

HÅNDBØKER TIL MATEMATIKKUNDERVISNINGEN

KAY PIENE

Med håndbøker forstår jeg her den litteratur som en matematikklærer kan ha nytte av i sin gjerning, som kan være til hjelp når han står overfor et vanskelig kapitel eller et intrikat problem, som kan gi impulser til omlegning av undervisningen så den blir mer utbytterik eller kan berike den på forskjellig vis.

Det er min hensikt i det følgende å gi en oversikt over en del av denne litteraturen som jeg har støtt på gjennom årene og som jeg som lærer i den høyere skole i større og mindre grad har hatt nytte av. Det er selvsagt ofte en smaksak hva en skal ta med, og har jeg utelatt viktige verker, er jeg takknemlig for å bli gjort oppmerksom på dem.

La meg først nevne en gruppe bøker som nok kan regnes til håndboks-litteraturen, men som ikke vil bli omtalt her. Det er for det første de vanlige matematiske lærebøker for skolen, likeså veiledningshefter, formelsamlinger o. l. som først og fremst er skrevet for et bestemt skoleslag eller matematikkpensum. Uten tvil vil en matematikklærer ha utbytte av å studere andre bøker enn de han underviser etter i skolen, og det ikke bare bøker fra hans eget land. Kanskje kunne det siden her i tidskriftet komme særskilte artikler om lærebøkene i de nordiske land særlig beregnet på orientering for lesere i andre land enn utgiverlandet.

Den andre typen bøker som jeg ikke vil behandle, er lærebøkene i den såkalte »matematiske analyse« og andre lærebøker i matematikk for universitet og høyskoler, og dermed for de vordende lærere i den høyere skole. Det er klart at slike bøker, fra ens eget eller andre land, ofte kan være nyttige oppslagsbøker for lærerne, ja det har faktisk hendt meg at jeg har funnet at et visst emne er grundigere og bedre behandlet i læreboka for studenter enn i den tilsvarende bok for skoleelever. Skal læren ha det fulle utbytte av en lærebok i matematisk analyse, er det naturligvis nødvendig at det dreier seg om en helt tidsmessig bok — med minst like store og helst enda større krav til stringens enn de en kan stille til de beste skolebøker.

Vi er nå så heldige innen Norden å ha flere verdifulle lærebøker i

matematikk for universitetsnivået. De har alt hatt og vil sikkert i framtiden enda mer komme til å ha en meget heldig innflytelse både på de mer elementære lærebøker, og på selve undervisningen i alle de skoler som har matematikk som fag.

Den litteratur som særlig skal omtales her, faller i to. Vi har på den ene siden bøker som etter sitt anlegg eller gjennom tittelen tydelig angir å være håndbøker, og på den andre siden bøker som ikke først og fremst eller utelukkende er skrevet for et slikt formål.

Til den første gruppen hører framstillinger av det en kaller matematikkundervisningens *metodikk*, dvs. veiledning i hvordan en på beste måte skal bibringe elevene de nødvendige matematiske kunnskaper og ferdigheter og utvikle deres matematiske innsikt og modenhet.

Når en tenker på den sentrale plass faget har i skolen og dets lange tradisjoner, er det påfallende hvor sparsom litteraturen er på dette området, selv om vi går til verdensspråkene.

På de *nordiske* språk foreligger ikke mye.

Ribsskogs grundige bok om regneundervisningen i grunnskolen vil også være nyttig for de som underviser på et høyere trinn. Pihls greie bok behandler ikke som tittelen sier bare regning, men også den elementære aritmetikk (algebra). Her er didaktiske råd så vel som nyttige faglige opplysninger, og den gjensidige støtte mellom de to disipliner som behandles, kommer sterkt fram.

Et forsømt kapitel i skolen er regning med tall som er funnet ved måling, tilnærmede tall. Her vil Wethes lille hefte kunne gi god hjelp — faglig og didaktisk.

Sjöstedts Geometri och geometriundervisning har tankevekkende og vidtskuende kapitler om begynnerundervisningen i faget.

Den mest omfattende behandling på et nordisk språk får emnet i den finske professor Johanssons bok som egentlig er en betenkning om reformer i matematikkundervisningen i finske skoler. Men som det heter i forordet, behandler den både *hva* som skal læres og *hvordan* det skal skje. Stilen er personlig og livlig, og resultatet er en fengslende og verdifull metodikkbok.

En sammenlignende undersøkelse av matematikkens plass i skolen i de nordiske land er ennå ikke foretatt. Visstnok er der ulikheter på vesentlige områder, men den »sekundærskole« (läroverk — gymnasieskole osv.) som gir undervisning i faget, er i alle land en skole for en forholdsvis liten del av ungdommen, dog likevel ikke bare for dem som skal studere ved universiteter og høyskoler, men også for dem som ønsker en høyere almenutdannelse før de går over i mer praktiske yrker.

Dette vil si at dersom vi søker etter framstillinger av matematikkundervisningens metodikk utenfor Nordens grenser, bør vi først og fremst gå til land som har en lignende skolestruktur som vi.

Naturlig er det da å se på de vesteuropeiske land, kanskje særlig på *Tyskland* hvis skolevesen i prinsippet ikke skiller seg stort fra de nordiske lands, og hvor dessuten matematikken har hatt en sterk posisjon såvel på universitets- og høyskolenivået som i skolen. Her har det også vært gitt ut en vesentlig del av den eksisterende håndbokslitteraturen til matematikkundervisningen. På den andre siden er mesteparten av bøkene kommet ut for mer enn 20–30 år siden og derfor ikke alltid vel egnet til *dagens* skole, som denne oversiktsartikkelen særlig sikter på.

Der er imidlertid en bok som er kommet i flere utgaver, den siste ganske nylig, og som etter min mening er den framstilling av matematikkundervisningsmetodikk som er grundigst og mest omfattende, og som får mest med av det som er av vesentlig betydning. Jeg sikter da til W. Lietzmanns metodikk som er kommet i flere utgaver av vekslende omfang. De eldre utgavene er vel nå bare tilgjengelige på biblioteker o. l.; de inneholder en del stoff som ikke er kommet med i siste utgave. Foreløpig er dessuten bare det bindet kommet som behandler *stoffet*, mens den mer undervisningsmessige side blir temaet for et kommende bind, men er dessuten — riktignok svært kortfattet — behandlet i Lietzmanns *Schulreform und mathematischer Unterricht*.

Lietzmann drøfter grundig både *hva* en skal undervise og *hvordan*. Han er vel hjemme i stoffet, kjenner nøye matematikkundervisningen og dens historie i sitt eget og i andre land. Han kjenner og siterer nyttige kilder, bøker og artikler i alle mulige tidsskrifter. Også av den grunn er det unødvendig å navngi andre tyske metodikkbøker; av Lietzmanns bøker vil en få inntrykk av om de i tilfelle har noe å si vår tids matematikklærere.

Skolen i *Nederland* har også en struktur som ligner den nordiske, og undervisningen i matematikk ligger høyt og det samme gjør diskusjonen om den. Jeg nevner eksempelvis arbeider av L. N. H. Bunt som leder et »matematisk sentrum«, som bl. a. arbeider med matematisk-pedagogiske problemer.

Frankrike er vel det land der en tidligst finner drøftinger av matematikkundervisningen. Det kan vises til navn som Lacroix, Legendre og Duhamel, og senere til Méray, Borel og Poincaré, noe som dessuten vitner om en sterk interesse for skolematematikken fra universitetets side.

Fransk skole er bygd opp på lignende vis som den nordiske, men kravene, spesielt i de øverste klassene, er større. Jeg har inntrykk av at en i lærerutdanningen legger mer vekt på den faglige enn på den pedagogiske

side. *Laisants La mathématique* har til undertittel: Philosophie-Enseignement og inneholder avsnitt om undervisningen i de enkelte disipliner. Det er mest almene betraktninger og ikke praktiske råd og vink.

Ganske nylig er det kommet en liten bok av Fouché som behandler elementær aritmetikk + algebra og geometri. Det meste er også her mer generelle betraktninger, men der er også noen morsomme geometriske problemer hvis løsning drøftes grundig.

En kunne si at *engelsk* skole sikter mot å gi matematikk til alle barn på mellomtrinnet, mens den på det øverste trinn gir mer spesialisert og vidtgående matematikkundervisning til de særlig dyktige, og dette preger til en viss grad de eksisterende metodikk-bøker.

I *The Teaching of Elementary Mathematics* har professor Godfrey et livfullt innledningskapitel om formålet med matematikkundervisningen, mens skolemannen Siddons dels gir generelle didaktiske råd, dels behandler stoffet innen de enkelte disipliner. Mye ligger på siden av det vi har bruk for, men der er utvilsomt mange bemerkelsesverdige detaljer. Noe lignende gjelder nok også Sumners metodikk.

En eldre bok av Carson vil fremdeles kunne leses med utbytte. Det samme gjelder Brandfords studie over matematikkopplæring, som i sin tid vakte oppmerksomhet ved sitt opplegg (parallelitet mellom den matematiske utvikling i menneskeheten og det enkelte individ). Det er en omfattende og innholdsrik bok, som kan gi mange impulser også idag.

T. Percy Nunns store bok om undervisning i algebra og trigonometri vitner om at forfatteren var en svært kjent pedagog. Det er en dyptgående og iderik bok som både behandler stoff og metode og som så vidt jeg kan forstå, har betydd mye for reformer innen undervisningen i faget i England. Eksempelvis nevner jeg det grundige avsnittet om retningsstall (*Directed numbers*) med instruktive fargelagte figurer.

Stor betydning har sikkert også de rapporter som *The Mathematical Association* har sendt ut om undervisningen i de enkelte matematiske disipliner. De er forfattet av større ekspertkomiteer og er særdeles nyttige håndbøker for lærerne, fordi de i høyeste grad sikter på å gjøre selve undervisningen mer utbytterik. Framstillingen er ofte så bred som i en lærebok, kjent stoff behandles på nye måter, og på tallrike steder får læreren idéer som kan bety omlegning til noe mer verdifullt. Likevel er ikke alt stoff på det rent konkrete plan. Ikke minst verdifulle er de mer almene drøftinger, se f. eks. *Introduction* og *Appendices* i den andre geometrirapporten, der stoffet er ordnet for tre trinn, et eksperimenterende (9–12½ år), et mellomtrinn der en deduktiv arbeidsteknikk blir bygd opp og et øverste trinn der denne teknikk blir enerådende.

De land hvis metodikkbøker vi nå har betraktet, har tross alle ulikheter en skolestruktur som ligner den vi finner i de nordiske land. Forlater vi Europa og går over til *Amerikas Forente Stater*, vil vi finne at skolen i langt høyere grad sikter på å gi videregående og almindennende undervisning til *mange*, ikke bare til en mindre gruppe.

Dette betyr at en skal være varsom med uten videre å anvende litteratur fra U. S. A. på nordiske forhold, selv om situasjonen kan endre seg ved kommende skolereformer og spesielt når de mer praktiske skoler blir bedre utbygd. Dessuten er det klart at forskningen i U. S. A., også den pedagogisk-psykologiske, er kommet langt og har krav på å bli tatt hensyn til. Av den litteratur jeg har støtt på, velger jeg her ut noe som jeg mener kan ha betydning for nordiske matematikklærere.

Jeg nevner naturlig først J. W. A. Youngs metodikk, fordi den er sterkt «uropeisk» preget. (Forfatteren har også skrevet en bok om matematikkundervisningen i Preussen.) Den er innholdsrik og dyptgående. Ikke minst blir selve undervisningsmåten drøftet svært grundig. Kanskje er denne boka den metodikk forfattet på engelsk, som kommer nærmest Lietzmanss bøker. Noen moderne utgave av boka er imidlertid meg bekjent ikke kommet.

Young var ellers formann i en kommisjon nedsatt i 1916 av The Mathematical Association of America som skulle drøfte reformer i matematikkundervisningen. Den publiserte en lengre rapport (Reorganization etc.) som også har virket som en veileder for matematikklærerne. Etter at selve betenkningen var utsolgt — 25000 eksemplarer var trykt — kom det en ny utgave av første del av den. Her drøftes bl. a. formålet for matematikkundervisningen og mer detaljerte pensumforslag blir gitt. En annen leseverdig rapport, *Mathematics in General Education*, ble sendt ut av en kommisjon nedsatt av styret i The Progressive Education Association i 1932. Bestemte synspunkter ligger bak betenkningen og den dekker ikke hele området for matematikkundervisningen hos oss, men det som behandles, er stimulerende lesning.

Mer fullstendig i sin stoffbehandling er Butler & Wrens metodikk. Den er mer «amerikansk» enn Youngs bok, men dette hindrer ikke at også nordiske lærere (spesielt på begynnertrinnet) vil kunne finne stoff av verdi i den. Det heter uttrykkelig at den prøver å unngå mer ekstreme synspunkter (jfr. de før nevnte rapporter). Boka har tallrike litteraturreferanser og dessuten spørsmål til overveielse, vel i særlig grad beregnet på vordende eller nettopp startende lærere.

En svært nyttig serie er de årbøker som det amerikanske National Council of Teachers of Mathematics gir ut. Der er kommet et snes ganske store bind, dels forfattet av enkeltpersoner, dels av flere. Noen

av bindene behandler utpreget nasjonale problemer, andre kan idag virke en smule uaktuelle. Til gjengjeld er der flere fremragende bind som i lang tid vil bevare sin verdi og som må interessere lærere i alle land.

Jeg tenker da på bindet om regning med tilnærmede tall — den mest omfattende framstilling jeg har sett, — på bindet om funksjonell tenkning av den engelske psykolog (og tidligere matematikklærer) Hamley, og bindet om bevisets natur, begge deler stoff som matematikklærerne i de nordiske land ennå neppe har drøftet grundig nok. Et bind er en rapport om matematikkens stilling i den høyere skole og andre bind er mer utpreget metodiske. Et behandler forskjellige hjelpemidler til undervisningen; et annet består av et allsidig kildemateriale, data o. l., som lærerne kan utnytte til å lage egne, aktuelle og interessevekkende problemer eller til annen berikelse av undervisningen. Det sist utkomne bindet jeg kjenner (nr. 21), er ikke det minst viktige. Det behandler selve innlæringsprosessen i matematikkundervisningen og elevenes bruk av de ervervede kunnskaper. Ennå har ikke matematikklærerne — og det gjelder også de nordiske — tilstrekkelig utnyttet psykologien og de resultater den har funnet, og de har ikke gitt psykologene alle de konkrete arbeidsoppgaver som kunne hjelpe til å skaffe en mer utbytterik matematikkundervisning enn den vi har nå. Vi kunne da komme like langt med færre anstrengelser og kanskje oppnå større sikkerhet, — eller vi kunne nå lenger, og imøtekomme stigende krav som den »matematiske verden« vi nå lever i, kommer til å stille. Jeg nevner bare at stoff om begavelse for matematikk hos skoleungdom finnes bl. a. i skrifter av Liedloff, Meinander og Siegvold.

Den neste gruppen av bøker vi skal ta for oss behandler først og fremst selve *undervisningsstoffet*, ofte fra et høyere standpunkt, for å sitere fra den tittelen Felix Klein valte for sine tre velkjente bøker for matematikklærere. Store deler av stoffet i disse bøkene vil være verdifulle også for dagens nordiske lærere.

Bd. I behandler aritmetikk, algebra og analyse. Til avsnittet om infinitesimalregning er der verdifulle historiske og pedagogiske betraktninger, likesom der er et appendiks om reformtendenser i tysk matematikkundervisning og et annet som har et lignende formål som denne artikkel.

Bd. II behandler geometri, med et kapitel om geometriens grunnlag og et lengre avsnitt om undervisningen i geometri i England, Frankrike, Italia og Tyskland forsynt med rikelige litteraturhenvisninger. Selv om stoffet ikke er ført lenger fram enn til ca. 1920, vil matematikklærere stadig kunne finne idéer og impulser her.

Bd. III behandler »presisjons- og approksimasjonsmatematikk«. Det er et sentralt emne som er forsømt i skolen; men Kleins bok vil formodentlig ligge noe på siden av det lærere flest har bruk for her.

En som på sett og vis har holdt tradisjonen fra Kleins tid vedlike og som også innehadde Kleins professorat i Göttingen, er R. Courant. Sammen med Robbins har han skrevet boka *What is Mathematics?* som er noe av det beste som er skrevet om dette spørsmålet, såvidt jeg kan skjønne, og som blir høylig berømmet i alle anmeldelser.

De ensyklopediske framstillinger som Weber & Wellstein har gitt ut, virker idag noe gammeldagse, bl. a. fordi mye av stoffet ligger på siden av det vi nå mener er nyttig eller verdifullt i skolen.

Et område som elever bare i mindre grad vil komme inn på, men som lærerne burde være godt orientert i, er matematikkens *grunnlag*, fagets oppbygning og arbeidsmetoder, dets filosofiske bakgrunn osv.

Lietzmans bok om matematikkens vesen er etter min mening en helt utmerket håndbok for matematikklærerne. Den har kapitler om logikken i oppbygningen av matematikken, om grunnlaget i aritmetikk, i analyse og i geometri og om forholdet mellom matematikk og erkjennelseslære. Det er ellers en bok som også flinke gymnasiaster vil kunne ha glede av.

Bundgaards og Tambs Lyches bøker om tallenes oppbygning er skrevet av universitetslærere med utmerket pedagogisk grep på saken, og de hører sikkert til de bøker som vil bli konsultert også når studietiden er omme. Dette siste vil vel også gjelde i hvert fall de første bøker av Euklids *Elementer*. I den forbindelse må også nevnes Hjelmslevs skrift om geometriens grunnlag, og det før nevnte av Sjöstedt.

En klassisk bok er Julius Petersens *Metoder og Teorier* som er kommet i hele 8 utgaver, men den har vel mistet noe av sin betydning fordi geometriske konstruksjoner sikkert ikke lenger spiller den samme rolle i skolen som før.

Om løsning av matematikkoppgaver i sin alminnelighet gir Pólya en grei og klar framstilling som lærerne måtte kunne utnytte. Svært mye er nok kjent stoff for dem, selv om de ikke anvender Pólyas systematiske teknikk.

Om matematikernes skapende arbeid beretter Hadamard, og det er mulig at hans betraktninger kan ha en viss betydning for læreren når han skal anspore sine elever som også — sans comparaison — skal skape noe gjennom sine oppgaveløsninger. I samme forbindelse kunne nevnes Poincaré, som jo også har forfattet mer filosofiske skrifter. Hans *Science et méthode* har et viktig kapitel om det matematiske resonnement, som bl. a. behandler definisjoner i skoleundervisningen. En annen

matematiker som har skrevet populært om matematikk er Hardy, og her i Norden Nørlund.

Det hersker nok delte meninger om i hvilket omfang en skal trekke inn *historisk* stoff i selve matematikkundervisningen, men det burde være en selvsagt ting at i alle fall læreren selv er noe orientert om fagets historie. Han bør kunne se faget i en større sammenheng, se dets utvikling i menneskehetens strev etter å utvide sin erkjennelse, og han burde også la elevene få et innblikk i fagets historie og et kjennskap til noen av dem som i særlig grad har bidradd til dets framvekst.

Det er ikke vanskelig å peke på passende historisk litteratur for lærerne. Første del av Zeuthens klassiske verk er nylig kommet i en modernisert utgave ved Neugebauer. Det er en bok som alle matematikklærere burde ha og studere med jevne mellomrom. De første sterkt reviderte avsnitt om babylonsk og egyptisk matematikk kunne en nesten ha ønsket seg fyldigere, men en kan jo gå til Neugebauers egne verker.

Insiterende lesning er Bells verker. Han har en egen evne til å gi en fengslende skildring av matematikeren og instruktive innblikk i hans forskningsresultater. Mest kjent er formodentlig hans *Men of Mathematics* som er oversatt til dansk og svensk og som også nylig er kommet i en billig tobinds engelsk utgave. På tysk foreligger en matematikkens historie av Colerus. Den er skrevet for «en hver» men går ganske mye inn på det rent matematiske. De lærere som underviser i infinitesimalregning vil ha megen glede av Toeplitz' bok, som gir en innføring i emnet etter det forfatteren kaller den «genetiske metode».

På nordiske språk er utkommet mer kortfattede framstillinger av Arvesen, la Cour, Hagstroem og Johansen.

Søker en derimot mer utpregete detaljkunnskaper om elementærmatematikkkens historie, så er uten tvil Tropfkes samleverk det som gir best beskjed. Det er innholdsrikt som et leksikon og lar seg bl. a. takket være registrene bruke som et leksikon om en trenger beskjed om f. eks. opprinnelsen av en setning, et fagord el. l., men har likevel en sammenhengende og vel lesbar framstilling. Med sine 7 bind er Tropfkes verk nok for stort for et vanlig privat bibliotek, kanskje også for et lærerbibliotek. Dette må ikke avholde en matematikklærer fra å låne verket og gjøre notater som kan gi undervisningen et verdifullt historisk perspektiv.

Historisk stoff kan matematikklæreren bruke når han vil gi den enkelte elev noe han kan arbeide med *på egen hånd*. Det er ellers ikke så lett å finne passende «ved siden av»-lesning til flinke elever. Etterhånden er der nok kommet en del populær matematisk litteratur på de nordiske språk, men ikke alt er like tjenlig for skoleelever. I noen tilfelle kan de

snarere gi impulser og ideer til læreren. Om enkelte oversettelser gjelder det at symboler, termini etc. kan være så forskjellige fra det eleven er vant til, at lesningen kan bli for sterkt hemmet. Dette gjelder tildels noen bøker som synes skrevet ut fra et ønske om å reparere den skrøpelighet i matematiske kunnskaper som uten tvil er til stede hos mange til tross for fagets logiske klarhet og den store plass det har i skolen. Men mon ikke boka som er skrevet for *millioner* bare blir lest til ende av *tusener*? Likevel burde den bli forstått av mer enn *hundrer*, for Hogben har et merkelig godt grep på stoffet. En annen sak er det at tilegnelsen aldri kan bli fullgod uten oppgaveregning, og de eksemplene han har, kan ikke være tilstrekkelige i så måte. For ikke å bli misforstått nevner jeg at den norske utgaven av boka som E. B. Schieldrop har ansvaret for, ikke skulle være i unødig disharmoni med norske lærebøker hva termini o. l. angår.

Northrops Riddles in Mathematics er kommet både på dansk og svensk, på dansk under den uheldige og misvisende tittel Genvej til Matematik. Det er ellers en bok som både elever og lærere kan ha glede av.

Mer direkte beregnet på det som i Sverige kalles »enskilt arbete« er Sjøstedts tre bøker, en om kurvekonstruksjoner, en om projektiv og en om ikke-euklidisk geometri. De må interessere elever også i de andre nordiske land.

Tre engelske bøker som elever godt kan lese i originaltekst (de er visstnok heller ikke oversatt) og som også lærere vil få gode impulser av, er de to små billigbøkene av Sawyer og Read og den noe større som Sawyer har redigert. Særlig vellykket er kan hende Mathematicians Delight. Her er høyst originale betraktningsmåter i en fengslende framstilling og matematiske kunnskaper i et utrolig omfang. Og noe lignende kan i grunnen sies om Reads lille bok.

En svært verdifull bok både for elev og lærer er Rademacher & Toeplitz's Von Zahlen und Figuren. Som undertittelen sier gir den prøver på matematisk tenkning for »Liebhaber der Mathematik«, og disse prøvene er svært velvalte og formen klar og fengslende.

Da denne boka ble gitt ut, holdt Tietze de forelesninger »für Hörer aller Fakulteten« som først nylig er gitt ut i bokform. Det er også en verdifull bok, med vide perspektiver og humanistiske innslag.

Mens Tietze behandler løste og uløste problemer, drøfter Heegaard et problem som folk har vondt for å forstå ikke lar seg løse. Da boka er skrevet på nynorsk, vil den kanskje ikke falle så lett for elever utenfor Norge; den kunne ellers være god å gi til de mange som mener å ha tredelt vinkelen med passer og linjal alene.

I grunnen minner Heegaards bok mye om bøkene i den kjente tyske

serien Mathematisch-Physikalische Bibliothek redigert av Lietzmann. Bindene her var vel egentlig beregnet på interessert skoleungdom. Jeg har ikke glemt med hvilken iver jeg selv studerte flere av bindene som gymnasiast. Mon ikke mange nordiske matematikklærere har utnyttet stoff fra Wo steckt der Fehler, Riesen und Zwerge, Der pythagoreische Lehrsatz osv.?

Etter krigen er ellers flere av bindene kommet i ajourførte utgaver, og de vil sikkert finne mange nye lesere både blant elever og lærere.

En enda mer velkjent tysk serie er Sammlung Göschel. Det er vel knapt en matematikklærer som ikke har lest et eller flere bind blant de mange i serien som faller innen matematikken. Direkte nyttige for selve matematikkundervisningen blir vel likevel bare de relativt få bind som svarer til disipliner i skolens pensum eller som behandler matematikkens grunnlag, dens historie o. l. Den matematiske formelsamlingen har jeg selv brukt ganske mye; for elever vil betegnelsene kanskje virke vel fremmede.

Lignende serier fins også i andre land. I Frankrike finner vi således flere bind med matematisk innhold i serien Que sais-je? De har gjerne et historisk eller filosofisk preg og går i det hele ganske dypt.

Litt avveksling i den daglige undervisning såvel for elever som lærere kan oppgaver — og stoff i det hele tatt — fra den såkalte *underholdningsmatematikk* bringe. Jeg har inntrykk av at nordiske matematikklærere ikke i tilstrekkelig grad utnytter de rike muligheter som her eksisterer. Viktig er det imidlertid at en utnytter stoffet etter prinsippet «ej blot til lyst», noe som ikke skulle være vanskelig.

Klassiske må en vel kalle Rouse Ball & Coxeters og Schubert-Fittings bøker, som begge er kommet i mange opplag. Begge inneholder mye som direkte kan utnyttes i skolen, ved siden av stoff og problemer som snarere hører hjemme i ukeblad o. l., men som ville egne seg bra til «matematiske klubber» eller lignende elevforeninger.

Mer direkte skrevet for lærerne er Lietzmanns underholdningsmatematiske bok, som ellers byr på variert og godt stoff.

Når det gjelder oppgaver av mer underholdende slag, har vel engelskmennene det beste utvalg. I deres tidsskrifter og magasiner finner en hyppig oppgaver som appellerer til den alminnelige leser samtidig som de inneholder vesentlige poenger av matematisk-logisk art.

De samlinger som er kommet ut i den kjente serien Penguin Books inneholder en skare slike oppgaver, det er ikke vanskelig for en lærer her å plukke ut på samme tid fornøyelige og lærerike problemer.

Til slutt kunne jeg nevne noen bøker som kan være til hjelp når lære-

ren vil *vurdere resultatene* av sitt arbeid. Lietzmann har skrevet en bok om vurdering av prestasjoner i skolen, som er særlig egnet for matematikklærere. I Norge er der kommet en standardisert matematikk-test i elementær aritmetikk og algebra av Kraugerud. Ellers er det lite gjort på dette området i de nordiske land. Vil en bruke statistiske hjelpemidler ved vurdering av elevers prestasjoner, eksisterer det en sann overflod av bøker. Høigård og Wigforss har gitt ut elementære innføringer i pedagogisk statistikk, mens Cramér, Fog og Reiersøl går langt videre. Mindre matematikk finner en i Guilfords *Fundamental Statistics*, men til gjengjeld er denne boka direkte skrevet for psykologer og skolefolk, og behandler derfor målings- og vurderingsproblemer innen et større område enn det som omfatter skolekarakterer. Nylig er kommet en billigbok av Moroney som er innholdsrik og ser sympatisk ut.

Som en vil ha sett, har jeg ikke på noe sted tatt med stoff fra *tidsskrifter*. Jeg har gjort dette med hensikt, enda jeg er klar over at der i artikler, notiser og oppgaver i de elementære matematiske tidsskrifter kan ligge atskillig stoff som lærerne med fordel kan utnytte. At det ikke er så lett å følge med her, er en annen sak. Men det må ikke avholde matematikklæreren fra stadig å være på vakt etter alt som kan fornye, forbedre og på annen måte berike hans undervisning. Det er jo så at matematikk er et av de eldste skolefag, og at faget naturlig innbyr til en relativt stabil og fast undervisning. Og nyvinninger innen matematisk forskning faller gjerne langt utenfor skolematematikens lille eksistensområde. Dette må ikke føre til at vi slår oss til ro med de foreliggende leseplaner, lærebøker og undervisningsmetoder. Så utbytterik er ikke vår undervisning idag, at det er grunn til å innta en slik holdning.

BOKLISTE

- O. P. ARVESEN: *Gi meg et fast punkt*. Oslo 1950.
 O. P. ARVESEN: *Mennesker og matematikere*. Oslo 1940.
 ROUSE BALL & COXETER: *Mathematical Recreations and Essays*. London 1942.
 E. T. BELL: *Men of Mathematics*. Pelican A 276-277. (Også oversatt til dansk og svensk.)
 B. BRANDFORD: *A Study of Mathematical Education*. Oxford 1921.
 S. BUNDEGAARD: *Tallene og den abstrakte Algebras Grundbegreber*. København 1942.
 L. N. H. BUNT: *De leerstof van ons Wiskunde-onderwijs*. Groningen 1949.
 BUTLER & WREN: *The Teaching of Secondary Mathematics*. New York 1941.
 G. E. ST. L. CARSON: *Essays on Mathematical Education*. London 1913.
 E. COLERUS: *Von Pythagoras bis Hilbert*. Wien 1937.
 P. LA COUR: *Historisk Matematik*. Aarhus 1942.
 COURANT & ROBBINS: *What is Mathematics?* New York 1943.

- H. CRAMÉR: *Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar*. Uppsala 1949.
Euklids Elementer I-II. København 1936.
- D. FOG: *Introduktion i matematisk Statistik*. København 1949.
- A. FOUCHÉ: *La pédagogie des mathématiques*. Paris 1952.
- GODFREY & SIDONS: *The Teaching of Elementary Mathematics*. Cambridge 1948.
- J. P. GUILFORD: *Fundamental Statistics in Psychology and Education*. New York 1950.
- J. HADAMARD: *Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton 1946.
- K.-G. HAGSTROEM: *Sagan om de tio tecken*. Stockholm 1931.
- K.-G. HAGSTROEM: *Talens vetenskap*. (I Kunskap, Universitet för alla, IV.)
- G. H. HARDY: *A Mathematicians Apology*. Cambridge 1941.
- P. HEEGAARD: *Um trideling av vinkelen*. Oslo 1935.
- J. HJELMSLEV: *Tre Foredrag om Geometriens Grundlag*. København 1923.
- L. HOGGEN: *Mathematics for the Million*. London 1936. (Også oversatt til de nordiske språk.)
- E. HØIGAARD: *Pedagogisk statistikk i grunntrekk*. Oslo 1944.
- TH. JOHANSEN: *Matematikken i oldtiden*. Oslo 1945.
- S. JOHANSSON: *Matematiken i Finlands skola*. Helsingfors 1938.
- F. KLEIN: *Elementarmathematik von höherem Standpunkt aus I-III*. (Grundl. der math. Wissensch. XIV-XVI.) Berlin 1924-25.
- T. KRAUGERUD: *Ett år matematikk*. Oslo 1952.
- C. A. LAISANT: *La mathématique*. Paris 1907.
- W. LIEDLOFF: *Beiträge zur Psychologie der mathematischen Schulbegabung*. Langensalza 1928.
- W. LIETZMANN: *Das Wesen der Mathematik*. Braunschweig 1949.
- W. LIETZMANN: *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen*. Göttingen 1951.
- W. LIETZMANN: *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Bd. I, 2. Aufl., Leipzig 1926; Bd. II, 3. Aufl., 1933; Bd. III, 1924.
- W. LIETZMANN: *Methodik des mathematischen Unterrichts. Der Lehrstoff*. Heidelberg 1951.
- W. LIETZMANN: *Schulreform und mathematischer Unterricht*. Heidelberg 1949.
- W. LIETZMANN: *Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule*. Leipzig 1925.
- Mathematics in General Education*. New York 1940.
- Mathematisch-Physikalische Bibliothek*. Teubner, Leipzig & Stuttgart.
- Bd. 2/3. LIETZMANN: *Der pythagoreische Lehrsatz*.
- Bd. 12. BEUTEL: *Die Quadratur des Kreises*.
- Bd. 23. ROHRBERG: *Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes*.
- Bd. 25. LIETZMANN: *Riesen und Zwerge im Zahlenreich*.
- Bd. 32. TIMERDING: *Der goldene Schnitt*.
- Bd. 68. BREIDENBACH: *Das delische Problem*.
- Bd. 78. BREIDENBACH: *Dreiteilung des Winkels*.
- (Uten nr.) LIETZMANN: *Wo steckt der Fehler?*
- R. MEINANDER: *Matematisk begävnig hos gossar och flickor*. Helsingfors 1943.
- M. J. MORONEY: *Facts from Figures*. Pelican A 236.
- The National Council of Teachers of Mathematics. Yearbooks*. Washington D. C.
1. *A Survey of Progress in the Past Twenty-Five Years*.
 2. *Curriculum Problems in Teaching Mathematics*.
 3. *Selected Topics in Teaching of Mathematics*.
 4. *Significant Changes and Trends in the Teaching of Mathematics throughout the World since 1910*.
 5. *The Teaching of Geometry*.
 6. *Mathematics in Modern Life*.

7. *The Teaching of Algebra.*
 8. *The Teaching of Mathematics in the Secondary School.*
 9. *Relational and Functional Thinking in Mathematics.*
 10. *The Teaching of Arithmetic.*
 11. *The Place of Mathematics in Modern Education.*
 12. *Approximate Computation.*
 13. *The Nature of Proof.*
 14. *The Training of Mathematics Teachers.*
 15. *The Place of Mathematics in Secondary Education.*
 16. *Arithmetic in General Education.*
 17. *A Source Book of Mathematical Applications.*
 18. *Multi-Sensory Aids in the Teaching of Mathematics.*
 19. *Surveying Instruments.*
 20. *The Metric System of Weights and Measures.*
 21. *The Learning of Mathematics.*
- O. NEUGEBAUER: *The Exact Sciences in Antiquity.* København 1951.
- E. P. NORTROP: *Riddles in Mathematics.* London 1945. (Dansk: *Genvej til Matematik.* København 1950. Svensk: *Matematiska gåtor och huvudbry.* Stockholm 1951.)
- T. PERCY NUNN: *The Teaching of Algebra (including Trigonometry).* London 1919.
- N. E. NØRLUND: *Videnskabelige Causerier.* København 1923.
- Penguin Books.* London.
- Bd. 260. WILLIAMS & SAVAGE: *The Penguin Problem Book.*
- Bd. 478. WILLIAMS & SAVAGE: *The Second Penguin Problem Book.*
- Bd. 540. WILLIAMS & SAVAGE: *The Third Penguin Problem Book.*
- Bd. 866. LUCEY: *A Problem a Day.*
- PT 2. PHILLIPS: *Something to think about.*
- J. PETERSEN: *Metoder og Teorier til Løsning af geometriske Konstruktionsopgaver.* 8. Udg., København 1952.
- H. J. PIHL: *Undervisningsvejledning i Regning for Mellemsskolen.* København 1924.
- H. POINCARÉ: *Science et méthode.* Paris 1908.
- G. PÓLYA: *How to solve it.* Princeton 1946.
- Que-sais-je?* Presses universitaires de France. Paris.
- Bd. 42. BOLL: *Les étapes des mathématiques.*
- Bd. 109. MARCHAL: *Histoire de la géométrie.*
- Bd. 198. TATON: *Histoire du calcul.*
- Bd. 225. BOLL & REINHART: *Les étapes de la logique.*
- Bd. 378. DELACHET: *L'analyse mathématique.*
- RADEMACHER & TOEPLITZ: *Von Zahlen und Figuren.* Berlin 1930.
- A. H. READ: *A Signpost to Mathematics.* London 1951.
- O. REIERSØL: *Sannsynlighetsregning og statistisk induksjon.* Oslo 1941.
- Reorganization of Mathematics in Secondary Education.* New York 1923.
- Reports prepared for The Mathematical Association.* Bell, London.
- The Teaching of Algebra in Schools.*
- The Teaching of Arithmetic in Schools.*
- The Teaching of Calculus in Schools.*
- The Teaching of Geometry in Schools.*
- A Second Report on the Teaching of Geometry in Schools.*
- The Teaching of Mechanics in Schools.*
- The Teaching of Trigonometry in Schools.*

B. RIBSSKOG: *Regning*. Oslo 1935.

Sammlung Götschen. Walter de Gruyter, Berlin.

Bd. 51. RINGLEB: *Mathematische Formelsammlung*.

Bd. 226. HOFFMAN: *Geschichte der Mathematik I*.

W. W. SAWYER: *Mathematicians Delight*. Pelican A 121.

W. W. SAWYER: *Mathematics in Theory and Practice*. London 1948.

SCHUBERT-FITTING: *Mathematische Mussestunden*. Berlin 1953.

H. SIEGVALD: *Experimentella undersökningar rörande intellektuella könsdifferenser II*. Lund 1944.

C. E. SJÖSTEDT: *Geometri och geometriundervisning*. Lund 1948.

C. E. SJÖSTEDT: *Icke-euklidisk geometri*. Stockholm 1945.

C. E. SJÖSTEDT: *Kurvor och kurvkonstruktioner*. Stockholm 1948.

C. E. SJÖSTEDT: *Projektiv geometri*. Stockholm 1946.

W. L. SUMNER: *The Teaching of Arithmetic and Elementary Mathematics*. Oxford 1938.

R. TAMBS LYCHE: *Om reelle tall*. Oslo 1951.

H. TIETZE: *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus der alten und neuen Zeit I-II*. München 1949.

O. TOEPLITZ: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I*. (Grundl. der math. Wissensch. LVI.) Berlin 1949.

J. TROPFKE: *Geschichte der Elementar-Mathematik I-VII*. Berlin.

WEBER-WELLSTEIN: *Enzyklopädie der Elementarmathematik I-III*. Leipzig.

L. WETHE: *Feilregning*. Oslo 1941.

F. WIGFORSS: *Matematisk statistik för pedagoger*. Stockholm 1938.

J. W. A. YOUNG: *The Teaching of Mathematics*. New York 1924.

H. G. ZEUTHEN: *Mathematikens Historie. Oldtiden*. Ved O. Neugebauer. København 1949.

ELEMENTARY PROOF OF A UNIQUENESS THEOREM FOR POSITIVE HARMONIC FUNCTIONS

M. TIDEMAN

The following theorem is well known:

THEOREM. *If $u(x, y)$ is a positive harmonic function for $y > 0$, and if $u(x, 0) = 0$, then $u(x, y) \equiv c \cdot y$ for some constant $c > 0$.*

We here give a proof which involves only two elementary concepts: the *maximum principle* and *inversion with respect to a circle*. We first briefly indicate how these do in fact follow directly from the definition: $u(x, y)$ is harmonic in the region D , if it satisfies in D the differential equation

$$(1) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

INVERSION WITH RESPECT TO A CIRCLE: Let (fig. 1) C be a circle of radius p , and let (r, θ) be polar coordinates with origin at the centre of C . The two points

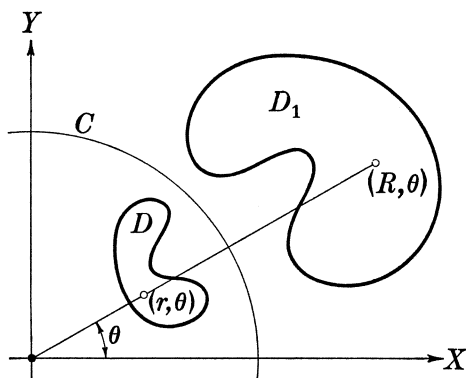


Fig. 1

(r, θ) and (R, θ) are said to be *inverse points* with respect to C , if $r \cdot R = p^2$. Let D and D_1 be two regions such that every point (x, y) of D is the inverse of some point (X, Y) of D_1 , and conversely. Suppose that $u(X, Y)$ is harmonic in D_1 , and define the function $u_1(x, y)$ in D by

$$(2) \quad u_1(x, y) = u(X, Y), \quad (X, Y) \text{ inverse to } (x, y).$$

Applying (1) and inversion relationships we find that $\Delta u_1 = 0$, i.e. the function $u_1(x, y)$ is harmonic in D .

THE MAXIMUM PRINCIPLE: *If the boundary values of a harmonic function are non-negative, then the function is non-negative in the region.*

We suppose that the region, D , is bounded, and use the following familiar proof. Suppose that there are points of D where $u(x, y)$ is negative, and consider the function $v(x, y) = u(x, y) - Ax^2$, $A > 0$. Since D is

bounded and $u(x, y)$ is non-negative on the boundary of D , it is obvious that $v(x, y)$ has a local minimum at some point (x_0, y_0) of D if A is chosen small enough. This implies that $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2A \geq 0$ and $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geq 0$ at the point (x_0, y_0) . If these two inequalities are added, we find

$\Delta u \geq 2A > 0$ at (x_0, y_0) . This contradiction of (1) proves that $u(x, y)$ cannot be negative at any point of D .

We return to the theorem and first prove:

LEMMA 1. *If $u(x, y)$ is a positive harmonic function for $y > 0$, $u(x, 0) = 0$ and $0 < y_1 < y_2$, then*

$$(3) \quad u(x_1, y_1) \leq u(x_2, y_2)$$

for all x_1 and x_2 .

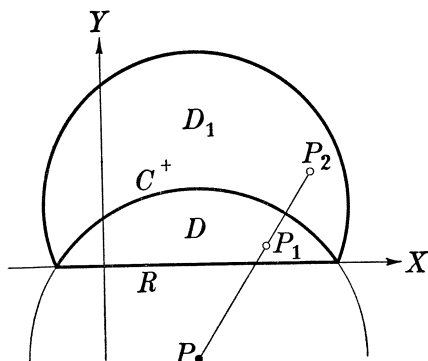


Fig. 2

PROOF. Let (fig. 2) P be a point below the x -axis on the straight line through $P_1, (x_1, y_1)$, and $P_2, (x_2, y_2)$. Let C be a circle with centre at P , such that P_1 and P_2 are inverse points with respect to C . The arc C^+ of C in $y \geq 0$ and the section R of the x -axis within C form the boundary of a region D . Let D_1 be the region of the inverse points to the points of D , and define in D the function $u_1(x, y)$ by (2). Since $u(X, Y)$ is a positive harmonic function in D_1 , $u_1(x, y)$ has the same properties in D . The function $U(x, y) = u_1(x, y) - u(x, y)$ is harmonic in D , is zero on C^+ and is positive on R . Hence $U(x, y)$ is non-negative in D , and in particular

$$0 \leq U(x_1, y_1) = u_1(x_1, y_1) - u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1),$$

which proves the lemma.

If δ is any positive number (less than y), it follows from (3) that

$$u(x_1, y - \delta) \leq u(x_2, y) \leq u(x_1, y + \delta) \text{ for all } x_1, x_2 \text{ and } y.$$

If we let δ tend to zero, the continuity of $u(x, y)$ implies that $u(x_1, y) = u(x_2, y)$ for all x_1 and x_2 , i.e.

LEMMA 2. *$u(x, y)$ considered as a function of x is a constant $u(y)$ for any fixed y .*

By (1) the function $u(y)$ satisfies the differential equation $\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$ with the boundary value $u(0) = 0$. The only solution is $u(y) = c \cdot y$, where c is a constant, and the theorem is proved.

HEXAEDERNS DIAGONALSNITT OCH GAUSS' FÖRDELNINGSKLOCKA

K.-G. HAGSTROEM

Om diagonalen i en kub tages till enhet (kanten alltså $1/\sqrt{3}$ och volymen $1/\sqrt{27}$), blir ytinnehållet $A(z)$ av ett mot diagonalen vinkelrätt snitt på avståndet z från kubens centrum givet genom ett par enkla funktioner av andra graden, nämligen

$$\begin{aligned} \text{för } 0 < z < \tfrac{1}{6}: A(z) &= \sqrt{3}(\tfrac{1}{4} - 3z^2), \quad A'(z) = -6\sqrt{3} \cdot z, \\ \text{för } \tfrac{1}{6} < z < \tfrac{1}{2}: A(z) &= \tfrac{3}{2}\sqrt{3}(\tfrac{1}{2} - z)^2, \quad A'(z) = -3\sqrt{3}(\tfrac{1}{2} - z). \end{aligned}$$

I skarven vid $z = \frac{1}{6}$ äro derivatorna lika, och den sammansatta funktionen företer en inflexion, när man växlar över från den ena parabeln till den andra. Den förra grenen beräknas som skillnaden mellan en större liksidig triangel och tre mindre likaledes regelbundna hörntrianglar; den senare grenen är enklare. En skiss av skärningarna i vertikal och horisontell projektion återgives i fig. 1. Den klassiska konstruktionen börjar med att dela diametern i den omskrivna sfärens vertikalprojektion i tre lika delar, varigenom sexhörningens omskrivna cirkel och hela horisontalprojektionen blir lätta att rita.

Går man med z tvärs igenom kuben från $-\frac{1}{2}$ till $+\frac{1}{2}$, får man en symmetrisk funktion $A(z)$, som företer en misstänkt likhet med en *gauss-klocka*. I fig. 2 har den betraktade funktionen åskådliggjorts i något modifierad form. Inflexionspunkterna ha förlagts i punkterna ± 1 , varvid den nya variabeln t således valts $= 6 \cdot z$. Hexaederkanten blir nu $6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ och volymen $24/\sqrt{3}$. Det nya ytinnehållet av skärningen på avståndet t från centrum blir $36 \cdot A(\frac{1}{6}t)$. Om denna funktion divideras med totalvolymen, får man den funktion, som framställles i fig. 2. Man sätter

$$\begin{aligned} \text{för } -3 < t < -1: \quad A(t) &= \tfrac{1}{16}(3+t)^2, & A'(t) &= \tfrac{1}{8}(3+t), \\ \text{för } -1 < t < +1: \quad A(t) &= \tfrac{1}{8}(3-t^2), & A'(t) &= -\tfrac{1}{4}t, \\ \text{för } +1 < t < +3: \quad A(t) &= \tfrac{1}{16}(3-t)^2, & A'(t) &= -\tfrac{1}{8}(3-t), \end{aligned}$$

med $A(t) = A(-t)$ och $A(t) = 0$ utanför det angivna området

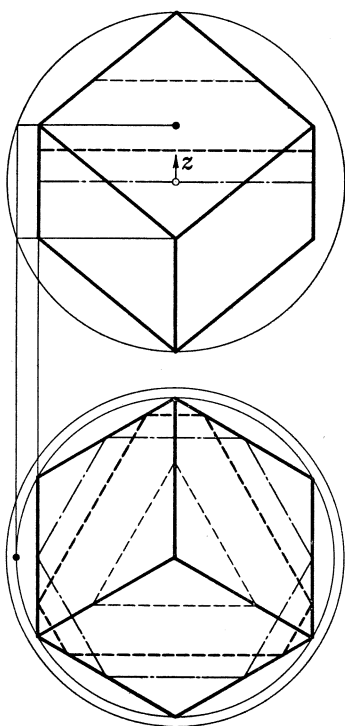


Fig. 1. Hexaederns plana skärningar vinkelrätt mot en huvuddiagonal. Vertikal- och horisontalprojektion. Omskrivna sfären är synlig som den yttre cirkeln i båda projectionerna.

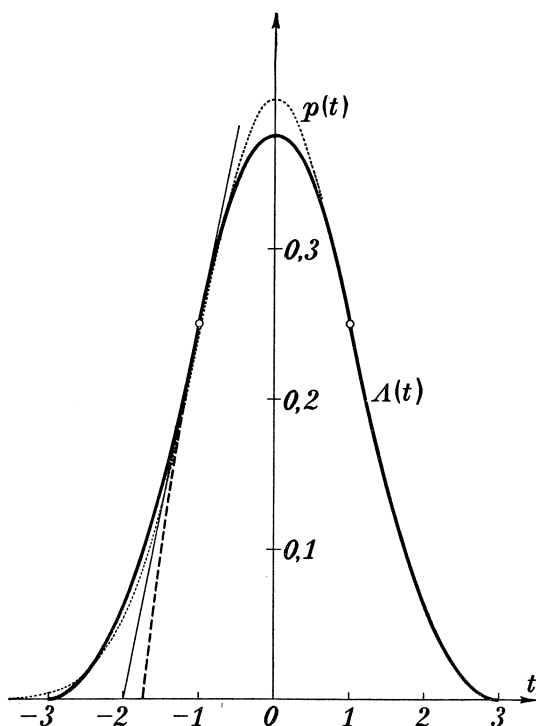


Fig. 2. Funktionen $A(t)$. Streckad kurva: den inre grenens fortsättning. Prickad kurva: exakt gaussklocka.

$-3 < t < +3$. Man konstaterar, att man har $\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) dt = 1$, men även $\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) t^2 dt = 1$, varför spridningstalet överensstämmer med avståndet från origo till inflexionspunkterna, liksom fallet är för gaussklockan. Man finner

$$\begin{aligned} \text{för } 0 < t < 1: & \quad \int_0^t A(t) dt = \frac{3}{8} t (1 - \frac{1}{8} t^2), \\ \text{för } 1 < t < 3: & \quad \int_0^t A(t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} (3-t)^3. \end{aligned}$$

Gaussklockan $p(t)$ med spridningen 1 ger upphov till en bekant integral

$$\int_0^t p(t) dt \text{ med } p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$

vilken förekommer i sannolikhets-teoriens tillämpningar. Integralen kan med ganska stor tillnärmelse ersättas av vår integral $\int_0^t A(t) dt$, såsom framgår av följande värden:

t	$\int_0^t A(t) dt$	$\int_0^t p(t) dt$
0	0	0
0,3	0,1114	0,1179
0,5	0,1823	0,1915
1,0	0,3333	0,3413
1,5	0,4270	0,4332
2,0	0,4792	0,4773
2,5	0,4974	0,4938
3,0	0,5	0,4987

Överensstämmelsen, som får betecknas som mer än medelmåttig, är ingen tillfällighet, i det att funktionen $A(t)$ är en naturlig approximation. Den kan ge oss en liten »västficksmodell« av den s. k. elementarfels-hypotesen.

Låt oss alltså antaga, att man observerat en »stokastisk« eller »statistisk« variabel τ och funnit en gaussklocka med spridningstalet s . Om det funna medeltalet av observationerna är $\bar{t}$, kan detta skrivas

$$\tau = \bar{t} \text{ (disp. } s) \text{ med } \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_1^n t_i \text{ och } s^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (t_i - \bar{t})^2,$$

varvid man som bekant brukar anse det styrkt, att i formeln för s^2 antalet observationer n bör utbytas mot $n-1$, något som vid stora n kan försummas och varpå vi här icke skola ingå. För att förklara den erhållna »beläggningen« på t -axeln vilja vi identifiera den med en sådan diagonalbeläggning med funktionen $A(t)$, som vi just studerat, men där diagonallängden är $6 \cdot s$ i stället för 6, och där man valt $\bar{t}$ till origo. På grund av likformigheten blir sidan i den motsvarande hexaedern $2s\sqrt{3}$, och hexaederns kanter kunna beskrivas med koordinaterna x_1, x_2, x_3 , av vilka var och en varierar i intervallet $\langle -s\sqrt{3}, +s\sqrt{3} \rangle$, då koordinat-systemets origo är kubens centrum. Nu hava de punkter, som bilda den plana skärningen $A(t)$ för ett visst t , koordinater x_1, x_2 och x_3 sammanhängande genom relationen

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} (x_1 + x_2 + x_3)$$

(ekvationen för ett plan). Härav synes åter, att den observerade statistiska variabeln τ kan anses som summan av talet $\bar{t}$ och tre statistiska variabler eller »avvikelser« ξ_1, ξ_2 och ξ_3 , vardera given genom en rektangulär fördelning

$$\xi_j = 0 \text{ (diff. } s),$$

varmed vi vilja förstå, att sannolikheten för att den faller i intervallet $\langle x_j, x_j + dx_j \rangle$ är $= dx_j \cdot \frac{1}{2s}$ för $-s < x_j < +s$ och eljest $= 0$.

Detta synes vara en lättillgänglig illustration av den berömda elementarfelshypotesen, enligt vilken den konstaterade regelbundenheten i avvikelserna vid ett stort antal observationer av en fysikalisk storhet kan förklaras genom att antaga dessa vara sannolikhetsteoretiska summor av ett antal enkla elementarfel. Det är själva regelbundenheten i dessa fels frekvenser och i deras sammansättning enligt sannolikhetsteoriens definition av »oberoende» variabler, som synes axiomatisk och i stånd att förklara den observerade lagbundenheten hos felfördelningen, eljest ganska paradoxal. Förklaringen går tillbaka till Gauss själv, som skrivit åtskilligt om minstakvadratmetoden, som ännu är läsvärt, — detta ej alls sagt för att förringa den moderna statistikens utredningar av sammanhangen under ganska allmänna (ehuru kanske ännu ej tillräckligt allmänna) förutsättningar. Men det är värt att lägga märke till att man vid observationsfelens förklaring genom elementarfelshypotesen ej behöver gå till »de stora talens lag». Redan när antalet antagna elementarfel, m , är 3, som hos vår lilla modell, är regelbundenheten i skeendet tillräcklig för att förklara formen på felkurvan med praktiskt tillräcklig noggrannhet. Givetvis blir tillnärmelsen till gaussklockan något bättre vid större m än 3, men åskådligheten av kubens diagonalsnitt upphör när man passerar tre dimensioner.

EN ELEMENTÆR (3,1)-TRANSFORMATION

FR. FABRICIUS-BJERRE

Lad der være givet en parabel α . Fra et punkt P uden for denne lægges tangenterne til parabeln; røringspunkterne kaldes T_1 og T_2 . I disse punkter lægges nu normalerne til parabeln, og deres skæringspunkt betegnes P' . Til hvert punkt P uden for parabeln svarer på denne måde et punkt P' , og, som vi nedenfor skal se, kan koordinaterne til P' udtrykkes rationalt ved koordinaterne til P . Der findes derfor en rational transformation, der fører punkterne P over i punkterne P' .

I det følgende vil vi nærmere undersøge denne rationale transformation. Det viser sig, at punktet P' er billede af flere punkter P . Den modsatte afbildning, der fører P' over i P , er således ikke rational. Dersom P gennemløber en kurve eller et område, vil også P' gennemløbe en kurve eller et område, og omvendt. Vi vil særlig undersøge forbindelsen mellem tilsvarende kurver og områder i den foreliggende afbildning.

Vi lægger et koordinatsystem XY således, at parabeln α får ligningen $y^2 = 4ax$. Koordinaterne for P og P' kaldes henholdsvis (x, y) og (x', y') . Røringspunkterne T_1 og T_2 er bestemt ved deres ordinater t_1 og t_2 . Ligningen for en parabeltangent i et punkt med ordinaten t er som bekendt

$$(1) \quad 4ax - 2ty + t^2 = 0,$$

og for normalen i punktet fås ligningen

$$(2) \quad 2tx + 4ay = \frac{t^3}{2a} + 4at.$$

Erstattes i hver af de to ligninger ordinaten t med t_1 og t_2 , og løser man de to tangentligninger med hensyn til x og y , og ligeledes de to normal-ligninger, finder man for koordinaterne til P og P' følgende udtryk:

$$(3) \quad x = \frac{t_1 t_2}{4a}, \quad y = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

$$(4) \quad x' = 2a + \frac{t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2}{4a}, \quad y' = -\frac{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}{8a^2}.$$

Ved hjælp af (3) og (4) finder vi x' og y' som funktioner af x og y , d. v. s. transformationsligningerne

$$(5) \quad x' = 2a + \frac{y^2 - ax}{a}, \quad y' = -\frac{xy}{a}.$$

Mens den givne definition kun tillader os at afbilde punkter P uden for parabeln α , giver (5) en rational afbildning af samtlige punkter P i *hele planen* på punkterne P' eller, som man ofte udtrykker det, af xy -planen på $x'y'$ -planen. Det er denne udvidede afbildning, vi i det følgende undersøger, og som altså for $y^2 > 4ax$ har den angivne geometriske betydning.

Dersom punktet P ligger inden for parabeln α , er der ingen simpel geometrisk forbindelse mellem P og dets billede P' , idet vi dog bemærker, at det ved hjælp af koordinatudtrykkene (5) er muligt at konstruere P' , dersom P foreligger.

Til et punkt P på α , givet ved ordinaten $y = t$ (og abscissen $x = \frac{t^2}{4a}$)

svarer ifølge (5) et punkt P' med koordinater $x' = 2a + \frac{3t^2}{4a}$ og $y' = -\frac{t^3}{4a^2}$.

Til parabeln α svarer da i afbildningen en kurve med ligningen

$$(6) \quad 27ay'^2 = 4(x' - 2a)^3.$$

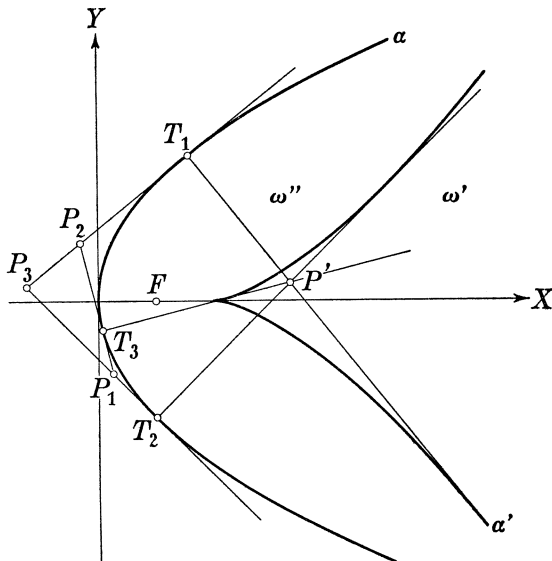


Fig. 1

Denne kurve, der betegnes α' , er parablens *evolut*; den kaldes også den Neil'ske semikubiske parabel. Kurven har en spids i punktet $(2a, 0)$ med den positive X -akse som tangent; den er symmetrisk om X -aksen og består af to konvekse buer, der strækker sig i det uendelige. Kurven deler $x'y'$ -planen i to områder, der betegnes ω' og ω'' (fig. 1).

For at undersøge, om der findes noget punkt P , der falder sammen med det tilsvarende P' , sættes i (5) $x = x'$ og $y = y'$, hvorefter man finder den ene (reelle) løsning $(a, 0)$. Vi ser da, at *parablens brændpunkt er det eneste punkt, der afbildes på sig selv*.

Dersom P gennemløber en *ret linie* l , vil P' ligge på en kurve l' , hvis art afhænger af beliggenheden af l . Er l parallel med X -aksen (med ligningen $y = c$), finder man ved indsætning i (5), at l' er en *ny ret linie*, hvis hældning er $\frac{c}{a}$. Selve X -aksen vil afbildes på sig selv, således at hvert punkt P svarer til det symmetriske punkt P' med hensyn til brændpunktet.

Er l ikke parallel med X -aksen, kan den fremstilles ved en ligning af formen $x = py + q$. Indsættes udtrykket for x i (5), fremkommer for x' og y' parameterfremstillinger i y af 2. grad, således at l' i almindelighed er en *parabel*. Dennes akse vil være vinkelret på l . Er l specielt en lodret linie, får parabeln X -aksen som symmetriakse. Til ledelinien $x = -a$ for parabeln α svarer parabeln $y'^2 = a(x' - 3a)$. Idet tangenterne fra punkter på ledelinien til α er vinkelrette på hinanden, vil den nævnte parabel være det geometriske sted for de punkter P' , for hvilke to normaler til α er vinkelrette på hinanden.

Dersom l specielt er tangent til parabeln α , i hvilket tilfælde betingelsen $ap^2 + q = 0$ er opfyldt, vil l' ikke være en parabel, men udarte til normalen til α i tangentens røringspunkt.

Lad derefter P gennemløbe en kurve k af n^{te} orden med ligningen $f(x, y) = 0$. Ligningen $g(x', y') = 0$ for den til k svarende kurve k' findes ved elimination af x og y mellem ligningen $f(x, y) = 0$ og de to ligninger (5). Graden af ligningen $g(x', y') = 0$ kan findes ved at opsøge antallet af skæringspunkter mellem k' og den rette linie $Ax' + By' + C = 0$. Man finder disse punkter som billederne af skæringspunkterne mellem k og det keglesnit, der fremkommer ved i ovenstående ligning for den rette linie at erstatte x' og y' med udtrykkene (5). Der bliver således $2n$ (reelle eller imaginære) skæringspunkter, d.v.s. kurven k' er af $2n^{\text{te}}$ orden. Dersom k har speciel beliggenhed i forhold til den givne parabel α , kan ordenen reduceres (smlgn. ovenfor).

Til et keglesnit k (specielt en cirkel) vil således i almindelighed svare en (rational) kurve k' af 4. orden.

Vi skal nu bestemme det eller de punkter P , der har et givet billede P' . Vi tænker os da (x', y') givet og skal bestemme (x, y) af ligningerne (5). Løses den første af ligningerne med hensyn til x , og indsættes udtrykket for x i den anden, fås til bestemmelse af ordinaten y ligningen

$$(7) \quad y^3 - (x' - 2a)ay + a^2y' = 0.$$

Til et givet P' svarer da 3, 2 eller 1 punkt P , eftersom (7) har 3, 2 eller 1 reel rod.

Skal (7) have *netop* 2 rødder, d.v.s. en enkelt og en dobbeltrod, må denne sidste også tilfredsstille den ligning, der fremkommer ved at differentiere venstre side af (7) med hensyn til y , d.v.s. ligningen

$$(8) \quad 3y^2 - (x' - 2a)a = 0.$$

Eliminerer man y mellem (7) og (8), finder man stedet for det punkt P' , til hvilket der kun svarer to punkter P . Eliminationen sker lettest ved at flytte leddet a^2y' i (7) over på højre side og derefter kvadrere ligningen. Ved anvendelse af (8) fremkommer da ligningen

$$(6) \quad 27ay'^2 = 4(x' - 2a)^3,$$

d.v.s. kurven α' . Heraf følger videre for de to områder ω' og ω'' , i hvilke α' deler $x'y'$ -planen, at eftersom P' ligger i det ene område eller i det andet, vil der til P' svare 3 eller 1 punkt P .

For nu at bestemme hvilket område, der giver 3 punkter P , og hvilket, der kun giver eet punkt P , betragtes normalerne til α fra punktet P' . Ordinaterne til fodpunkterne for disse findes af ligning (2), idet x og y erstattes med x' og y' , hvorved man får

$$(9) \quad t^3 - 4(x' - 2a)at - 8a^2y' = 0.$$

Sættes i denne ligning $t = -2y$, overføres den i (7), hvoraf følger, at når P' varierer, vil (7) og (9) samtidig have 3, 2 eller 1 reel rod.

For punkter P' i ω' kan man åbenbart lægge 3 tangenter til α' (d.v.s. 3 normaler til α). Kaldes fodpunkterne T_1 , T_2 og T_3 , vil tangenterne til α i disse punkter bestemme en trekant, hvis vinkelspidser P_1 , P_2 og P_3 er de til P' svarende punkter (fig. 1). Vi har da:

Til et punkt P' i ω' , på α' eller i ω'' vil svare henholdsvis 3, 2 eller 1 punkt P .

Det kan dog bemærkes, at dersom P' ligger i *spidsen* for kurven α' ,

altså i punktet $(2a, 0)$, giver (7) den 3-dobbelte rod $y = 0$, d.v.s. dette punkt svarer kun til punktet $(0, 0)$ i xy -planen.

Lad os nu antage, at P' ligger i området ω' , således at P' svarer til de 3 punkter P_1, P_2 og P_3 med ordinaterne y_1, y_2 og y_3 (rødderne i (7)), og lad fodpunkterne T_1, T_2 og T_3 for normalerne fra P' til α have ordinaterne t_1, t_2 og t_3 (rødderne i (9)). Ifølge (7) har man da

$$(10) \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

d.v.s. *tyngdepunktet* for trekant $P_1P_2P_3$ ligger på X -aksen. Af (9) findes tilsvarende

$$(11) \quad t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

hvoraf følger, at også *tyngdepunktet* for fodpunktstrekanten ligger på akse for parablen α . Det er bekendt — og bevises let —, at denne betingelse også er tilstrækkelig til, at normalerne til en parabel går gennem samme punkt.

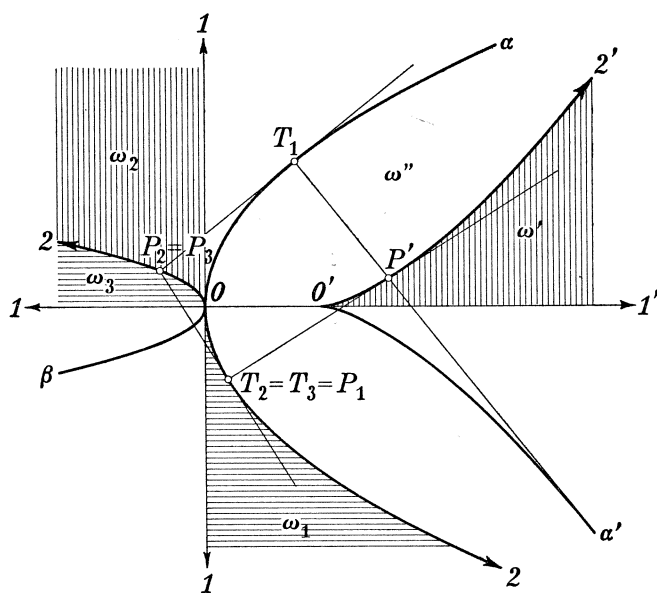


Fig. 2

Af anden ligning i (3) i forbindelse med (11) følger, at der mellem ordinaterne for fodpunkterne T_1, T_2 og T_3 og de »modstående« vinkelspidser P_1, P_2 og P_3 gælder ligningen $y_1 = -\frac{1}{2}t_1$ og analoge. Dette stemmer også med den angivne forbindelse mellem ligningerne (7) og (9).

Lad derefter P' ligge på kurven α' (fig. 2). To af normalerne fra P' til α vil da falde sammen, og i det fælles fodpunkt $T_2 = T_3$ vil også punktet P_1 ligge. Lad den tredje normal fra P' til α have fodpunktet T_1 . Tangenterne i P_1 og T_1 vil da skære hinanden i det punkt, i hvilket både P_2 og P_3 falder. Ifølge den ovenfor angivne forbindelse mellem ordinatorne til punkterne P_1 og T_1 vil det geometriske sted for $P_2 = P_3$ være skæringspunktet for tangenter til parablen, hvis røringspunkter har ordinatorne t og $-2t$. Ved indsætning heraf i (3) fås parameterfremstillingen $(x, y) = \left(-\frac{t^2}{2a}, -\frac{t}{2}\right)$, hvoraf ligningen

$$(12) \quad y^2 = -\frac{a}{2}x.$$

Denne parabel betegnes β og kaldes den til afbildningen hørende *Jacobi'ske* kurve.

Dersom P' gennemløber α' , vil P_1 gennemløbe parablen α , mens $P_2 = P_3$ vil gennemløbe parablen β . Fjerner P' sig i det uendelige (i retningen $2'$), vil P_1 gå i retning 2 på α og $P_2 = P_3$ i retning 2 på β (se fig. 2).

Ligger endelig P' i området ω'' , vil der til P' svare eet punkt P , og man kan fra P' lægge een normal til α . Det bemærkes, at det til P' svarende punkt P ikke ligger på tangenten til α i normalens fodpunkt.

Vi er nu i stand til at give en beskrivelse af, hvorledes de forskellige områder i $x'y'$ -planen afbildes på områder i xy -planen. Det bemærkes først, at af ligning (5) følger, at X -aksen ($y' = 0$) afbildes på linierne $x = 0$ og $y = 0$ således, at dersom punktet P' fjerner sig i det uendelige mod punktet $1'$ på X -aksen, vil de tilsvarende tre punkter P fjerne sig i det uendelige i de tre på fig. 2 angivne retninger 1 på de to akser.

Det er herefter klart, at dersom P' gennemløber den over X -aksen liggende del $0'1'2'$ af området ω' , vil de tre punkter P_1 , P_2 og P_3 gennemløbe de tre områder 012 , der på fig. 2 er betegnet ω_1 , ω_2 og ω_3 . Dersom P' går ind på buen $0'2'$ af kurven α' , vil P_1 ligge på buen 02 af parablen α og $P_2 = P_3$ på buen 02 af parablen β . Går P' endelig ind i det over X -aksen liggende område ω'' , vil P_1 ligge i det af halvlinien $01'$ og parabelbuen 02 begrænsede område i 4. kvadrant, mens P_2 og P_3 er forsvundet. — Anvendes sluttelig symmetri om X -aksen, er dermed hele afbildningen beskrevet.

Vi vil herefter undersøge, hvorledes kurver i $x'y'$ -planen afbildes på kurver i xy -planen.

Dersom P' løber på den rette linie $Ax' + By' + C = 0$, vil de tilsvarende punkter P ifølge (5) løbe på kurven

$$(13) \quad Ay^2 - Bxy - Aax + 2Aa^2 + Ca = 0,$$

der i almindelighed er en *hyperbel* med den ene asymptote parallel med X -aksen og den anden vinkelret på den givne linie. Er linien parallel med X -aksen, fremkommer en ligesidet hyperbel, og er linien parallel med Y -aksen, fremstiller (13) en *parabel*. Endelig kan man vise, at hvis linien specielt er normal til parablen α , vil (13) fremstille *to rette linier*, dels tangenten til α i normalens fodpunkt T , dels linien gennem T parallel med X -aksen.

Lægger man to rette linier gennem P' , vil dertil svare to keglesnit (13), der vil have de tre til P' svarende punkter P_1 , P_2 og P_3 fælles og tillige begge gå gennem parablens uendelig fjerne punkt. Til liniebundtet gennem P' vil svare bundtet af keglesnit gennem de 4 nævnte punkter, og til samtlige linier i $x'y'$ -planen svarer det ved (13) bestemte næt af keglesnit, det såkaldte *transformationsnæt*.

Af (5) fremgår videre, at der til en algebraisk kurve k' af n^{te} orden i $x'y'$ -planen i almindelighed svarer en kurve k af $2n^{\text{te}}$ orden i xy -planen. Er ligningen for den givne kurve $f(x', y') = 0$, findes ligningen for den tilsvarende kurve ved indførelse af udtrykkene for x' og y' i ovenstående ligning. Som ovenfor nævnt overføres en ret linie i et keglesnit. En cirkel afbildes i en (cirkulær) kurve af 4. orden.

Det kan indtræffe, at kurven k spaltes i kurver af lavere orden. Går man således ud fra en kurve af p^{te} orden i xy -planen, overføres denne i almindelighed i en kurve af $2p^{\text{te}}$ orden i $x'y'$ -planen, og denne kurve føres atter tilbage i en kurve af ordenen $4p$, der da består dels af udgangskurven, dels af en kurve af ordenen $3p$. Som eksempel nævner vi, at parablen α blev overført i den kubiske kurve α' , der igen svarede til kurverne α og β , tilsammen en kurve af 6. orden, idet β skal regnes dobbelt.

Vi betragter nu en vilkårlig parabel γ i xy -planen, der har X -aksen som akse og Y -aksen som toppunktstangent; den fremstilles ved en ligning af formen

$$(14) \quad \mu y^2 = 4ax.$$

Indsættes som på s. 102 udtrykkene $y = t$ og $x = \frac{\mu t^2}{4a}$ i (5), fås en parameterfremstilling for den tilsvarende kurve γ' , og ved elimination af t fås ligningen

$$(15) \quad \lambda \cdot 27ay'^2 = 4(x' - 2a)^3,$$

hvor λ findes af formlen

$$(16) \quad 27\lambda\mu^2 = (4 - \mu)^3.$$

Til hver parabel i bundtet (14) svarer således en kubisk kurve i bundtet (15).

Omvendt vil der til enhver kurve i bundtet (15) i xy -planen svare en kurve af 6. orden, hvis ligning kan opløses i 3 ligninger af typen (14), af hvilke mindst een fremstiller en (reel) parabel, idet der til en given værdi af λ ifølge (16) svarer 3 værdier af μ , hvoraf mindst een er reel. Dette kan også påvises, idet man i (15) indsætter værdierne for x' og y' fra (5).

Dersom $\lambda < 1$, vil den tilsvarende kurve γ' ligge i området ω'' , og til γ' vil i xy -planen svare een reel parabel (14), for hvilken $\mu > 1$, og som ligger inden for parablen α . Hvis $\lambda = 1$, fås af (16) værdierne $\mu = 1, -8, -8$, svarende til at α' afbildes i kurverne α og β , den sidste regnet dobbelt. Er endelig $\lambda > 1$, fås tre reelle værdier for μ , og til γ' svarer da tre reelle parabler i bundtet (14). Vi fremhæver disse resultater:

Enhver semikubisk parabel γ' i bundtet (15) overføres i en kurve af 6. orden, hvis ligning opløses i 3 ligninger af formen (14). Kurven γ' afbildes i 3, 2 eller 1 parabel, eftersom den ligger i ω' , på α' eller i ω'' .

Dersom et punkt P' gennemløber en i ω' liggende kurve γ' tilhørende bundtet (15), vil de tre til P' svarende punkter P_1, P_2 og P_3 følgelig gennemløbe hver sin af de til γ' svarende parabler γ_1, γ_2 og γ_3 i bundtet (14). For hver parabels vedkommende er afbildningen på γ' enentydig.

Vi vil nu nærmere undersøge forbindelsen mellem punkterne P_1, P_2 og P_3 samt mellem de tre normaler $P'T_1, P'T_2$ og $P'T_3$ fra P' til parablen α , idet P' gennemløber γ' .

Under denne variation af P' vil ifølge (15) størrelsen $x' - 2a$ være proportional med $(y')^{\frac{2}{3}}$. Ligning (7), der bestemmer ordinaterne for punkterne P , får da formen

$$y^3 + by(y')^{\frac{2}{3}} + cy' = 0,$$

hvor b og c er konstanter. Sættes her

$$y = u(y')^{\frac{1}{3}},$$

fås efter bortforkortning af y' ligningen

$$u^3 + bu + c = 0,$$

der har 3 reelle rødder u_1, u_2 og u_3 . For punkterne P finder vi da de tre ordinater y_1, y_2 og y_3 bestemt ved

$$(y_1, y_2, y_3) = (y')^{\frac{1}{3}} (u_1, u_2, u_3),$$

d.v.s. ordinaterne er proportionale med proportionalitetsfaktoren $(y')^{\frac{1}{3}}$,

eller, anderledes udtrykt, forholdene $y_1:y_2:y_3$ er konstante under variation af P' . Vi har da vist:

Når P' gennemløber kurven γ' , vil punkterne P_1 , P_2 og P_3 gennemløbe de tilsvarende parabler således, at punkternes ordinater er proportionale.

Som tidligere fremhævet (ligning (10)) vil summen af de tre ordinater i enhver stilling være lig med nul.

Forbindelsen mellem ordinaterne t_1 , t_2 og t_3 for fodpunkterne T og for punkterne P er, som nævnt s. 105, givet ved $y_1 = -\frac{1}{2}t_1$ og analoge. Heraf følger, at også fodpunkterne T vil have proportionale ordinater, når P' løber på γ' .

Lad nu normalerne $P'T_1$, $P'T_2$ og $P'T_3$ danne vinklerne v_1 , v_2 og v_3 med X -aksen. Vi har da $\operatorname{tg} v_1 = -\frac{2t_1}{4a}$ og analoge, hvoraf vi finder:

Når P' gennemløber kurven γ' , vil de tre normaler fra P' til α danne sådanne vinkler med X -aksen, at deres tangenser er proportionale, og summen af disse tangenser er lig med nul.

Betragter man en linie gennem P' parallel med X -aksen som en fjerde (uegentlig) normal til α , følger af ovenstående, at dobbeltforholdet for de 4 normaler fra P' til α er konstant, når P' gennemløber kurven γ' .

Til slut bemærkes, at jeg i et tidligere arbejde: *An elementary (6,1)-transformation*, Mat. Tidsskr. B, 1952, s. 1–13, har foretaget en undersøgelse, der svarer til den nærværende, idet parablen α er erstattet med en ellipse eller en hyperbel, beliggende i en sædvanlig eller en elliptisk eller hyperbolsk plan. En del af de her opstillede resultater kan opfattes som specielle tilfælde af sætninger vedrørende ellipsen eller hyperblen, men den i ovennævnte afhandling benyttede fremgangsmåde tillader ikke en direkte specialisering, således at det har været nødvendigt at foretage den foreliggende særlige undersøgelse for parablen.

Jeg gør opmærksom på, at de på de sidste sider nævnte kurvebundter (14) og (15) nøje svarer til de af *Bauer* og *Clebsch* undersøgte bundter af kurver af 6. orden (l.c. s. 8–9), og at relationen (16) mellem λ og μ er den samme som ligning (9,3) i den citerede afhandling, idet blot μ er erstattet med $-\mu$.

NÎMES-ROSEN

VIGGO BRUN

I byen *Nîmes* i Sydfrankrike finner en mange minner fra romertiden, deriblant et ganske godt bevart Dianatempel. På en stor sprukken marmorblokk i dette templet ser man en dekorasjon, hugget i marmor, som er av påfallende matematisk karakter.



I en stor sirkel er inntegnet syv regulære sekskanter, tredve kvadrater og tjuefire likesidete trekanten. Hertil kommer seks rombelignende firkanter langs ytterkanten.

En spør seg uvilkårlig om denne figuren skulle ha noe å gjøre med forsøkene på å utføre sirkelens kvadratur.

Jeg tror svaret bør være at figuren kanskje nok bare har dekorativ betydning, men at figurens opprinnelse trolig kan skyldes arbeidet med å løse problemet om sirkelens kvadratur. Det er nemlig slett ikke noen nærliggende tanke at det skal være mulig å konstruere en figur som denne. Det tyder på adskillig matematisk innsikt. Nå er det jo vel kjent at romerne var slette matematikere. Men forbindelsen med grekerne var alltid livlig. Det ville derfor være av stor interesse om det kunne konstateres at dekorasjonen allerede har vært brukt i Grekenland eller andre

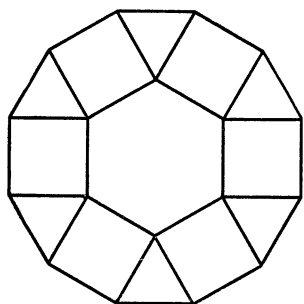


Fig. 1

av oldtidens kulturland. Det kunne også være av interesse å vite om motivet har vært brukt i middelalderen ved konstruksjon av rosevinduer i kirker.

Jeg kan tenke meg at opprinnelsen til denne figuren er følgende: Man har gjort et forsøk på å kvadrere sirkelen ved å tegne en figur som fig. 1. Den er en regulær tolvkant som inneholder en regulær sekskant, seks kvadrater og seks likesidete trekanter. Hvis en stiller seg den oppgave å bestemme π ved å omskrive denne tolvkanten med en sirkel og innskrive i den en sirkel finner en forøvrig

$$3 < \pi < 12(2 - \sqrt{3}) < 3,22.$$

Hvis man nå hadde gjort seg fortrolig med denne figuren kunne man nok komme på den idé å lage seks lignende figurer utenom og man ville få nettopp Nîmes-rosen om man omskrev figuren med en sirkel og utfylte mellomrommene mellom de ytre tolvkantene og sirkelen med rombelignende firkanter (fig. 2).

En kan forøvrig legge merke til at om en unnlater å omskrive med en

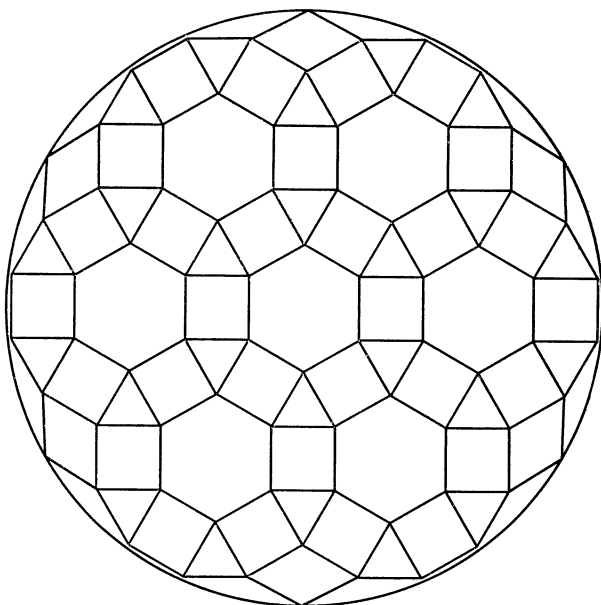


Fig. 2

sirkel og erstatter de nevnte firkantene med romber, som har vinklene 60° og 120° , og så tilføyer tolv likebenete trekanter (t), som har vinkler 15° og 150° , vil det bli lett å beregne arealet av den attenkantete polygonen som blir dannet. Den kommer til å inneholde tretti kvadrater (K) og syttiåtte likesidete trekanter (T) (om sekskantene og rombene deles opp i slike trekanter) og tolv av trekantene t . Setter en kvadratsiden lik $2a$ får en

$$K = 4a^2, \quad T = \sqrt{3} \cdot a^2, \quad t = a^2.$$

Sammenligner en denne attenkanten med en sirkel med radius $(4+3\sqrt{3})a$ får en

$$\pi \approx 3,158.$$

Sammenligner en attenkanten med en sirkel med radius $a\sqrt{1+(4+3\sqrt{3})^2}$ får en

$$\pi \approx 3,121.$$

Som en ser er den første av de to valgte radier lik avstanden fra rosens sentrum til midtpunktet av en av de ytterste kvadratsider, og den annen av de valgte radier er lik avstanden fra rosens sentrum til et hjørne i en av de ytterste kvadratsider.

Men det er vel neppe sannsynlig at en slik utregning har vært utført. De ytre kvadratsidene i Nîmes-rosen er visstnok synlige som korder, men mellom kvadratene synes det ikke å ha vært trukket korder til den store sirkelen. Dertil kommer at de rombe-lignende figurer i virkeligheten ikke blir romber, så en nøyaktig beregning vil ikke falle så lett som ovenfor. Men selv om en slik regning kan ha ligget fjern, kan man ha hatt interesse av å utfylle sirkelen med kjente, lettoverskuelige polygoner. Som en ser er det lett å konstruere Nîmes-rosen med passer og linjal.

NOEN EGENSKAPER VED DEN BINOMIALE FORDELINGSFUNKSJON

FRITZ C. HOLTE

I sannsynlighetsregning og matematisk statistikk spiller den såkalte binomiale fordelingsfunksjon en viktig rolle. Betyr p et positivt tall < 1 , er denne funksjonen gitt ved

$$f_x = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

der n er et naturlig tall og x et slikt helt tall at $0 \leq x \leq n$.

Betyr m et slikt helt tall at $f_m \geq f_x$ for alle x , slik at f_m blir den største verdi f_x antar, kaller vi m for et *typetall* for funksjonen f_x . Nå ser en lett at

$$\frac{f_{x+1}}{f_x} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q}$$

der vi har satt $q = 1-p$. Derfor blir $f_{x+1} \geq f_x$ så lenge $(n-x)p \geq (x+1)q$, dvs. for

$$x \leq np - q = (n+1)p - 1.$$

Er altså $(n+1)p$ et helt tall, blir $f_{x+1} = f_x$ for $x = (n+1)p - 1$ og funksjonen får de to typetallene $(n+1)p - 1$ og $(n+1)p$. Er derimot $(n+1)p$ ikke noe helt tall, får vi ett eneste typetall m som blir det største hele tall mindre enn $(n+1)p$, altså

$$(n+1)p - 1 < m < (n+1)p.$$

Vi går i det følgende ut fra at $(n+1)p$ ikke er heltallig, slik at typetallet m er entydig bestemt av n og p .

Videre vil vi i det følgende anta $p < \frac{1}{2}$; i så fall følger av $m < (n+1)p$ at $n+1 > 2m$, altså $n \geq 2m$; setter vi $r = n-m$, blir altså $r \geq m$. I rekken av funksjonsverdier $f_0, f_1, \dots, f_n$ vil altså $f_0, f_1, \dots, f_m$ være voksende, mens $f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ er avtakende. Vi kaller $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$ for rekkens *kortsiden* og $f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_n$ dens *langsiden*. Det er m ledd i kortsiden og $r = n-m \geq m$ ledd i langsiden. Vi vil i denne artikkelen søke å besvare dette spørsmålet: Kaller en summen av leddene i kortsiden K , summen av leddene i langsiden L , hvilken av de tre relasjonene $K \lessgtr L$ består da for gitte n og p ? [1]

Vi definerer størrelsene K_i og L_i ved

$$K_i = f_{m-i}, \quad (i = 0, 1, \dots, m); \quad L_i = f_{m+i}, \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

(altså spesielt $K_0 = L_0 = f_m$). Da er

$$K = \sum_{i=1}^m K_i = \sum_{i=1}^m f_{m-i}, \quad L = \sum_{i=1}^r L_i = \sum_{i=1}^r f_{m+i}.$$

Vi beviser nå følgende setninger:

Setning 1: Dersom $K_1 < L_1$, er $K_i < L_i$ for $i = 2, 3, \dots, m$.

Av

$$\frac{K_{i+1}}{K_i} = \frac{m-i}{r+i+1} \cdot \frac{q}{p}, \quad \frac{L_{i+1}}{L_i} = \frac{r-i}{m+i+1} \cdot \frac{p}{q}, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1)$$

følger

$$\begin{aligned} \frac{K_{i+1}}{L_{i+1}} &= \frac{K_{i+1}}{K_i} \cdot \frac{K_i}{L_i} \cdot \frac{L_i}{L_{i+1}} = \frac{m-i}{r-i} \cdot \frac{m+1+i}{r+1+i} \cdot \frac{K_i}{L_i} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{r(r+1) - m(m+1)}{r(r+1) - i(i+1)}\right) \cdot \frac{r(r+1)}{m(m+1)} \cdot \frac{K_1}{L_1} \cdot \frac{K_i}{L_i}. \end{aligned}$$

Nå er $r \geq m$. For $r = m$ gir dette

$$\frac{K_{i+1}}{L_{i+1}} = \frac{K_1}{L_1} \cdot \frac{K_i}{L_i},$$

og for $r > m$ vil faktoren i parentesen avta med voksende i ; den er derfor mindre for $i > 0$ enn for $i = 0$, og derfor blir

$$\frac{K_{i+1}}{L_{i+1}} < \frac{K_1}{L_1} \cdot \frac{K_i}{L_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Er derfor $K_1 < L_1$, følger ved induksjon at $K_i < L_i$ for $i = 2, \dots, m$.

Setning 2: Av $K_1 < L_1$ følger $K < L$.

Da alle f_x er positive og $r \geq m$ er dette en umiddelbar følge av setning 1.

Setning 3: Vi lar m og $n \geq 2m$ være fritt valgte naturlige tall. Er da p et tall i det åpne intervallet $\left\langle \frac{m}{n+1}, \frac{m+1}{n+1} \right\rangle$, vil m være typetallet for f_x .

Videre vil forholdet $\frac{K}{L}$ være en avtakende funksjon av p i dette intervallet.

Av $\frac{m}{n+1} < p < \frac{m+1}{n+1}$ følger jo $(n+1)p-1 < m < (n+1)p$, så m blir typetallet for f_x . Videre blir

$$K = \sum_{i=1}^m K_i = p^m q^r \sum_{i=1}^m \binom{n}{m-i} \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

$$L = \sum_{i=1}^r L_i = p^m q^r \sum_{i=1}^r \binom{n}{m+i} \left(\frac{p}{q}\right)^i.$$

Da $\frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1$ avtar med voksende p , følger straks at den første av summene til høyre avtar og den andre vokser med voksende p ; altså avtar $\frac{K}{L}$ med voksende p .

Setning 4: For $p = \frac{m+\frac{1}{2}}{n+1}$ er $K < L$.

Da det er forutsatt at $p < \frac{1}{2}$ er $r > m$. Av

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{m(m+1)}{r(r+1)} \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{\frac{(2r+1)^2}{r(r+1)}}{\frac{(2m+1)^2}{m(m+1)}}, \quad \left(q = 1-p = \frac{r+\frac{1}{2}}{n+1}\right)$$

følger $K_1 < L_1$ fordi funksjonen $\frac{(2x+1)^2}{x(x+1)}$ avtar med voksende x for $x > 0$. Etter setning 2 er da $K < L$.

Setning 5. For et bestemt p_0 i intervallet $\left\langle \frac{m}{n}, \frac{m+\frac{1}{2}}{n+1} \right\rangle$ er $K = L$. En har $K > L$ dersom p ligger i intervallet $\left\langle \frac{m}{n+1}, p_0 \right\rangle$ og $K < L$ dersom p ligger i intervallet $\left\langle p_0, \frac{m+1}{n+1} \right\rangle$.

Etter Frisch [2] er $K > L$ dersom $p < \frac{1}{2}$ og np er et helt tall. Altså er $K > L$ for $p = \frac{m}{n}$. Påstanden er da en følge av dette og setningene 3 og 4, i det K og L jo er positive, kontinuerlige funksjoner av p .

NOTER

- [1] Dette spørsmålet er blitt reist av professor RAGNAR FRISCH, jfr. »Spesielle fordelingslover, hefte I», memorandum fra Universitetets Sosialøkonomiske Institutt (Oslo) 1/10 1951, s. 45–46. For det spesialtilfellet at np er heltallig, er spørsmålet besvart i FRISCH's artikkel »Solution d'un problème du calcul des probabilités» i Skandinavisk Aktuarietidskrift 1924.
- [2] Beviset er gitt i den nevnte artikkelen i Skandinavisk Aktuarietidskrift 1924.

BOKMELDINGER

J. E. HOFMANN: *Geschichte der Mathematik*. Erster Teil: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. (Sammlung Götschen 226.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1953. 200 S.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 120.)

I forordet sier forfatteren: »Die in andern Einführungswerken eingehend geschilderte antike Mathematik ist sehr gedrängt dargestellt, um die interessante, jedoch bisher zu wenig beachtete Entwicklung der Mathematik im Mittelalter und in der Renaissance etwas ausführlicher behandeln zu können«.

Forfatteren har bare hatt 160 små sider til sin rådighet. Det er derfor klart at fremstillingen av den antikke matematikk er blitt svært kortfattet. Bokens tyngdepunkt ligger i de følgende kapitler: Mittelalter, Humanismus, Frühbarock og dessuten i den store litteraturfortegnelsen på over 40 sider. Denne fortegnelsen er ytterst verdifull og en blir høylig imponert over forfatterens opplysning i forordet: »Es wird kaum eines der zitierten Originalwerke geben, das ich nicht selbst in der Hand hatte«.

Ned gjennom tidene har matematikken forsøkt å kultivere den klare tanke. Det vekslende hell man har hatt med dette avspeiler vel ikke bare matematikkens historie, men til en viss grad hele kulturens. Det er således neppe en tilfeldighet at Cardano og Tartaglia var samtidige av Tizian og Michelangelo. Når en ser katedralen i Chartres, hvor både Pytagoras og Aristoteles er hugget i stein sammen med kirkens hellige menn, får en et inntrykk av den tidsepoken — et inntrykk som forsterkes ved lesningen av Hofmanns bok. Han forteller om den logiske skole i Chartres, hvor oldtidens store ble dyrket — ikke minst Aristoteles. De viktigste representanter for denne skolen var Thierry og Gilbert de la Porrée. De levet nettopp på den tid da den praktfulle katedralen ble reist!

For matematikkens historie er også studiet av de relativt døde perioder av betydning. Ved lesningen av Hofmanns bok får en inntrykk av at den lange perioden fra Diofant til Cardano ikke var så død som en gjerne forestiller seg det. En må derfor være Hofmann takknemlig for at han har gjort oss delaktig i sin store kunnskapsmengde om dette tidsavsnitt.

Det kan ikke unngås at man under lesningen ofte tenker: gid forfatteren hadde hatt større plass til sin rådighet, så han hadde kunnet gjøre fremstillingen mindre summarisk.

Viggo Brun

W. LIETZMANN: *Wo steckt der Fehler?* Dritte, erw. Aufl. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953. 185 S., 121 Fig. Kart. DM 5.80.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 68.)

Det er 40 år siden denne boka kom ut første gang, og siden har den vært en flittig lest bok av matematikklærere og skoleelever i og utenfor Tyskland. Selv så jeg den første gang som gymnasiast, og jeg husker ennå hvor fengslet jeg ble av den, og min iver etter å finne feilene.

Ellers hadde førsteutgaven to forfattere, foruten Lietzmann den danske matematikklærer magister V. Trier som døde i 1916.

Den nye utgaven er revidert og utvidet, og har på sine nesten 200 sider fått med utrolig mye. Jeg har inntrykk av at forfatteren har tatt med alt som overhodet fortjener å komme med. Der er ikke noe jeg savner, men jeg kan nok tenke meg at enkelte ville finne at noen av eksemplene er litt for naive, trivielle, kunstige eller »bløte«. Hvordan det nå er, så er boka uten tvil en gullgrube for lærerne hva for et trinn i skolen de enn underviser på. Jeg minner i den forbindelse om at i I. Johanssons oppgaver ved universitetet i Oslo inngår en kritikkoppgave som bl. a. går ut på at studentene skal finne feil etc. i noen fingerte oppgaveløsninger eller bevis.

Wo steckt der Fehler har først et avsnitt om optiske bedrag og feilslutninger. Her er mange eksempler fra presse og bøker, men særlig interesse har en rekke feilaktig løste oppgaver fra skolen. Det er ikke alltid så lett å se feilen. På den andre siden finner jeg det ikke betenkelig, sett fra et pedagogisk synspunkt, at elever får seg forelagt slike oppgaveløsninger; jeg tror ikke det vil føre til uheldige assosiasjoner.

Neste avsnitt behandler Trugschlüsse, dvs. feilslutninger satt opp bevisst, ikke i god tro som de før nevnte. Her møter en kjente og ukjente eksempler, mange av dem er så verdifulle at de i grunnen burde være obligatoriske i undervisningen.

Tilslutt kommer et avsnitt med tallrike eksempler fra infinitesimalregningen. Her er det, i motsetning til hva ellers er tilfellet, tilføyd noen forklarende ord om feilene. Det dreier seg her, mener forf., om feil av mer komplisert art, hvor eleven for ofte ville gi opp om han ikke hadde en veiviser. Også dette avsnittet har mange morsomme eksempler hvorav dog en del nok faller utenfor de nordiske skolers arbeidsområde.

På fig. 44 forekommer bokstaven D to ganger. Ellers synes der å være

lest særdeles god korrektur — lett har det sikkert ikke vært. Det skulle etter dette forhåpentlig fremgå at jeg gir Wo steckt der Fehler min beste anbefaling, den vil uten tvil belære og more både elever og lærere.

Kay Piene

MOTTATTE BØKER

D. N. de G. Allen: *Relaxation methods*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1954. 10 + 257 pp. sh. 53/6.

Linear algebraic equations 1–23 * Framework problems 24–38 * Ordinary differential equations 39–53 * Laplace's and Poisson's equations 54–73 * Normal-gradient boundary conditions 74–85 * The quasi-plane-potential equation 86–104 * The biharmonic equation 105–124 * Simultaneous differential equations 125–144 * Triangular nets 145–151 * Eigenvalue problems (algebraic equations) 152–166 * Eigenvalue problems (differential equations) 167–185 * Internal boundaries and interfaces 186–202 * Problems involving unknown boundaries 203–217 * Nonelliptic differential equations 218–231 * Three-dimensional relaxation 232–236 * Appendix 237–246 * Bibliography 247–251 * Index 253–257.

Georg Aumann: *Reelle Funktionen*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 68.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954. 8 + 416 S., 22 Fig. DM 56.00, ganzl. DM 59.60.

Mengen 7–23 * Ordnungen 23–60 * Verbände 60–82 * Räume 83–134 * Reelle Punktfunktionen 134–196 * Funktionen in Produkträumen 196–213 * Reelle Funktionen einer reellen Variablen 213–274 * Masstheorie 275–363 * Positive lineare Funktionale 363–405 * Literatur 406–408 * Namen- und Sachverzeichnis 409–414 * Zeichenverzeichnis 415–416.

W. Blaschke: *Analytische Geometrie*. Zweite Auflage. Verlag Birkhäuser, Basel, 1954. 190 S., 67 Fig. Brosch. SFr. 16.65, ganzl. SFr. 19.60.

Grundbegriffe, Vektoren, Matrizen 11–38 * Kugeln 39–57 * Stäbe 58–82 * Trägheitsmomente 83–90 * Quadriken 91–107 * Konfokale Quadriken 108–132 * Formelsammlung 133–185 * Namen- und Sachweiser 186–190.

W. Blaschke: *Projektive Geometrie*. Dritte, erweiterte Auflage. Verlag Birkhäuser, Basel, 1954. 197 S., 71 Fig. Brosch. SFr. 16.65, ganzl. SFr. 19.60.

Einleitung 11–20 * Homogene Zeiger, Kollineation, Korrelation 21–37 * Doppelverhältnis, Staudts Hauptsatz 38–48 * Kegelschnitte 49–99 * Liniengeometrie 100–116 * Quadriken 117–137 * Nichteuklidische Geometrie 138–164 * Vierflächpaare von Möbius 165–184 * Waben und Gruppen 185–192 * Namen- und Sachweiser 193–197.

Friedrich Böhm: *Versicherungsmathematik I*. Dritte Auflage. (Sammlung Götschen 180.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1953. 151 S. DM 2.40.

Literaturverzeichnis 7 * Der Zinsfuß als erste Rechnungsgrundlage 8–24 * Die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage 24–67 * Die Prämienreserve 67–107 * Die Kosten als dritte Rechnungsgrundlage 107–126 * Die Versicherung verbundener Leben 126–143 * Anhang 143–149 * Sachregister 150–151.

Gordon Fuller: *Analytic geometry*. Addison-Wesley Publ. Co., Cambridge (Mass.), 1954. 10 + 205 pp. \$ 3.85.

Functions and graphs 1–16 * Fundamental concepts and formulas 17–30 * The straight line 31–44 * Transformation of coordinates 45–55 * The second degree equation 56–82 * The slope of a curve 83–97 * Transcendental functions 98–106 * Equations of curves and curve fitting 107–119 * Polar coordinates 120–140 * Parametric equations 141–150 * Space coordinates and surfaces 151–166 * Vectors and planes and lines 167–186 * Appendix 187–194 * Answers to problems 195–201 * Index 202–205.

A. E. Green and W. Zerna: *Theoretical elasticity*. Clarendon Press (Geoffrey Cumberlege), Oxford, 1954. 14 + 442 pp. sh. 50/–.

Mathematical preliminaries 1–52 * General theory 53–79 * Finite deformation: solution of special problems 80–113 * Small deformations superposed on finite deformation 114–148 * Infinitesimal theory 149–183 * Theory of plane strain 184–214 * Plate theory 215–253 * Plane problems for isotropic bodies 254–323 * Plane problems for aeolotropic bodies 324–374 * General bending theory of shells 375–394 * Theory of shallow shells 395–406 * General theory of membrane shells 407–411 * Theory of cylindrical shells 412–424 * Shells of revolution 425–437 * Author index 439 * Subject index 440–442.

Harriet Griffin: *Elementary theory of numbers*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1954. 12 + 203 pp. sh. 36/–.

The fundamental laws 1–13 * The linear diophantine equation 14–24 * Properties of integers 25–52 * Properties of congruences 53–65 * The solution of congruences 66–87 * The theorems of Fermat and Wilson and the Möbius function 88–97 * On belonging to an exponent 98–124 * Indices 125–133 * Quadratic residues 134–157 * Some famous problems 158–176 * Polynomials 177–189 * Partitions 190–195 * Bibliography 197–198 * Index 199–203.

Wolfgang Haack: *Darstellende Geometrie, I und II*. (Sammlung Götschen 142, 143.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1954. 110 und 129 S., 117 und 129 Fig. Je DM 2.40.

Band I: Einleitung 5–10 * Die wichtigsten Darstellungsmethoden 10–30 * Punkte, Geraden, Ebenen 30–61 * Schnittkonstruktionen von Ebenen und Geraden 61–78 * Ebenflächige Körper 78–96 * Affinität 96–110.

Band II: Zylinder, Kegel, Kugel 5–45 * Durchdringungen von Zylindern, Kugeln, Kegeln 45–76 * Drehflächen und Schraubenflächen 76–99 * Kotierte Projektionen 99–129.

J. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik*. Erster Teil: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. (Sammlung Götschen 226.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1953. 200 S.

(Anmeldtd i NMT, dette hefte, s. 116.)

Allgemeiner Überblick 5-8 * Vorgriechische Mathematik 9-20 * Die Griechen (etwa 800 v. bis 600 n. Chr.) 21-48 * Mittelalter (etwa 500 bis 1400 n. Chr.) 49-82 * Humanismus (etwa 1300 bis 1580 n. Chr.) 83-114 * Frühbarock (etwa 1550 bis 1650 n. Chr.) 115-155 * Namen- und Schriftenverzeichnis 156-198 * Sachverzeichnis 199-200.

Lancelot Hogben: *Matematik for Millioner*. 4. rev. udg. På dansk ved Iver Gudme, med bistand af Poul W. Marke og Hans Tornehave. Gyldendal, København, 1954. 635 s. Hæftet (to bind) da. kr. 32.50, eet hel-lærrebind kr. 42.00, eet vælskbind kr. 47.00.

Matematikken, civilisationens spejl 9-29 * Målingen begynder eller matematikken i forhistorisk tid 30-59 * Størrelsens, ordenens og tallets grammatik eller oversættelse af talsprog 60-99 * Geometri uden gråd eller hvad kan man bruge geometrien til? 100-171 * Fra krise til kryds og tværs eller aritmetikens begyndelsesgrunde 172-210 * Verdens størrelse eller hvad vi kan bruge trigonometrien til 211-260 * Intets daggry eller hvordan algebraen opstod 261-316 * Jorden rundt eller sfæriske trekant 317-359 * Reformationstidens geometri eller hvad er kurver? 360-420 * Aritmetikens kollektivisering eller hvordan logaritmerne blev opdaget 421-467 * Vækstens og formens aritmetik eller infinitesimalregning 468-528 * Skakbrættets og kortspillets algebra 529-562 * Statistik eller befolkningsaritmetik 563-603 * Tillæg 604-616 * Tabeller 617-621 * Svar på nogle af opgaverne 622-625 * Register 626-635.

Gerhard Kowalewski: *Einführung in die Determinantentheorie*. Vierte, verbesserte Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1954. 8 + 348 S. Ganzl. DM 30.00.

Historische Bemerkungen 1-5 * Definition der n -reihigen Determinante 6-22 * Einfachste Eigenschaften der Determinanten 23-31 * Unterdeterminanten 32-45 * Systeme linearer Gleichungen 45-64 * Multiplikation von Matrizen und Determinanten 65-77 * Determinanten, deren Elemente Minoren einer andern sind 77-111 * Symmetrische Determinanten 111-132 * Schiefsymmetrische Determinanten 132-156 * Orthogonale Determinanten 156-176 * Resultanten und Diskriminanten 176-186 * Lineare und quadratische Formen 186-219 * Funktionaldeterminanten 220-242 * Wronskische und Gramsche Determinanten 242-253 * Einige geometrische Anwendungen der Determinanten 254-279 * Die linearen Integralgleichungen 279-326 * Elementarteilertheorie 326-342 * Literaturnachweise und Anmerkungen 343-345 * Sachregister 346-348.

Adele Leonhardy: *College mathematics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1954. 9 + 459 pp. \$ 4.90.

Introduction to the student 1-5 * What is mathematics? 6-35 * The algebra of numbers 36-87 * Numbers in exponential form 88-111 * Measurement and com-

putation 112–147 * The comparison of quantities 148–169 * Functional relationships 170–227 * Variation 228–243 * The rate of change of a function 244–291 * Exponential and logarithmic functions 292–313 * Periodic functions 314–375 * Simple statistical methods 376–409 * The conclusion 410–418 * Appendix 419–432 * Answers 433–450 * Index 451–459.

J. Meixner und F. W. Schäfke: *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 71.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954. 12+414 S., 29 Fig. DM 49.00, ganzl. DM 52.60.

Einleitung 1–13 * Die Separation der Schwingungsgleichung in elliptischen Koordinaten und ihren Grenzfällen 14–37 * Aus der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung 37–48 * Über Parameterabhängigkeit bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 48–52 * Über Eigenwertprobleme mit einem Parameter 52–62 * Eigenwertprobleme mit zwei Parametern I–III 62–89 * Über dreigliedrige lineare Rekursionen 89–93 * Eine Verallgemeinerung der HANKELschen asymptotischen Reihen 93–98 * Die MATHIEUSche Differentialgleichung. Allgemeines 98–105 * Die Funktionen $\lambda_\nu(h^2)$ und $m_\nu(z; h^2)$ 105–131 * Die Stabilitätskarte. Charakteristische Kurven 131–165 * Die Funktionen $M_\nu^{(j)}(z; h)$ 165–171 * Das Additionstheorem 171–176 * Weitere Reihenentwicklungen und Integralrelationen 176–187 * Die Funktionen ganzer Ordnung 187–205 * Ergänzungen 206–221 * Die Sphäroiddifferentialgleichung. Allgemeines 221–230 * Die Sphäroidfunktionen $ps_n^m(z; \gamma^2)$ 230–247 * Über Zylinder- und Kugelfunktionen 247–259 * Der charakteristische Exponent ν 260–266 * Die Funktionen $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$ und $\tilde{Qs}_\nu^\mu(z; \gamma^2)$ [$\nu \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$] 266–283 * Die Funktionen Ps_ν^μ , Qs_ν^μ , ps_ν^μ , qs_ν^μ und $S_\nu^{\mu(j)}$ [$\nu \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$] 283–300 * Ein Additionstheorem 300–306 * Weitere Reihenentwicklungen und Integralrelationen 306–316 * Ergänzungen 316–324 * Mechanische und elektrische Schwingungen mit periodisch veränderlichen Parametern 324–335 * Systeme mit räumlich periodischer Struktur 335–343 * Mechanische und akustische Eigenschwingungen 343–356 * Elektromagnetische Eigenschwingungen 356–365 * Abstrahlungsprobleme 365–370 * Beugungsprobleme 370–381 * Wellenmechanische Probleme 381–392 * Literaturverzeichnis 393–408 * Verzeichnis der wichtigsten Funktionssymbole 409–410 * Namen- und Sachverzeichnis 411–414.

R. Rothe: *Höhere Mathematik V, Formelsammlung*. Dritte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 43.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954. 124 S., 74 Fig. Kart. DM 4.80.

Einige Formeln und Lehrsätze der Elementarmathematik 7–17 * Grundbegriffe über Veränderliche und Funktionen 17–20 * Die elementaren Funktionen 20–27 * Differentialrechnung 28–36 * Integralrechnung 36–48 * Unendliche Reihen 49–55 * Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen 56–62 * Komplexe Zahlen, Veränderliche und Funktionen 62–69 * Differentialgeometrie ebener Kurven 69–76 * Vektoren im Raum 76–84 * Krumme Flächen und krummlinige Koordinaten des Raumes 84–89 * Linienintegrale im Raume und mehrfache Integrale 89–101 * Gewöhnliche Differentialgleichungen reeller Veränderlicher 101–118 * Register 119–124.

Werner Schmeidler: *Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum*. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 46.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954. 6 + 89 S. Kart. DM 7.80.

Der Hilbertsche Folgenraum 1-7 * Abstrakte Fassung des Hilbertschen Raumes 8-10 * Orthonormalsysteme in § 11-19 * Übungen und Ergänzungen 20-24 * Begriff und Haupteigenschaften des beschränkten linearen Operators in §. Biorthogonalsysteme 25-33 * Vollstetige Operatoren in § 33-38 * Die Fredholmschen Sätze für vollstetige Operatoren 38-41 * Hermitesche und normale vollstetige Operatoren 41-45 * Positiv definite beschränkte Hermitesche Operatoren und ihre Quadratwurzel 45-49 * Weiteres über vollstetige Operatoren 49-57 * Übungen und Ergänzungen 57-59 * Spektraltheorie beschränkter Hermitescher Operatoren 59-71 * Spektraltheorie beschränkter normaler Operatoren 71-73 * Nichtbeschränkte Hermitesche Operatoren 73-77 * Beispiele und Anwendungen 77-86 * Literaturverzeichnis 87 * Register 88-89.

K. Schwidofsky: *Grundriss der Photogrammetrie*. Fünfte, erweiterte Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954. 8 + 282 S., 179 Fig., 14 Taf. Anhang: Luftbild, Stereobild, farb. Brille, 1 Taf., 4 Karten. Hln. DM 24.80.

Entwicklung und Aufgaben der Bildmessung 1-6 * Elemente der Bildmessung 6-74 * Erdbildmessung 74-88 * Luftbildaufnahme 89-122 * Luftbildauswertung mit einfachen Hilfsmitteln 122-148 * Entzerrung von Einzelbildern 148-166 * Zweibildmessung (Bildkartierung mittels Zweibildinstrumenten) 167-238 * Anwendungen der Bildmessung 238-268 * Auswahl aus dem Schrifttum 268-273 * Zu den Kartenbeilagen 274-275 * Anhang 275-277 * Sach- und Namenverzeichnis 277-282.

Johannes Spoerel: *Mathematik von der Schule zur Hochschule*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1954. 12 + 210 S., 85 Fig. Ganzl. DM 16.00.

Über Zahlen 1-20 * Ergänzungen zu den algebraischen Rechenoperationen der Schule 21-36 * Zweireihige und dreireihige Determinanten. Lineare Gleichungen mit zwei und drei Unbekannten 36-50 * Elementare algebraische Funktionen 51-82 * Elementare transzendente Grundfunktionen 82-113 * Funktionen und Kurven in Polarkoordinaten, in Parameterdarstellungen und in der impliziten Darstellung $F(x, y) = 0$ 113-126 * Über komplexe Zahlen und elementare Funktionen einer komplexen Variablen 127-140 * Elemente der Vektor-Algebra 141-154 * Übungsteil 155-208 * Sach- und Namenverzeichnis 209-210.

C. Truesdell: *The kinematics of vorticity*. Indiana University Press, Bloomington, 1954. 16 + 232 pp. \$ 6.00.

Introduction 1-2 * Geometrical preliminaries 3-28 * Kinematical preliminaries 29-57 * Vorticity 58-80 * The vorticity field 81-99 * Vorticity measures 100-112 * Vorticity averages 113-124 * Bernoullian theorems 125-141 * Convection and diffusion of vorticity 142-169 * Circulation-preserving motions 170-204 * Index of symbols 205-206 * List of works quoted 207-221 * Index of authors quoted 223-225 * Index of matters treated 227-232.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgavene 35–37 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 1. desember 1954.

De etterfølgende oppgaver er enklere, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med oppgavestillerens egen løsning.

35. Evaluate

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{3n}(n!)^2}.$$

Martin G. Beumer

36. M är en punktmängd i planet. M säges vara stjärnformigt med avseende på en punkt P , som tillhör M , om genomsnittet av M med en godtycklig linje genom P är ett intervall. Visa, att mängden av de punkter, med avseende på vilka M är stjärnformigt, är konvex (eventuellt tomma mängden). Bevisa också att satsen gäller i en rymd av högre dimension.

Lars Hörmander

37. Sett

$$s_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \quad \sigma_k = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2}, \quad (s_0 = \sigma_0 = 0).$$

Bevis identiteten

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu}^2 (\sigma_{\nu} + \sigma_{n-\nu} + 2(s_{\nu} - s_{n-\nu})^2) = 6 \binom{2n}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu^2 \binom{2\nu}{\nu}}.$$

R. Tambs Lyche

38. Evaluate

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}$$

for all values of x such that the sum exists.

Martin G. Beumer

39. En trekant APB har siderne $AB = 5k$, $AP = PB = 2\sqrt{2}k$, hvor k er et givet liniestykke. Ved konstruktion (med passer og lineal) skal vinklen ved P deles i 3 lige store dele.

Beviset for konstruktionens rigtighed kan føres ved en rent geometrisk betragtning.

P. G. Stuhlmann

40. Der er forelagt kurven $y = x^3$, $x \geq 0$, og på denne to punkter A og B med abscisser henholdsvis x_1 og x_2 , hvor $x_2 > x_1$. Tangenterne i A og B skærer hinanden i C . Find grænseværdien for forholdet mellem liniestykkerne AC og CB i følgende 3 tilfælde:

1. x_1 er fast og > 0 , medens $x_2 \rightarrow x_1$;
2. $x_1 = 0$ og $x_2 \rightarrow 0$;
3. x_1 og x_2 går begge mod nul, og $x_2/x_1 \rightarrow k$, hvor k er en konstant.

Dansk landinspektørexamen 1954. Lidt ændret tekst.

41. La AB og CD være to parallelle korder i et kjeglesnitt. Vis at sektorene ABC og ABD har samme flateinnhold.

42. Om et naturlig tall blir skrevet i 2-tallsystemet, trenger en bare sifrene 0 og 1. Sett

$$S = \sum_{(n)} \frac{1}{n},$$

der summen er utstrakt over alle naturlige tall n som blir skrevet i 2-tallsystemet uten bruk av sifferet 0. Vis at rekken konvergerer og at

$$S = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{d(v)}{2^v},$$

der $d(v)$ betyr antallet av divisorer i v .

LØSNINGER

Oppgave 12.

Gjennom skjæringspunktet Q mellom tangentene T_1 og T_2 konstrueres L_1 parallell med den givne asymptoteretning, og L_2 loddrett på L_1 blir da parallell med den andre asymptoteretning. T_1 og T_2 må gå gjennom samme par toppvinkler ($L_1 L_2$). Det givne punkt kalles P .

Arealet av en trekant som begrenses av asymptotene og en tangent til hyperbelen er konstant.

I hvert av de par toppvinkler T_1 og T_2 danner, konstrueres et punkt O' , slik at når $O'X'$ er parallell med L_1 og $O'Y'$ parallell med L_2 , er trekantene som begrenses av $O'X'$, $O'Y'$ og T_1 eller T_2 like store. Halve arealet av en av disse trekantene er lik arealet av et rektangel med to sider langs asymptotene og et hjørne på den hyperbel som har T_1 og T_2 til tangenter og $O'X'$ og $O'Y'$ til asymptoter. En kan da konstruere skjæringspunktene mellom denne hyperbel og QP . Er P' et av disse punkter, blir den søkte hyperbels sentrum O på QO' bestemt av $\overline{QO} : \overline{QO'} = \overline{QP} : \overline{QP'}$. Toppunktene finnes ved å konstruere en toppunktstangent, som sammen med asymptotene danner en likebenet trekant av kjent størrelse.

Ligger P i en av de spisse vinkler (T_1T_2) eller i Q blir det ingen løsning. Ligger P på T_1 , T_2 , L_1 eller L_2 blir det to løsninger, ellers blir det fire. Er T_1 og T_2 parallelle, og ikke parallelle med noen av asymptoteretningene, ligger den søkte hyperbels sentrum på en parallell midt mellom T_1 og T_2 . En velger et punkt O' på denne parallell, og konstruksjonen blir som før når QP erstattes av en parallell med T_1 og T_2 gjennom P . En får to kongruente, en eller ingen løsning, etter som P ligger utenfor, på eller mellom T_1 og T_2 .

På tilsvarende måte kan det også konstrueres om hyperbelen ikke skal være likesidet, men har gitte asymptoteretninger.

Anders Lødemel

Også riktig løst av B. Skaug, A. Sandum og Å. Wallstén.

Oppgave 22.

La C være en sirkelflate med arealet S (radius R), og med sentrum i aksens skjæringspunkt med planet. La videre F være det felles område for C og det gitte område G , og C_1 og G_1 de komplementære områder. Idet r er avstanden fra aksens skjæringspunkt til flateelementet $d\omega$, er treghetsmomentet

$$\begin{aligned} \int_G r^2 d\omega &= \int_{F+G_1} r^2 d\omega \geq \int_{F+C_1} r^2 d\omega = \int_C r^2 d\omega \\ &= \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{S^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

Likhet inntreffer bare når flaten G er en sirkel, og aksens går gjennom sirkelens sentrum.

Johannes Kvamsdal

Også riktig løst av J. Bager, E. Bøhn, O. G. Eriksen, M. Høie, G. Kjellelvold, A. Lødemel, P. Wulff Pedersen, A. Sandum, N. G. Sjöstrand og H. Tverberg.

Oppgave 24.

Rekkens alminnelige ledd kan skrives

$$u_\nu = \frac{q}{1+q} \cdot \frac{q^3}{1+q+q^2+q^3} \cdots \frac{q^{2\nu-1}}{1+q+q^2+\dots+q^{2\nu-1}} x^\nu,$$

og herav framgår at for $0 \leq q \leq 1$ er

$$|u_\nu| \leq \frac{|x|^\nu}{2 \cdot 4 \dots (2\nu)}.$$

Rekken er derfor uniformt konvergerende for $0 \leq q \leq 1$, og følgelig er

$$\lim_{q \rightarrow 1-} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{q \rightarrow 1-} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{2 \cdot 4 \dots (2\nu)} = e^{\frac{x}{2}}.$$

Det er da forutsatt at $u_0 = 1$.

Johannes Kvamsdal

Også riktig løst av J. Bager, A. E. Livingston, P. Wulff Pedersen, N. G. Sjøstrand og J. I. Try.

Oppgave 26.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu \frac{\log \nu}{\nu} &= \sum_{m=1}^n \left(\frac{\log 2m}{2m} - \frac{\log (2m-1)}{2m-1} \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{\log 2}{m} - \sum_{m=1}^n \left(\frac{\log 2m}{2m} + \frac{\log (2m-1)}{2m-1} - \frac{\log m}{m} \right) \\ &= \log 2 \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{\log \nu}{\nu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu \frac{\log \nu}{\nu} &= \log 2 \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \ln n \right) - \left(\sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{\log \nu}{\nu} - \log n \ln 2 \right) \\ &= \log 2 \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \ln n \right) - \left[\sum_{k=1}^n \frac{\log \left(1 + \frac{k}{n} \right)}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \log n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k}{n}} - \ln 2 \right) \right], \\ &\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\log \nu}{\nu} = \\ &= C \log 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\log \left(1 + \frac{k}{n} \right)}{1 + \frac{k}{n}} d\left(\frac{k}{n}\right) + \log n \left(\int_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} d\left(\frac{k}{n}\right) - \ln 2 \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= C \log 2 - \frac{1}{2} (\log 2)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n} \log e \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right),$$

hvor siste ledd er 0 p. g. a. faktoren $\ln n/n$.

Jakob Ivar Try

Også riktig løst av J. Bager, K. Ejrnæs, G. Hansen, J. Kvamsdal, A. E. Livingston, N. G. Sjöstrand og P. Thomsen.

Oppgave 27.

Om n är ett primtal, är $\varphi(n) = n-1$. Om n ej är primtal måste $\varphi(n) < n-1$, d. v. s. $\varphi(n) < n$ för alla n .

Ett godtyckligt heltal n kan skrivas

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_v^{\alpha_v}.$$

Enligt Nagell: Elementär talteori, s. 24–25, kan då $\varphi(n)$ skrivas

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \dots p_v^{\alpha_v-1}(p_v-1),$$

d. v. s.

$$[\varphi(n)]^2/n = p_1^{\alpha_1-2}(p_1-1)^2 p_2^{\alpha_2-2}(p_2-1)^2 \dots p_v^{\alpha_v-2}(p_v-1)^2.$$

Om $p_1 = 2$ blir $p_1^{\alpha_1-2}(p_1-1)^2 = 2^{\alpha_1-2} \geq \frac{1}{2}$. Minimivärdet uppnås för $\alpha_1 = 1$:

$$p_v^{\alpha_v-2}(p_v-1)^2 \geq (p_v-1)^2/p_v \geq 1 \quad \text{för} \quad p_v \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

eftersom $(p_v-1)^2 = p_v$ har rötterna $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. D. v. s. $p_v^{\alpha_v-2}(p_v-1)^2 > 1$ för $p_v \geq 3$. Vi ser alltså, att $[\varphi(n)]^2/n = \frac{1}{2}$ för $n = 2$, men $> \frac{1}{2}$ för $n > 2$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}n} < \varphi(n) < n \quad \text{för} \quad n > 2.$$

N. G. Sjöstrand

Også riktig løst av E. Böhn, J. Kvamsdal, H. Meyer og E. Molbo.

Oppgave 28.

Om $x_1, x_2, \dots, x_n$ permuteres på alle mulige måter blir Δ_n uforandret. Det søkte integral blir derfor $n!$ ganger integralet tatt over området $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. Elementene a_{ij} blir lik $x_i - x_j$, $x_j - x_i$ eller 0 ettersom $i > j$, $j > i$ eller $i = j$. Subtraherer en fra elementene i de $(n-1)$ første kolonner tilsvarende element i den etterfølgende kolonne, og gjør på samme måte med rekkene i den nye determinanten, får en, når en setter $P_k = (x_{k+1} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1}) \dots (x_n - x_{n-1})$:

$$\Delta_n = -(-2)^{n-2} \cdot (x_n - x_1) \cdot P_1.$$

Settes videre $A_2 = \int_0^{x_2} (x_n - x_1) \cdot P_1 dx_1 = x_2^2 (\frac{1}{2}x_n - \frac{1}{6}x_2) \cdot P_2$ og $A_{k+1} = \int_0^{x_{k+1}} A_k dx_k$ blir, når $A_k = x_k^v (x_n/\alpha - x_k/\beta) \cdot P_k$:

$A_{k+1} = x_{k+1}^{\nu+2} \left(\frac{x_n}{\alpha(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{x_{k+1}}{\beta(\nu+2)(\nu+3)} \right) \cdot P_{k+1}$
og altså

$$A_n = x_n^{2n-2} \left(\frac{x_n}{(2n-2)!} - \frac{x_n}{(2n-1)!} \right) = \frac{2(n-1)}{(2n-1)!} x_n^{2n-1}.$$

Det søkte integral blir da lik

$$\begin{aligned} & -(-2)^{n-2} \cdot n! \int_0^1 \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_2} (x_n - x_1) \cdot P_1 dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n \\ &= -(-2)^{n-2} \cdot n! \int_0^1 A_n dx_n = (-2)^{n-1} \frac{n-1}{(n+1)(n+2) \dots 2n}. \end{aligned}$$

Anders Lødemel

INTERNORDISK PRISOPPGAVE

NMT bringer her forsøksvis en felles prisoppgave for gymnasiaster i alle nordiske land. P. g. a. forskjellige pensa og eksamenskrav er det vanskelig å finne passende oppgavestoff, men hvis den første konkurranse blir vellykket, håper vi å kunne fortsette med slike nordiske fellesoppgaver senere.

Oppgaveteksten er gitt både på norsk og svensk, med noen danske forklaringer til den norske tekst. Besvarelser kan selvsagt innsendes på dansk, norsk eller svensk.

Det vil bli delt ut en 1. premie på 150 og en 2. premie på 75 n. kr., eller tilsvarende beløp i vinnernes egen valuta.

Besvarelsene vil bli bedømt av en komite innen NMT's redaksjon. Den beste løsning blir offentliggjort i tidsskriftet.

Fristen for innlevering av besvarelser er 1. februar 1955. Oppgi navn, klasse og skole. Løsninger sendes til redaksjonssekretæren, ledsaget av en erklæring om at besvarelsen er selvstendig arbeid.

Vi henstiller til de nordiske gymnasielærere å gjøre flinke elever oppmerksom på prisoppgaven.

Norsk tekst:

1. En trekant ABC har sine hjørner¹ liggende på en parabel. Punktene A , B og C projiseres på en linje, som er vinkelrett på parabelens akse, i henholdsvis A_1 , B_1 og C_1 . Gjennom midtpunktene av linjestykkene A_1B_1 , B_1C_1 og C_1A_1 tegnes linjer vinkelrett på henholdsvis AB , BC og CA .

Vis at disse tre linjer går gjennom samme punkt beliggende på parabelens akse.

¹ Dansk: vinkelspidser.

2. Av en parabel kjennes tre punkter samt aksens retning. Konstruer brennpunktet.

3. Av en parabel kjennes tre tangenter samt aksens retning. Konstruer brennpunktet.

Konstruksjonene i 2. og 3. bør bygges på rent geometriske resonnerer og ikke knyttes til et komplisert algebraisk uttrykk, som er funnet ved beregning. Konstruksjonen ønskes ikke detaljert utført, men klart beskrevet og motivert (i tilknytning til en overskuelig figur).

4. En trekant har sine hjørner liggende på en parabel. Trekantsidenes projeksjoner på styrelinjen¹ betegnes med a_1 , b_1 og c_1 . Bevis formelen $a_1 b_1 c_1 = 2pT$, hvor p er parabelens parameter og T trekantens areal.

5. Der foreligger en trekant samt to parabler med felles akseretning. Den ene parabel går gjennom trekantens hjørner, den annen berører dens sider (eller disses forlengelser).

Vis at den siste parabels parameter er 4 ganger så stor som den førstes.

6. Der foreligger to parabler med felles akseretning. Vis, at såfremt det finnes en trekant hvis hjørner ligger på den ene parabel, og hvis sider (eller disses forlengelser) berører den annen, da eksisterer det uendelig mange trekanter med denne egenskap.

Svensk text:

1. Hörnen av en triangel ABC ligga på en parabel. Punkterna A , B och C projicieras på en linje, vinkelrät mot parabelns axel, i A_1 , B_1 och C_1 . Genom mittpunkterna på sträckorna A_1B_1 , B_1C_1 och C_1A_1 dragas linjer vinkelräta mot respektive AB , BC och CA .

Visa, att dessa tre linjer gå genom samma punkt belägen på parabelns axel.

2. Av en parabel känner man tre punkter samt axelriktningen. Konstruera brännpunkten.

3. Av en parabel känner man tre tangenter samt axelriktningen. Konstruera brännpunkten.

Konstruktionerna i 2. och 3. böra bygga på rent geometriska resonemang och icke knytas till ett genom beräkningar funnet komplicerat algebraiskt uttryck. Konstruktionen önskas icke detaljerat utförd men klart beskriven och motiverad (i anslutning till en överskådlig figur).

4. En triangel har sina hörn på en parabel. Sidornas projektioner på

¹ Dansk: ledelinien.

styrlijnen betegnes med a_1 , b_1 och c_1 . Bevisa formeln $a_1 b_1 c_1 = 2pT$, där p är parabelns parameter och T triangelytan.

5. En triangel samt två parabler med gemensam axelriktning äro givna. Den ena parabeln går genom triangelns hörn, den andra tangerar sidorna (eller deras förlängningar).

Visa, att den sista parabelns parameter är 4 gånger så stor som den förstas.

6. Två parabler med gemensam axelriktning äro givna. Visa, att om det finns en triangel, vars hörn ligga på den ena parabeln och vars sidor (eller deras förlängningar) tangera den andra, så existerar oändligt många trianglar med denna egenskap.

EKSAMENSOPPGAVER

Nedenfor følger matematikkoppgavene til studenteksamen 1954 på de matematiske gymnasieliner i de nordiske land.

I det tilsvarende avsnitt ifjor (NMT, Bd. 1, s. 138) ble det feilaktig angitt at oppgavene for hele Ísland bare gjaldt Menntaskólinn i Reykjavík.

DANMARK

Matematik I.

1. I et retvinklet koordinatsystem er givet punkterne $A(10, 0)$, $B(0, 17)$, $C(-10, 0)$ og $D(0, -3)$.

Midtnormalerne (halveringsnormalerne) til liniestykkerne AB og CD skærer hinanden i punktet Q .

Vis, at vinkel AQB og vinkel CQD begge er rette.

Find ligningen for radikalaksen for de to cirkler, der har AB og CD som diametre.

2. Undersøg og tegn i samme koordinatsystem de to kurver

$$y = 2^x - 1 \quad \text{og} \quad y = (2^x - 1)^2.$$

Find arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurverne.

3. I en konveks firkant $ABCD$ er siden $AB = 3,456$, siden $BC = 4,064$ og siden $CD = 5,284$; endvidere er vinkel $C = 90^\circ$, og diagonalerne AC og BD er lige store.

Beregn diagonalerne, siden AD og firkantens ubekendte vinkler.

Matematik II.

1. Find x af ligningen

$$1 - 6 \operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + 1 \right) = \frac{5}{\cos^2 x}.$$

2. I et retvinklet koordinatsystem, hvis begyndelsespunkt er O , er givet punkterne $A(4, 0)$ og $B(8, 0)$.

Der tegnes to cirkler c_1 og c_2 over henholdsvis OA og OB som diametre. En vilkårlig ret linie gennem O skærer c_1 og c_2 anden gang i henholdsvis P og Q .

Liniestykket PQ 's midtpunkt kaldes M , og den rette linie gennem B og M skærer den rette linie gennem A og P i punktet S .

Find ligningen for det geometriske sted for S , idet den vilkårlige rette linie gennem O gennemløber alle stillinger, og angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

3. I trapezet $ABCD$ ($AD \neq BC$) er $AB = AD = 4$, $BC = 2$ og vinkel $BAD = 90^\circ$.

I AB 's midtpunkt M oprejses normalen til trapezets plan, og ud ad normalen afsættes $MO = 2\sqrt{3}$. Punktet O bestemmer sammen med trapezet $ABCD$ en pyramide med topunkt i O og grundflade $ABCD$.

Beregn overfladen af denne pyramide.

Igennem midtpunktet af BC lægges en plan parallel med planen OAB ; snitplanen skærer pyramiden i en firkant.

Beregn sider og vinkler i denne firkant.

FINLAND

Längre kursen.

1. Av vårt lands befolkning utgjorde stadsborna år 1800 (vid årets slut) 5,60 % och 1950 25,8 %. Landsbygdens (d. ä. köpingarnas och landskommunernas) invånarantal växte under nämnda tid med 280 %. Landets totala befolkningstal 1950 var 4 030 000. Hur stort var det år 1800?

2. Ett amorteringslån återbetalas på $2n$ år medelst lika stora årsrater (annuiteter). Räntan beräknas efter p %. Hur stor del av den annuitet, som erlägges det första året efter halva lånetidens utgång, utgör amortering (= avbetalning på lånet)? Angiv resultatet i så enkel form som möjligt och tillämpa det då $2n = 30$, $p = 6$.

3. För vilka positiva värden på x är funktionen $\frac{x(1-a^2)}{1-a^2x^2}$ mindre än 1? (a kan antas vara positivt.)

4. Bestäm den punkt på cirkeln $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, vars avstånd till linjen $3x + 4y - 15 = 0$ är kortast. Beräkna detta kortaste avstånd. Rita figur och pröva resultatet genom mätning.

5. Härled uttrycken för rötterna till ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$.

6. En cirkel C med radien R tangeras invändigt av en cirkel c med radien r . Konstruera en cirkel, som (ligger innanför C och) tangerar c utvändigt och C invändigt och vars area utgör hälften av den del av C 's yta, som faller utanför c . När är uppgiften möjlig?

7. Punkten E , som delar sidan CD i en kvadrat $ABCD$ i förhållandet 1:2, sammanbindes med A och B . FG är en med AB parallell sträcka, vars ändpunkter ligga på kvadraternas perimeter. Sträckorna AE och BE dela FG i tre delar. I vilket förhållande delar FG sidan BC , då den med de nämnda delarna av FG såsom kanter bildade rätvinkliga parallelepipeden är så stor som möjligt?

8. Av tvenne kärl, A och B , är A en stympad kon, B ett stympat sfäriskt segment,

vars baser äro lika stora och vars höjd = sfärens radie. Kärnen ha samma volym, samma höjd och samma övre basradie. Beräkna förhållandet mellan den undre och den övre basradien hos kärlet A .

9. En tresidig reguljär pyramid, vars baskanter äro a och höjd h , delas i två delar medelst ett genom en baskant lagt plan, som med basen bildar vinkeln v . Bestäm förhållandet mellan volymerna av den del, som ligger vid toppen, och den, vars bas utgöres av den givna pyramidens bas. Tillämpa resultatet, då $a = 3$ cm, $h = 5$ cm och $v = 30^\circ$.

10. Bestäm maximi- och minimivärdena för funktionen $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ och rita funktionens kurva. Visa, att linjen $y = 1$ är en asymptot till densamma.

ÍSLAND

I.

1. Hvilke værdier kan funktionen $y = \frac{8x}{(x-2)^2}$ antage, når x er et reelt tal? Find relative maxima og minima, samt asymptoter, hvis sådanne findes. — Tegn funktionens grafiske billede i hovedtræk. — Find ligningen for tangenten t i kurvens skæringspunkt med X -aksen.

Tangenten t skærer kurven igen i punktet A . Bestem arealet af det område, som begrænses af kurven, tangenten t og den linie igennem A , som er parallel med X -aksen.

2. I en kugle med diameteren 1 indskrives en ret omdrejningskegle. Find keglens topvinkel, når dens samlede overflade skal være størst mulig.

3. Der er givet et kvadrat $ABCD$. Uden for kvadratet tegnes en halvcirkelbue med AB som diameter. Fra et punkt P på halvcirkelbuen trækkes linierne PD og PC . Disse skærer kvadratsiden AB henholdsvis i punkterne Q og R . Bevis, både analytisk og geometrisk, at $QR^2 = AQ \cdot RB$.

II.

1. På en parabel er givet punkterne A_1 og B_1 . En ret linie, som har retningskoefficienten α og går igennem A_1 , skærer parabeln igen i A_2 . En anden ret linie, som går igennem B_1 og har retningskoefficienten $-\alpha$, skærer parabeln igen i punktet B_2 . Linierne A_1B_1 og A_2B_2 skærer hinanden i punktet P . Bevis, at halveringslinierne for vinklerne ved P er parallelle med parablens akse og ledelinie. Bevis endvidere, at punkterne A_1, B_1, B_2 og A_2 ligger på en cirkel.

2. Løs ligningerne

$$4x^4 - 11x^3 + 14x^2 - 22x + 12 = 0$$

og

$$4x^3 + 5x^2 + 10x - 12 = 0,$$

når det er givet, at de har een fælles rod.

3. I en spidsvinklet trekant ABC er D fodpunktet for højden fra A , medens H er højdernes skæringspunkt.

a) Bevis, at $AH = 2R \cos A$ og $HD = 2R \cos B \cos C$.

b) Beregn vinklerne B og C samt siden a , når

$$AH = 55,68, HD = 18,41 \quad \text{og} \quad \angle A = 60^\circ.$$

NORGE

Reallinjen.

1. a) Vis hvordan en kan løse en tredjegradslikning som har formen

$$(x^2+p)(x+q) = 0.$$

En ordnet tredjegradslikning har den alminnelige formen

$$x^3+ax^2+bx+c = 0.$$

Hva for et vilkår må koeffisientene a , b og c oppfylle om likningen skal kunne bringes på den spesielle formen som er gitt ovenfor?

b) Likningen

$$\sin 2x + 3 \sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{2} \cot x$$

er gitt.

Gjør først greie for at $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ for alle vinkler x . Før deretter inn $\operatorname{tg} x$ som eneste ukjente trigonometriske funksjon i likningen, og vis at den da får den spesielle formen som er gitt i a).

Finn de verdier av x mellom 0° og 360° som tilfredsstiller likningen.

2. Et regulært tetraeder $ABCD$ med sidekant s er skåret av et plan som er parallelt med sideflaten ABC . Planet har avstanden x fra hjørnet D . Kall snitt-trekanten $A_1B_1C_1$, slik at A_1 ligger på AD , B_1 på BD og C_1 på CD . I snitt-trekanten er innskrevet et kvadrat, slik at en side faller i B_1C_1 og et kvadrathjørne i hver av de to andre trekantsider. Vis at siden i kvadratet blir $\frac{2}{3}x(2\sqrt{2}-\sqrt{6})$.

Dette kvadratet er toppflaten i et regulært firkantet prisme som er innskrevet i tetraederet, slik at dets grunnflate faller i ABC . Regn ut volumet av dette prismet uttrykt ved s og x . Bestem den verdien av x som gjør volumet av prismet størst mulig, og vis at snittplanet da deler tetraederhøyden fra D i forholdet 2:1.

I det tilfelle at prismet har sitt største volum, er det lagt et plan gjennom tetraederhjørnet A og den toppflatekant i prismet som ligger i sideflaten BCD . Finn forholdet mellom de to delene som dette planet deler tetraederet i.

3. Finn likningen for normalen i et fritt valt (vilkårlig) punkt $P(x_1, y_1)$ på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Vis at normalens skjæringspunkt med x -aksen har abscissen e^2x_1 , der e er ellipsens eksentrisitet.

I ellipsenormalens skjæringspunkt med x -aksen trekker vi en normal (perpendikulær) på x -aksen, og gjennom P trekker vi en parallell med x -aksen. Normalen på x -aksen og parallellen med x -aksen skjærer hverandre i S . Finn likningen for det geometriske stedet for S når P flytter seg på ellipsen. Gjør greie for den geometriske betydningen som den funne likningen har.

Det geometriske stedet skjærer x -aksen i to punkter. Konstruer abscissene til disse punktene når $a = 5$ cm og $b = 2,8$ cm. Konstruer deretter et fritt valt punkt på det geometriske stedet.

Tegn deretter — på ny figur — en sirkel med den gitte ellipsens lille akse ($2b$) til diameter. Merk av den gitte ellipsens høyre toppunkt, kall dette punktet for A , og trekk en sekant til sirkelen fra A . Kall sekantens skjæringspunkter med sirkelen for Q og R ; Q ligger nærmest A . Regn ut AQ uttrykt ved a og e når $AR = a$. Hva for en sammenheng har det funne uttrykket med det geometriske stedet? Hva blir det geometriske stedet dersom AQ har lengden b ? Finn b uttrykt ved a i dette tilfelle, og vis at vi også kan utlede dette resultatet av figuren.

SVERIGE

Realgymnasiet, allmän kurs.

1. En rektangel har ett hörn i origo, ett hörn i punkten $(-2; 6)$ och den ena diagonalen utefter den räta linjen $x + 7y - 40 = 0$. Bestäm koordinaterna för de återstående hörnen.

2. En storhet y är en funktion av en annan storhet x , som kan anta alla värden fr. o. m. 10 t. o. m. 30. Sambandet mellan y och x uttryckes genom ekvationen $y = ax^2 + bx^3$, där a och b är konstanter. För $x = 12$ resp. 18 är motsvarande värden på $y = 16$ resp. 27. Bestäm, för vilket värde på x värdet på y blir störst, och upprita motsvarande kurva inom variationsområdet.

3. Sidorna i en triangel förhåller sig som 5:6:9. Den inskrivna cirkeln tangerar sidorna i punkterna A , B och C . Beräkna vinklarna i triangeln ABC .

4. Bevisa, att formeln

$$\left(1 - \frac{2\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\right)^2 = \left(1 - \frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}\right)^2$$

gäller för varje värde på x , som inte är av formen $k \cdot 90^\circ$, där k är ett positivt eller negativt heltal eller 0.

5. I en cirkel med radien 1 dm drages en diameter. Dess ena ändpunkt tages till medelpunkt för en annan cirkel, som skär den förra cirkeln i punkterna A och B och diametern i C . Kordan AB drages. Cirkelsegmentet $ABCA$ får rotera kring den nämnda diametern, varvid ett sfäriskt segment uppstår. Bestäm radien i den sist uppritade cirkeln, när volymen av det sfäriska segmentet uppnår sitt största värde.

6. En regelbunden tresidig pyramid står med basytan ABC på ett horisontellt underlag. Lodrätt över hörnet A är punkten P så belägen, att avståndet PA är $1\frac{1}{2}$ gånger så stort som pyramidens höjd. Det genom P och kantlinjen BC lagda planet skär pyramiden i två delar. Beräkna förhållandet mellan delarnas volymer.

7. I ekvationen $x^3 - x^2 - x + k = 0$ är k ett tal, som uppfyller villkoret $0 < k < 1$. Bevisa, att av ekvationens rötter en och endast en rot x_1 är sådan, att $0 < x_1 < 1$.

8. En följd av trianglar $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$ ligger så, att för varje heltalsvärde på n ($n \geq 2$) hörnen i triangeln T_n sammanfaller med tangeringspunkterna för den i triangeln T_{n-1} inskrivna cirkeln. Hörnen i triangeln T_n betecknas med A_n, B_n och C_n , så att A_n ligger på $B_{n-1}C_{n-1}$ osv. Undersök, om gradtalet för vinkeln A_n i triangeln T_n går mot ett gränsvärde A för växande värden på n , dvs. om det finns ett tal A sådant, att skillnaden mellan A och A_n blir numeriskt godtyckligt liten, blott n väljes tillräckligt stort. Ange i så fall detta gränsvärde.

Specialkurs.

1. Tangenterna till en hyperbel i den ena parameterens ändpunkter skär en av asymptoterna i punkterna A och B . Visa, att sträckan AB 's projektion på konjugataxeln är lika lång som parametern.

2. Upprita kurvorna $y^2 = 4x$ och $x^2 + y^2 + 2x = 0$, och bestäm ekvationerna för deras gemensamma tangenter.

3. Visa, att funktionen $y = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ satisfierar ekvationen $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$.

4. I fyrhörningen $ABCD$ är vinklarna A och B båda räta. Sidorna BC och CD har vardera längden 1 cm. Bestäm maximivärdet av fyrhörningens yta. Svaret skall anges i såväl exakt som approximativ form.

5. I en given klotsektor är medelpunktsvinkeln 120° . I sektorn inskrives en rät cirkulär cylinder, vars axel faller utefter sektorns symmetrilinje och vars buktiga yta är så stor som möjligt. Bestäm förhållandet mellan denna cylinders basradie och höjd.

6. En ellips, vars yta är π ytenheter, tangerar de positiva koordinataxlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem. Genom punkten $(0; 2)$ går två tangenter till ellipsen. En av dem sammanfaller med y -axeln. Den andra tangenten skär x -axeln i punkten P . Bestäm x -koordinaten för P som funktion av den av ellipsens halvaxlar, som är parallell med x -axeln, och åskådliggör denna funktion grafiskt med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.

7. Upprita i dess huvuddrag kurvan $y = \frac{a}{x^2 + 1}$, där a är en konstant. En punkt P på kurvan är så belägen, att kurvans normal i denna punkt går genom origo. Sök och upprita geometriska orten för P , när a antar olika värden. Ange vidare, hur antalet normaler genom origo beror av a samt vilka spetsiga vinklar som dessa normaler kan bilda med y -axeln.

UTNEVNELSER

Til professor i matematik ved Aarhus Universitet: Lektor Svend Bundgaard.
Til rektor ved Maribo Gymnasium: Lektor Erling Frederiksen.

SUMMARY IN ENGLISH

KAY PIENE: *Hand-books for the teaching of mathematics.*

The article is built up around a very comprehensive book-list. Short references to all the literature are given in the text, which is divided in three main sections: 1° The methods of teaching mathematics. 2° Topics treated in the school. 3° »Outside« reading for clever pupils.

Ordinary text-books on mathematics are not treated, nor is literature from periodicals or journals. Within its scope, the book-list is probably complete as to literature in Scandinavian languages, but most of the books mentioned are in English, French or German.

M. TIDEMAN: *Elementary proof of a uniqueness theorem for positive harmonic functions.*

Written in English. See p. 95.

K.-G. HAGSTROEM: *The diagonal section of a hexahedron and the Gauss distribution bell.*

Given a hexahedron with a diagonal of 6 units, the area of a diagonal section at a distance t from the center is expressed by three second degree polynomials in t ,

given on the bottom of p. 97. The corresponding curve (fig. 2, p. 98) shows a striking similarity to a Gaussian error distribution. A small table of the integral $\int_0^t$ also confirms the good correspondence, which is explained by a simple statistical argument.

FR. FABRICIUS-BJERRE: *An elementary (3,1)-transformation.*

Let α be the parabola $y^2 = 4ax$, and T_1 and T_2 two arbitrary points of α . The tangents at T_1 and T_2 intersect at $P(x, y)$, and the normals at $P'(x', y')$. The transformation

$$x' = 2a + \frac{y^2 - ax}{a}, \quad y' = -\frac{xy}{a}$$

determines the point P' uniquely when P is given. Conversely, for a given P' , there will be 1, 2 or 3 corresponding real points P , depending on the position of P' relative to the semicubic parabola $27ay'^2 = 4(x' - 2a)^3$ (the transform of α).

The properties of the established transformation are studied. In general, the order of a given algebraic curve is doubled by the transformation (each way).

The author has earlier (*An elementary (6,1)-transformation*, Mat. Tidsskr. B, 1952, pp. 1-13) studied the corresponding problem for an ellipse or a hyperbola, situated in an Euclidian or non-Euclidian plane.

VIGGO BRUN: *The Nîmes-rose.*

In the town *Nîmes* in Southern France, there is an old roman Diana-temple with a decoration (see photograph p. 110) of an interesting geometrical structure, inscribed in a circle (fig. 2, p. 111). Assuming that this was used for squaring the circle, the resulting approximation for π is calculated.

FRITZ C. HOLTE: *Some properties of the binomial distribution.*

The binomial function of distribution,

$$f_x = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n,$$

will have its largest value f_m for $(n+1)p - 1 < m < (n+1)p$. Assuming $p < \frac{1}{2}$ and $(n+1)p$ no integer, we put

$$K = f_0 + f_1 + \dots + f_{m-1}, \quad L = f_{m+1} + f_{m+2} + \dots + f_n.$$

It is shown that K/L is a decreasing function of p in the open interval $\left\langle \frac{m}{n+1}, \frac{m+1}{n+1} \right\rangle$, and that $K = L$ for a value $p = p_0$ such that $m/n < p_0 < (m + \frac{1}{2})/(n+1)$. This is a generalization of an earlier result by Ragnar Frisch.