sinsemellan kongruenta modulo p och låta talen (4) utgöra representanter för resultatet. Detta innebär att varje helt tal ersätts med det av talen (4), som det är kongruent med modulo p . Vi antar nu att p är ett *udda primtal*, alltså ett primtal $\neq 2$. Vi kan då, som man kan visa, entydigt utföra de fyra enkla räknesätten med talen (4) och som resultat alltid få ett av talen (4). Härvid får vi icke glömma att varje tal som eventuellt ligger utanför talen (4) skall ersättas med det av talen (4) som det är kongruent med. Kort sagt innebär det ovensagda att likhet ersätts med kongruens modulo p . Tagna på detta sätt säger vi att talen (4) ger en *Galois-kropp* GF_p .

Exempel: Kroppen GF_5 . Talen eller elementen är 0, 1, 2, 3, 4; vi ha t. ex. $2 \cdot 3 = 1$, $3 + 2 = 0$, $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 3$ o. s. v.

Utöver de enkla räknesätten kan vi införa rotutdragnings. I talteorin bevisas att man kan draga kvadratroten ur hälften (0 icke medräknad) av alla element, nämligen ur de s. k. *kvadratiska resterna* eller *positiva talen* (p udda). I exemplet ovan är 1 och 4 rester, ty $\sqrt{1} = 1$ eller 4 och $\sqrt{4} = 2$ eller 3. Talen 2 och 3 är *icke-rester* och deras kvadratrötter ger »imaginära» Galois-element.

Vi återgår nu till våra ändliga geometrier. Det sker på följande sätt. Om x, y, z och a, b, c är element i en Galois-kropp och varken $x=y=z=0$ eller $a=b=c=0$, så kallar vi

(x, y, z) en punkt,

(a, b, c) en linje,

(x_1, y_1, z_1) samma punkt som (x_2, y_2, z_2) om och endast om $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$, $z_1 = kz_2$, där $k \neq 0$ är ett element i Galois-kroppen,

(a_1, b_1, c_1) samma linje som (a_2, b_2, c_2) om och endast om $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$, där $k \neq 0$ är ett element i Galois-kroppen.

Vidare säger vi att punkten (x, y, z) ligger på linjen (a, b, c) om och endast om

$$ax + by + cz = 0.$$

Det är nu lätt att visa, att det system som vi sålunda får inte är någonting annat än en ändlig Desarguesk geometri.

Vi har infört s. k. homogena koordinater, vilka leder till en projektiv geometri. Utesluter vi ur geometrinen en linje och dess punkter så inser vi att parallellaxiomet gäller och vi får en ändlig euklidisk geometri.

Exempel 1: $p = 3$. Vi betecknar Galois-elementen med 0, 1, -1 i stället för 0, 1, 2. Det finns 13 punkter, nämligen:

- | | | |
|--------------|------------------|--------------------|
| 1. (1, 0, 0) | 5. (1, -1 , 0) | 9. (0, 1, -1) |
| 2. (0, 1, 0) | 6. (1, 0, 1) | 10. (1, 1, 1) |
| 3. (0, 0, 1) | 7. (1, 0, -1) | 11. (1, 1, -1) |
| 4. (1, 1, 0) | 8. (0, 1, 1) | 12. (1, -1 , 1) |
| | | 13. (-1 , 1, 1) |

Linjerna fås ur samma schema. För att se vilka punkter som t. ex. ligger på linjen 4, måste vi lösa ekvationen $x + y = 0$, och får punkterna 3, 5, 12 och 13. I nedanstående tabell är de punkter uppräknade som ligger på linjerna 1—13.

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1. 8, 9, 2, 3 | 5. 3, 11, 4, 10 | 9. 10, 1, 13, 8 |
| 2. 6, 3, 7, 1 | 6. 7, 13, 11, 2 | 10. 5, 7, 10, 9 |
| 3. 1, 2, 5, 4 | 7. 2, 10, 6, 12 | 11. 11, 6, 8, 5 |
| 4. 12, 5, 3, 13 | 8. 9, 12, 1, 11 | 12. 4, 8, 12, 7 |
| | | 13. 13, 4, 9, 6 |

Detta schema är ett »block design» med $v = 13$, $r = 4$, $\lambda = 1$, och utgör en lösning till kortproblemet i början av vår uppsats.

Exempel 2: $p = 5$. Vi utesluter linjen $(0, 0, 1)$ och dess punkter $(x, y, 0)$. Eftersom de återstående punkterna (x, y, z) har $z \neq 0$, kan vi dividera med z och får punkterna i formen $(x, y, 1)$ eller kortare (x, y) . Vi har alltså övergått till en euklidisk geometri med 25 punkter (x, y) och 30 linjer (a, b, c) , där icke $a = b = 0$. Punkterna är

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (0, 4) | (1, 4) | (2, 4) | (3, 4) | (4, 4) |
| (0, 3) | (1, 3) | (2, 3) | (3, 3) | (4, 3) |
| (0, 2) | (1, 2) | (2, 2) | (3, 2) | (4, 2) |
| (0, 1) | (1, 1) | (2, 1) | (3, 1) | (4, 1) |
| (0, 0) | (1, 0) | (2, 0) | (3, 0) | (4, 0) |

Koordinataxlarna är $x = 0$ och $y = 0$. Vrider vi koordinatsystemet t. ex. enligt transformationsformeln

$$x' = x - y, \quad y' = x + y,$$

så blir koordinaterna för ovanstående punkter

(1, 4)	(2, 0)	(3, 1)	(4, 2)	(0, 3)
(2, 3)	(3, 4)	(4, 0)	(0, 1)	(1, 2)
(3, 2)	(4, 3)	(0, 4)	(1, 0)	(2, 1)
(4, 1)	(0, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 0)
(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 4)

Som geometriskt inses, genom att det är fråga om parallella linjer, måste resultatet bli en grekisk-romersk kvadrat. Detta kan även direkt verifieras.

Den ändliga geometrin och fysiken. I de föregående avsnitten har vi behandlat de ändliga geometrierna utgående från kombinatoriken. Historiskt har likväl de ändliga geometrierna sin upprinnelse i undersökningar rörande de geometriska axiomen. En för axiomatiken väsentlig fråga är huruvida axiomen är oberoende av varandra. Med bl. a. detta mål för ögonen har axiomatikens klassiker — Hilbert, Veblen, Hjelmslev o. a. — uppställt konfigurationer, som innehåller ett ändligt antal punkter och linjer och som enda relationer de s. k. incidensrelationerna. Bland dessa konfigurationer finner vi även de ändliga geometrierna. Den första undersökningen av denna art torde utgöras av italienaren Gino Fanos berömda publikation av år 1892. I denna publikation anges redan systematiskt en ändlig geometri för varje primtal p och för varje dimension (plan, rymd, 4-dimensionell rymd o. s. v.). Fano kan alltså anses som den ändliga geometrins »fader».

Den förste som tillämpade ändliga geometrier på statistiken, enkannerligen på s. k. »block design», är väl den tidigare omnämnde F. W. Levi. År 1940 höll han i Calcutta fem föreläsningar över detta ämne.

Efter år 1949 har försök gjorts att tillämpa de ändliga geometrierna på ett fullkomligt nytt område. I den mån dessa försök leder till acceptabla resultat kan de leda till en helt ny naturvetenskaplig världsbild. Nämnade år framkastade G. Järnefelt på matematikerkongressen i Trondheim tanken att en finitisering av fysiken och astronomin skulle kunna åstadkommas genom att de fysikaliska och astronomiska teorierna skulle baseras på Galois-kroppar och ändliga geometrier. En finitisering innebär att begreppet oändlig är bannlyst. Detta betyder inte allenast att rymden och tiden måste vara ändliga utan även att punkterna på en

sträcka inte får ligga oändligt tätt, det får inte finnas en oändligt liten energimängd, inte en godtyckligt liten sträcka, vinklar får inte delas i huru många delar som helst etc. På detta sätt skulle man kringgå alla de svårigheter och paradoxer som begreppet oändlig drar med sig.

I och för sig är tanken på en finit världsbild ingalunda ny. Kvantteorin, som bygger på antagandet att energin och impulsen består av ett ändligt antal ändligt små kvanta, är ett första steg mot finitisering. Den oerhörda framgång kvantteorin rönt i början på detta århundrade ledde naturligt till försök att kvantisera även andra storheter såsom hastighet, rymd och tid. Bl. a. har man försökt lansera s. k. gitterpunktmodeller. Man har antagit, att det existerar en minsta längd av atomkärndiameters storleksordning, en enhet, som inte mera kan delas. Fysikens rymd skulle vara ett av denna minsta enhet hopfogat punktgitte. Det vill säga: de fysikaliska storheterna kan inte existera i vilka punkter som helst utan endast i sådana, vilkas avstånd från varandra utgöres av en heltalsmultipel av den minsta längden. Vi kan t. ex. föreställa oss små kuber uppstaplade på varandra. Kubernas kanter är de minsta längderna. I den fysikaliska rymden existerar då endast de punkter som sammanfaller med kubernas hörn. En dylik gittermodell lider likväl av en uppenbar svaghet: den är nämligen inte som man säger rymdisotropisk. Rymden kommer ju att innehålla riktningar av olika slag. Tänker vi på den rymd som den klassiska geometrin arbetar i och som utgör grunden för den klassiska fysiken, så är det omöjligt att i denna rymd utpeka någon riktning som i något avseende skulle ha andra egenskaper än vilken annan riktning som helst. Men i gitterpunktsrymden intar de riktningar som anges av kubernas kanter en särställning, ty varje punkt har 6 närmaste punkter och dessa ligger sett från ifrågavarande punkt just i de riktningar som anges av kubernas kanter. Vidare kan från varje punkt dras 12 riktningar till sådana punkter som befinner sig på avståndet $\sqrt{2}$ gånger minsta längden, etc.

Genom att tillgripa ändliga geometrier eliminerar man isotropiproblemet. Den ändliga geometrin är till sin byggnad lika symmetrisk som den Euklidiska geometrin, eftersom dess algebraiska konstruktion är analog. De reella talens kropp har ersatts med en Galois-kropp, men de fyra enkla räknesätten följer fortfarande samma regler.

Nu förefaller det säkert som om isotropiegenskapen skulle väga mycket lätt i jämförelse med de säregna egenskaper den ändliga geometrin är behäftad med och som man blir tvungen att anamma i en teori som bygger på Galois-kroppar. Huru kan man tillämpa ett system på fysiken där t. ex. primtalet p är likvärt med noll? En närmare undersökning, som Kustaanheimo gjort, ger emellertid följande anmärkningsvärda resul-

tat: vi kan alltid konstruera ändliga geometrier så att de avbildar den fysikaliska världen med samma noggrannhet som den euklidiska geometrin. Konstruktionen består väsentligen i att införa ordning och metrik i den ändliga geometrin.

Ordningsbegreppet. En ändlig geometri får vi om vi konstruerar en analytisk geometri på en Galois-kropp, t. ex. så att vi identifierar alla hela tal modulo p . Om t. ex. $p = 5$ kan en variabel x antaga värdena 0, 1, 2, 3, 4 eller lika bra $-2, -1, 0, 1, 2$. På x -axeln ligger alltså 5 punkter. Vi frågar nu: vilket är kriteriet för att en punkt ligger *mellan* två andra punkter? Ligger $4 = -1$ till *höger* eller till *vänster* om 1? Tar vi problemet allmännare så gäller det att bestämma ordningsföljden för punkterna på en rät linje. Punkterna kan representeras av sina koordinater. I den vanliga analytiska geometrin bestämmer en koordinat, t. ex. x -koordinaten, punkternas inbördes ordning. Vi inser att en allmän anordning av punkterna på en rät linje erhålls om vi lyckas ordna Galois-elementen.

För de reella talen är problemet enkelt. Ett reellt tal a ligger till *höger* om ett annat reellt tal b om a är större än b vilket betyder att $a - b$ är positivt. Försöker vi oss på samma definition för Galois-talen stöter vi genast på orimligheter. Galois-talen representeras av p hela tal som är olika modulo p , t. ex. $\frac{1}{2}(p-1), \frac{1}{2}(p-3), \dots, 0, -1, -2, \dots, \frac{1}{2}(3-p), \frac{1}{2}(1-p)$, eller $1, 2, 3, \dots, p-1, p$, eller varför inte $0, 2, 4, \dots, p-3, p-1, p+1, \dots, 2p-4, 2p-2$. Vilka av dessa tal är positiva? Är 1 positivt? Inte nödvändigtvis, ty det är ju detsamma som $1-p$. Likaså är $p-2$ inte nödvändigtvis positivt eftersom det är detsamma som -2 . Vi kan inte intuitivt avgöra vilka Galois-tal som är positiva. Vi måste därför återgå till de reella talen och fråga oss: vilken *algebraisk* egenskap utmärker de positiva talen? Svaret kan inte fås inom ramen för de fyra enkla räknesätten, emedan de reella talen bildar en kropp och alla element i en kropp utom 0 är likvärdiga i avseende på de fyra enkla räknesätten. Vi går därför till följande räknesätt och finner genast svaret: de tal ur vilka kvadratroten kan dras är positiva, de tal ur vilka kvadratroten inte kan dras är negativa. Denna definition kan omedelbart överföras till Galois-kropparna.

Elementet a i en Galois-kropp är positivt, om och endast om det kan skrivas i formen $a = x^2$, där x är ett från 0 skilt Galois-element. Element som inte är 0 eller positiva är negativa.

Vi kan nu ordna Galois-elementen. Men vi måste undersöka om den ordning vi på detta sätt accepterar har samma egenskaper som den för de reella talen gällande ordningen. De reella talens ordning uppfyller följande villkor:

1. Produkten av två positiva tal är positiv.
2. Produkten av två negativa tal är positiv.
3. Produkten av ett positivt och ett negativt tal är negativ.
4. Summan av två positiva tal är positiv.
5. Talet -1 är negativt.

Omvänt kan man visa att dessa 5 satser tagna som axiom entydigt definierar de reella talens storleksordning. Alla 5 satserna är väsentliga. T. ex. den femte satsen garanterar, att om $a-b$ är positivt så är $b-a$ negativt. Skulle så inte vara fallet så kunde för två tal a och b samtidigt gälla $a > b$ och $b > a$.

I algebran visas, att i varje Galois-kropp satserna 1, 2 och 3 gäller. T. ex. den första satsen bevisas så: om a och b är positiva, så är $a = x^2$ och $b = y^2$ och alltså $ab = (xy)^2$, d. v. s. ab är positivt. Satserna 2 och 3 kan bevisas analogt.

Satserna 4 och 5 är däremot inte giltiga i varje Galois-kropp. Vi har tidigare visat att exempelvis i Galois-kroppen GF_5 talen 1 och $4 = -1$ är positiva; således gäller sats 5 inte i denna kropp. Den berömda reciprocitetssatsen av Gauss tillåter oss att avgöra i vilka kroppar -1 är negativt. Resultatet är att -1 är negativt i de och endast de Galois-kroppar GF_p där primtalet p är av formen $p = 4n-1$, n ett helt tal. Således t. ex. i kropparna $p = 3, 7, 11, 19, 23, 31, \dots$; däremot inte i kropparna $p = 2, 5, 13, 17, 29, 37, \dots$. Som grund för en fysikalisk världsbild kommer alltså endast Galois-kroppar av den förra typen i fråga.

Låt oss sedan betrakta sats 4. I varje kropp är 1 positivt eftersom $1 = 1^2$ oberoende av p . För att sats 4 skall gälla måste även $1+1 = 2$ vara positivt, vidare $1+2 = 3$ och $1+3 = 4$ vara positiva o. s. v. Å andra sidan får vi på detta sätt alla Galois-tal och de skulle alltså alla vara positiva. Men man kan bevisa, som vi tidigare nämnt, att i alla Galois-kroppar där $p \neq 2$ hälften av de från 0 skilda elementen är positiva och hälften negativa. Vi ser således, att sats 4 inte kan gälla i någon Galois-kropp.

Denna väsentliga skillnad mellan de reella talen och Galois-talen är troligen orsak till att man ansett det omöjligt att använda Galois-tal i fysiken. Men å andra sidan kan vi konstatera följande: om för Galois-talen alla satserna 1-5 skulle gälla, så skulle de ju vara likvärda med de reella talen med avseende å anordningen. Men om en ny teori är likvärd med någon gammal, så finns det ju ingen orsak att införa den i fysiken. Då en ny teori skapas, hoppas man tvärtom att den i något avseende skall skilja sig från den gamla och sålunda skall vara i stånd att ge resultat som den gamla teorin inte ger. Som vi senare skall se, ger Galois-talen

genom att de inte uppfyller sats 4 åt vår världsbild en egenskap, som ingen världsbild byggd på reella tal kan ha.

Självklart får inte ordningsbegreppet i den nya teorin skilja sig mycket från det i den gamla. Erfarenheten fordrar en gång för alla att summan av två positiva tal skall vara positiv, åtminstone för sådana tal som vi komma i beröring med i det dagliga livet eller på den klassiska fysikens domäner. Men i fysiken förekommer aldrig tal, som innehåller mer än 40 siffror. Den klassiska fysikens fordringar är alltså uppfyllda, om vår Galois-kropps tal $1, 2, 3, \dots, 10^{40}$ är positiva (och -1 negativt, varav enligt sats 3 följer att även talen $-2, -3, \dots, -10^{40}$ är negativa). För de övriga Galois-talen behöver ju sats 4 faktiskt inte alls gälla.

Nu uppstår frågan: finns det dylika Galois-kroppar där så många »på varandra följande« tal (d. v. s. tal, vilkas skillnad är 1) är positiva och alltså »på varandra följande« även vad beträffar storleken? Genom att tillämpa den tidigare omnämnda reciprocitetssatsen jämte Dirichlets djuplyggande sats om primtal finner man följande resultat. Låt q vara ett givet godtyckligt stort positivt helt tal; då existerar det alltid till och med oändligt många sådana primtal p , att i kroppen GF_p talen $1, 2, 3, \dots, q-1, q$ alla är positiva och -1 negativt.

Ordningsproblemet är härmed löst. Vi tar en dylik kropp GF_p och konstruerar en analytisk geometri av euklidisk typ. Denna geometri approximerar den klassiska euklidiska geometrins incidens- och ordningsrelationer godtyckligt noggrannt, desto bättre ju större det ovannämnda q tages. I denna geometri gäller, oaktat den är ändlig, alla den klassiska geometrins ordnings- och incidensrelationer om vi inte betraktar mycket stora eller mycket små tal. En sträcka kan t. ex. alltid delas i n delar så att delningspunkterna alla ligger mellan varandra och ändpunkterna, om inte n är mycket stort (större än 10^{40}). Likaså är av tre punkter på en rät linje en och endast en belägen mellan de två övriga, om inte punkterna ligger mycket långt från eller mycket nära varandra. I det mycket lilla och i det mycket stora däremot finns det punkttripler på samma räta linje som har den egenskapen att varje punkt ligger mellan de två övriga. — Detta sönderfall av vårt intuitiva begrepp om ordning då vi går till extremt små eller stora värden kan vara orsaken till att fysikerna som räknar med reella tal inte lyckats uppställa tillfredsställande teorier för atomerna och för världsaltet.

Kongruensbegreppet. Förutom incidens- och ordningsrelationerna karakteriseras den klassiska geometrin av en tredje relation, som kallas kongruens. Kongruensen möjliggör mätning av sträckor och vinklar. Analytiska geometrins avståndsformel, d. v. s. formeln för avståndet

mellan två punkter, ger oss ett analytiskt medel att avgöra om två figurer är kongruenta eller ej. Det betyder, att så snart vi känner den funktion av koordinaterna (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) för en sträckas ändpunkter, som ger oss avståndet d mellan punkterna, så är kongruensrelationerna definierade. Kongruensbegreppet i den euklidiska geometrin skall uppfylla vissa axiom, av vilka följer att d måste vara den positiva kvadratroten ur ett homogent, definit andragsgradspolynom i koordinatskillnaderna $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$. Funktionen d blir på detta sätt bestämd, och väljer vi koordinatsystemet lämpligt blir

$$(5) \quad d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Sättet, på vilket kongruensbegreppet skall definieras i den ändliga geometrin, ger sig tämligen entydigt. Håller vi oss till Galois-kroppar kan nämligen *varje* homogent andragsgradspolynom i tre variabler x, y, z transformeras till formen $x^2 + y^2 + z^2$. Vi kommer överens om att formeln (5), även i de ändliga geometrierna, skall ge avståndet mellan två punkter i ett lämpligt valt koordinatsystem.

Efter att på detta sätt ha definierat begreppet kongruens konstaterar vi att, liksom för ordningsrelationen, kongruensen har samma egenskaper som den klassiska geometriens kongruens, detta under förutsättning att vi inte går till för stora eller för små värden. Gör vi detta, så stöter vi på överraskande avvikelser från den klassiska geometrin. I formel (5) är definitionsmässigt kvadraterna på koordinatskillnaderna positiva tal eller 0, och alltså även deras summa positiv. Detta under den förutsättningen att vi håller oss till det välordnade område där summan av två positiva tal är positiv. I det mycket stora och det mycket lilla kan summan av tre kvadrater vara negativ och vi får då en sträcka vars längd är »imaginär». Men summan kan även vara 0 fastän koordinatskillnaderna är $\neq 0$. Vi får då en s. k. »0-sträcka», en sträcka vars längd är noll fastän ändpunkterna är olika punkter. Situationen är alltså densamma som i relativitetsteoriens rymd där ljusstrålarnas banor är 0-linjer. — Vilken fysikalisk betydelse de ändliga geometriernas 0-linjer eventuellt kan ha är höljt i dunkel.

Tidsbegreppet. Vi har konstruerat en geometri där allt är logiskt ändligt men vilken vi det oaktat inte med fysikaliska mätningar kan särskilja från den klassiska geometrin. På denna geometri vill vi nu bygga en fysikalisk världsbild. Förrän vi kan göra det måste vi undersöka den fjärde dimensionen. Varje fysikalisk teori fordrar ju åtminstone fyra grundvariabler: tre rymdkoordinater och en tidskoordinat.

Då vi behandlade rymden hade vi endast en framkomlig väg att gå.

Då vi skall komplettera rymden med tidsbegreppet förgrenar sig vägen och vi får två acceptabla möjligheter att välja emellan. Vi vidhåller fortfarande kravet på logisk ändlighet: tidpunkter får finnas endast i ändlig mängd. Men därav följer inte att tiden nödvändigt måste vara en variabel i en Galois-kropp.

För att förstå detta bör vi undersöka vilka typer av funktioner som kan förekomma inom ramen för Galois-kroppar. I fysiken är ju en materiell partikels geometriska koordinater funktioner av tiden.

Om Galois-talet y är en funktion av Galois-talet x , så kan man lätt bevisa att y alltid kan uttryckas medelst ett s. k. Lagrange-polynom i x , d. v. s. att y som funktion av x är ett polynom i x vars gradtal är högst $p-1$ och vars koefficienter är Galois-tal. Inom det välordnade området kan *vilken* funktion som helst *approximeras* med ett dylikt polynom, men utanför det välordnade området kommer funktionens polynomnatur fram. Så har t. ex. den reella exponentialfunktionen $y = e^x$ ingen motsvarighet inom ramen för Galois-talen, men om vi håller oss *inom* det välordnade området så ger polynomet $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$ samma talvärden med godtycklig noggrannhet.

Funktioner påminnande om exponentialfunktionen kan man nog konstruera inom ramen för Galois-talen. Exempelvis

$$(6) \quad y = a^t,$$

där a är ett Galois-tal, är en sådan funktion. Men här måste t vara ett vanligt helt tal för att uttrycket överhuvud skall ha någon betydelse. Man kan bevisa, att varje funktion av typen (6) är periodisk, och dess period antingen $p-1$ eller någon faktor i $p-1$. Vi kan även konstruera funktioner vilkas perioder är en godtycklig faktor i p^n-1 (n ett godtyckligt helt tal). Vi förfar då på följande sätt: till kroppen GF_p adjungerar vi roten till en i GF_p irreducibel n :te grads ekvation $x^n + ax^{n-1} + \dots + bx + c = 0$, varvid vi får en ny kropp GF_{p^n} . Analogt fås ju den komplexa talkroppen ur den reella genom adjungering av den ena av den irreducibla ekvationens $x^2 + 1 = 0$ rötter. I den sålunda erhållna Galois-kroppen GF_{p^n} finns p^n element, vilka alla kan skrivas i den komplexa formen

$$(7) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1},$$

där x är nyssnämnda rot (motsvarande den imaginära enheten i) och $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tal som hör till kroppen GF_p . Man kan bevisa, att om a är ett tal som hör till kroppen GF_{p^n} och om t är ett vanligt helt tal, så är perioden för funktionen a^t antingen p^n-1 eller en faktor i p^n-1 . Genom att på lämpligt sätt kombinera dylika funktioner får vi funk-

tioner, vilkas alla värden hör till kroppen GF_p och vilkas period är en godtycklig faktor i $p^n - 1$.

Perioden för funktionen $y = y(t)$ kan även vara p , oaktat t är ett vanligt helt tal. Vi kan nämligen först definiera en funktion

$$(8) \quad x = x(t)$$

där x är summan av t stycken ettor i kroppen GF_p . Sedan konstruerar vi de tidigare nämnda Lagrange-polynomen i x . På detta sätt får vi exakt samma funktioner som vi tidigare fick då vi betraktade en Galois-variabel som en funktion av en annan Galois-variabel. Enda skillnaden är att den fria variabeln nu icke är Galois-talet x utan det hela tal t som svarar mot x enligt ekvationen (8). T. ex. polynomet $y = 2 + x + x^3$ får i kroppen GF_7 värdet 2 för $t = \dots, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \dots$ och värdet 4 för $t = \dots, -6, 1, 8, 15, \dots$. En dylik funktions period är alltså p ; i det anförda speciella exemplet är $p = 7$.

Slutligen kan vi kombinera funktioner av typen $y = xa^t$, där x är funktionen (8) och a ett komplext tal i kroppen GF_{p^n} . På detta sätt får vi funktioner vilkas period är en faktor i $p(p^n - 1)$. — Funktioner vilkas period skulle vara divisibel med p^2 kan vi däremot inte konstruera.

Om alltså tidsvariabeln t genomlöper de vanliga heltalen, så är alla analytiskt konstruerade Galois-funktioner $y = y(t)$ av t periodiska. Som period kan förekomma vilket helt tal som helst som icke är divisibelt med p^2 . Denna periodicitet gör vår modell i varje händelse logiskt finit: eftersom alla funktioner som förekommer i vår världsbild är periodiska, och deras perioder är hela tal, så har hela världssalltet en ändlig grundperiod. Denna grundperiod är den minsta gemensamma dividenden till de enskilda funktionernas perioder. Tidpunkter t , som skiljer sig från varandra med denna grundperiod, kan inte på något sätt skiljas från varandra och vi kan identifiera dem sinsemellan. På detta sätt kommer vi även till en finit tid såsom vi tidigare kom till en finit rymd. Skillnaden är endast den att medan de hela tal som beskriver rymden skall identifieras modulo ett primtal p , så kan däremot tiden identifieras modulo vilket helt tal som helst. — I algebraisk terminologi kan vi säga att rymdvariablerna skall bilda en ändlig kropp, tidsvariabeln däremot endast en ändlig ring. Orsaken härtill är rymdens 3-dimensionalitet: en 3-dimensionell geometri är möjlig endast i en kropp, tidens 1-dimensionella geometri däremot redan i en ring.

Några synpunkter på eventuella tillämpningar. Fysikens tidsbegrepp kan vi enligt föregående avsnitt uppfatta på två olika sätt. Antingen är tiden den fjärde dimensionen i den ändliga geometri där

fysikens rymd utgör tre dimensioner, eller också är tiden en skild ändlig ring. I det förra fallet, som vi kallar det »metrisk», är händelserna i fysiken en 4-dimensionell oföränderlig rymds punkter och naturlagarna skall definieras som geometriska relationer mellan dessa punkter. Relativitets- och kvantteoriens framgångar suggererar oss att acceptera ett dylikt betraktelsesätt. Prof. Järnefelt har gjort ansatser till att finitiserar några problem ur kvantteorin som tillämpning på en finit världsbild av denna typ.

Det senare »dynamiska» betraktelsesättet lockar därför att det tillåter en finitisering av den klassiska mekaniken på ett jämförelsevis trivialt sätt. Tiden har i detta fall en prefererad riktning, och masspunkterna rör sig från en punkt till en annan i Galois-rymden allt medan tiden fortskrider med en enhet i gången. Om $x(t)$ är en masspunkts x -koordinat vid tidpunkten t och $x(t+1)$ dess x -koordinat vid tidpunkten $t+1$, så har den på tiden 1 förflyttat sig vägen $x(t+1)-x(t)$ i x -axelns riktning. Denna skillnad ger uppenbarligen ett mått på masspunktens hastighetskomponent i x -axelns riktning. Om geometrin approximerar den vanliga euklidiska geometrin tillräckligt bra, och om den fysikaliska motsvarigheten till tiden 1 tages tillräckligt liten, så närmar sig skillnaden $x(t+1)-x(t)$ derivatan $dx(t)/dt$. Vi kan alltså definiera skillnaden $x(t+1)-x(t)$ i vår finita modell som x -komponenten för punktens hastighet vid tidpunkten t (eller vid tidpunkten $t+1$, vilken inom gränserna för observationsnoggrannheten är densamma som tidpunkten t). Likaså konstaterar vi att $x(t+2)-2x(t+1)+x(t)$ godtyckligt noggrant ger x -komponenten för masspunktens acceleration. Om F_x är en funktion av masspunktens hastighet och läge samt tiden t , approximativt densamma som x -komponenten för den klassiska kraften, så kan vi naturligtvis ersätta den klassiska Newtonska differentialekvationen med *differensekvationen*

$$x(t+2)-2x(t+1)+x(t) = \frac{1}{m} F_x,$$

där m är ett Galois-tal, som representerar masspunktens massa. Allmänt kan vi säga att alla rörelseekvationer godtyckligt noggrant kan approximeras medelst differensekvationer av typen

$$(9) \quad x(t+2) = X,$$

där högra membrum är en Galois-funktion av tiden t samt ifrågavarande masspunkts lägekoordinater vid tidpunkterna $t+1$ och t .

Om vi nu vänder på talesättet och säger, att de så konstruerade dif-

ferensekvationerna för rörelsen utgör den verkliga fysiken, som den på de klassiska differentialekvationerna grundade fysiken tillräckligt noggrant approximerar, så är allt fortfarande i sin ordning. Vi observerar speciellt, att en dylik finit modell exakt uppfyller de fordringar som bör påläggas varje fysikalisk teori: ekvationernas antal är detsamma som de obekanta funktionernas och dessa funktioner blir entydigt bestämda så snart randvillkoren är givna. I detta fall utgöres randvillkoren av alla masspunkters läge och hastighet vid någon tidpunkt t_0 , alltså av uttryck av typen $x(t_0)$ och $x(t_0+1)-x(t_0)$. Det är uppenbart att dessa uttryck entydigt bestämmer lösningen: genom att addera dem fås $x(t_0+1)$ och $x(t_0)$ och genom att insätta dessa i ekvation (9) fås $x(t_0+2)$. Sedan insättes $x(t_0+1)$ och $x(t_0+2)$ i (9) och man får $x(t_0+3)$ o. s. v.

Kraftfunktionerna X i högra membrum av ekvationerna (9) kan väljas på oändligt många sätt: det finns oändligt många uttryck som approximerar den klassiska kraftlagen lika bra. Den fortsatta utvecklingen av teorin kommer kanske att klarlägga den intressanta frågan huruvida man genom ett lämpligt val av kraftlagen kan finna en naturlig förklaring på fenomen, som den klassiska mekaniken inte kan förklara.

Utöver den logiska ändligheten kan vi tillsvidare framhålla endast en egenskap där den finita världsbilden är överlägsen alla de världsbilder som bygger på reella tal. Denna egenskap har framkommit redan i ovanstående ytliga betraktelse: I den finita världsbilden är alla fysikaliska storheter periodiska funktioner av tiden och själva världsalltet har en finit grundperiod. Detta får oss att tänka på någonting som pendlar eller roterar och på så sätt alltid återvänder till sitt ursprungliga läge. Vi tillägger därför: de periodiska funktionerna kan oaktat sin periodicitet vara ständigt växande eller ständigt avtagande d. v. s. monotona. Vi kan t. ex. betrakta en masspunkts rörelse i den tomma rymden, där ingen kraft verkar. Newtons rörelseekvation lyder då (rörelsen i y -axelns riktning): $d^2y(t)/dt^2 = 0$, och den finita motsvarigheten är $y(t+2) = 2y(t+1) - y(t)$. Allmänna lösningen till den senare ekvationen är

$$y(t) = ax(t) + b,$$

där a och b är av tiden oberoende godtyckliga Galois-tal och $x(t)$ den tidigare omnämnda funktionen (8). Rörelsens period är alltså p . Det oaktat är rörelsen en likformig alltid åt samma håll fortskridande rätlinig rörelse, eftersom skillnaden mellan två på varandra följande lägen alltid är konstant och lika med a . En masspunkt på vilken ingen kraft verkar rör sig alltså i den finita rymden likformigt och rätlinigt — och återvänder efter tiden p till sitt utgångsläge från motsatt håll. Det oaktat är rymden inte på något invecklat sätt »krökt» som t. ex. i den allmänna

relativitetsteorin, utan den är en alldeles vanlig »rät« rymd, där parallella linjer inte skär varandra och där summan av vinklarna i en triangel alltid är densamma. — Den likformiga rätliniga rörelsen är inte den enda monotona och periodiska funktionen. Om t. ex. a är ett Galois-tal inom kroppen GF_p samt $a > 0$ och $a > 1$, så är funktionen $y = a^t$ en dylik funktion. Funktionens tillväxt mellan två på varandra följande tidpunkter är nämligen $a^{t+1} - a^t = a^t(a - 1)$ och alltså alltid positiv då ju faktorerna a och $a - 1$ är positiva.

På senare tid har fysikerna visat ett allt större intresse för en s. k. expanderande men stationär kosmologi, det vill säga en världsbild, där stjärnrymden alltid utvidgar sig, men ändå alltid ser lika ut. En sådan modell kan varken den klassiska fysiken eller relativitetsteorien åstadkomma utan att avstå från den urgamla principen om materiens (eller materiens plus energins) konstans. För den skull har bl. a. Bondi och Hoyle i fysiken infört antagandet om »den kontinuerliga skapelsen»: materie uppstår likformigt alltid och överallt ur intet och just så mycket som behövs för att rymden oberoende av sin utvidgning skall förbli lika tät. Man vill alltså avstå från ett gammalt enkelt antagande och i stället införa två av varandra oberoende antaganden som av en tillfällighet står i rätt förhållande till varandra.

Vi märker att finitiseringsen bjuder på en något naturligare väg till en stationär och dock expanderande kosmologi: nebulosornas lägekoordinater är monotona och periodiska Galois-funktioner. Då avlägsnar sig nebulosorna alltid från varandra, t. ex. exponentiellt såsom a^t varigenom Hubbles rödförskjutningslag också blir uppfylld — men då världsalltet genomlöpt sin grundperiod, är nebulosorna återigen på samma ställe. Den exponentiella utvidgningen medför speciellt att nebulosorna inte kommer »tillbaka från motsatt håll» såsom vid en rätlinig likformig rörelse, utan de dyker upp ur det »oändligt lilla» efter att ha försvunnit i det »oändligt stora». Detta betyder, att atomerna i en nebula som kommer tillbaka, efterhand dyker upp mitt ibland oss — alltså just det som Bondi och Hoyle kallar kontinuerlig skapelse. Samtidigt får vi en förklaring på varför just så mycket materie nybildas som det försvinner med de sig avlägsnande nebulosorna: det är helt enkelt samma nebulosor, eller exaktare: nebulosor finns överallt ungefär lika tätt, alltså även lika många i pånyttfödelsestadiet som i ett bestämt flyktskede.

Denna endast för finita modeller möjliga »naturliga» förklaring är mycket lockande. Vi får dock inte glömma att en naturlighet här liksom överallt i fysiken har köpts till priset av en annan: vi har avstått från det naturliga intuitiva ordningsbegreppet, som alla andra fysikaliska teorier, t. o. m. relativitets- och kvantteorin, bibehållit.

Tillägg till divisionen i Galois-kroppar. Efter att artikeln har blivit satt, har redaktionssekreteraren riktat följande fråga till författarna om divisionen (delningen av en sträcka) i GF_p : Kan inte divisionen leda till tal, som ligger utanför det »välordnade» området? T. ex. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(p+1)$ är ju ett oerhört stort tal.

Svaret på denna fråga, som helt naturligt inställer sig, fordrar en utredning, som vi tyvärr utelämnade i vår artikel. Vi behandlade i den endast ordningen i räckan $1, 2, 3, \dots, 10^{40}$. Emellertid är detta specialfall en följd av en allmän sats, som bevisas analogt med specialfallet och som lyder:

Må en godtycklig ändlig mängd R av rationella tal vara given. Då är det alltid möjligt att finna ett primtal p sådant att mängden R kan avbildas isomorft på en delmängd av talen i talkroppen GF_p .

Isomorft betyder här, att om a avbildas på a_p och b på b_p och om t. ex. $a > b$, så avbildas $a+b$, $a-b$, ab och $a:b$ på resp. a_p+b_p , a_p-b_p , $a_p b_p$, $a_p:b_p$ samt dessutom är $a_p > b_p$.

För att beskriva observationsresultaten från fysiken och astronomin tar vi alla ekvidistanta bråk, vilkas nämnare är 10^n och vilkas absoluta värden är mindre än 10^k . Denna ändliga mängd av rationella tal är säkert fullt tillräcklig, om blott n och k tas tillräckligt stora. Enligt ovanstående sats kan vi sedan finna en sådan Galois-kropp GF_p , att våra rationella tal isomorft kan avbildas på tal i GF_p . Härvid måste talet 1 avbildas på Galois-talet 1_p , ty $x = x \cdot 1$ avbildas på $x_p = x_p \cdot y_p$ vilket är möjligt endast om $y_p = 1_p$. Likaså måste $2 = 1+1$ avbildas på $2_p = 1_p + 1_p$, $0 = 1-1$ på $0_p = 1_p - 1_p$, $-1 = 0-1$ på $-1_p = 0_p - 1_p$ etc. Speciellt avbildas $\frac{1}{2} = 1:2$ på $(\frac{1}{2})_p = 1_p:2_p$ och allmänt $r/s = r:s$ på $(r/s)_p = r_p:s_p$. Emedan $\frac{1}{2}$ ligger mellan 0 och 1, så ligger även $(\frac{1}{2})_p$ mellan 0_p och 1_p . Naturligtvis är det möjligt att ersätta $(\frac{1}{2})_p = 1_p:2_p$ med ett helt Galois-tal n_p , d. v. s. med $\left(\frac{p+1}{2}\right)_p$. Denna egenskap, som Galois-

kropparna har, att bråk $r_p:s_p$ kan ersättas med hela Galois-tal, är för oss av mindre betydelse. Det är mera praktiskt att bibehålla bräken och räkna som vi är vana att räkna med bråk, än att ersätta dem med symboler n_p , som ger missvisande storleksförhållanden, och som vid räkning fordrar idelig reducering modulo p .

Som exempel skall vi konstruera den delmängd av en lämpligt vald Galois-kropp, på vilken de 11 ekvidistanta rationella talen $0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$ isomorft kan avbildas. En närmare undersökning ger vid handen, att $p = 311$ är det minsta av alla de oändligt många primtal, som ger en Galois-kropp GF_p som tillåter en isomorf avbildning. Efter att p är funnet, är konstruktionen klar. Bildmängden är $0_p, (0.1)_p, (0.2)_p, \dots$

$(0.9)_p, 1_p$. Vi vill, fastän det är obehövt, för fullständighetens skull ge de hela Galois-tal, som Galois-bråken motsvarar. Vi har ($p = 311$):

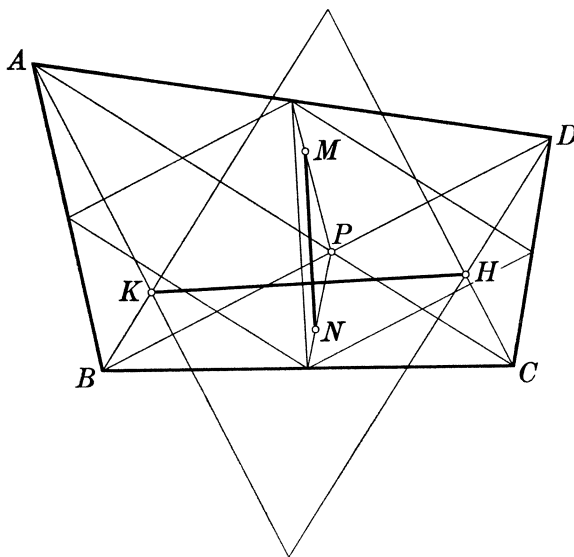
$$\begin{array}{ll}
 0 \rightarrow 0_p = 0_p^2 & 0.6 \rightarrow 125_p = 37_p^2 \\
 0.1 \rightarrow 280_p = 88_p^2 & 0.7 \rightarrow 94_p = 120_p^2 \\
 0.2 \rightarrow 249_p = 101_p^2 & 0.8 \rightarrow 63_p = 109_p^2 \\
 0.3 \rightarrow 218_p = 23_p^2 & 0.9 \rightarrow 32_p = 47_p^2 \\
 0.4 \rightarrow 187_p = 135_p^2 & 1 \rightarrow 1_p = 1_p^2 \\
 0.5 \rightarrow 156_p = 33_p^2 &
 \end{array}$$

I den tredje kolumnen har vi gett de hela Galois-talen som kvadrater på andra Galois-tal. Vi ser därav, att samtliga Galois-tal $0.1, 0.2, \dots, 1$ är positiva. Genom subtraktion inser vi sedan omedelbart, att storleksordningen är densamma som för motsvarande rationella tal.

LIDT ELEMENTÆR GEOMETRI

ÓLAFUR DANIELSSON

I en konvex Firkant $ABCD$ er Diagonalpunktet P . Hvis man forbinder Medianskæringspunkterne i de to modstaaende Trekanter PDA og PBC , hvori Firkanten deles af Diagonalerne, samt Højdeskæringspunkterne for de øvrige to, vil de to Forbindelseslinier altid være vinkelrette paa hinanden.



Bevis: Lad Medianskæringspunkterne for de to første Trekanter være M og N og Højdeskæringspunkterne for de to sidste være H og K . MN er da aabenbart parallel med den ene Diagonal i det Parallelogram, hvis Vinkelspidser er Midtpunkterne af Siderne i Firkanten $ABCD$. To Par Højder i Trekanterne PAB og PCD begrænser et andet Parallelogram ligedannet med det første, thi baade er de to Parallelogrammer ensvinklede, og Siderne i det første er proportionale med Diagonalerne i Firkanten $ABCD$, altsaa ogsaa med deres Projektioner paa hinanden. Nu er de to Parallelogrammers Sider vinkelrette paa hinanden, altsaa maa deres Diagonaler ogsaa være det og dermed ogsaa KH og MN vinkelrette paa hinanden, q. e. d.

STORE PRIMTAL

THØGER BANG

Foredrag holdt i marts 1953 i Foreningen af Matematiklærere
ved Gymnasieskoler og Seminarier i Danmark.

I den danske skole er talteorien efterhaanden blevet indskrænket til kun at omfatte beviset for de hele tals entydige primopløsning og Euklids klassiske bevis for eksistensen af vilkaarligt store primtal.

For en del aar siden omfattede pensum ogsaa *Fermats sætning*: Hvis p er et primtal, saa vil p gaa op i $a^p - a$ for ethvert helt tal a . Af hensyn til det følgende skal jeg minde om et hyppigt anvendt bevis for denne sætning: Ved binomialudvikling faar man

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p - a + \left[\binom{p}{1}a + \binom{p}{2}a^2 + \dots + \binom{p}{p-1}a^{p-1} \right],$$

som viser, at naar p gaar op i $a^p - a$, saa vil p ogsaa gaa op i $(a+1)^p - (a+1)$, thi for $0 < j < p$ vil alle binomialkoefficienterne

$$\binom{p}{j} = \frac{p(p-1) \dots (p-j+1)}{j(j-1) \dots 2 \cdot 1}$$

aabenbart indeholde p som primfaktor. Heraf følger sætningen ved induktion, da den umiddelbart ses at være gyldig for $a = 1$.

Skønt man ved, at der eksisterer uendelig mange primtal, kan man ikke konkret angive en uendelig følge af saadanne (denne paastand rokkes ikke af en i de senere aar hyppigt omtalt kuriositet, se f. eks. Norsk Matematisk Tidsskrift 1952, s. 42 og s. 117). Der har derfor til ethvert tidspunkt eksisteret et største bekendt primtal; to berømte saadanne rekorder i primtallenes verden er Eulers tal

$$2^{31} - 1 = 21474 \ 83647$$

og Lucas' tal

$$2^{127} - 1 = 1701 \ 41183 \ 46046 \ 92317 \ 31687 \ 30371 \ 58841 \ 05727.$$

Jeg skal her fortælle lidt nærmere om, hvorledes man kan bestemme saadanne store primtal, og om den nuværende rekord.

Det er ikke tilfældigt, at begge de nævnte tal er af formen $2^n - 1$, altsaa en potens af 2 formindsket med 1, thi tal af denne form er, som vi skal se, særlig lette at undersøge. Saafremt $2^n - 1$ er et primtal, vil vi kort betegne det M_n . Allerede Euklid interesserede sig for tallene M_n og viste i slutstykket af sin talteoretiske bog (IX, 36), at hvis $2^n - 1$ er et primtal, saa er $2^{n-1}(2^n - 1)$ et »fuldkomment tal«, d. v. s. et tal, som er lig summen af sine ægte divisorer. F. eks. faar man $M_2 = 3$, og det giver anledning til det fuldkomne tal 6 (som har de ægte divisorer 1, 2 og 3, hvis sum er 6); et andet primtal er $M_3 = 7$, som giver anledning til det fuldkomne tal 28 (hvis divisorer 1, 2, 4, 7 og 14 har summen 28). Langt senere har Euler vist, at der ikke findes andre lige fuldkomne tal end den af Euklid angivne type. Hvorvidt der findes ulige fuldkomne tal, er til dato et aabent spørgsmaal; hvis de findes, maa de i hvert fald være temmelig store og komplicerede af opbygning.

I oldtiden har man i hvert fald kendt de første primtal M_n , nemlig

$$M_2 = 3, M_3 = 7, M_5 = 31, M_7 = 127.$$

Fra middelalderen har man manuskripter, hvor man har fortsat denne række, idet man gik ud fra, at alle ulige værdier af n gav anledning til primtal M_n , saaledes $2^9 - 1 = 511$, $2^{11} - 1 = 2047$, $2^{13} - 1 = 8191$, I renaissanceen blev det imidlertid fastslaaet, at dette er forkert, idet $511 = 7 \cdot 73$ og $2047 = 23 \cdot 89$, hvorimod M_{13} virkelig er et primtal, og man fandt ogsaa de to næste primtal M_n , nemlig M_{17} og M_{19} .

Disse er sekscifrede tal, og det er derfor overkommeligt at undersøge dem ved division med alle primtal op til tallets kvadratrods. Men for større tal bliver arbejdet ved denne metode altfor overvældende; der maa andre hjælpemidler til, og disse blev skabt, da Fermat (1601–1665) grundlagde den egentlige talteori.

For det første kan man bemærke, at $2^n - 1$ kun kan være et primtal, naar eksponenten n selv er et primtal, for hvis $n = pq$, bliver $2^n - 1 = (2^p)^q - 1$ delelig med $2^p - 1$. Dette er i overensstemmelse med, at $2^9 - 1 = 511$ er delelig med $2^3 - 1 = 7$ (og giver ogsaa grunden til kun at betragte ulige værdier af n for $n > 2$). I alt det følgende vil vi derfor antage, at n er et ulige primtal. Men eksemplet $n = 11$ viser, at *betingelsen n lig primtal er ikke tilstrækkelig til, at $2^n - 1$ er et primtal*. Det siges, at det netop var gennem arbejdet med disse problemer, at Fermat blev ledt til den i begyndelsen nævnte sætning, og sikkert er det, at han ved hjælp af den viste, at naar n er et primtal, saa maa de eventuelle divisorer i $2^n - 1$ have formen $hn + 1$, hvor h betegner et helt tal; da divisorerne er ulige og n er ulige, kan vi endda sige, at h maa være et lige tal. Man ser, hvorledes dette stemmer med, at divisorerne i $2^{11} - 1$ er $23 = 2 \cdot 11 + 1$ og $89 =$

$8 \cdot 11 + 1$. I fortsættelse af Fermats arbejder blev flere betingelser opstillet af Euler (1707—1783), som bl. a. viste, at disse eventuelle divisorer yderligere maa være af formen $8h-1$ eller $8h+1$ (hvor h betegner et helt tal); divisoren 23 er af den første type, medens 89 er af den anden.

Saadanne sætninger indskrænker antallet af mulige divisorer og letter derved regningerne. Fermat fandt, at 2^n-1 er sammensat for en række n -værdier, idet han fandt divisorer i tallene, og Euler viste, at det foranførte tal $2^{31}-1$ er et primtal, idet han ved prøve fandt, at det ikke har nogen divisor mindre end kvadratroden af tallet, hvilket kræver nogle dages regnearbejde.

Blandt de samtidige, hvormed Fermat i breve udvekslede sine matematiske ideer, var franciskanermunken Mersenne (1588—1648), især kendt for sine musikteoretiske værker, men han udgav ogsaa bøger om fysiske emner (Galilæis teorier) og om matematik. Han behandler blandt andet primtallene M_n , og de er derfor (lidt tilfældigt) for eftertiden kommet til at gaa under navnet *Mersennes tal*.

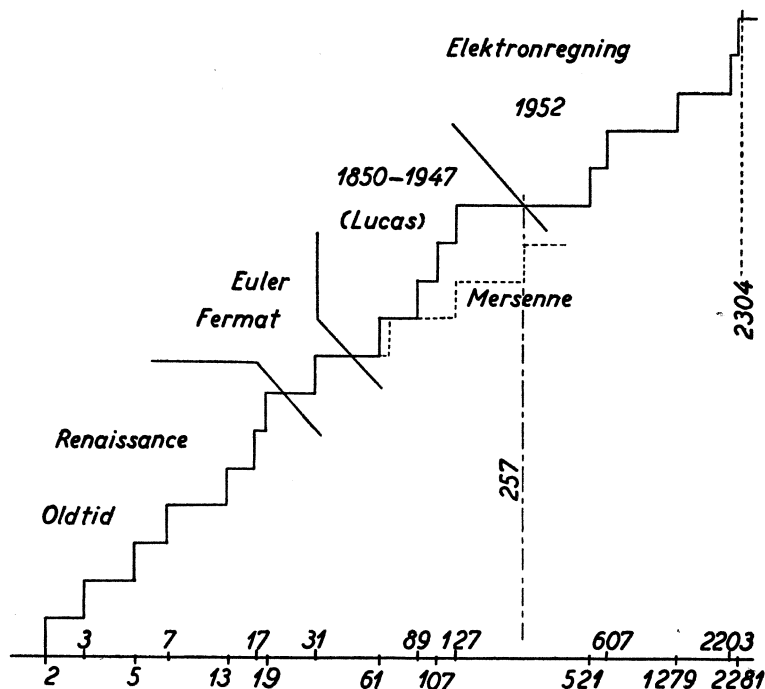
Han fremsatte den konkrete hypotese, at udover de paa hans tid fastslaaede er de næste eksponenter n , som giver anledning til primtal, værdierne

$$31 - 67 - 127 - 257 ,$$

og han havde en almindelig hypotese om, at de brugbare værdier skulde ligge i nærheden af potenserne af 2. Værdien 31 blev som nævnt bekræftet af Euler over hundrede aar senere, og i 1947 har man, som det skal omtales, fuldført en undersøgelse af alle tallene op til 257; den viser, at af de andre tre forslag er et rigtigt (127) og to forkerte. Paa den anden side udtrykker hypotesen en rigtig ide om, at tallene hurtigt bliver sjældnere i talrækken; i virkeligheden er der mellem 31 og 257 (incl.) ikke fire, men fem brugbare værdier blandt de derværende 45 primtal.

Lad os, inden vi gaar videre, indføre en grafisk afbildning af eksponenterne n . Paa figuren næste side er som abscisse benyttet n og som ordinat antallet af Mersennetal med eksponent mindre end eller lig n . Derved faas som kurve en trappelinie, der har spring af størrelsen 1 i de punkter, der svarer til brugbare eksponenter. Men da disse som nævnt hurtigt kommer til at ligge meget spredt, har vi for at faa en rimelig figur anvendt *logaritmisk maalestok* paa abscisseaksen.

Ved denne afbildning kan det virke lidt mat, at den klassiske talteoris glansperiode i aarene 1600—1800 kun har formaaet at føje et saa lille stykke med kun et trin til den i forvejen eksisterende trappes syv trin, men for at vurdere den arbejdsindsats, som ligger bag, maa man her betænke den logaritmiske maalestok. Paa baggrund heraf virker den senere tids tilføjelser til kurven saa meget mere imponerende. Med punk-



tering er angivet Mersennes hypotese, og man ser, hvorledes det giver et stykke kurve, som afviger en del fra den rigtige.

Med Eulers tal M_{31} blev rekorden for det største kendte primtal erobret af Mersennes tal, og disse har beholdt den siden med undtagelse af en kort periode 1951–1952 (se s. 166). Men først skulde der gaa endnu et aarhundrede, inden rekorden overhovedet blev forbedret.

Omkring midten af 1800-tallet fandt dygtige beregnere faktorer i de næste tal $2^n - 1$, og i 1886 viste Seelhoff, at $M_{61} = 2^{61} - 1$ gaar op i $3^{M_{61}} - 3$, hvoraf han ved Fermats sætning tillod sig at slutte, at M_{61} er et primtal. Efter nogen tids forløb hævdede der sig røster, som gjorde opmærksom paa, at Fermats sætning kun giver en nødvendig og ikke en tilstrækkelig betingelse for, at et tal er primtal; man har derefter foretaget nødvendige ekstraberegninger, som viser, at M_{61} virkelig er et primtal. En anden fejl i Mersennes hypotese blev paavist af F. N. Cole, som (ca. aar 1900) i et annonceret foredrag i American Mathematical Society ikke mælede et ord, men i den afsatte time med kridt paa tavlen udregnede

$$1937 \ 07721 \cdot 76 \ 18382 \ 57287 \text{ og } 2^{67}.$$

Det sidste tal var 1 større end det første, saaledes at $n = 67$ ikke er brug-

bar Mersenneeksponent; karakteristisk for talregning er det jo desværre, at en effektiv kontrol er ligesaa langvarig som selve regnestykket.

Men forinden var der i 1876 sket noget langt vigtigere i teorien for Mersennes tal. Det store navn er her Lucas (1842–1891), en fransk matematiker, som ellers mest er kendt for sine bøger om spil og underholdningsmatematik.

Lucas havde ogsaa følt sig generet af, at Fermats sætning kun gaar den ene vej, og han skabte derfor en sætning, som giver en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at $2^n - 1$ er et primtal. I Fermats sætning indgaar (efter en nærliggende division med a) størrelsen $p - 1$, medens det for et Mersennetal p aabenbart er $p + 1$, som bliver særlig simpel, og Lucas fik derfor bragt dette ind i sin sætning. Vi skal nu bevise denne og begynder med nogle lidt mere almene betragtninger.

Lad os antage, at der eksisterer to følger C_m og S_m af hele tal, $m = 1, 2, \dots$, som opfylder formlerne

$$(1) \quad S_{m \pm l} = S_m C_l \pm S_l C_m$$

og

$$(2) \quad C_m^2 + a S_m^2 = 1,$$

hvor a er et helt tal $\neq 0$. Da gælder

SÆTNING I. *Samtlige indices r , for hvilke S_r er delelig med et vist ulige primtal p , er (saafremt der overhovedet findes noget) netop samtlige multipla af det mindste saadanne indeks r_0 .*

Thi sættes $l = r_0$ i (1) og benyttes plustegnet, ser man, at med S_m vil ogsaa S_{m+r_0} være delelig med p , og med S_{r_0} vil derfor ogsaa $S_{2r_0}, S_{3r_0}, \dots$ være delelige med p . Og antager man, at der foruden disse indices fandtes endnu et indeks r , hvor $hr_0 < r < (h+1)r_0$ (h hel), som havde egenskaben, da kunde man i (1) med minustegnet sætte $m = r$ og $l = hr_0$, og man vilde faa, at $r - hr_0$ ogsaa havde egenskaben, i strid med at r_0 var den mindste værdi.

SÆTNING II. *Samtlige indices r , for hvilke C_r er delelig med et vist ulige primtal p , er netop samtlige ulige multipla af $\frac{1}{2}r_0$, hvor r_0 er det i sætning I omtalte indeks (idet saadanne r -indices kun vil forekomme, saafremt der findes et r_0 , og dette er et lige tal).*

Thi sættes $m = l = r$ i (1), faas $S_{2r} = 2S_r C_r$. Hvis p gaar op i C_r , vil p derfor gaa op i S_{2r} , saa at $2r$ er et multiplum af r_0 , og hvis omvendt $2r$ er et multiplum af r_0 , vil p gaa op i enten C_r eller S_r . Og (2) viser, at

p ikke samtidig kan gaa op i C_r og S_r . Sammenholdes disse oplysninger, faar man sætning II.

Formlerne (1) og (2) minder om velkendte trigonometriske formler, og vi faar dem til at gaa over i saadanne ved at sætte

$$(3) \quad C_m = \cos mt, \quad S_m = \frac{\sin mt}{\sin t} \quad \text{og} \quad a = \sin^2 t = 1 - \cos^2 t.$$

Vi faar derfor et eksempel paa to følger C_m og S_m , som opfylder (1) og (2), ved blot at vælge en værdi for t og saa benytte definitionen (3). Kravet om, at følgerne skal bestaa af hele tal, bliver automatisk opfyldt, naar blot $C_1 = \cos t$ er heltallig, thi det er velkendt (og let at vise ved induktion), at

$$(4) \quad \cos mt = P(\cos t) \quad \text{og} \quad \frac{\sin mt}{\sin t} = Q(\cos t),$$

hvor $P(\cos t)$ og $Q(\cos t)$ er polynomier i $\cos t$ med hele koefficienter.

Vi ønsker nedenfor at benytte en værdi af t , for hvilken

$$\cos t = 2.$$

Dermed forlader vi den elementære trigonometri, men de trigonometriske funktioner kan udvides til funktioner af en kompleks variabel, og for visse værdier af denne variable bliver cosinus lig med 2. Det væsentlige for os er, at ogsaa for komplekse variable gælder hele det sædvanlige formelapparat, saasom (1), (4) og (2), hvori nu $a = -3$. Endvidere findes formler, som giver forbindelse mellem eksponentialfunktioner og trigonometriske funktioner, nemlig f. eks.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{og} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Vi vælger nu t saaledes, at

$$(5) \quad e^{it/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{og dermed} \quad e^{-it/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Heraf faas

$$e^{it} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{og} \quad e^{-it} = 2 - \sqrt{3},$$

saaledes at $\cos t = 2$ som omtalt ovenfor. Videre bliver

$$\cos pt = \frac{1}{2}(e^{pit} + e^{-pit}) = \frac{1}{2}[(2 + \sqrt{3})^p + (2 - \sqrt{3})^p].$$

Udvikles her efter binomialformlen, vil de ulige potenser af $\sqrt{3}$ ophæve hinanden, hvilket giver

$$\cos pt = \sum_{j \text{ lige}} \binom{p}{j} 2^{p-j} (\sqrt{3})^j.$$

Antager vi nu som foran, at p er et ulige primtal, vil det (smlgn. s. 157) gaa op i alle de forekommende binomialkoefficienter undtagen for $j = 0$, saa at p gaar op i $\cos pt - 2^p$. Da Fermats sætning siger, at p gaar op i $2^p - 2$, og $2 = \cos t$, faar vi

SÆTNING III. *Naar p er et ulige primtal, vil det gaa op i $\cos pt - \cos t$.*

Iøvrigt ser man næsten umiddelbart, at beviset og sætningen gælder, naar $\cos t$ er et vilkaarligt helt tal. Denne almindelige sætning kan opfattes som en trigonometrisk formulering af Fermats sætning.

Af sætning III følger, at p vil gaa op i

$$\cos pt - \cos t = -2 \sin \frac{p+1}{2} t \cdot \sin \frac{p-1}{2} t = 6 S_{\frac{p+1}{2}} \cdot S_{\frac{p-1}{2}},$$

og sammenholdes dette med sætning I, faas

SÆTNING IV. *For ethvert primtal $p > 3$ vil der eksistere et indeks r_0 (af den i sætning I omtalte art), og dette vil gaa op i $\frac{1}{2}(p+1)$ eller i $\frac{1}{2}(p-1)$.*

Efter disse forberedelser kan vi nu bevise Lucas' sætning:

HOVEDSÆTNING. *Lad n være et ulige tal > 1 , og $\cos t = 2$. Den tilstrækkelige og nødvendige betingelse for, at $2^n - 1$ er et primtal, er da, at $2^n - 1$ gaar op i $C_{2^n-2} = \cos(2^{n-2}t)$.*

Tilstrækkeligheden ses saaledes: Lad p være en primdivisor i $2^n - 1$; den kan ikke være 2 og, da n er ulige, heller ikke 3. Ifølge sætning IV vil der til p svare et r_0 , og ifølge sætning II er 2^{n-2} lig et ulige multiplum af $\frac{1}{2}r_0$; her maa den ulige faktor være lig 1, og r_0 er altsaa lig 2^{n-1} . Ifølge sætning IV gaar r_0 op i $\frac{1}{2}(p \pm 1)$, og $p \pm 1$ er derfor et multiplum af 2^n . Da $p \leq 2^n - 1$, bliver den eneste mulighed, at p selv er lig $2^n - 1$, som saa maa være et primtal.

Man ser, at dette tilstrækkelighedsbevis kan gennemføres uændret, uanset hvilket helt tal man har valgt som værdi for $\cos t$, naar blot $-a = (\cos t - 1)(\cos t + 1)$ er primisk med $2^n - 1$. Beviset for nødvendigheden, som vi nu skal give, beror derimod paa talteoretiske egenskaber ved tallet 2, idet dette dog kan erstattes med visse andre hele tal, som f. eks. 26.

Lad p være et ulige primtal. Ved at benytte (5) faas

$$2 \cos \frac{p+1}{2} t = e^{(p+1)it/2} + e^{-(p+1)it/2} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{p+1} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{p+1}.$$

Udvikles leddene efter binomialformlen, vil de ulige potenser af $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ophæve hinanden, saa at

$$2^{(p+1)/2} \cos \frac{p+1}{2} t = 2^{(p+1)/2} \sum_{j \text{ lige}} \binom{p+1}{j} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^j \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{p+1-j} = \sum_{l=0}^{\frac{p+1}{2}} \binom{p+1}{2l} 3^l.$$

Paa ganske samme maade som ved beviset for Fermats sætning ser man, at p gaar op i alle de forekommende binomialkoefficienter undtagen den første og den sidste, som begge er lig 1, og p vil derfor gaa op i

$$(6) \quad 2^{(p+1)/2} \cos \frac{p+1}{2} t - 3^{(p+1)/2} - 1 = \\ 2^{(p+1)/2} \left(\cos \frac{p+1}{2} t + 1 \right) - [2^{(p+1)/2} + 3^{(p+1)/2} + 1].$$

Antages nu, at $2^n - 1$ er et primtal p , saa viser en let regning, at p er af formen $24h + 7$, hvor h er et helt tal. Til fuldførelse af beviset maa vi nu benytte den klassiske teori for kvadratiske rester. For den anførte specielle form af p er 2 kvadratisk rest, medens 3 er ikke-rest, d. v. s.

$$2^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}, \quad 3^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Heraf sluttes, at p gaar op i sidste parentes i (6), og p gaar følgelig ogsaa op i

$$\cos \frac{p+1}{2} t + 1 = 2 \left(\cos \frac{p+1}{4} t \right)^2$$

og dermed i $\cos [\frac{1}{4}(p+1)t] = \cos (2^{n-2}t)$, hvormed sætningen er bevist.

De arbejder af Lucas, hvori sætningen og andre af samme type forekommer, er ret vanskeligt forstaaelige (om sætningens betingelse er tænkt som nødvendig eller ej, fremgaar f. eks. ikke), og blandt matematikere havde sætningen i lang tid en lidt miskendt rolle. Først i den sidste menne-skealder er der fremkommet forskellige nøjagtige beviser (bl. a. af D. H. Lehmer, der — ligesom tidligere hans afdøde fader D. N. Lehmer — indtager en ledende position paa de talteoretiske beregningers omraade). Den her givne udformning afviger noget fra disse, men bygger paa en ide, som nævnes et enkelt sted hos Lucas.

I hvert fald har Lucas og andre anvendt sætningen til at finde nye Mersennetal. Værdierne $n = 89, 107$ og 127 giver primtal M_n . Det sidste af disse, hvis 39 cifre er opskrevet paa s. 157, skal allerede være fundet af Lucas i 1876. Naar man faar forelagt et saadant regneresultat, kan man tvivle paa dets rigtighed, men her maa betænkes, at det er usandsynligt, at en regnefejl skulde faa et tal paa f. eks. 39 cifre til at gaa op.

Det er mere tvivlsomt ved hjælp af sætningen at paastaa, at et tal ikke er primtal, fordi divisionen ikke gaar op; iøvrigt er det jo en bemærkelsesværdig situation, at *der findes tal, som kan vises at være sammensatte, men hvori man ikke kender nogen divisor.*

Men lad os lidt nærmere se, hvorfor sætningen betød et regnemæssigt fremskridt. Hvis man ved at prøve med mulige divisorer op til kvadratroden af tallet vil konstatere, om $2^n - 1$ er et primtal, vil arbejdet vokse eksponentielt med n , selvom man tager hensyn til de foran nævnte lettelser. En undersøgelse paa denne maade af M_{127} vilde give fuldt arbejde i nogle aarhundreder til den samlede menneskehed, denne forudsat at bestaa af lutter habile regnere, og vilde kræve et bassin af blæk paa størrelse med Sortedamssøen i København.

Lucas' sætning kræver derimod kun kendskab til talfølgen $C_2, C_4, C_8, \dots$, og disse kan let dannes suksessivt, idet $C_{2j} = 2C_j^2 - 1$ (formlen for cosinus af den dobbelte vinkel). En undersøgelse af $2^n - 1$ kræver derfor i det væsentlige kun n kvadreringer. Hertil maa dog bemærkes, at følgen $C_2, C_4, \dots$ vokser saa kraftigt, at der slet ikke kan være tale om at opskrive dens elementer udover den første halve snes. I praksis maa man derfor ved undersøgelsen af et bestemt $M_n = 2^n - 1$ hele tiden tage den rest R , man faar ved division med M_n , saa danne $2R^2 - 1$, og igen tage resten o. s. v. Ialt skal derfor foretages $n - 3$ kvadreringer af divisionsrester, som hver for sig kan være af størrelse som M_n , og endvidere ligesaa mange divisioner med M_n . Dette arbejde bliver altialt proportionalt med n^3 og vokser altsaa meget langsommere med n end arbejdet ved den forrige metode. Lucas kunde ene mand i løbet af nogle maaneder foretage udregningen ved M_{127} .

Bestemmelserne af divisionsresterne er den ene halvdel af arbejdet, men det omgik man ved at foretage udregningerne i *totalssystemet*. I dette bliver $2^n - 1$ jo skrevet 11 ... 11 (n ettaller), og saa gaar det paa samme simple maade, som naar man i titalssystemet kan sige, at 376249 ved division med 999 giver resten $376 + 249$. For nogle M_n foreligger udregningerne i totalssystemet trykt i form af kvadrerede blade forsynet med krydser, som markerer ettallerne, medens nullerne ikke er angivet.

Senere tog man almindelige regnemaskiner i brug, og efterhaanden lykkedes det at faa undersøgt (H. S. Uhler) alle tallene $2^n - 1$ op til Mersennes grænse $n = 257$, hvilket blev fuldført i 1947. Det blev et stort og trættende arbejde. Dels vilde man gerne turde stole paa regningerne, saa man maatte belaste dem paa kryds og tværs med kontrol. Dels regner disse maskiner i titalssystemet, hvilket er mindre egnet til formaalet. Og endelig kan maskinerne jo ikke direkte tage tal af den størrelse (op til 78 cifre), som det drejer sig om; ved multiplikation er dette ikke saa

galt, idet man blot kan opdele tallene i mindre ciffergrupper, som man multiplicerer sammen, men divisionerne gav nogle ubehageligheder. Man fandt ikke flere primtal.

Elektronregnemaskinen har aabnet nye muligheder. I England prøvede man at gaa ud over Mersennes grænse; man gik op til $n = \text{ca. } 450$, men det kom der ingen primtal ud af. Da man imidlertid havde lysten til at sætte en rekord, benyttede man i 1951 Lucas' M_{127} til at finde nogle primtal, som var noget større end dette og ikke selv var Mersennetal (kendskab til et stort primtal gør, at man for visse tal beslægtede med det »næsten« kan anvende Fermats sætning som en baade nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at de er primtal).

Et mere storslaaet og ogsaa mere resultatrigt regnearbejde er foretaget i løbet af aaret 1952 med en maskine, kaldet SWAC, i Los Angeles. Som alle moderne elektronmaskiner regner den i totalssystemet, og af de ovenfor nævnte grunde er undersøgelsen af Mersennes tal ved hjælp af Lucaskriteriet en uhyre nærliggende opgave for en saadan maskine. Man har kontrolleret alle tidligere resultater, og saa fortsat systematisk op gennem de mulige Mersenneeksponenter n . Alle udregninger er af kontrolhensyn foretaget mindst to gange med mindst en uges mellemrum for at gøre dem indbyrdes uafhængige overfor fejl (det være sig i maskinen eller hos den, der betjener den); iøvrigt synes det at fremgaa af beretningerne, at udregningerne nærmest er foretaget som »fritidsarbejde« for maskinen.

Maskinen regner hurtigt; Lucas' M_{127} kan den kontrollere paa et par sekunder, og varigheden af en undersøgelse af M_n er af størrelsesordenen $10^{-6} \cdot n^3$ sekunder. Sammenlignet med varigheden uden mekaniske hjælpemidler kan maskinens bidrag regnes at bestaa i faktoren 10^{-6} .

Der viste sig virkelig at være et overraskende stort hul i rækken af Mersenneeksponenter efter 127, idet de to næste, som blev fundet i januar 1952, er 521 og 607. Senere paa aaret fandt man 1279, og endelig i oktober de to største hidtil kendte eksponenter 2203 og 2281. Man kender saaledes ialt 17 Mersennetal; deres eksponenter er angivet paa figuren s. 160.

Man kunde tro, at man nu blot blev ved at regne løs, men saa simpelt er det ikke. I virkeligheden udførte man et program, som gik ud paa at undersøge de mulige værdier af n op til 2304, og det var altsaa for saa vidt interessant, at man kort før denne grænse fandt to eksponenter.

Naar man satte en grænse, skyldes det naturligvis dels, at arbejdet efterhaanden voksede; en enkelt undersøgelse af eksponenten 2281 varer saaledes 66 minutter, hvilket med den pekuniære maalestock, man maa anlægge overfor en elektronregnemaskine, jo ikke er ubetydeligt. Men

den nævnte grænse blev ogsaa sat af selve maskinens konstruktion. Den paagældende maskine er af en type med hurtigtvirkende, men til gengæld forholdsvis lille »hukommelse«; denne kan rumme 256 stk. 36-cifrede tal (i totalssystemet). Halvdelen af hukommelsen maa reserveres kontrolformaal og regnedirektiver, og under det almindelige trin af udregningen maa en divisionsrest R derfor højst fylde en fjerdedel af hukommelsen, hvilket for n giver den nævnte grænse $\frac{1}{4} \cdot 36 \cdot 256 = 2304$.

Man har moret sig med at udregne M_{2281} i titalssystemet, og selv om det kan siges at være ret ligegyldigt, skal jeg dog anføre udseendet af dette til dato største kendte primtal. Det har 687 cifre, som er følgende:

$2^{2281} - 1 =$ 44 60875 57183 75842 95711 51706 40210 18098
 86208 63241 28599 01111 99121 99634 04685 79282 04733 69112
 54526 90039 89026 15324 59311 24316 70239 57587 05693 67936
 47909 03497 46114 70710 65254 19335 39381 24978 22630 79473
 12410 79887 48690 40070 27932 84288 10311 75484 41080 94878
 25249 48667 60969 58699 81289 82645 87759 60289 79171 53696
 25030 68429 61733 17021 84750 32458 30091 71832 10491 60501
 57628 88660 63721 45501 70222 59251 25224 07682 96054 27173
 57396 48129 95250 56941 24807 20738 47685 52936 81666 71284
 48311 90877 62060 67866 63862 19024 01185 70736 83190 18864
 79225 81041 47140 78935 38656 24979 68178 72912 76295 94924
 41196 09613 86713 94627 98992 75006 95491 71397 58796 06122
 38033 93537 38103 46664 94402 95105 20590 47968 69325 53886
 47930 44092 51041 86817 00964 01717 64133 17241 81328 36351

Efter at have bestemt saa mange Mersenneeksponenter kunde man haabe, at et vist system i dem vilde blive iøjnefaldende. Dette synes ikke at være tilfældet. En enkelt iagttagelse, som tangerer Mersennes foran nævnte hypoteser, kan dog nævnes, nemlig at de primtal 3, 7, 31 og 127, som selv er Mersennetal, ogsaa er Mersenneeksponenter. Saafremt dette er en almindelig sætning, kan man konkret angive en uendelig følge af primtal, men man er uhyre langt fra at kunne bevise det. Ved sandsynlighedsbetragtning kan man endvidere gøre det rimeligt, men langt fra bevise, at antallet af eksponenter op til en vis grænse N vokser proportionalt med $\log N$; dette betyder, at trappelinien paa figuren vokser lineært, hvilket synes at stemme nogenlunde.

Sammen med Mersennes tal nævner man hyppigt »Fermats tal« som en talfølge, der rummer store primtal. Derved forstaar man primtal af formen $2^n + 1$. Man kender fem primtal af denne type, det største er $2^{16} + 1 = 65537$. Man ser let, at n maa være en potens af 2, og dette bevirker, at skønt man kan opbygge en teori for dem af lignende art som

NYA KURSPLANER OCH METODISKA ANVISNINGAR I MATEMATIK FÖR GYMNASIET I SVERIGE

LARS GÅRDING och LENNART SANDGREN

I samband med den svenska gymnasiereformen har i år fastställts nya kursplaner och metodiska anvisningar för matematikundervisningen på gymnasiet. De nya förordningarna skiljer sig avsevärt från de gamla från 1935. Tillkomsten av nytt stoff och omläggningen av gammalt ställer många nya pedagogiska problem. I denna situation tror vi att matematiklärarna kan få värdefullt stöd av en diskussion i facktidskrifterna. Vi skall här ge ett bidrag av mera allmän karaktär och hoppas att det kommer att följas av andra, både inom den närmaste tiden och senare då de nya kurserna prövats en tid.

Som bekant innebär gymnasiereformen bl. a. att latinlinjens matematikundervisning utöver realskolestadiet försvinner. På vissa håll har denna åtgärd väckt stor opposition. Vi tror emellertid att skälen för konserverande av latinlinjens matematikkurs var mycket små. För den kategori elever, som enligt den gamla ordningen skulle valt latinlinjen men ändå haft viss inriktning på och behov av matematik bör den nya allmänna linjen oftast lämpa sig bättre.

På de biologiska och sociala grenarna, där väl bl. a. de flesta blivande statistiker, nationalekonomer, socionomer, biologer och medicinare kommer att gå, har matematiken närmast karaktären av hjälpvetenskap. En riktigt avvägd kurs är här av särskilt stor betydelse, eftersom de som valt dessa grenar endast undantagsvis läser någon matematik efter studentexamen. Den kurs i tillämpad matematik, som några gånger givits i Lund och vid vilken stoffet valts i samråd med deltagarna, har visat att vad ovannämnda grupper främst behöver, förutom elementär statistik, är en kurs i funktionslära, innefattande derivation och integration av polynom och exponential- och logaritmfunktionerna. Däremot är behovet av kunskaper i geometri och trigonometri ganska litet. Det är därför mycket tillfredsställande att de geometriska avsnitten i de sociala och biologiska grenarnas kurser fått en ganska liten omfattning medan funktionsläran beretts stort utrymme och exponential- och logaritmfunktionerna med-

tagits. Avvägningen kan dock diskuteras och det hade otvivelaktigt varit en förbättring om det sista momentet hade getts större utrymme och fått en mera obligatorisk karaktär än vad som nu är fallet. Kanske kunde också kursen i geometri ha minskats ytterligare på den sociala grenen.

Den kurs i statistik, som finns på alla grenarna, är begränsad till recept för beräkning av medeltal, spridning och korrelationskaraktistika. Tiden kommer säkert inte att medge någon utförligare behandling av detta moment och det praktiska värdet kanske därför inte blir så stort. Dess allmänbildande betydelse kan emellertid inte bestridas.

Kursplanen för reallinjens lägsta ringar och matematiska grenen är enligt vår mening värd oreserverat erkännande. Utan att vända upp och ner på tidigare undervisningsplan torde den i många avseenden innebära en omvälvning i svensk matematikundervisning. Genom att stryka sterila moment, såsom delar av trigonometrin, har getts plats för nya värdefulla områden framför allt inom funktionsteorin. Över huvud taget torde förskjutningen till förmån för analysen vara det karakteristiska och värdefulla i den nya kursplanen. Man har sålunda fått utrymme för en icke oväsentlig kurs i integralkalkyl, för de tidigare nämnda exponential- och logaritmfunktionerna och för en stringentare behandling av funktions-teorins element. En del detaljer skulle man emellertid vilja kritisera. Exempelvis har det från Euklides ärvda begreppet analogi numera efter bråkräkningens uppkomst inget speciellt intresse och i synnerhet inte som ett kapitel i geometrien. Trots detta finns i kursfördelningen för geometri upptaget ett moment om analogier och proportionaliteter. Många läroböcker i geometri är förresten behäftade med samma onödiga traditionsbundenhet. Diskuteras kan naturligtvis också den analytiska geometriens uppläggning. Emellertid sammanhänger denna med den större frågan: Skall vektorer införas i skolan? Om man betänker att i många länder redan undervisas om vektorer (t. ex. i de flesta av Tysklands gymnasier) framstår det som högst troligt att det bara är en tidsfråga tills man även i Sverige inför vektorer i gymnasieundervisningen. Trots detta anser vi det klokt att man i detta sammanhang, då så många andra viktiga frågor pockade på sin lösning, inte också tog upp frågan om vektorer.

De nya metodiska anvisningarna är mycket detaljerade och kommer säkert att bli ett värdefullt stöd för många lärare i deras undervisning. Anvisningarnas första huvudmoment innehåller allmänna synpunkter på sådana problem som undervisningens planering, bl. a. med hänsyn till elevmaterialet, lektionsuppläggning, preparation, hemarbete och läxförhör samt skolskrivningarnas uppläggning och bedömning. Det framhålls att »undervisningen bör läggas så, att om möjligt ingen lärjunge tycker sig stå inför oöverkomliga svårigheter» samtidigt som det också anvisas

vägar att ge elever med utpräglad fallenhet för matematik stimulerande undervisning i problem, som går utanför den obligatoriska kursen.

Efter de allmänna synpunkterna följer en detaljerad kursfördelning och ett avsnitt om undervisningen i de olika klasserna. I dessa två avsnitt fixeras den obligatoriska kursen i detalj och samtidigt lämnas i många fall värdefulla uppslag för undervisningens uppläggning. Man frestas emellertid att på vissa punkter göra invändningar. På ett par ställen sägs beträffande geometriundervisningen att geometriens logiska uppbyggnad bör framhållas. Eftersom geometrien i skolan inte är logiskt uppbyggd och ofta underförstått vädjar till åskådningen, kan läraren på denna punkt, såvida han vill vara ärlig, endast hänvisa till att det är möjligt att utan hjälp av åskådningen bygga upp geometrien logiskt med utgångspunkt från vissa axiom, som inte är de hos Euklides förekommande utan av betydligt senare datum. Det är att märka att en svensk matematiklärare i allmänhet ej har några kunskaper i geometriens axiomatik och att sådana förvärfvas endast genom mycket arbete och utpräglad förmåga till abstrakt tänkande. En nästan obegriplig och mycket perifer passus, som gärna kunde utelämnats, är följande, som meddelas i samband med övergång från formler för ellipsen till formler för hyperbeln genom byte av b^2 mot $-b^2$: »Substitutioner har stor betydelse i den högre matematiken, och det är nyttigt för lärjungarna att i någon mån få göra bekantskap med dem«. Däremot noterar man med stor tillfredsställelse deklARATIONEN att klyftan mellan gymnasiets och högskolornas sätt att lägga upp funktionsläran bör minskas genom den tidigare nämnda strängare behandlingen av funktionslärans grunder. Mycket givande är också den skiss av integralkalkylens uppläggning, som gives. Man torde på det angivna sättet t. o. m. på allmänna linjen nå så långt att de flesta normala behov inom tillämpningarna blir tillfredsställda. Av de två alternativa uttrycken »en primitiv funktion till f » och »en integral till f » vill vi för vår del rekommendera det senare som har fördelen att innehålla det magiska ordet integral.

Sammanfattningsvis vill vi ännu en gång framhålla, att de nya kursplanerna och metodiska anvisningarna i väsentliga avseenden innebär mycket stora framsteg för den svenska matematikundervisningen. Man kan bl. a. vänta sig att de kommer att få ett välgörande inflytande på problemfloran i studentexamen. Inom ramen för de nya kurserna finns det också stora möjligheter att åstadkomma innehållsrika och stimulerande läroböcker.

BOKMELDINGER

SVEN GELLERSTEDT: *800 övningsuppgifter i matematik för universitet och högskolor*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1954. 200 s. Sv. kr. 12.50.

(Inneholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 178.)

Det är ett imponerande arbete som ligger bakom denna bok, vilken innehåller många intressanta och lärorika problem. Av dessa hänför sig (enligt författarens angivelser) knappt 200 till ren ettbetygskurs medan c:a 100 ligger utanför den nuvarande tvåbetygskursen. Trots det övervältigande antalet har anmälaren lyckats finna ytterst få rena felaktigheter eller tryckfel.

Man är dock ej benägen att ge boken något förbehållslöst erkännande som värdefullt tillskott till övningslitteraturen för tvåbetygskurserna vid våra svenska universitet. Den väsentliga anledningen härtill är att uppgifterna genomgående är för svåra för att lämpa sig som övning på detta stadium. Detta är uppenbarligen en omdömesfråga, men de experiment anmälaren företagit i sin bekantskapskrets, har stärkt hans uppfattning.

Att problemen blir besvärliga beror i många fall på den säregna formulering de givits. Det i och för sig rimliga problemet att visa att funktionen $e^x \cos x - 1$ endast har ett nollställe i intervallet $0 < x < \pi/2$ formuleras sålunda (78 b): »För vilka vinklar i första kvadranten gäller olikheten $e^x \cos x - 1 > 0$?« med svaret: »För $0 < x < x_0$ där x_0 är funktionens nollställe i intervallet.« Denna typ av svar förekommer i än mer avskräckande sammanhang. Ett problem (179 a) att bestämma de punkter på en given kurva där krökningen är maximal har som svar: »för $\cos bx = \sqrt{u_1}$, där u_1 är roten i intervallet $[0, 1]$ till ekvationen $2u^3 - 3u^2 - 4a^2b^2u + 3a^2b^2 = 0$.« Eftersom begreppet lösning av ett problem ej är särskilt väl definierat, hade det varit rimligt, om författaren bättre preciserat vad som önskats. Andra exempel där läsarens verksamhet skulle underlättas genom precisare formulering är 347 där det talas om *den* lineära differentialekvation av första ordningen som ett bestämt polynom satisfierar (som om det bara finnes en) och 396 där förslaget att bevisa att en serie är konvergent utan att använda kriterier väl närmast innebär en motsägelse. Några välkända problem (t. ex. 264)

har givits en intresselös formulering; vid 478 beror detta säkerligen på att exponenten n bortfallit vid tryckningen.

Vad så gäller anvisningarna skall jag ej trötta med en uppräknings av de tal, där en anvisning skulle sparat mig mycken möda. Där anvisningar finnes, är de ej heller alltid så lyckligt utformade. Av lösningen till problem 753 framgår sålunda ej, att den sats som problemet innehåller är fel (punkten måste ligga på ellipsoiden).

Av det anförda synes framgå, att en något tunnare samling med mer pedagogiskt valda exempel varit att föredraga. Att specialintresserade problemlösare och mer erfarna studerande kan ha utbyte av samlingen skall ej förtigas. Skulle den bland våra svenska studerande bli ansedd som normgivande för kurserna, kan man dock befara, att de senare årens arbete för att nedbringa studietiden (bl. a. genom sanering av tentamensproblemen) blir helt förgäves.

Tord Ganelius

B. L. VAN DER WAERDEN: *Science awakening*. English translation by Arnold Dresden with additions of the author. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1954. 306 pp., 28 plates. Florins 19.00 (\$ 5.50).

(Innehållsförteckning i NMT, detta hefte, s. 181.)

Ovannämnda arbete är avsett för alla, som är intresserade av matematikens historia och det redogör för det nyaste man vet om forna tiders matematik. Det bygger på noggranna källforskningar — författaren har gjort sig förtrogen med innehållet i gamla papyrusrullar och kilskriffter samt med bevarade skrifter av gamla tidens forskare.

Författaren klargör i början av sitt arbete i en kort översikt den betydelse matematiken haft för hela vår kulturutveckling och påvisar, varför vetenskapernas ursprungshistoria tillika är matematikens utvecklingshistoria. Som känt fick matematiken som vetenskap sitt upphov under den grekiska kulturens tidevarv, och på den grund omfattar det område, som boken behandlar, tiden från de allra första kulturskedena till den grekiska matematiken. Boken slutar med en granskning av denna matematiks förfall. Författaren säger själv om sitt arbete:

Bokens huvudsakliga syfte är att visa, huru Thales och Pythagoras grundade sin lära på babyloniernas matematik, men likväl gav denna en helt och hållet förändrad, typiskt grekisk karaktär, huru matematiken genom Pythagoras' skola och på annat håll nådde en allt högre utveckling och gradvis började fylla den strängt exakta logikens fordringar och huru matematiken tack vare Platons vänner Theaetetus och Eudoxos nådde

det stadium av fullkomlighet, skönhet och precision, som vi beundrar i Euklides' *Elementa*.

Författaren inleder matematikens utvecklingshistoria med en framställning om de gamla egypternas kultur och inför oss därvid i deras räkneteknik. Så ser vi i den för nära 4000 år sedan avfattade Rhindpapyrusen exempel på s. k. »aha-räkning». Därefter följer de fornbabyloniska kilskrifternas matematik, och vi får konstatera vilka förvånande vidder babyloniernas räknekonst redan ompände. Så har t. ex. tillämpningen av Pythagoras' lärosats varit bekant redan för babylonierna.

Huvuddelen av boken ägnas likväl det grekiska kulturskedet. Författaren klargör för oss, huru man under denna tid upptäckte helt och hållet nya sätt att utforska matematikens problem. Så strävade grekerna efter att framställa allt geometriskt — med tillhjälp av sträckor, ytor, volymer — så att varje tal återgavs genom någon geometrisk figur. Hos babylonierna hade däremot varje sträcka och yta framställts medels ett tal. Med tillhjälp av figurer kunde grekerna sålunda behandla också sådana problem, som de inte förmådde lösa genom att använda tal. Till exempel ekvationen $x^2 = 2$ kunde de lösa med tillhjälp av kvadratens diagonal, ehuru de ännu inte förstod att definiera det irrationella talet $\sqrt{2}$.

Det är omöjligt att här ens i största korthet återge allt, vad boken berättar om den grekiska matematikens utveckling, börjande med Pythagoras' tidevarv ända till Apollonius. Jag anför blott några exempel. Så får vi kännedom om ett märkligt ingenjörsarbete, som utfördes i 6. århundradet f. Kr., byggandet av tunneln på Samos, och stiftar bekantskap med de öden, som många berömda matematiker, såsom Eudoxos, Theaetetus och Arkhimedes, genomgått. Vi får fördjupa oss i Eudoxos' exhaustionsmetod, som redan innefattar gränsvärdebegreppet. Vi får också veta, att Euklides inte var någon stor matematiker och att han av andra forskare hade lånat mycket, som ingår i hans *Elementa*. På samma gång konstaterar vi, att många uppgifter, som olika historiker tidigare har meddelat oss, inte är annat än anekdoter eller antaganden utan historisk grund.

Jag nämner ytterligare, att författaren vid behandlingen av de olika kulturskedena först ger en kronologisk tabell över de viktigaste tilldragelserna, å ena sidan i den allmänna historien, å andra sidan i vetenskapens historia. Ett sådant sammandrag hjälper en läsare, som utan att vara någon egentlig historiekännare likväl hyser intresse för matematikens utveckling, att på riktiga platser inpassa de enskilda kunskaper i matematikens historia, som han förut äger, på samma gång han erhåller en helhetsbild av detta område.

Bokens utstyrsel är särdeles tilltalande. Förutom teckningar och bilder,

som nära ansluter sig till texten, innehåller arbetet en stor mängd illustrationer, som belyser vetenskapens utveckling och forna tiders kultur. Dessa bilder har valts av professorn i arkeologi vid universitetet i Groningen H. G. Beyen och bidrar i sin mån att öka bokens värde.

Jag rekommenderar varmt ifrågavarande bok åt alla, som är intresserade för matematik och för matematikens utveckling. Boken förutsätter inte några omfattande kunskaper i matematik och kan därför med behållning läsas också av icke-matematiker. Framför allt lönar det sig för en matematiklärare att göra sig bekant med arbetet. Varje matematiklärare står säkert ofta inför frågan, vilket program han för att liva upp sin egen undervisning kunde genomgå jämte det vanliga under lektionen behandlade lärostoffet. Då har han skäl att överväga, vilket värdefullt tillskott matematikens historia utgör, vilket utmärkt och på samma gång reellt material den tillför undervisningen. Ovannämnda bok är för detta ändamål en särdeles trevlig och intressant källskrift, som skildrar de första skedena av den mänskliga kulturens historia, sådana som dessa skeden avspeglar sig i matematikens utveckling från dess början ända till uppkomsten av vetenskapligt tänkande i egentlig mening.

Inkeri Simola

ØYSTEIN ORE: *Niels Henrik Abel*. Et geni og hans samtid. Gyldendal Norsk Forlag, Oslo, 1954. 317 s. N. kr. 23.00, innb. kr. 27.50.

(Innehållsförteckning i NMT, detta hefte, s. 180.)

Det er naturlig nok skrevet meget om Abels liv og skjebne. Av korte populære levnetsbeskrivelser i tidsskrifter, aviser og leksika er det kommet så mange at det neppe er mulig å gi noen fullstendig fortegnelse over dem, og det er det vel heller ikke noen grunn til. Men også av böker om Abel finnes det en del. Den første var C. A. Bjerknes' Abel-biografi som kom på norsk i 1880 og i en betydelig utvidet fransk utgave i 1885. Vilhelm Bjerknes utga i 1929 på norsk en nokså mislykket omarbeidet og forkortet utgave av C. A. Bjerknes' bok. I 1930 kom denne forkortede biografi i en ikke uvesentlig forbedret tysk utgave, hvor mange av feilene og misforståelsene var rettet, men helt tilfredsstillende var resultatet ikke. Et meget viktig kildekrift er »Festskrift ved hundreårsjubileet for Niels Henrik Abels fødsel» ved Holst, Störmer og Sylow (1902), også i fransk utgave. Festskriftet inneholder en verdifull samling av dokumenter og ca. 40 av Abels brever, videre en populær biografi ved Elling Holst og en fagmessig fremstilling av Abels videnskapelige innsats ved L. Sylow. Mittag-Leffler skrev på svensk en kort, men verdifull biografi

i »Ord och Bild« (1903), og den kom også i fransk oversettelse i *Revue du Mois* (1907). Endelig har en fransk matematiker Ch. Lucas de Pesloüan i 1906 utgitt en bok om Abel. Men også efter at disse böker utkom er det funnet adskillig nytt materiale til belysning av Abels liv.

Ore har brukt alt dette stoff, og han har selv gjennom utrettelige undersøkelser gravet frem mange nye opplysninger om Abel og om det miljø han levet i. Bl. a. har den danske familie Tuxen stillet til hans disposisjon en del brever som gir et meget klarere bilde enn vi tidligere har hatt av de efterhvert stadig mere ulykkelige forhold i Abels hjem (søster av Abels mor var gift med en fremtredende dansk marineoffiser Tuxen).

Resultatet av det særdeles omfattende arbeide Ore har utført er blitt en bok som gir en meget fullstendigere, og sikkert også en riktigere, skildring av Abels liv enn noen tidligere bok om Abel. Flere av de tidligere Abel-biografier, spesielt de norske, forsøker med en påfallende mangel på historisk sans å opprettholde en legende om at Abel ble dårlig og smålig behandlet i Norge. Dette er meget misvisende, selv om det på enkelte punkter kan reises kritikk mot de norske myndigheters holdning. Stort sett ble Abel støttet og hjulpet på en måte som gir meget større grunn til anerkjennelse enn til kritikk. Ore går naturligvis meget nøye inn på disse forhold, og hans vurdering av dem er mere nøktern og meget bedre begrunnet enn hans för nevnte forgjengeres, skjönt også han av og til går litt lenger i sin kritikk enn jeg ville gjøre. Selve kjensgjerningene er dessuten så klart og objektivt fremlagt hos Ore, at leserne selv kan vurdere dem.

S. 126–27 har Ore noen interessante og plausible betraktninger om de planer som Abels norske beskyttere må antas å ha lagt for hans fremtid. Jeg vil peke på at Vilhelm Bjerknes i den för nevnte tyske utgave av 1930 (som Ore ikke har i sin litteraturfortegnelse) s. 108–09 har en lignende betraktning som dessverre savnes i den norske utgaven av 1929. Det dreier seg her om et punkt som er ganske vesentlig når det gjelder å bedømme — og ikke bare å fordømme — Abels samtid.

Ores bok er, såvidt jeg kan bedømme det, preget av stor nøyaktighet. De ganske få bemerkninger jeg har å gjøre til den rent faktiske fremstilling er så små at man kanskje vil finne dem pedantiske. Men da jeg ikke kan få plass til dem noe annet sted enn i dette tidsskrift vil jeg ta dem med. De har alle en viss berøring med kappestriden mellom Abel og Jacobi.

Første del av Abels fundamentale arbeide »Recherches sur les fonctions elliptiques« utkom 20. sept. 1827. Når dette manuskript ble levert til Crelle, har Abels biografer vært uenige om. Ore skriver (s. 183) at Abel

i et brev av 4. mars 1827 til Holmboe meddeler »at han er ferdig med en stor avhandling«, som må være første del av *Recherches*. Her er en liten unøyaktighet, for Abel sier bare at han har »præpareret en betydelig Afhandling« om elliptiske funksjoner, og det betyr jo ikke at han er ferdig med den. Litt lenger ute i samme brev sier Abel: »I det Hele har jeg gjort en skjændig Mængde Opdagelser. Naar jeg blot havde dem ordnet og sammenskrevet, thi de fleste ere ikke komne længere end i Hovedet. Det er ikke at tænke paa noget før jeg kommer i honet Orden hjemme. Da kommer jeg til at træle som en Vogngamp; men naturligviis med Fornøielse«. Det er bl. a. denne siste uttalelse som har fått Holst, Sylow og Peslövan til å anta at avhandlingen først er avsluttet efter hjemkomsten til Norge, og den kunne i så fall tidligst være levert i juni. Nu har Ore funnet nye opplysninger om hva Abel foretok seg i de første måneder efter hjemkomsten, og efter dette gjetter jeg på at C. A. Bjerknes har rett i, at første del av *Recherches* er levert til Crelle ved avreisen fra Berlin, som fant sted senest i begynnelsen av mai.

S. 210 nevner Ore at »det hefte av Crelles Journal som inneholdt første del av *Recherches* kom til Königsberg alt i de første dager av oktober 1827«, og han tilføyer: »Det er nesten utenkelig at både Jacobi og hans venn Bessel kunne la være å legge merke til den svære avhandlingen som tok opp størsteparten av heftet.« Det er helt unødvendig å uttrykke seg så forsiktig, for vi *vet* at Bessel straks la merke til Abels avhandling og at han skriftlig gjorde Jacobi oppmerksom på den, jfr. min fremstilling i dette tidsskrift 1953.

S. 211 sier Ore: »En måneds tid efter var Jacobis bevis trykt og på vei til Legendre«. Det tok nok noe lengere tid, nærmere to måneder, jfr. Jacobis brev av 12. januar 1828 til Legendre.

Hva selve stridspunktet i prioritetsforholdet mellom Abel og Jacobi angår, slutter Ore seg nærmest til Bjerknes' standpunkt, som går ut på at Jacobi i sin avhandling av 18. november 1827 fortiet den støtte han hadde funnet i *Recherches*. Jeg er enig i dette.

Ores bok inneholder en rikdom av kulturhistoriske trekk, som gjør boken meget levende og underholdende. Den henvender seg fortrinnsvis til folk som ikke har nevneverdige kunnskaper i matematikk, men Ore gjør også enkelte prisverdige forsøk på å gi en populær forklaring av de problemer Abel arbeidet med. Mulighetene er her naturligvis nokså begrenset. Det er blitt en god og velskrevet populær bok som jeg trygt kan anbefale alle dette tidsskrifts lesere. Boken er skrevet på et forholdsvis konservativt norsk riksmål som neppe vil volde lesere fra de øvrige nordiske land noen som helst vanskeligheter.

Fr. Lange-Nielsen

MOTTATTE BØKER

R. Baldus — F. Löbell: *Nichteuklidische Geometrie*. Dritte Aufl. (Sammlung Götschen 970.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1953. 140 S., 70 Fig. DM 2.40.

Der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie 6–18 * Axiomatik der absoluten Geometrie 18–46 * Die Euklidische Geometrie 47–50 * Axiomatik der hyperbolischen Geometrie im Einheitskreise 50–67 * Die hyperbolische Geometrie als selbständige Disziplin 67–131 * Schlussbetrachtungen 131–136 * Nachwort 137–138 * Register 138–140.

A. Combes: *Exercices et problèmes de mathématiques, avec solutions*. (Classe de Seconde.) Librairie Vuibert, Paris, 1954. 337 pp. 800 fr.

Calcul algébrique 1–33 * Équations et inéquations du premier degré 34–44 * Systèmes d'équations du premier degré 45–56 * Fonctions du premier degré et applications 57–76 * Problèmes du premier degré 77–106 * Équations et systèmes d'équations du second degré 107–120 * Problèmes du second degré 121–151 * Le triangle 153–170 * Les parallélogrammes 171–197 * Le cercle 198–227 * Problèmes de construction 228–238 * Théorème de Thalès. Triangles semblables 239–248 * Applications de la similitude 249–290 * Relations métriques et trigonométriques dans le triangle 291–329 * Aires planes 330–337.

Dansk tidsskrift-index. 39. årg., 1953. Udgivet af Statens Bibliotekstilsyn. Nyt Nordisk Forlag — Arnold Busck, 1954. 373 s.

Bog- og biblioteksvæsen. Pressevæsen 1–13 * Filosofi 13–19 * Religion 19–30 * Samfundsvidenskab 30–87 * Geografi (med topografi) og rejser 87–99 * Naturvidenskab 99–128 * Lægekunst 128–137 * Praktiske fag 137–245 * Kunst. Spil. Sport 245–265 * Litteratur og sprog 265–272 * Historie 273–325 * Emneregister 327–342 * Forfatterregister 343–373.

Sven Gellerstedt: *800 övningsuppgifter i matematik*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1954. 200 s., 15 fig. Sv. kr. 12.50.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 172.)

Algebra 1–12 * Differentialkalkyl 13–29 * Integralkalkyl 30–50 * Talföljder, serier och produkter 51–68 * Plan geometri 69–104 * Rymdgeometri 105–116 * Svar och anvisningar 117–200.

W. Gröbner — N. Hofreiter: *Integraltafel, I und II*. Springer-Verlag, Wien, 1949–50. 8+166 S. und 6+204 S.

Band I, unbestimmte Integrale: Rationale Integranden 1–21 * Algebraisch irrationale Integranden 22–106 * Transzendente Integranden 107–166.

Band II, bestimmte Integrale: Rationale Integranden 10–30 * Algebraisch irrationale Integranden 31–51 * Elementare transzendente Integranden 52–168 * Eulersche Integrale 169–186 * Integrale von Zylinderfunktionen 187–204.

H. Hasse: *Höhere Algebra, I und II*. (Sammlung Göschen 931, 932.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1951. 152 und 158 S.

Band I: Literaturverzeichnis 4 * Einleitung 5–7 * Ringe, Körper, Integritätsbereiche 7–48 * Gruppen 49–68 * Determinantenfreie lineare Algebra 68–103 * Lineare Algebra mit Determinanten 104–148 * Schluss 149–150 * Namen- und Sachverzeichnis 151–152.

Band II: Einleitung 5–7 * Die linken Seiten algebraischer Gleichungen 8–38 * Die Wurzeln algebraischer Gleichungen 38–49 * Die Körper der Wurzeln algebraischer Gleichungen 50–79 * Die Struktur der Wurzelkörper algebraischer Gleichungen 79–126 * Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Wurzelzeichen 126–156 * Namen- und Sachverzeichnis 157–158.

G. Hoheisel: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. (Sammlung Göschen 920.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1951. 129 S.

Die Differentialgleichung erster Ordnung 5–50 * Differentialgleichungen höherer Ordnung 50–84 * Randwertaufgaben 84–129.

G. Hoheisel: *Partielle Differentialgleichungen*. Dritte Aufl. (Sammlung Göschen 1003.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1953. 129 S. DM 2.40.

Die Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen 5–35 * Die Differentialgleichung erster Ordnung mit n Veränderlichen 35–65 * Systeme mit einer und mehr unbekannten Funktionen 66–87 * Die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen 87–122 * Nachträge 122–128 * Sachverzeichnis 129.

G. Hoheisel: *Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen*. (Sammlung Göschen 1059.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1952. 124 S.

Differentialgleichungen erster Ordnung 5–50 * Differentialgleichungen höherer Ordnung 50–112 * Aufgaben zu den partiellen Differentialgleichungen 113–124.

Fr. Lössch: *Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954. 8+335 S. Ganzl. DM 49.80.

Neunstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für $x = 0$ (0,0001) 0,1 1–41 * Siebenstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für $x = 0,1$ (0,0005) 3,15; $x = 3$ (0,01) 10; $x = 10$ (0,1) 20 44–319 * Werte von $\operatorname{tg} x$ für $x \approx \pi/2$. Werte von $\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x$ und $\operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x$ für $x \approx 1$ 320 * Siebenstellige Werte elementarer Funktionen für $x = 0$ (1) 100 322–323 * Zwölfstellige Werte von $\frac{\pi}{2}n$ für $n = 0$ (1) 100 324 * Siebenstellige Werte der Funktionen $\sin \frac{\pi}{2}x$, $\cos \frac{\pi}{2}x$ für $x = 0$ (0,001) 0,5 324–327 * Siebenstellige Werte der Funktionen $e^{\frac{\pi}{2}x}$, $e^{-\frac{\pi}{2}x}$, $\operatorname{Sin} \frac{\pi}{2}x$, $\operatorname{Cos} \frac{\pi}{2}x$ für $x = 0$ (0,01) 2 328–329 * Siebenstellige Werte der

Funktionen $e^{\frac{\pi x}{180}}$, $e^{-\frac{\pi x}{180}}$, $\sin \frac{\pi x}{180}$, $\cos \frac{\pi x}{180}$ für $x = 0(1)180$ 330–331 * Umwandlung von Bogenmass (x) in Gradmass (φ). Umwandlung von Gradmass (φ) in Bogenmass (x) 332–333 * Einige oft gebrauchte Zahlenwerte 334–335.

Albert Monjallon: *Introduction à la méthode statistique*. Librairie Vuibert, Paris, 1954. 279 pp., 99 fig. 2000 fr.

La statistique: ses ressources, ses difficultés, ses dangers 7–10 * Collecte des faits: Établissement des statistiques. Critique des résultats 11–17 * Présentation des séries statistiques: Mise en ordre des données. Représentation graphique des séries quantitatives. Représentation graphique des séries chronologiques. Autres types de graphiques 18–56 * Analyse d'une série statistique: Valeurs typiques. Indices de dispersion. Moments et grandeurs dérivées 57–100 * Les lois statistiques: Notions sur la théorie des probabilités. Les principales lois statistiques 101–138 * Ajustement d'une courbe à des données 139–150 * La notion de corrélation 151–176 * Les principes de l'interprétation statistique 177–210 * Les nombres indices 211–221 * Étude des séries chronologiques 222–245 * Appendice mathématique 247–270 * Tables I–IV 271–274 * Index 275–278.

Fritz Neiss: *Einführung in die Zahlentheorie*. S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1952. 8+113 S. DM 4.80.

Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen 1–11 * Kettenbrüche 11–25 * Restsysteme 26–31 * Zahlentheoretische Funktionen 31–41 * Einzelne Sätze 41–48 * Algebraische Kongruenzen 49–56 * Quadratische Reste 57–66 * Das quadratische Reziprozitätsgesetz 67–76 * Quadratische Formen 77–102 * Aufgaben 103–111 * Sach- und Namenverzeichnis 112–113.

Georg Nöbeling: *Grundlagen der analytischen Topologie*. (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 72.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954. 10+221 S. DM 33.00, ganzl. DM 36.60.

Vorbereitungen: Vereine und Verbände, Homomorphismen und Isomorphismen, Raster, Filter und Ideale, Darstellungs- und Erweiterungssätze 1–40 * Topologische Strukturen: Grundbegriffe, Adhärenz und Häufung, Untervereine, Stetige Homomorphismen, Trennungsaxiome, Kompaktheit, Dichtigkeit, Zusammenhang, Ableitung, Restklassenvereine, Produktverbände 40–168 * Uniforme Strukturen: BOOLE-Verbände, Homomorphismen, Konvergenz, Trennungsaxiome 169–213 * Anhang 213–218 * Bibliographie 219 * Sachverzeichnis 220–221.

Almar Næss: *Hvor lå Vinland?* Dreyers forlag, Oslo, 1954. 246 s. N. kr. 19.00, innb. kr. 24.00.

Sagaene om Vinlandsferdene 13–42 * Hvor lå Leiv Eiriksons Vinland? 45–191 * Beregninger fra navigasjon og astronomi 195–246.

Øystein Ore: *Niels Henrik Abel*. Et geni og hans samtid. Gyldendal Norsk Forlag, Oslo, 1954. 317 s. N. kr. 23.00, innb. kr. 27.50.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 175.)

Familien og barndomsårene 13-61 * Studieårene 65-95 * Den store reisen 99-187 * De siste år 191-256 * Epilog 259-309 * Bibliografi 311-312 * Navne-register 313-317.

Oskar Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Band I: Elementare Kettenbrüche. Dritte, erw. Aufl. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954. 6+194 S. Ganzl. DM 29.40.

Definitionen und allgemeine Formeln 1-21 * Regelmässige Kettenbrüche 22-60 * Regelmässige periodische Kettenbrüche 61-109 * Hurwitzsche Kettenbrüche — Transzendente Zahlen 110-134 * Halbregelmässige Kettenbrüche 135-188 * Literatur 189-193 * Sachregister 194.

J. A. Schouten: *Ricci-calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications*. Second edition. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 10.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954. 20+516 S., 16 Fig. DM 55.00, ganzl. DM 58.60.

Algebraic preliminaries 1-61 * Analytic preliminaries 61-121 * Linear connexions 121-185 * Lie groups and linear connexions 185-227 * Imbedding and curvature 227-287 * Projective and conformal transformations of connexions 287-334 * Variations and deformations 335-381 * Miscellaneous examples 381-424 * Bibliography 425-511 * Index 512-516.

Tolfte Skandinaviska Matematikerkongressen i Lund, 10-15 augusti 1953. *Förhandlingar*. 16+337 s. Sv. kr. 25.00. Kan beställas genom Matematiska Institutionen, Lund, Sverige.

Kongressens förlopp och program * Deltagarelista * 48 föredragsreferat.

E. P. Vance: *Trigonometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Cambridge (Mass.), 1954. 8+158 pp. \$ 3.00.

Numbers and coordinate systems 1-15 * The circular functions 16-40 * Functions involving more than one angle 41-50 * Solution of triangles 51-73 * Inverse functions and graphs 74-86 * Identities and equations 87-102 * Complex numbers 103-114 * Applications of the circular functions to periodic phenomena 115-124 * Appendix 125-132 * Answers to problems 133-140 * Tables I-IV 141-153 * Index 155-158.

B. L. van der Waerden: *Science awakening*. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1954. 306 pp., 28 plates. Florins 19.00 (\$ 5.50).

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 173.)

Preface 3-8 * The Egyptians 15-36 * Number systems, digits and the art of computing 37-61 * Babylonian mathematics 62-81 * The age of Thales and Pythagoras 82-104 * The golden age 106-147 * The century of Plato 148-200 * The Alexandrian Era (330-200 B. C.) 201-263 * The decay of Greek mathematics 264-291 * Index 293-306.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 43–46 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. mars 1955.

De øvrige oppgaver er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med forslagsstillers egen løsning.

43. En rak jämntjock tråd, vars längd är större än 2, har en täthet, som varierar periodiskt med perioden 1. Varje längdenhet av tråden har massan 1. Vidare antages, att var man än klipper ut en bit av längden 1, så uppfyller dennas tröghetsmoment M med avseende på en mot trådbiten vinkelrät axel genom dess mittpunkt relationen

$$M \geq \frac{1}{12}(1-h).$$

Man skall visa, att för varje trådbit av längden s satisfierar dennas massa m olikheten

$$|m-s| \leq h^{1/3}.$$

Om den första olikheten ersättes med $M \leq \frac{1}{12}(1+k)$, så följer i stället

$$|m-s| \leq \left(\frac{k}{2}\right)^{1/3}.$$

Visa även att för varje h och k med $0 \leq h \leq 1$, $0 \leq k \leq 2$, så finns det massfördelningar, som antager de givna gränserna.

Tord Ganelius

44. En har at $3^2+4^2=5^2$ og $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$. Generaliser dette slik at en finner $2q+1$ på hverandre følgende naturlige tall der summen av kvadratene av de $q+1$ første er lik summen av kvadratene av de q siste.

Vis at en analog likning ikke kan bestå om en erstatter kvadratene med tredje- eller fjerde-potenser.

Red.

45. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ är en skalär funktion, definierad utanför origo. Visa att ytintegralen

$$\int f(x)(x, n) dS,$$

där n är den yttre enhetsnormalen i punkten x til en sluten yta S som inte går genom origo, är invariant vid alla deformationer av S då och endast då $f(x)$ är homogen av graden $-k$.

Lars Hörmander

46. La α og β være to gitte positive tall. Velg a_1 og b_1 slik at $0 < a_1 \leq b_1$ og definer tallfølgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ ved

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha a_n \cdot \beta b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{\alpha a_n + \beta b_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Finn vilkåret for at de to tallfølger skal konvergere, spesielt at de skal konvergere mot *positive* grenseverdier og at de konvergerer mot *en felles* positiv grenseverdi.

R. Tambs Lyche

47. Bestem summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

H. Killingbergtrø

48. Konstruer med passer alene midtpunktet mellom to gitte punkter.

49. Av den harmoniske rekke

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

utelates de ledd der nevneren n er et tall som, skrevet i titallsystemet, inneholder siffret 9. Vis at den rekken som da fremkommer er konvergent.

LØSNINGER

Oppgave 23.

Når funksjonene $F_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, er kontinuerlige for alle verdier av x , og $F_n(x)$ konvergerer uniformt mot null når $n \rightarrow \infty$, så vil funksjonene $\int_0^x F_n(t) dt$ som kjent ha de samme egenskaper. Da funk-

sjonene $f_n^{(k)}(x)$ har disse egenskaper, vil følgelig det samme være tilfelle med uttrykkene

$$\begin{aligned} & f_n^{(k-1)}(x) - f_n^{(k-1)}(0) \\ & f_n^{(k-2)}(x) - f_n^{(k-2)}(0) - x f_n^{(k-1)}(0) \\ & f_n^{(k-3)}(x) - f_n^{(k-3)}(0) - x f_n^{(k-2)}(0) - \frac{x^2}{2!} f_n^{(k-1)}(0) \\ & \dots \dots \dots \\ & f_n(x) - f_n(0) - x f_n'(0) - \frac{x^2}{2!} f_n''(0) - \dots - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} f_n^{(k-1)}(0). \end{aligned}$$

Summen av disse uttrykkene må da også konvergere uniformt mot null når $n \rightarrow \infty$. Denne sum kan skrives

$$\sum_{v=0}^{k-1} f_n^{(v)}(x) - \sum_{v=0}^{k-1} f_n^{(v)}(0) P_v(x), \quad P_v(x) = \sum_{\mu=0}^v \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

For k forskjellige x -verdier $x_i, i = 1, 2, \dots, k$, eksisterer grenseverdiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k-1} f_n^{(v)}(x_i) = c_i,$$

følgelig eksisterer også grenseverdiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k-1} f_n^{(v)}(0) P_v(x_i) = c_i,$$

og dermed grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k-1} f_n^{(v)}(0) \sum_{i=1}^k \lambda_i P_v(x_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i,$$

der $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k$, er k vilkårlig valgte tall.

Da $P_v(x), v = 0, 1, 2, \dots, k-1$, er k lineært uavhengige polynomer av grad $< k$, må determinanten med elementene $a_{ij} = P_{j-1}(x_i)$ være forskjellig fra null. For hver verdi av v er det derfor mulig entydig å bestemme tallene λ_i slik at

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i P_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } j = v \\ 0 & \text{for } j \neq v, \end{cases}$$

og følgelig eksisterer grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(v)}(0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i = f^{(v)}(0)$$

for alle $\nu = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Men da må $\sum_{\nu=0}^{k-1} f_n^{(\nu)}(x)$ for alle verdier av x konvergere uniformt mot $\sum_{\nu=0}^{k-1} f^{(\nu)}(0)P_\nu(x)$, som er et polynom av grad $< k$.

Johannes Kvamsdal

Også riktig løst av Jakob Ivar Try.

Oppgave 35.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) \dots (\frac{3}{2}+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= (1 - \frac{1}{2})^{-3/2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Haakon Waadeland

Også riktig løst av Johannes Bjørnsen, V. Gamst, H. Killingbergtrø, Anders Lødemel og Jakob Ivar Try.

Oppgave 36.

La M være en n -dimensjonal punktmengde, og anta at m er den undermengde som består av de punkter P , som er slik at M er stjerneformet med hensyn på P .

Enten er m nullmengden, eller den inneholder minst ett punkt P_1 . Gjennom P_1 trekkes en vilkårlig rett linje L . Snittet mellom L og m har enten P_1 som eneste punkt, eller det inneholder minst ett punkt $P_2 \neq P_1$. Er Q et vilkårlig punkt i M , så må alle punkter på forbindelseslinjene P_1Q og P_2Q tilhøre M . Er R et vilkårlig punkt på P_2Q , må derfor alle punkter på forbindelseslinjen P_1R ligge i M , og dermed alle punkter i (og på randen av) trekanten P_1P_2Q . Er S et vilkårlig punkt på P_1P_2 , så vil følgelig alle punkter på forbindelseslinjen SQ ligge i M , altså må S , og dermed alle punkter på P_1P_2 tilhøre m . Herav følger at m må være en konveks punktmengde.

Haakon Waadeland

PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASIELEVER

Resultat av oppgavekonkurransen for 1954:

I konkurransen (arrangert av Norsk Matematisk Forening) ble Kronprins Olavs premie (kr. 100) og diplom gitt til *Helge Arnulf Tverberg*, elev av 5 R, Sydneshaugen skole, Bergen. Diplomer ble tildelt *Jens Erik Fenstad*, 5 R, Trondheim Katedralskole, *Arne Haaland*, 5 Ra, Drammen off. h. almen skole, og *O. Arnfinn Laudal*, 5 R, Mandal komm. h. almen skole. Oppgavene sto i NMT, Bind 1 (1953), s. 174–175.

Oppgavekonkurranse for 1955:

Den beste samlingen besvarelser på oppgavene nedenfor vil bli tildelt H. K. H. Kronprins Olavs premie på 100 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med og dessuten de som tar examen artium i 1955, men ingen kan vinne hovedpremien mer enn en gang. Oppgavene er slik at en kommer fram ved hjelp av realgymnasets pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som råd er.

En sender løsninger til rektor Kay Piene, Skjerstadvn. 2a, Smestad, Oslo, innen 1. 8. 1955, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

1. Ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ er gitt. Der trekkes en fritt valgt tangent til ellipsen. En normal til tangenten skal regnes å ha slik retning at vinkelen v som den danner med x -aksen, skal tilhøre samme kvadrant som tangeringspunktet. Ellipsens høyre toppunkt kalles A , og det punktet som ligger symmetrisk til A med tangenten til symmetriakse kalles P . Kall AP for r , og finn r uttrykt ved v , a og b .

Når v går fra 0° til 360° beskriver P en kurve som blir symmetrisk om x -aksen. Bevis geometrisk at denne kurven får en tangent i A som faller sammen med x -aksen.

Kurven kan også tenkes beskrevet av et fast punkt på en ellipse som beveger seg i forhold til den gitte. Gjør rede for denne bevegelsen, og angi hvilket punkt som beskriver kurven.

Skriv abscissen x til et punkt på kurven uttrykt ved v , a og b . Utledd den homogene likningen i $\sin v$ og $\cos v$ som bestemmer mulige maksimal- og minimalverdier av x . Sett så $a = 2$ og $b = 1$ og finn de verdiene av v som gir maksimal- eller minimalverdier av x . Finn de tilsvarende x -verdier.

2. Funksjonene

$$y = a \operatorname{tg} x,$$

$$y_1 = a_1 \operatorname{tg}(x + \alpha)$$

og

$$y_2 = a_2 \operatorname{tg}(x + \beta)$$

er definert for alle reelle x , unntatt de som gjør x , $x + \alpha$ eller $x + \beta = (k + \frac{1}{2})\pi$, hvor k er et positivt eller negativt helt tall eller null. Finn a_2 og en trigonometrisk funksjon av β uttrykt ved a , a_1 og α når $y_2 = y + y_1$, for alle de verdier av x funksjonene er definert for. a , a_1 , a_2 , α og β er reelle tall.

3. Funksjonene

$$y = a \sin x,$$

$$y_1 = a_1 \sin(x + \alpha)$$

og

$$y_2 = a_2 \sin(x + \beta)$$

er definert for alle reelle x , når a , a_1 , a_2 , α og β er reelle tall.

Finn a_2 og en trigonometrisk funksjon av β uttrykt ved a , a_1 og α

når $y_2 = y + y_1$ for alle de verdier av x funksjonene er definert for. Konstruer a_2 og vinkelen β når a , a_1 og α er gitt, $0 < \alpha < \pi$ og a og a_1 positive. Anvendelse: Bestem c og φ slik at $a \sin x + b \cos x = c \sin(x + \varphi)$, for alle x .

4. Et tetraeder T er gitt. Hjørnene skjæres vekk ved hjelp av plane snitt slik at der fremkommer et polyeder T_1 med 12 hjørner. Deretter gjentas den samme prosess med T_1 , slik at en etter n ganger har fått et polyeder T_n . Finn antall flater, hjørner og kanter av polyederet T_n .

5. I trekanten ABC er $AC = 1$ og $BC = n$. Finn den innskrevne sirkels radius r som funksjon av x , hvor x er den halve sum av sidene i trekanten. La maksimum av r være r_0 og de tilhørende verdier av x og vinkel C være x_0 og C_0 .

- 1) Finn x_0 , r_0 og C_0 når $n = 1$.
- 2) Bestem n slik at $x_0 = 2$, og bestem n slik at $x_0 = 2n$.
- 3) Sett $x_0 = f(n)$. Denne funksjon har en spesiell egenskap som forklarer sammenhengen mellom resultatene fra 2). Hvilken egenskap?
- 4) Bestem n slik at $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, og bestem x_0 når $n = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
- 5) Vis at $60^\circ < C_0 < 90^\circ$ og at $C_0 \rightarrow 90^\circ$ når $n \rightarrow \infty$.
- 6) Vis at når x_0 er et helt tall så er n irrasjonal, og at når n er et helt tall så er x_0 irrasjonal.

6. Gitt en sirkel med sentrum O og et punkt P utenfor sirkelen. En søker de rette linjer gjennom P som avskjærer buer på 120° av sirkelen. Bevis riktigheten av følgende konstruksjon: Med OP som side konstrueres en regulær trekant OPQ , og sirkelen om Q gjennom O og P skjærer den gitte sirkel i A og B . Linjene PA og PB er da de søkte linjer. Prøv å generalisere oppgaven.

PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier i Danmark udskriver herved nedenstående prisopgaver for danske gymnasieelever og kursus-elever til studentereksamen. Opgaverne ønskes behandlet så fuldstændigt som muligt, og der lægges vægt på en omhyggelig og overskuelig fremstilling.

For den bedste besvarelse udsættes en præmie på 100 kr., og der kan eventuelt uddeles ekstrapræmier.

Besvarelsene indsendes senest 1. april 1955 til lektor Holger Jensen, Sundvej 8,

Hellerup. Besvarelsenerne skal ledsages af en erklæring om, at opgaveløsningerne er selvstændigt arbejde. (Benyttelse af litteratur dog tilladt).

1. Vis uden anvendelse af tabel, at ligningssystemet

$$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{4 \cos 10^\circ}, \quad \cos B = \frac{\sqrt{6}}{4 \cos 10^\circ}, \quad \cos C = \frac{1}{2 \cos 10^\circ}$$

har et løsningssæt, der er vinkler i en trekant.

2. I nedenstående talfølge

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \dots,$$

der som elementer indeholder alle brøker $\frac{p}{q}$, hvor p og q er positive hele tal, står der forud for elementet $\frac{p}{q}$ alle sådanne brøker og kun sådanne,

hvor enten 1) summen af tæller og nævner er mindre end $p+q$, eller 2) summen af tæller og nævner er lig med $p+q$, samtidig med at nævneren er mindre end q .

Hvilket nummer har elementet $\frac{p}{q}$?

Hvad hedder det element, der har nummer 1001?

3. Vis, at de punkter (x, y) , hvis koordinater tilfredsstillir ligningerne

(1) $y = \sqrt{4x+1} + \sqrt{1-x}$

eller

(2) $y = \sqrt{4x+1} - \sqrt{1-x}$

også tilfredsstillir ligningen

(3) $y^4 - 6xy^2 + 25x^2 - 4y^2 = 0.$

Undersøg og tegn den kurve, der fremstilles af (3), idet man bl. a. bestemmer de punkter af kurven, hvor der er tangenter parallelle med akserne.

Angiv de dele af denne kurve, hvis punkters koordinater tillige tilfredsstillir (1) eller (2).

Bestem for enhver værdi af a antallet af løsninger i hver af ligningerne

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{1-x} = a$$

og

$$\sqrt{4x+1} - \sqrt{1-x} = a.$$

4. Lad a og l være to på hinanden vinkelrette linier, der skærer hinanden i punktet O , og lad F være et fast punkt på a , forskelligt fra O .

Bestem den punktmængde M i planen al , hvis punkter P ved følgende forskrift (ideal linseafbildning) lader sig afbilde i tilsvarende punkter P_1 : Gennem P tegnes en linie parallel med a ; dens skæringspunkt med l betegnes ved L ; P afbildes da i skæringspunktet mellem linierne LF og PO .

Bestem endvidere mængden M_1 af billedpunkter.

Bevis følgende sætninger om den således definerede afbildning:

1) Når P gennemløber de punkter, der er fælles for en ret linie og M , så gennemløber P_1 de punkter, der er fælles for en tilsvarende ret linie og M_1 .

2) Når tre linier tilhører et liniebundt (eventuelt et parallelbundt), så tilhører de tre tilsvarende linier ligeledes et liniebundt.

3) Det geometriske sted for toppunkterne af de liniebundter, der svarer til parallelbundter, er en ret linie gennem F , vinkelret på a .

4) Idet P_1 er det punkt, som afbildningen fører P over i, og idet P_2 ligger symmetrisk med P_1 med hensyn til l , fører den givne afbildning P_2 over i et punkt P_3 , der ligger symmetrisk med P med hensyn til l .

5. I et interval, der indeholder tallet 0, er defineret en $n+1$ gange differentiabel funktion $f(t)$, hvis $(n+1)^{\text{te}}$ differentialkvotient $f^{(n+1)}(t)$ er kontinuert. Idet $p < n+1$, og x tilhører definitionsområdet for $f(t)$, skal man bevise, at

$$(1) \quad \int_0^x \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x-t) dt = \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \int_0^x \frac{t^p}{p!} f^{(p+1)}(x-t) dt.$$

Bevis ved hjælp af (1) formelen

$$(2) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \dots \\ + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{t^n}{n!} f^{(n+1)}(x-t) dt.$$

Bevis, at sidste led i (2) konvergerer imod 0, når $n \rightarrow \infty$, forudsat at $f^{(n+1)}(t)$ er begrænset i intervallet $0 \leq t \leq x$.

Bevis ved hjælp af (2), at

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{q-1} \frac{x^{2q-1}}{(2q-1)!} + \dots$$

Udled på lignende måde uendelige rækker for $\cos x$, e^x og $\ln(1+x)$.

PRISTÄVLING FÖR SVENSKA GYMNASISTER

Försöksvis anordnas genom Nordisk Matematisk Tidskrift en pristävling för svenska gymnasister. Var och en av de tre utgivande svenska föreningarna har ställt 50 kr. till disposition, varigenom ett första pris om 100 kr. och ett andra pris om 50 kr. kan utdelas.

För deltagande i tävlingen fordras, att lösningar insändas till minst fyra av nedanstående uppgifter. De bästa lösningarna komma i mån av utrymme att publiceras i NMT. Gymnasister från övriga nordiska länder kunna deltaga utom tävlan.

Lösningar, åtföljda av en försäkran att de äro självständigt utarbetade, insändas senast den 1 mars 1955 till: Nordisk Matematisk Tidskrift, Matematiska Institutionen, Lund. Bifoga uppgift om namn, klass och läroverk.

1. n är ett positivt heltal. Visa att

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

2. I en given ellips dragas två godtyckliga konjugatdiametrar. Från en punkt på ellipsen ser man dessa under vinklarna u och v . Visa att uttrycket $\cot^2 u + \cot^2 v$ endast beror av ellipsens excentricitet.

3. Som bekant är $\sin x < x$ för $x > 0$. Bestäm det minsta värde på a för vilket $\sin x > x - ax^3$ då $x > 0$. Använd sedan resultatet för att visa, att då $0 \leq x \leq \pi/40$ ($= 4^\circ 5'$) kan $\sin x$ ersättas med x med ett fel, som är mindre än 10^{-4} .

4. En sfär tangerar de tre sidoytorna i en tresidig pyramid och utskär av bottenytan en cirkel. Cirkelns yta varierar med sfärens radie. Visa att då cirkelns yta är så stor som möjligt, sfärens radie är aritmetiska mediet av radierna till den i pyramiden inskrivna och den vid bottenytan vidskrivna sfären. Visa dessutom, att cirkelns radie då är geometriska mediet av de nämnda sfärernas radier.

5. En yta S och en fix punkt P i rummet är givna. Varje plan genom P som skär ytan S , bildar en skärning, som är en cirkel eller en punkt. Visa att S är ytan av en sfär.

6. Ett antal föremål äro givna. Bland dem finnas några, som äro olika till färg och några som äro olika till form. Bevisa, att det existerar minst två föremål, som äro olika till både färg och form.

SUMMARY IN ENGLISH.

P. KUSTAANHEIMO and B. QVIST: *Finite geometries and their application.*

A »block design« and the corresponding finite geometry are defined by: 1° There are v different elements (points) and v blocks (lines), each containing r different elements, where $v = r^2 - r + 1$. 2° Two blocks have only one element in common. 3° Two elements determine a block uniquely.—Some properties of the resulting blocks are mentioned.

In a Galois-field GF_p of the residues to a prime modulus p , points and lines are defined by their coordinates and coefficients respectively (in homogeneous or inhomogeneous form). The resulting system is a finite geometry. A few combinatorial examples are shown, but most of the article deals with physical applications. The principle of quantized matter and energy is well known, but can be carried further in a finite geometry, where some physical phenomena will get a more »natural« explanation, e.g. the expanding universe.

The »positive« numbers in GF_p can be taken as the quadratic residues of p , but the sum of two such residues may be a non-residue, i.e. negative. This difficulty is overcome by choosing p such that all the numbers $1, 2, 3, \dots, 10^{40}$ (say) are positive (and -1 will be negative if $p \equiv -1 \pmod{4}$). The ordinary physical laws will then fail only for very small or very large numbers, i. e. in microcosmos or macrocosmos.

ÖLAFUR DANIELSSON: *Some elementary geometry.*

A convex quadrangle (see fig. p. 156) is divided by the diagonals into 4 triangles. M and N are the median points in one pair of opposite triangles, H and K the points of intersection of the altitudes in the remaining pair. It is shown that MN and HK intersect at right angles.

THØGER BANG: *Large prime numbers.*

The article treats the history of the *Mersenne primes* $M_n = 2^n - 1$. Already Euclid connected these primes with the so called »perfect numbers«. Fermat gave the first useful criteria for primality of M_n , and Euler established the »record« prime M_{31} . In the last century, Lucas showed that M_{127} is a prime, by means of the test named after him:

Let $c_1 = 2$ and $c_{m+1} = 2c_m^2 - 1$. Then $M_n > 3$ (n odd) is a prime if and only if M_n divides c_{n-1} .

A simple proof of Lucas' theorem is given, based on trigonometric functions for complex arguments.

In 1952, the electronic computer SWAC determined several new Mersenne primes, the largest one—and the largest prime known today—being M_{2231} (written out in full on p. 167). In the diagram p. 160, all known primes M_n are shown (indicated by n , in a logarithmic scale), grouped after the time of their discovery.

LARS GÅRDING and LENNART SANDGREN: *New plans and methodical instructions for the teaching of mathematics in the Swedish gymnasium.*

The new curriculum puts more emphasis on analysis, with a corresponding reduction of geometry and trigonometry. In spite of a certain criticism, the authors find the new plans and the teaching instructions satisfactory.

INNHOLDSFORTEGNELSE

THØGER BANG: Store primtal.....	157-168
VIGGO BRUN: Nîmes-rosen.....	110-112
GERMUND DAHLQUIST: Monte Carlo-metoden.....	27- 43
ÓLAFUR DANIELSSON: Lidt elementær geometri.....	156
E. J. DIJKSTERHUIS: Die Integrationsmethoden von Archimedes.....	5- 23
FREDRIK EHRNST: Något om laborativ metodik vid matematikunder- visningen.....	24- 26
FR. FABRICIUS-BJERRE: En elementær (3,1)-transformation.....	101-109
LARS GÅRDING, LENNART SANDGREN: Nya kursplaner och metodiska anvisningar i matematik för gymnasiet i Sverige.....	169-171
K.-G. HAGSTROEM: Hexaederns diagonalsnitt och Gauss' fördelnings- klocka.....	97-100
FRITZ C. HOLTE: Noen egenskaper ved den binomiale fordelingsfunksjon	113-115
P. KUSTAAHEIMO, B. QVIST: Om ändliga geometrier och deras tillämp- ning.....	137-155
Matematikkurserna på gymnasiet i Sverige (inledare C. E. SJÖSTEDT och O. FROSTMAN).....	53- 59
KAY PIENE: Håndbøker til matematikkundervisningen.....	81- 94
SIGURKARL STEFÁNSSON: Om to geometriske steder ved ligesidede hyperbler.....	44- 52
M. TIDEMAN: Elementary proof of a uniqueness theorem for positive harmonic functions.....	95- 96
Bokmeldinger	
CARL HYLÉN-CAVALLIUS, LENNART SANDGREN: Plan geometri (SVEN HILDING).....	60
SVEN GELLERSTEDT: 800 övningsuppgifter i matematik för universitet och högskolor (TORD GANELIUS).....	172
STIG HJALMARS: Teoretisk fysik (P. KRISTENSEN, J. LINDHARD).....	62
J. E. HOFMANN: Geschichte der Mathematik (VIGGO BRUN).....	116
LARS HÖRMANDER, LENNART SANDGREN: Matematisk problemsamling för två betyg (HANS RIESEL).....	61
W. LIETZMANN: Wo steckt der Fehler? (KAY PIENE).....	117
ØYSTEIN ORE: Niels Henrik Abel (FR. LANGE-NIELSEN).....	175
ERNST S. SELMER: Differensial- og integralregning (KAI RANDEBUCH)	64
B. L. VAN DER WAERDEN: Science awakening (INKERI SIMOLA).....	173
Mottatte bøker.....	65, 118, 178
Kronikk, utnevnelser.....	75, 135
Oppgaver	
Oppgaver til løsning.....	71, 123, 182
Løsninger.....	73, 124, 183
Eksamensoppgaver.....	130
Prisoppgaver for gymnasiaster.....	128, 185
Summary in English.....	80, 135, 191