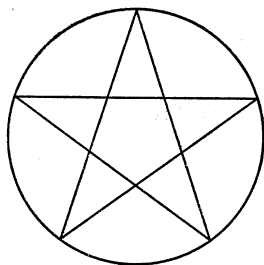


NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT



NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 2



OSLO 1954

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Suomen matematiikan ja fysiikan opettajien liitto – Finlands matematik- och fysiklärarförbund.

Íslenzka stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

REDAKSJON:

David Fog, Carl-Erik Fröberg, Regnar Norgil,

E. J. Nyström, Karl Persson, Kay Piene, Hans Rådström,

Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.

Sekretær: Ernst S. Selmer.

ADRESSE:

Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

DIE INTEGRATIONSMETHODEN VON ARCHIMEDES

E. J. DIJKSTERHUIS, Utrecht

Auszug aus einem Vortrag gehalten in der Gesellschaft für Geschichte der exakten Wissenschaften in Kopenhagen am 10. März 1953.¹

Unter den vielen grossen Forschergestalten der Antike gibt es kaum einen, der den modernen Mathematiker so unmittelbar anzusprechen und so dauernd zu fesseln vermag wie der grosse Syracusaner Archimedes. Dieser schuf im 3. vorchristlichen Jahrhundert eine Reihe von einzigartigen Werken, deren jedes auf seinem eigenen Gebiete einen Höhepunkt griechischen Denkens bedeutet.

Das Auftreten des Archimedes fällt in die erste Zeit nach der endgültigen Kodifizierung der griechischen Mathematik in dem grossen Elemente-Werk des Euklid. In diesem Werke, das alle früheren Versuche, die gesamten elementaren mathematischen Kenntnisse in einem einheitlichen Zusammenhang zu ordnen, offenbar verdrängt hat, war eine Grundlage für die tiefer schürfende Forschung geschaffen: was in den *Elementen* stand, durfte als allgemein bekannt angesehen werden. Die höhere Forschung bewegte sich vorläufig hauptsächlich auf zwei verschiedenen Gebieten: es waren die Lehre von den Kegelschnitten und die Untersuchungen über Berechnung von Längen, Flächen und Inhalten. Das erstere dieser beiden Gebiete, das, von Menaichmos stammend, durch Aristaos und Euklid weiter gepflegt worden war, erlebte seine höchste Blüte, die zugleich einen der Höhepunkte der griechischen Wissenschaft bedeutet, in den *Conica* des Apollonios; das zweite bildet das eigentliche Arbeitsfeld des Archimedes, dem zwar auch die Theorie der Kegelschnitte manches zu verdanken hat, der aber sein Eigenstes und Eigentliches doch in denjenigen Teilen der Mathematik geleistet hat, die als die antike Antizipation der späteren Integralrechnung angesehen werden können. Daneben gebührt ihm das Verdienst, durch seine Werke über Gleichgewicht und Schwerpunkt und über schwimmende Körper die mathematische Behandlung sowohl in die Mechanik als in die Hydro-

¹ Der Vortrag — mit dem ursprünglichen Titel: Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft — ist auch im April 1951 auf dem Kongress für internationale Wissenschaftsgeschichte in Bremen gehalten worden; siehe Veröffentlichungen der Gesellschaft für internationale Wissenschaftsgeschichte, 1952, Heft 1.

statik eingeführt und damit die Möglichkeit einer mathematischen Physik überzeugend dargetan zu haben. Ausserdem hat er sich einen unsterblichen Namen durch technische Anwendungen seiner Mechanik erworben, die aber in seiner eigenen Wertschätzung bedeutend tiefer standen als seine rein-mathematischen Leistungen.

Die mannigfachen Erfolge, die Archimedes auf demjenigen Gebiete erreicht hat, das ich der Kürze halber als das Gebiet der Integrationsprobleme bezeichnen will, sind grösstenteils schon längst in die elementare Mathematik übergegangen und wirken dadurch, wenn sie ohne weiteres aufgezählt werden, unvermeidlich einigermassen trivial; es ist eben die nicht zu umgehende Schwierigkeit der Geschichte der exakten Wissenschaften, dass das, was einmal ein Höhepunkt der Forschung war, im Laufe der Jahrhunderte erst zu dem Range einer scheinbar ganz normalen Leistung herabsinkt, um schliesslich nur noch als Übungsstoff für Anfänger fortzuleben. Aber daraus erwächst ihr gerade ihre eigentliche Aufgabe: diese früheren Errungenschaften in ihrer ursprünglichen Gestalt wieder auferstehen zu lassen und sie der Nachwelt in dem Glanze zu zeigen, der sie umgab, als sie noch die stolze Freude ihrer Entdecker und das Staunen der Zeitgenossen waren. Wenn ich mich darauf beschränken würde, in Erinnerung zu bringen, dass Archimedes Grenzen für das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser angab, dass er die Mantelflächen des geraden Kreiszylinders und des geraden Kreiskegels, die Oberfläche und den Inhalt der Kugel und ihrer Teile zu bestimmen lehrte, die Quadratur der Parabel erfand und eine Anzahl Kubatursätze über Rotationskörper zweiten Grades ableitete, alles Dinge, die heute in den Grundlagen der Mathematik zu Hause sind, so liefe ich Gefahr, bei Ihnen eher den Gedanken an ein gelungenes Lehrbuch als den Eindruck einer höchst genialen Leistung zu erwecken. Man muss alle diese Dinge historisch sehen, d. h. so wie sie sich gegen den geistigen Hintergrund ihrer eigenen Zeit, des dritten vorchristlichen Jahrhunderts, ausnehmen. Und nun ist es ein glücklicher Umstand für die Geschichte der Mathematik, ein Umstand, um den die Geschichte der Physik und der Chemie sie beneiden können, dass die historische Betrachtungsweise gleichzeitig die eigentlich mathematische ist. Der Mathematiker als solcher interessiert sich weniger für Ergebnisse als für Methoden; die Resultate, die Archimedes erreicht, sind ihm weniger wichtig als die Beweisführung, durch die er sie erhärtet. Es ist ihm natürlich ein Leichtes, jedes einzelne Ergebnis mit Hilfe des fast mechanisch geübten Algorithmus der Integralrechnung nachzurechnen, aber als Mathematiker und Historiker zugleich verbietet er sich diesen allzu bequemen Weg. Er will wissen, wie Archimedes es selbst gemacht hat, von seinen Voraussetzungen aus, mit

den technischen Hilfsmitteln, über die er verfügte; er zwingt sich also, sich in die antike Denkweise zu versetzen, die Terminologie und die Darstellungsart der originalen Abhandlungen zu benutzen, auch wenn dies eine nicht immer leicht zu bestehende Geduldprobe für ihn selbst wie für seine Zuhörer bedeutet.

Es ist nicht möglich, in der kurz bemessenen Zeit eines Vortrags auch nur eine einzige Strecke dieses nicht eben leichten Weges wirklich zu beschreiten. Man sieht sich schon gezwungen, moderne symbolische Ausdrucksmittel zu benutzen, wenn man die Aufmerksamkeit des in dem Punkte der Notation verwöhnten modernen Hörers dauernd zu fesseln bestrebt ist. Dabei soll aber der antike Gedankengang im Wesentlichen unangetastet bleiben; die typischen Züge des griechischen mathematischen Stiles dürfen bei der Benutzung einer algebraischen Symbolik nicht verwischt werden.

Bevor wir aber Archimedes bei seinem eigenen Schaffen belauschen können, müssen einige Bemerkungen über die älteren Phasen der griechischen Mathematik vorangeschickt werden.

Es lässt sich heutzutage kaum mehr bezweifeln, dass die Griechen, als sie anfangen, sich in systematischer Weise mit der Mathematik zu befassen, also ungefähr im 6. vorchristlichen Jahrhundert, mit zahlreichen Resultaten der babylonischen und der ägyptischen Mathematik auf dem laufenden gewesen sind. Es steht aber andererseits fest, dass sie sich trotz vollständiger Anerkennung des praktischen Gebrauchswertes dieser Ergebnisse entschieden geweigert haben, der Bekanntschaft mit überlieferten Rechenregeln den Ehrennamen eines wirklichen Wissens zu verleihen. Durch das Eingreifen der griechischen Denker in den Lauf der Mathematikgeschichte vollzieht sich die radikale Änderung, mit der die späteren Griechen den Namen des sagenhaften Weisen Pythagoras verbinden, und von der uns im 5. christlichen Jahrhundert der neo-platonische Philosoph Proklos aus antiken, ihm noch zugänglichen Quellen die Beschreibung überliefert, Pythagoras habe die Beschäftigung mit der Mathematik in eine freie Wissenschaft verwandelt, indem er ihre Grundlagen von höherem Gesichtspunkte aus betrachtete und ihre Theoreme in unstofflicher Weise und durch das Denken allein untersuchte. Das heisst wohl nichts anderes, als dass er die rein-mathematische Behandlungsweise einführte, bei der auf den logischen Aufbau des Systems der grösste Wert gelegt wird und keine andere Art der Beurteilung einer Begriffsbildung oder einer Beweisführung zugelassen wird als die Frage, ob diese sich einer aufs äusserste geschärften intellektuellen Kritik gegenüber zu verantworten im Stande sind.

Die griechischen Mathematiker des 5. und 4. vorchristlichen Jahrhunderts haben die Aufgabe, in die aller Wahrscheinlichkeit nach ziemlich chaotische Menge von vagen Begriffen, rohen Faustregeln und im besten Fall plausibeln Sätzen, die ihnen in der Berührung mit den orientalischen Kulturen bekannt geworden sein mögen, eine logische Ordnung zu bringen, in Angriff genommen und mit einem ungeheuern logischen Rigorismus gelöst, der bis in unsere Zeit die Atmosphäre, in der Mathematik getrieben wird, bestimmt hat. Wie stark dieser Rigorismus, dieses Bedürfnis nach vollkommener Exaktheit war, lässt sich wohl am deutlichsten durch die Art und Weise illustrieren, in der sie auf zwei neue Erkenntnisse reagiert haben, die wahrscheinlich im 5. Jahrhundert erworben sind, und die beide zur Folge hatten, dass Schlussweisen, die immer als vollgültig angesehen worden waren, ihre Überzeugungskraft einbüssten. Es sind dies die Entdeckung des Irrationalen und die gewonnene klare Einsicht in die Unerschöpflichkeit des Unendlichen.

Es ist plausibel anzunehmen, dass die Pythagoreer, die in der Zahl — und das heisst nach griechischem Sprachgebrauch: der natürlichen Zahl — das Wesen der Dinge erblickten, und die also auch überzeugt waren, alle Relationen zwischen den Dingen liessen sich durch Zahlenverhältnisse genau ausdrücken, anfänglich auch in der Geometrie der Überzeugung gelebt hatten, dass Längen von Strecken sich immer wie zwei Zahlen zu einander verhalten; wenn dem so ist, muss es eine ausserordentliche Erregung gezeitigt haben, als sich ergab, dass diese Überzeugung schon im ganz einfachen Fall der Vergleichung von Seite und Diagonale eines Quadrates verfehlt war. Das hatte sehr weitreichende Folgen. Wenn sich nämlich das Verhältnis zweier Strecken im allgemeinen nicht als ein Zahlenverhältnis ausdrücken lässt, kann man auch nicht länger sagen, jede Strecke besitze eine bestimmte, durch eine Zahl angebbare Länge, und dadurch fiel z. B. die Möglichkeit fort, den Satz, die Fläche eines Dreiecks sei das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe, aufrecht zu erhalten. Und natürlich reichten die Folgen der Entdeckung für die Geometrie noch sehr viel weiter. Der ganze Verhältnisbegriff, der in dem Aufbau dieses Zweiges der Mathematik einen so wichtigen Anteil hat, schwebte nunmehr in der Luft, und eine radikale Reform war unumgänglich.

Von nicht geringerer Bedeutung mag es gewesen sein, dass man endlich anfang, Ernst damit zu machen, dass das Unendliche wirklich unendlich, ohne Ende, ist, d. h. nicht in einer endlichen Anzahl von Schritten durchlaufen werden kann. Sehr wahrscheinlich hat man anfänglich den Satz, der Inhalt eines Quaders sei das Produkt aus Grundfläche und Höhe, erhärtet, indem man diesen Körper als einen Haufen aufeinander geschichteter Rechtecke betrachtete, und hat in ähnlicher Weise an-

nehmbar gemacht, zwei Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen seien inhaltsgleich. Bis dann eines Tages ein kritischer und unabhängiger Geist die verfängliche Frage gestellt haben mag, ob diese Rechtecke, aus denen der Quader bestehen sollte, eigentlich echte mathematische Rechtecke seien, die dann keine Dicke besäßen, oder aber sehr dünne Quäderchen, und dadurch die Wertlosigkeit der ganzen Beweisführung ans Licht brachte. Man kann ja keinen dreidimensionalen Körper durch Anhäufung von zweidimensionalen Flächen erzeugen; und wenn man nicht weiss, welchen Inhalt ein hoher Quader hat, weiss man es ebenso wenig von einem niedrigen.

Wie stark dieses Dilemma die griechischen Mathematiker beunruhigt hat, lässt sich aus einem überlieferten Demokrit-Fragment entnehmen, in dem gefragt wird, ob die Schnittflächen, die entstehen, wenn man einen Kegel durch Ebenen parallel zur Grundfläche schneidet, gleich oder ungleich sind. Diese Frage wird mit einer Antinomie beantwortet: sind sie ungleich, so werden sie den Kegel ungleichmässig machen, da er treppenförmige Einschnitte und Vorsprünge erhält; sind sie aber gleich, so wird der Kegel wie ein Zylinder aussehen. Und die berühmten Bewegungsparadoxien des Eleaten Zeno tun nichts anderes, als diese nämliche Denkverlegenheit angesichts der Frage nach dem Aufbau eines Kontinuums in kinematischer Form zum Ausdruck zu bringen.

Die Überwindung der doppelten Krise, in die das Irrationale und das Unendliche die griechische Mathematik stürzten, ist nach unseren heutigen Vorstellungen, die aber einer festeren Begründung noch sehr bedürftig sind, das Werk des genialen Mathematikers Eudoxos von Knidos gewesen, der am Anfang des 4. vorchristlichen Jahrhunderts nach einem Aufenthalt bei Platon in Athen und bei Archytas in Tarent in Kyzikos an der Propontis eine Schule gründete, mit der er im Jahre 368 nach Athen übersiedelte. Er schuf eine Theorie der Verhältnisse, in der dieser Begriff so allgemein definiert wird, dass die Frage, ob die betrachteten Grössen kommensurabel oder inkommensurabel sind, irrelevant ist, und er lehrte eine vollkommen strenge Methode zur Behandlung der unendlichen Prozesse, die bei der Bestimmung von Oberflächen und Inhalten geometrischer Gebilde auftreten. Die erste, seine Verhältnislehre, bildet den Inhalt des fünften Buches der *Elemente* Euklids, die zweite, die in der historischen Literatur leider den vollständig falschen Namen Exhaustions(d. h. Ausschöpfungs-)verfahren erhalten hat — sie beruht nämlich auf der klaren Einsicht in die Unerschöpflichkeit des Unendlichen —, wird im XII. Buch angewandt. Von nun an gehören beide zu dem ehernen Bestand der griechischen Mathematik, und Archimedes wendet sie denn auch beide mit der grössten Präzision an. Er er-

zählt in seinem Werke *Über Kugel und Zylinder*, Eudoxos habe selbst seine Methode für unendliche Prozesse zu einem echten Beweis des Satzes benutzt, der Inhalt einer Pyramide sei der dritte Teil des Inhaltes eines Prismas mit der nämlichen Grundfläche und der nämlichen Höhe — so allein kann der Satz in der strengen Sprache der nacheudoxischen griechischen Mathematik formuliert werden — und des analogen Satzes für einen Kegel und einen Zylinder, welche beiden Sätze schon früher ohne Beweis — d. h. ohne einen Beweis, der den Eudoxischen Forderungen nach Strenge Genüge leistete — von Demokrit ausgesprochen seien.

Es erübrigt sich für meinen Zweck, tief auf die Eudoxische Verhältnislehre einzugehen; einiges muss aber darüber gesagt werden. Erstens: ein Verhältnis zwischen zwei Grössen A, B besteht dann und nur dann, wenn sie, vervielfältigt, einander übertreffen können, wenn es also zwei Zahlen m, n gibt, so dass

$$n \cdot A > B \text{ und } m \cdot B > A.$$

Ist $A > B$, dann kann $n = 2$ sein (nicht 1, denn das ist keine Zahl). Wir nennen diese Forderung das Eudoxische Axiom; zwei Grössen, die diesem Axiom genügen, heissen gleichartig. Gleichartig sind z. B. zwei Linien, zwei Oberflächen, zwei Inhalte, zwei Zeiten, nicht aber eine Linie und eine Zeit. Man kann also in der Bewegungslehre nicht von dem Verhältnis einer Strecke zu der Zeit, in welcher diese Strecke durchlaufen wird, reden.

Ich schreibe das Verhältnis von A zu B

$$(A, B),$$

um nicht durch die Schreibweise $\frac{A}{B}$ oder $A:B$ den Eindruck zu erwecken, es handle sich um einen Bruch.

Es wird nicht versucht, das Verhältnis (A, B) explizit zu definieren; es wird nur davon gesagt, dass es eine gewisse Relation in Bezug auf Grösse ist. Implizit wird der Verhältnissbegriff definiert durch die Feststellung, zwei Verhältnisse (A, B) und (C, D) seien gleich, wenn stets zugleich mit

$$m \cdot A \geq n \cdot B \text{ auch } m \cdot C \geq n \cdot D,$$

wo m und n beliebige (ganze) Zahlen bedeuten.

Der Fall des Gleichheitszeichens kommt vor, wenn die Grössen A und B und ebenso C und D kommensurabel sind; das Verhältnis heisst dann *ῥητός*, aussprechbar; wir sagen rational.

Eine weitere Definition besagt, dass $(A, B) > (C, D)$, wenn es ein Zahlenpaar m, n gibt derart, dass

$$m \cdot A > n \cdot B \text{ und } m \cdot C \leq n \cdot D.$$

Wenn es zu zwei gleichartigen Grössen A, B eine dritte Grösse E gibt derart, dass $(A, E) = (E, B)$, dann heisst das Verhältnis (A, B) das doppelte Verhältnis von (A, E) . Ebenso: wenn $(A, E) = (E, F) = (F, B)$, so heisst (A, B) das dreifache Verhältnis von (A, E) .

Eudoxos beweist nun in überaus scharfsinniger Weise die Sätze der Verhältnislehre, z. B. dass aus $A > B$ folgt $(A, C) > (B, C)$ und ebenso $(C, B) > (C, A)$. Es würde uns hier zu weit führen, genau zu zeigen, wie er das macht. Es muss nur noch bemerkt werden, dass der Satz, aus $(A, B) = (C, D)$ folge $(A, C) = (B, D)$, in der griechischen Verhältnislehre im allgemeinen nicht gilt, denn wenn A und B gleichartig sind und ebenso C und D , braucht A nicht gleichartig mit C zu sein, und das Verhältnis (A, C) besteht also im allgemeinen nicht. Der Satz ist nur richtig, wenn es sich um vier gleichartige Grössen handelt. In der Bewegungslehre gilt für eine gleichförmige Bewegung zwar

$$(s_1, s_2) = (t_1, t_2),$$

aber nicht

$$(s_1, t_1) = (s_2, t_2).$$

So viel über die Eudoxische Verhältnislehre. Eingehender müssen wir uns nun mit seiner Infinitesimalmethode beschäftigen, die das eigentliche Rüstzeug bildet, mit dem Archimedes seine Integrationsprobleme löst. Wie ich schon bemerkte, beruht sie auf der sehr klaren und bis in die letzte Konsequenz verfolgten Einsicht in die prinzipielle Unmöglichkeit, das Unendliche jemals durch Aneinanderreihung einer immer wachsenden Zahl von Einzelschritten wirklich auszuschöpfen, den Übergang zur Grenze wirklich zu vollziehen; sie macht Ernst damit, dass in einer Reihe von regelmässigen, in einen Kreis eingeschriebenen Polygonen, deren Seitenzahl in einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten 2 anwächst, niemals dieser Kreis selbst vorkommen kann, dass eine konvergente monotone Zahlenfolge ihren Limes nicht »schliesslich« und nicht »auf die Dauer«, sondern wirklich niemals erreicht und also auch niemals, wie das Wort Grenzübergang vorzutäuschen scheint, in diesen Limes »übergeht«.

Mit der rigorosen Konsequenz, die das griechische Denken im allgemeinen kennzeichnet, hat Eudoxos alle früheren Gedankengänge, in denen der Kreis als Polygon mit unendlich vielen Seiten oder ein Zylinder als Anhäufung unendlich vieler ebenen Schnitte angesehen worden war, unerbittlich aus der strengen Mathematik verbannt. Er untersagte sogar den Gebrauch des Wortes »unendlich«, den der strengste moderne Mathematiker zum Zwecke der Abkürzung doch gerne gestattet, und verlangte eine auch im Wortlaut völlig finitistische Behandlungsweise.

Um diese Forderung zu erfüllen, stand nur eine einzige Methode zur Verfügung, und zwar die des indirekten Beweises. Wenn nach einer endlichen Anzahl von Schritten das Resultat dessen, was später Grenzübergang heissen sollte, sich als Vermutung gezeigt hat, soll die Unmöglichkeit der Unrichtigkeit dieser Vermutung durch Reductio ad absurdum gezeigt werden.

Bei dem Studium der zahlreichen Fälle, in denen Archimedes diese Methode anwendet, lassen sich zwei Hauptformen derselben unterscheiden, deren eine wieder in zwei Nebenformen vorkommt. Ich bezeichne die Hauptformen durch die Stichworte:

Kompressionsmethode

Es sei die zu bestimmende Grösse (Oberfläche oder Inhalt) Σ . Man schliesst diese ein zwischen eine monoton steigende Grössenfolge I_n als untere und eine monoton absteigende Grössenfolge C_n als obere Grenze (bei der Bestimmung der Kugelgröße sind dies zwei Folgen von ein- bzw. umgeschriebenen Rotationskörpern). Es wird jetzt gezeigt,

a. *Differenzform*
dass die Differenz

$$C_n - I_n$$

durch Wahl von n kleiner als eine beliebig gewählte Grösse gemacht werden kann.

b. *Verhältnisform*
dass das Verhältnis

$$(C_n, I_n)$$

durch Wahl von n kleiner als das Verhältnis der grösseren von zwei beliebig gewählten Grössen zur kleineren gemacht werden kann.

Die eigentliche Ableitung des Resultates besteht jetzt darin, dass man eine Grösse K bestimmt, die für jedes n der Ungleichheit

$$(1) \quad I_n < K < C_n$$

genügt. Behauptet wird jetzt

$$\Sigma = K.$$

Approximationsmethode

Man approximiert die zu bestimmende Grösse Σ durch die Summe $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ von n positiven Gliedern einer derartigen Grössenfolge

$$a_1, a_2, \dots,$$

dass die Differenz

$$\Sigma - S_n$$

durch Wahl von n kleiner als eine beliebig gewählte Grösse gemacht werden kann.

Man bestimmt jetzt K so, dass

$$(2) \quad S_n + R = K$$

und

$$R < a_n.$$

Behauptet wird jetzt

$$\Sigma = K.$$

Es sei $\Sigma \neq K$, dann ist entweder $\Sigma > K$ oder $\Sigma < K$.

Im ersten Fall wird n so bestimmt, dass

$$C_n - I_n < \Sigma - K. \quad | \quad (C_n, I_n) < (\Sigma, K).$$

Dann ist auch

$$\Sigma - I_n < \Sigma - K, \quad | \quad (\Sigma, I_n) < (\Sigma, K),$$

also

$$K < I_n,$$

was der Annahme (1) widerstreitet.

Im zweiten Fall wird n so bestimmt, dass

$$C_n - I_n < K - \Sigma. \quad | \quad (C_n, I_n) < (K, \Sigma).$$

Dann ist auch

$$C_n - \Sigma < K - \Sigma, \quad | \quad (C_n, \Sigma) < (K, \Sigma),$$

also

$$C_n < K,$$

was wiederum mit der Annahme (1) in Widerspruch steht.

Also ist

$$\Sigma = K.$$

Diese Methode wird angewandt in den Schriften

*Kreismessung, Über
Konoide und Sphae-
roide, Über Spiralen.*

Über Kugel und Zylinder.

Es sei $\Sigma \neq K$, dann ist entweder $\Sigma > K$ oder $\Sigma < K$.

Im ersten Fall wird n so bestimmt, dass

$$\Sigma - S_n < \Sigma - K,$$

also

$$K < S_n,$$

was gegen (2) streitet.

Im zweiten Fall bestimmt man n so, dass

$$a_n < K - \Sigma,$$

also

$$R < K - \Sigma.$$

Nach (2) folgt

$$K - S_n < K - \Sigma,$$

also

$$\Sigma < S_n,$$

was der Definition von S_n widerstreitet.

Also ist

$$\Sigma = K.$$

Diese Methode wird angewandt in der Schrift

Quadratur der Parabel.

Um nun wenigstens einen Eindruck davon zu geben, wie das Verfahren bei Archimedes angewandt wird, gebe ich eine Skizze der Ableitung der Sätze über Oberfläche und Inhalt der Kugel, die den Hauptinhalt des ersten Buches der Schrift *Über Kugel und Zylinder* bildet. Der Grundgedanke besteht darin, dass die Kugel mit zwei Umdrehungskörpern verglichen wird, die hervorgebracht werden, wenn man einem grössten Kreis der Kugel homothetische regelmässige Polygone I_n und C_n mit n

Seiten (wo n ein Vielfaches von 4 ist) ein- bzw. umschreibt und nun beide Polygone sich um eine Diagonale, die ein Durchmesser des Kreises ist, drehen lässt. Ich nenne die Oberflächen der entstehenden Körper $O(I_n)$ und $O(C_n)$, die Inhalte $S(I_n)$ und $S(C_n)$. Zuerst wird nun mit Hilfe von

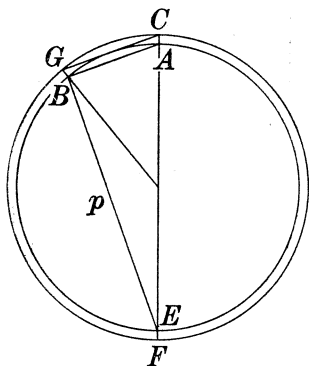


Fig. 1. In den Kreis mit Durchmesser $AE = d$ ist ein regelmäßiges n -Eck mit Seite $AB = z_n$ eingeschrieben. $BE = p$. Ferner ist $CG = z_n$ die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen n -Ecks, das zu dem eingeschriebenen homothetisch liegt. Um dieses zweite n -Eck ist ein Kreis mit Durchmesser $CF = D$ beschrieben.

Sätzen über die Oberfläche eines geraden Kreiskegels und eines Kegelstumpfes, die in dem vorhergehenden Teil der Schrift abgeleitet worden sind, ein Ausdruck für $O(I_n)$ gefunden, der sich mittels eines planimetrischen Hilfssatzes in das Resultat umformen lässt, dass $O(I_n)$ einem Kreis gleich ist, dessen Radius die mittlere Proportionale zu $BE = p$ und $AE = d$ ist (Fig. 1), und der folglich kleiner als ein Kreis Q mit dem Radius d ist. Also

$$O(I_n) < Q.$$

$O(C_n)$ ist einer anderen Kugel eingeschrieben. Man findet in ähnlicher Weise, dass $O(C_n)$ einem Kreis, dessen Radius die mittlere Proportionale zu d und $CF = D$ ist, gleich und folglich grösser als der Kreis Q ist. Man weiss also

$$O(I_n) < Q < O(C_n).$$

Weiter kann mittels eines Postulats über zwei nach derselben Richtung konkave Flächen, die einen gemeinsamen ebenen Rand haben und von denen die eine die andre einschliesst, gefolgert werden, dass die Oberfläche O der Kugel der Ungleichheit

$$O(I_n) < O < O(C_n)$$

genügt. Archimedes zeigt nun weiter, das Verhältnis

$$(O(C_n), O(I_n))$$

könne durch geeignete Wahl von n kleiner gemacht werden als das Verhältnis der grösseren, a , von zwei beliebig gewählten ungleichen geraden Linien zu der kleineren, b , also kleiner als ein beliebiges Verhältnis, das grösser als 1 ist. Dann kann der Automatismus der Kompressionsmethode in der Verhältnisform, den wir in seiner allgemeinen Formulierung ken-

nen gelernt haben, in Wirkung treten, und man erhält das gesuchte Resultat in der Form

$$O = Q.$$

Die Oberfläche der Kugel ist somit das vierfache der Fläche ihres grössten Kreises.

Der Beweis der Behauptung

$$(O(C_n), O(I_n)) < (a, b)$$

wird so geführt: man zeigt erst, dass das Verhältnis $(O(C_n), O(I_n))$ das doppelte des Verhältnisses (Z_n, z_n) der Seiten $CG = Z_n$ und $AB = z_n$ von C_n und I_n ist und konstruiert nun die mittlere Proportionale e zu a und b . Dann ist (a, b) das doppelte des Verhältnisses (a, e) . Früher ist schon bewiesen, dass man zu einem vorgegebenen Kreis die Zahl n immer so bestimmen kann, dass

$$(Z_n, z_n) < \text{beliebiges Verhältnis, das} > 1.$$

Man macht nun

$$(Z_n, z_n) < (a, e)$$

und folgert

$$(O(C_n), O(I_n)) < (a, b).$$

In ähnlicher Weise beweist Archimedes, das Volumen der Kugel sei gleich dem eines geraden Kreiskegels, dessen Grundfläche der Oberfläche der Kugel gleich ist und der den Radius der Kugel zur Höhe hat.

Schliesslich werden die beiden Sätze noch in einem Porisma zusammengefasst: Wenn man um eine Kugel einen geraden Kreiszylinder beschreibt, ist die totale Oberfläche dieses Zylinders das Anderthalbfache der Kugel- fläche und ebenso der Inhalt das Anderthalbfache des Kugelvolumens. Die Überlieferung besagt, Archimedes habe auf diesen Satz so grossen Wert gelegt, dass er die Figur der Kugel mit dem sie umgebenden Zylinder auf seinem Grabstein eingemeisselt wünschte, und dass es diese Figur war, an welcher Cicero später sein Grab erkannte.

Was ich hier nun kurz skizziert habe, bildet in vollständiger Ausführung den Inhalt von dreizehn Propositionen des Werkes *Über Kugel und Zylinder*, dessen Lektüre für den heutigen Leser durch die griechische Gewohnheit noch erschwert wird, alles in Worten zu sagen und nur in soweit eine Zeichenschrift anzuwenden, dass ein einziges Mal ein Körper durch einen Buchstaben bezeichnet wird. Man kann natürlich, wie ich das hier getan habe, die Beweisführung mittels einer zu diesem Zweck eingeführten Symbolik kürzen und das Ganze etwas übersichtlicher gestalten. Man kann damit aber nicht zu weit gehen, wenn man den Subtilitäten der Eudoxischen Verhältnislehre gerecht bleiben will. Es ist immer

wieder zu erwägen, dass eine Formel wie $\frac{4}{3}\pi R^3$ für Archimedes einfach sinnlos gewesen wäre, da ja R im allgemeinen nicht durch eine Zahl ausgedrückt werden kann.

Am meisten staunt der heutige Leser, und wenn er die erforderliche historische Einstellung nicht aufbringen kann, ärgert er sich sogar darüber, dass die doppelte Reductio ad absurdum jedesmal aufs neue in voller Breite vorgeführt wird, als wäre sie noch niemals vorgekommen. In der Schrift *Über Kugel und Zylinder* kommt sie erst zur Anwendung bei der Ableitung der Oberflächen des Zylinders und des Kegels, dann bei Oberfläche und Inhalt der Kugel und schliesslich noch einmal bei dem Volumen des Kugelsektors und der Oberfläche der Kugelkalotte. Der Gedankengang ist jedesmal genau derselbe. Es trifft darum auch nicht zu, wenn man behauptet, die griechische Mathematik habe keine allgemeinen Methoden besessen, oder etwa die griechische Mathematik mit Handarbeit, die moderne aber mit maschineller Produktion vergleicht. Der griechische Betrieb ist auch eine Fabrik, aber ihre Betriebsführung ist noch nicht rationalisiert.

Ich behandle jetzt die einzige bei Archimedes vorkommende Anwendung der Approximationsmethode, nämlich die Quadratur der Parabel. Es sei (Fig. 2) ACB ein Parabelsegment mit dem Scheitel C und der Grundlinie AB . Man bildet das Dreieck ABC , dessen Fläche wir mit Δ bezeichnen, und schreibt in jedes der beiden entstehenden Segmente aufs neue derartige Dreiecke ein. Ist G der Mittelpunkt von AC und EGH zu CD parallel, dann zeigt man $EG = \frac{1}{2}GH$, also

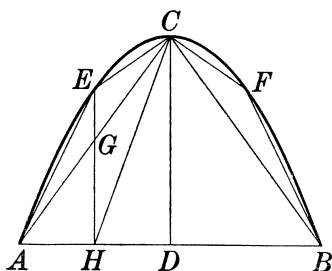


Fig. 2. ACB ist ein Parabelsegment mit Grundlinie AB und Axe CD . Durch die Mitte G von AC geht EGH parallel zu CD .

$$\triangle AEC = \frac{1}{2} \triangle AHC = \frac{1}{8} \triangle ABC,$$

so dass

$$\triangle AEC + \triangle BFC = \frac{1}{4} \Delta.$$

So fortfahrend bekommt man die Folge

$$\Delta, \frac{1}{4}\Delta, \frac{1}{4^2}\Delta, \dots,$$

die in der allgemeinen Formulierung des Verfahrens durch $a_1, a_2, \dots$ bezeichnet wurde. Offenbar ist

$$S_n = \Delta + \frac{1}{4}\Delta + \dots + \frac{1}{4^n}\Delta < \Sigma,$$

wo Σ die Fläche des Parabelsegmentes bedeutet, und es ist leicht, wie es Archimedes ausdrücklich tut, zu beweisen, dass die Differenz $\Sigma - S_n$ beliebig klein gemacht werden kann.

Jetzt ist nur noch die verlangte Grösse K zu ermitteln. Archimedes zeigt

$$\Delta + \frac{1}{4}\Delta + \dots + \frac{1}{4^n}\Delta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}\Delta = \frac{4}{3}\Delta = K.$$

Durch Anwendung der doppelten Reductio ad absurdum ergibt sich jetzt

$$\Sigma = K.$$

Bei dem Studium der Archimedischen Abhandlungen, die sich mit Integrationsproblemen befassen, bleibt bei aller Bewunderung für die Feinheit und Strenge, mit der alles gemacht wird, eine Frage unbeantwortet. Man sieht, dass alles nachträglich so bewiesen werden kann, aber man hat fortwährend die deutliche Empfindung, es könne doch unmöglich so entdeckt worden sein.

Nun ist es noch in unserer Zeit ein typisches Merkmal des mathematischen Stiles, dass der Autor sich selten geneigt zeigt, dem Wunsche des Lesers, nicht nur den Beweis seiner Behauptungen kennenzulernen, sondern auch Einblick darin zu bekommen, wie er sie gefunden hat, Rechnung zu tragen. Er meint, seine Schuldigkeit getan zu haben, wenn alles logisch gut klappt, und er erkennt gar keine Verpflichtung an, den Leser in die vielleicht gar nicht logische Art und Weise einzuweihen, wie er seine Erfindungen gemacht, d. h. oft erfüllt oder erraten hat. In manchen Fällen, nämlich wenn seine Funde einer ihm selbst rätselhaften Intuition entspringen, wäre ihm dies sogar unmöglich. Diese wesentliche Eigentümlichkeit der rein-mathematischen Produktion hat, wie die reine Mathematik selber, ihren Ursprung bei den Griechen, deren Abhandlungen aber das genannte Merkmal in noch viel schrofferer Form zeigen, als wir es jetzt gewohnt sind. Es gibt nichts Unmenschlicheres und Unbarmherzigeres als ein griechisches mathematisches Werk: eine Proposition folgt der anderen, ohne dass jemals etwas über Ursprung, Zusammenhang und Zweck des Ganzen gesagt wird. Man bekommt nicht die mindeste Fühlung mit dem Autor, dessen Persönlichkeit sich hinter der glatten Fassade seines Baues vollkommen versteckt.

Wir wären denn auch im besonderen gänzlich mit der Entstehungsgeschichte der Archimedischen Sätze über Quadratur und Kubatur unbekannt geblieben, wenn er sich nicht einmal herabgelassen hätte, einem Freunde darüber etwas schriftlich mitzuteilen, und wenn nicht ein glücklicher Zufall es so gefügt hätte, dass die Schrift, in der er das getan hat, nachdem Jahrhunderte lang nur die Überlieferung ihres Bestehens lebendig geblieben war, im Jahre 1906 wieder aufgefunden wurde und entziffert

werden konnte. Es ist die an Eratosthenes gerichtete Abhandlung über die Methode der mechanischen Theoreme, kurz *Ephodos* genannt, deren Entdeckung und Publikation durch Heiberg ein grosses Ereignis in der Mathematikgeschichte bildet. Seine Aufmerksamkeit war durch eine Notiz in einem bibliographischen Werk über ein Palimpsest in Jerusalem mit mathematischem Inhalt geweckt worden; einige dort mitgeteilte Zeilen liessen ihn sofort vermuten, es handle sich um ein Archimedisches Werk. Es ergab sich, dass man es mit einem Manuskript zu tun hatte, das eine Anzahl Schriften des Archimedes enthielt, die in einer guten Hand des 10. Jahrhunderts kopiert waren. Einige Jahrhunderte später hatte man versucht, glücklicherweise nur teilweise mit Erfolg, das geschriebene wiederauszuwischen, um Platz für ein Euchologion zu bekommen. Mit Ausnahme einiger hoffnungslos zerstörter Seiten war der ursprüngliche Text mit Hilfe einer Lupe immer noch lesbar. Heiberg konnte so ausser einigen bekannten Schriften ein fehlendes Stück des 2. Buches der Schrift über schwimmende Körper wiederfinden und ausserdem die ganze fehlende *Ephodos*.

Die Veröffentlichung der *Ephodos* im Jahre 1907 hat wie eine Offenbarung gewirkt. Jedermann war immer überzeugt gewesen, Archimedes könne seine Sätze nicht so gefunden haben, wie er sie beweist, aber niemand hatte jemals geahnt, was die Schrift unwiderlegbar enthüllte, nämlich erstens, dass bei der Entdeckung der Resultate, die in den Werken *Über Kugel und Zylinder* und *Quadratur der Parabel* mitgeteilt werden, Theoreme aus der Mechanik eine wesentliche Rolle gespielt hatten, und zweitens, dass dabei eine Auffassung der Konstitution eines geometrischen Gebildes zu Grunde gelegen hatte, die als logisch unhaltbar schon längst aus der offiziellen griechischen Mathematik verbannt war, und die in seinen publizierten Werken zu benutzen Archimedes nie eingefallen wäre. Die angewandten mechanischen Theoreme sind der Hebelsatz und gewisse Sätze über Schwerpunkte ebener oder körperlicher Figuren, die offiziell verpönte Auffassung aber nichts anderes als der in den älteren Phasen der griechischen Mathematik wahrscheinlich als vollgültig angesehene Gedanke, eine Strecke bestehe aus unendlich vielen aneinander gereihten ausdehnungslosen Punkten, eine ebene Figur sei die Summe von unendlich vielen breitelosen Strecken, ein Körper ebenso die Summe seiner ebenen Durchschnitte mit einer variablen Ebene von konstanter Stellung, allgemein, jedes geometrische Gebilde einer bestimmten Dimensionenzahl könne als Anhäufung von unendlich vielen Gebilden niedrigerer Dimensionenzahl, den später sogenannten Indivisibeln, betrachtet werden. Es war dies ein ebenso falscher wie fruchtbarer Gedanke, dem, wie man immer schon gewusst hat, die

Entwicklung der Mathematik im 17. Jahrhundert sehr viel zu verdanken gehabt hat, von dem sich aber jetzt ergab, dass er auch der griechischen Mathematik als heuristisches Hilfsmittel wesentliche Dienste geleistet hatte.

Ich will jetzt zeigen, wie das Verfahren angewandt wird, und wähle dazu dieselben Beispiele, die zur Illustration der strengen Behandlungsweise gedient haben, also die Kugel und die Parabel. Der Rauminhalt der Kugel wird in folgender Weise bestimmt.

Es sei (Fig. 3) $OCAD$ ein grösster Kugelkreis. Der Durchmesser OA wird bis B verlängert, so dass $OB = OA$. Die Ebene durch CD senkrecht zur Zeichenebene schneidet die Kugel in einem Kreis mit dem Durchmesser CD , und über diesem wird der Kegel mit der Spitze O konstruiert. Der Mantel des Kegels wird bis zur Ebene ausgedehnt, die die Kugel in A berührt, und schneidet diese in einem Kreis mit dem Durchmesser EF . Über diesem Kreis wird ein Zylinder errichtet, dessen Höhe der Durchmesser AO ist. Eine variable Ebene senkrecht zu OA schneide die drei Körper in Kreisen mit den Radien RP , RM , RK . Es bedeuten im folgenden

$T(a)$: ein Quadrat mit der Seite a ,

$O(a, b)$: ein Rechteck mit den Seiten a und b ,

$K(a)$: ein Kreis mit dem Durchmesser a .

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} T(RK) + T(RM) &= T(OR) + T(RM) \\ &= T(OM) = O(OR, OA) \\ &= O(OR, PR), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (T(RK) + T(RM), T(PR)) \\ = (O(OR, PR), T(PR)) = (OR, PR) \end{aligned}$$

und also auch

$$\begin{aligned} (K(KL) + K(MN), K(PQ)) \\ = (OR, PR) = (OR, OA). \end{aligned}$$

Archimedes fasst nun die Strecke BA als Wagebalken auf, der in O unterstützt ist. Er denkt sich die beiden Kreise, in denen die variable Ebene den Kegel und die Kugel schneidet, mit ihren Mittelpunkten in B aufgehängt und lässt den Schnittkreis des Zylinders an seiner Stelle (*in loco*). Dann hält nach dem Hebelsatz dieser Kreis *in loco* die beiden anderen

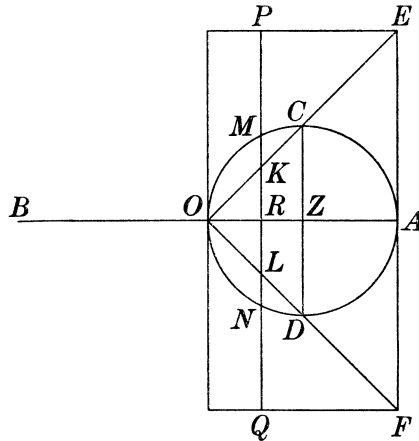


Fig. 3. An dem gleicharmigen Hebel AB mit Unterstützungspunkt O hält der Zylinder mit Grundfläche EF und Höhe OA die Kugel mit Durchmesser OA und den Kegel OEF , zusammen in B aufgehängt, im Gleichgewicht.

Kreise in B im Gleichgewicht. Also hält der Zylinder *in loco* Kegel und Kugel in B im Gleichgewicht. Da der Schwerpunkt des Zylinders in Z liegt und $OB = 2 \cdot OZ$ ist, folgt:

$$\text{Kegel } OEF + \text{Kugel} = \frac{1}{2} \text{ Zylinder} = \frac{3}{2} \text{ Kegel } OEF,$$

also

$$\text{Kugel} = \frac{1}{2} \text{ Kegel } OEF = 4 \text{ Kegel } OCD.$$

Archimedes erzählt, erst nachdem er diesen Satz gefunden habe (er macht ausdrücklich darauf aufmerksam, dass die Ableitung kein Beweis ist), sei ihm der Gedanke gekommen, es könne bei der Kugel eine ähnliche Beziehung zwischen Oberfläche und Inhalt bestehen wie bei dem Kreis zwischen Umfang und Fläche. Der Kreis ist einem Dreieck gleich, das den Umfang zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat. Wenn in ähnlicher Weise die Kugel einem Kegel gleich wäre, müsste die Grundfläche dieses Kegels das Vierfache eines grössten Kugelkreises sein, und so gross wäre dann auch die Kugelfläche. Dieser Satz, der in der offiziellen Publikation dem Satz über den Rauminhalt vorangeht und zu dessen Begründung dient, ist also später gefunden als dieser. Der Unterschied zwischen Entdecken und Beweisen lässt sich kaum eindrucksvoller illustrieren.

Ich behandle jetzt nach dieser Methode die Parabelquadratur (Fig. 4). Es sei T der Scheitel eines Parabelsegments TAB und CD eine beliebige Ordinate, die verlängert die Tangente der Parabel in B in E schneide. Es sei weiter AO parallel zu CD und $OK = OB$. Jetzt gilt nach einem elementaren Satz der antiken Lehre von den Kegelschnitten

$$(CD, ED) = (AD, AB), \text{ also auch } (CD, ED) = (OE, OB),$$

also

$$(CD, ED) = (OE, OK).$$

Man denke sich nun CD nach dem Endpunkte K des gleicharmigen Hebels KB mit dem Drehpunkt O versetzt. Dann halten CD in K und ED *in loco* einander im Gleichgewicht. Macht man es so mit jeder Ordinate, dann hängt schliesslich das ganze Parabelsegment, als Summe seiner Linien betrachtet, in K und hält dort das Dreieck BOA im Gleichgewicht. Nun liege der Schwerpunkt dieses Dreiecks in S ; das ganze Dreieck kann also als an F hängend betrachtet werden, wenn $OF = \frac{1}{3}OB$. Da $OK = 3 \cdot OF$, folgt jetzt nach dem Hebelsatz:

$$\text{Parabelsegment} = \frac{1}{3} \triangle OAB = \frac{4}{3} \triangle TAB,$$

wodurch die Parabelquadratur gefunden ist.

Das nämliche Resultat wird *K* in der Schrift *Quadratur der Parabel* zweimal ganz streng bewiesen, ohne dass das geübte heuristische Verfahren auch nur mit einem Worte gestreift würde, und zwar das eine Mal ohne, das andere mit Benutzung des Hebels.

Bei dem Studium der *Ephodos* erhebt sich die Frage, aus welchem Grunde Archimedes eigentlich den in dieser Schrift gegebenen Ableitungen so ausdrücklich den Rang echter Beweise abspricht; diese Frage wird in der historisch-mathematischen Literatur bisweilen

so beantwortet, dass man darauf hinweist, in diesen Ableitungen werde von den aus der empirischen Sinnenwelt entnommenen Begriffen Wagebalken, Unterstützungspunkt, Schwerpunkt u. s. w. Gebrauch gemacht, und das widerstreite der strengen Auffassung von der ideellen Natur der mathematischen Objekte. Diese Auffassung muss aus folgenden Gründen abgewiesen werden:

1) In der bei seinen Lebzeiten offiziell publizierten Schrift *Quadratur der Parabel*, für die er also die volle wissenschaftliche Verantwortung übernahm, wendet Archimedes ebenfalls die baryzentrische Methode an, und diese kann also an und für sich seiner Meinung nach der mathematischen Strenge keinen Abbruch getan haben.

2) Die Lehre vom Hebel wird in einer speziellen Schrift *Gleichgewicht ebener Figuren* axiomatisch fundiert und kann also als ein Zweig der reinen Mathematik angesehen werden.

Diese Überlegung weist uns nun aber auch den Weg, auf dem wir das Motiv der Verwerfung der *Ephodos-Methode* zu suchen haben; es muss in einem Merkmal der angewandten Beweisführung liegen, das 1) in keinem der offiziell publizierten Werke vorkommt und 2) in der reinen Mathematik nicht haltbar ist. Als ein solches Merkmal bietet sich aber ausschliesslich die Verwendung der Indivisibeln dar, und diese, nicht die Anwendung von Begriffen und Sätzen der theoretischen Mechanik, ist der Anlass dazu gewesen, dass alle in der *Ephodos* kurz und leicht gefundenen

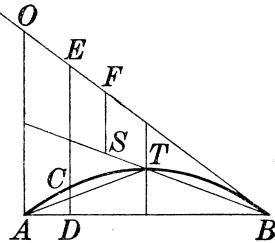


Fig. 4. *ATB* ist ein Parabelbogen mit Scheitel *T*. In *B* wird die Parabel von *OB* berührt. *KOB* ist ein gleicharmiger Hebel mit Unterstützungspunkt *O*. Das Parabelsegment, aufgehängt in *K*, hält das Dreieck *OAB* in loco im Gleichgewicht.

Resultate in den Schriften durch die komplizierten Beweise mit Hilfe der doppelten Reductio ad absurdum unterbaut sind.

Dieser an sich schon einleuchtende Schluss wird in wirksamster Weise durch folgende Überlegung unterstützt. Der Schrift *Über Kugel und Zylinder* liegen einige Axiome zu Grunde, unter denen als fünftes die folgende Aussage vorkommt:

Von zwei ungleichen Linien, ungleichen Oberflächen, ungleichen Inhalten übertrifft die (der) grössere die (den) kleinere (kleineren) um eine solche Grösse, die, hinreichend oft zu sich selbst addiert, jede beliebig vorgegebene Grösse von der Art der verglichenen übertreffen kann.

Andererseits haben wir schon das Eudoxische Axiom kennen gelernt, das zwei Grössen der Forderung unterwirft, jede von beiden könne so oft zu sich selbst addiert werden, dass das Resultat die andere übertrifft. Es erhebt sich hier zuerst die Frage, in welchem Verhältnis das von Archimedes formulierte Axiom zu dem Eudoxischen steht. Diese Frage wird in der Literatur in der Regel so beantwortet, dass man die Archimedische Forderung einfach als eine Wiederholung der Eudoxischen auffasst und darum entweder vom Eudoxischen oder vom Archimedischen Axiom redet, auch wohl darüber streitet, welche Benennung wohl den Vorzug verdiene. Nun muss es aber als äusserst unwahrscheinlich betrachtet werden, dass Archimedes neben den anderen originellen Axiomen der Schrift *Über Kugel und Zylinder* auch noch einmal, und zwar ausführlich und nachdrücklich, ein bereits von Eudoxos ausgesprochenes und allgemein bekanntes Axiom einfach aufs neue formuliert hätte. Tatsächlich ist dieses Axiom auch keine Wiederholung des Eudoxischen, sondern eine höchst notwendige Ergänzung desselben; es sagt aus, dass wenn zwei Grössen gleichartig sind (ein Verhältnis zu einander haben), auch ihre Differenz mit ihnen gleichartig ist, was Euklid in den Beweisen der Verhältnislehre zwar benutzt, aber nirgendwo postuliert hatte; offenbar ist ihm der Gedanke, man könne es bezweifeln, niemals gekommen. Archimedes aber sieht ein, diese Aussage könne nicht nur bezweifelt werden, sondern sie werde in der Indivisibelnlehre sogar tatsächlich verneint: wenn nämlich ein Körper die Summe paralleler Durchschnitte ist, kann jeder Durchschnitt als die Differenz zweier Körper aufgefasst werden, ist dann aber mit keinem dieser Körper gleichartig.

Man braucht sich also gar nicht darüber zu streiten, ob man Eudoxisches oder Archimedisches Axiom sagen soll, denn es handelt sich um zwei verschiedene Aussagen, von denen die letztere den sehr bestimmten Zweck hat, den Gedanken der Indivisibeln oder der geometrischen Atomistik *a limine* auszuschliessen.

Dass Archimedes in der Schrift *Gleichgewicht ebener Figuren* einen Zweig

der Mechanik, nämlich die Statik, mathematisch zu behandeln gelehrt hatte, mag, wie sich gezeigt hat, für sein mathematisches Werk eine beträchtliche Bedeutung besitzen. Von noch viel grösserer und noch prinzipiellerer Wichtigkeit ist es, wenn wir es vom naturwissenschaftlichen Standpunkt aus betrachten. Er zeigte hier nämlich die Möglichkeit, ein Stück Naturwissenschaft rein axiomatisch zu fundieren und es auf der dadurch gewonnenen Grundlage in vollkommener Strenge aufzubauen. Er verhalf dadurch der pythagoreisch-platonischen Überzeugung, die Struktur der physischen Welt sei von mathematischer Natur und die Mathematik also ein wesentliches Element der Physik, zu neuem Ansehen und eröffnete der Mathematisierung der Naturwissenschaft den Weg, auf dem sie in späteren Jahrhunderten ihre grössten Triumphe feiern sollte.

Nicht weniger wichtig war es aus dem nämlichen Gesichtspunkte, dass er auch die Hydrostatik der mathematischen Behandlung zugänglich machte. In dem ersten Buche der Schrift *Über schwimmende Körper* leitet er das noch immer nach ihm benannte hydrostatische Gesetz vom Auftrieb aus vorangestellten Axiomen ab, und in dem zweiten gibt er neue Proben seiner unerhörten mathematischen Genialität durch einfach staunenswerte Untersuchungen über die stabilen Gleichgewichtszustände schwimmender Rotationsparaboloide. Diese Untersuchungen gehören zu den schönsten Erzeugnissen des Archimedischen Genius.

Archimedes hat in der Antike keine Nachfolger gehabt. Er ist sogar selbst ziemlich weitgehend in Vergessenheit geraten, und eigentlich hat sich nur die Kunde von gewissen technischen Errungenschaften, von seinem Planetarium, seiner Wasserorgel, von einem grossen von ihm entworfenen Schiff und vor allem von den ballistischen Werkzeugen und Brennspiegeln, mit denen er, wie die Legende berichtet, im zweiten punischen Krieg seine Vaterstadt gegen die Römer verteidigen half, erhalten. Das spätere Altertum kennt ihn nur noch als Mechaniker, und im frühen Mittelalter ist es nicht anders gewesen. Seine Schriften haben aber in der Wiederbelebung der Wissenschaft im 16. und 17. Jahrhundert auf höherer Stufe das nämliche geleistet wie die *Elemente* des Euklid auf elementarem Niveau: sie eröffneten den westeuropäischen Gelehrten die Wunderwelt der griechischen Mathematik und, indem sie ihnen ungeahnte Möglichkeiten erschlossen, gaben sie ihnen gleichzeitig den mächtigen Ansporn, erst die Höhe des antiken Könnens zu erreichen und dann in eigener Forschung darüber hinaus zu gehen.

Archimedes gehört nunmehr ganz der Geschichte an; in dieser wird er aber ewig fortleben als einer der grossen antiken Begründer der modernen Mathematik.

NÅGOT OM LABORATIV METODIK VID MATEMATIKUNDERVISNINGEN

FREDRIK EHRNST

Jag hade för flera år sedan tillfälle att åhöra en lektion, under vilken läraren genomgick division i allmänna bråk. Han hade tidigare inlärt invertering, och nu deklarerade han: Man skall multiplicera med divisorns inverterade värde. Den ene efter den andre av eleverna fick stå upp och rabbla upp denna ramsa, och sedan fick de träningsräkna. Denne lärare var mycket uppskattad av föräldrarna, därför att han bibringade barnen fasta kunskaper. Undervisningen utmärktes av ordning, reda och disciplin. Strax efteråt fick jag följa en annan lärares framställning av samma område. Denne började med några huvudräkningsuppgifter av följande typ: $1\frac{1}{2}$ kg kaffe kostade 9 kr. Vad kostade då 1 kg? Sedan barnen lämnat sina svar, fick de redogöra för hur de kommit fram till sina resultat. En hade först räknat ut, att $\frac{1}{2}$ kg kostade 3 kr, den andre insåg, att 3 kg måste kosta 18 kr, och den tredje förvandlade först $1\frac{1}{2}$ till decimalbråk. De olika metoderna gavs namn, t. ex. Petterssons metod och Karlssons metod. Så diskuterades villkorns sätt som var bäst. Det hela byggdes upp successivt och förde så småningom fram till divisionstekniken vid allmänna bråk. Undervisningen präglades av arbetsglädje och trivsel. Det tog emellertid sin tid. Då jag frågade läraren, om man kunde begära, att alla eleverna skulle fatta innebörden av division med allmänna bråk, fick jag till svar, att han var nöjd, om ungefär tre fjärdedelar av klassen var aktiva och medverkade vid denna uppbyggnadsprocess. I alla händelser fick man ej hålla på för länge med den utan rätt snart övergå till fasta normer och regler. Minnet blev annars belamrat med olika metoder att begagna vid de från varandra rätt skilda uppgifter, som förekom. Barnen behöva, påpekades det, några fasta linjer att gå efter. De acceptera lärarens auktoritet, och förr eller senare är det endast regeln, som står kvar, vägen fram till den är bortglömd.

Dock håller jag före, att det är många värdefulla moment, som går förlorade, om man ej strävar efter att få elevernas medverkan vid inlärningsprocessen. Kunskaperna skall ej målas på utan helst växa till inifrån. Och detta gäller på alla stadier. Man skall emellertid ha klart för

sig det mål man strävar efter att uppnå på den tillmätta tiden. Gäller det undervisningen på en teknisk skola, så är det väl de matematiska kunskaperna, som är främsta målet. Eleverna skall lära sig hantera vissa hjälpmedel, logaritmer, derivator, integraler, för att kunna lösa uppgifter, som de ställs inför i andra ämnen såsom i fysik, mekanik m. fl. Vid våra allmänna läroverk har matematikundervisningen dessutom som viktigt mål att främja elevernas allmänna intellektuella utveckling. Man ger dem uppgifter, där de få söka sig fram på olika vägar. Deras förmåga av initiativ, att arbeta på egen hand och att mer eller mindre självständigt genomföra en undersökning skall befräjas.

Men mången gång glömmar eller försummar man denna målsättning vid undervisningen. Läraren dominerar i alltför hög grad, då han meddelar kunskaperna. Satserna serveras färdiglagade i elegant skick. Ibland efter en föreläsning i matematik vid högskolan önskade mina kamrater och jag, att vi hade fått ta del av de tankeprocesser, associationer m. m., som hade fört fram till satsen i dess slutliga skick. Vi önskade få en inblick i själva forskningsarbetet. Detsamma gäller mången gång inom skolans värld. Man bör ej ha för bråttom att komma fram till »formeln» i dess generella slutliga form utan i stället ägna viss tid åt förberedande speciella problem med givna talvärden. Eleverna skall vänjas att själva göra de successiva generaliseringar, som krävs. På så sätt blir lektionen en undersökning, som i viss mån påminner om gången vid laborationerna i fysik. Läraren endast ger små impulser, och det är eleverna, som verkar.

Jag vill ge ett exempel på hur en sådan undersökning kan tillgå. Det är en första realring, och man har ägnat någon tid åt repetition av algebra och geometri. Vi börjar med en triangel ABC , där vinkeln A är 90° och B är 60° . Jag ber eleverna beräkna vinkeln v mellan bissektriserna till vinklarna B och C . Sedan detta är gjort, ber jag dem göra samma beräkning, om vinkeln B är 55° och frågar sedan: Vad skall vi nu göra? Flera är beredda att fortsätta med vinkeln $B = 50^\circ$ etc., men något ljushuvud vill kanske angripa det generellt och sätta vinkeln $B = \beta$. Sedan man funnit, att $v = 135^\circ$ oberoende av β , frågar jag dem, om någon har något uppslag till vidare undersökning. De förstå nog inte innebörden i frågan, men jag föreslår då själv en motsvarande undersökning, om vinkeln $A = 60^\circ$. Sedan kommer av sig självt problemet, om vinkeln A är exempelvis 120° . Att ur dessa tre värden söka finna ut lagsambandet kan vara lockande, men det är inte lätt för flertalet elever på detta stadium att genomföra den generella undersökningen då vinkeln A är godtycklig ($= \alpha$) och dessutom vinkeln B är variabel ($= \beta$). Den formel man kommer fram till,

$v = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, är ju intressant, men man bör påpeka för eleverna, att de

inte ha någon större användning av den vid problemlösning. Det är inte formeln i och för sig utan undersökningen, som är av värde. En eventuell fortsättning av uppgiften kan gälla beräkningen av vinkeln mellan bissekttriserna till yttervinklarna vid B och C . Sedan låter jag α gå mot noll, linjerna bli parallella, och man kommer fram till satsen, att vinkeln mellan bissekttriserna till ett par motställda vinklar (vid parallella linjer) är 90° .

Ett annat exempel är följande: I stället för att ge eleverna definitionen på ett prisma tar jag med till klassen på en bricka en del stereometriska kroppar: tre-, fyr- och femsidiga prismor, några räta, några sneda, en del parallelepipeder, raka och sneda pyramider, parallellt och icke parallellt stympade pyramider, reguljära polyedrar, cylindrar och koner. Jag ber några elever i tur och ordning sortera ut de kroppar, som enligt deras uppfattning äro prismor. Slutligen gör jag själv uppdelningen och ber eleverna söka formulera någon definition på prismor. Här gäller det att ur ett heterogent material finna ut de väsentliga gemensamma egenskaper, som tillkomma vissa medlemmar i mängden. Jag vill på detta sätt uppo- öva elevernas förmåga att klassificera.

I våra gängse läroböcker finns många uppslag till liknande diskussioner och undersökningar. Det gäller endast att tillvarataga dem. Största hindret att i större utsträckning ordna undervisningen på detta sätt är väl att läraren har för bråttom — han skall hinna med »kursen» —. Han drivs av en känsla att lektionen blir effektiv endast om han får verka och lära bort så mycket som möjligt. Eleverna skall kunna de metoder han lärt dem till vissa typexempel. Detsamma gäller för övrigt och kanske i ännu större utsträckning inom geometrien. Eleverna skall enligt somliga lärare i främsta rummet säkert behärska bevisen för vissa satser. Samma motsatsförhållande, som här nämnts rörande formerna för undervisningen i matematik, gäller f. ö. i andra ämnen t. ex. kristendom, där ytterligheterna utgöras av »katekesplugg» och »fri diskussion över religionens problem».

Till slut vill jag framhålla, att det nog är många matematiklärare, som var och en på sitt håll prövar sig fram på liknande vägar, som jag ovan antytt. Det faller sig emellertid så svårt att orda om det, och ännu mindre benägen är man att skriva om det. Men man bör ej draga sig för att delgiva kolleger erfarenheter och rön från sin egen undervisning.

Det skulle vara intressant att få reda på olika försök och strävanden, som gjorts i matematikundervisningen för att få den mera intresseväckande för eleverna. NMT:s läsare äro välkomna att sända in bidrag, som belysa sådana pedagogiska frågor.

Anm. från red.

MONTE CARLO-METODEN*

GERMUND DAHLQUIST

1. Inledning. I rapporter om verksamheten vid amerikanska matematikmaskiner har det ofta nämnts, att problem behandlats med en ny teknik med det fantasieggande namnet »Monte Carlo-metoden». Den innebär, att *man konstruerar ett hasardspel, vari medelvärdet för en eller flera storheter satisfierar en given ekvation, genomför spelet ett stort antal gånger och uppskattar de sökta storheterna med traditionella statistiska metoder.*

Metoden har tydligen i och för sig ingenting med matematikmaskiner att göra, mer än att den ofta kräver ett arbete av sådan omfattning, att sådana maskiner är nödvändiga. Den leder också vanligen till enkla räkneprogram, vilket är en stor fördel i samband med matematikmaskiner. Några statistiker har förargat sig över det nya namnet och påpekat, att metoden är identisk med ett förfarande, som länge använts för studium av problem inom sannoliketskalkylen, bl. a. under beteckningen »artificial sampling». Fördelningen av »Student's t » erhöles t. ex. först på detta sätt. Den kände engelske statistikern Karl Pearson gjorde talrika tillämpningar av metoden för studium av fördelningar i sådana fall, då analytiska och numeriska metoder blev obekväma. Det var för dessa ändamål, som hans elev Tippet förfärdigade en mycket använd tabell över *slumpvisa tal* (»random numbers»), som innehåller siffror, som kan betraktas som oberoende observationer av en stokastisk variabel, som med lika stora sannolikheter antar vart och ett av värdena 0, 1, 2, ... 9. Senare har Kendall och Babington Smith [12] gjort sådana tabeller av liknande anledning.

Kanske har någon läsare resignerat vid ett försök att beräkna sannolikheten, att favoritpatiensen skall gå ut. Kombinatoriska formler blir

* Nordisk Matematisk Tidskrift bringer her en artikkel som i vanskelighetsgrad ligger til dels betydelig over det vanlige nivå. Når redaksjonen likevel har funnet det riktig å ta inn artikkelen, skyldes det at den gir en verdifull oversikt over et nytt og viktig felt av matematikken, og et felt hvor en samlet fremstilling hittil har vært savnet.

Vi håper at de fleste lesere ihvertfall kan studere visse partier av artikkelen med utbytte. Redaksjonen mener at det av og til kan være berettiget å bringe litt vanskeligere stoff, når en bare — som i dette tilfelle — passer på at hvert hefte også inneholder tilstrekkelig av elementære artikler.

lätt mycket tunga, och det kan vara svårt att se, hur man bör approximera. Det enklaste (och roligaste) sättet att få resultatet med t. ex. 10% noggrannhet är att lägga patientsen kanske några hundra gånger och föra statistik över resultatet, om sannolikheten inte är alltför liten. Detta är på sätt och vis en naiv tillämpning av Monte Carlo-metoden, men i likhet med de andra exemplen inbjuder redan problemets ursprungliga formulering till denna ansats. Något spel behöver inte *konstrueras*.

Det finns alltså problem, som kan formuleras både matematiskt och i hasardspelsterminologi, där en direkt statistisk lösning är värd att beakta. Inom matematiska statistiken finns en stor klass av matematiska problem i tämligen generell form, t. ex. multipelintegraler, linjära ekvationssystem, rand- och egenvärdesproblem vid differentialekvationer, andra typer av funktionalekvationer. Frågan är nu: när är den statistiska ansatsen något att tänka på vid numeriska problem? Idén att denna fråga bör studeras systematiskt, är troligen av betydligt senare datum än de nämnda exemplen. I detta sammanhang bör bl. a. v. Neumann, Ulam och Wilks nämnas¹). Tyvärr måste man nog säga, att tillämpningarna på de *klassiska* numeriska problemställningarna hittills inte varit särskilt framgångsrika. Traditionella numeriska metoder såsom t. ex. elimination eller någon typ av iteration, ger vanligen mycket större noggrannhet med samma arbete. Med undantag för multipelintegralproblemen känner författaren ännu inte något exempel på motsatsen.

Trots detta förtjänar metoden att diskuteras. Många viktiga speciella numeriska problem innehåller statistiska element (t. ex. i atomfysiken, operationsforskningen, trafikteorin eller genetiken), och för sådana problem ger Monte Carlo-metoden ibland en direkt angreppspunkt, som man kan sätta i gång arbete med och även nå preliminära resultat med, innan man hunnit utveckla den lämpliga formen för problemet till behandling med approximationsmetoder av konventionell typ. (Jämför patientsproblemet!) Man bör emellertid minnas, att den statistiska formuleringen inte är entydigt bestämd av problemet, och vi skall se i avsnitt 3 och 7, att man kan vinna mycket genom att modifiera den närmast till hands liggande ansatsen.

En *kombination* av Monte Carlo-metoden med traditionella metoder har med framgång prövats av Kahn [10, 11, 14] m. fl. på atomfysikaliska problem, och de möjligheter, som öppnar sig härigenom har ännu inte belysts helt. Vidare är det inte uteslutet, att man kan få resultat av typen: »För invertering av stora matriser av den eller den speciella strukturen, som är vanlig i den eller den teorin finns det en Monte Carlo-

¹ Utvecklingen av teorin för stokastiska processer på senare år har troligen varit en av inspirationskällorna.

metod, som är överlägsen alla traditionella eliminations- och iterationsförfaranden, när man endast kräver en noggrannhet av några procent, som där är tillräcklig. Men säkerställda resultat av den karaktären saknas än så länge.

2. Bestämda integraler. Vi skall först betrakta ett enkelt exempel. Låt x och y vara två oberoende observationer av en stokastisk variabel, rektangulärfördelad i intervallet $(0, 1)$. Sannolikheten att $x^2 + y^2 \leq 1$ är då tydligen lika med arean av den del av enhetscirkeln, som ligger i första kvadranten, dvs. $\frac{1}{4}\pi$. Talet π kan alltså uppskattas med följande »spel»: Tag t. ex. fyra på varandra följande siffror i Kendall-Smiths tabeller, och låt dem vara fyra decimaler i x . Vi nöjer oss med den noggrannheten. För y tages de fyra följande siffrorna. Räkna ut $x^2 + y^2$. Upprepa detta med N punkter (x, y) . Beräkna relativa frekvensen f av punkter, för vilka $x^2 + y^2 \leq 1$, och multiplicera denna med 4.

Metoden har ett *försumbart systematiskt fel* genom avrundningen. (Detta minskas f. ö. ytterligare, om man korregerar x och y med $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ före beräkningen av $x^2 + y^2$.) Betydligt viktigare är den relativa medelav-

vikelsen, som enligt en känd formel är $\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{4}\pi N}} \approx \frac{1}{2\sqrt{N}}$. Med t. ex. 100

punkter får man alltså ungefär 5% relativ medelavvikelse. Om man i stället drar systematiska stickprov genom att dela in enhetskvadraten i första kvadranten i 10×10 kvadratiske rutor, så kommer medelpunkterna till 79 av rutorna att ligga inom cirkeln, varav $\frac{1}{4}\pi \approx 0,79$. Systematiska felet i denna uppskattning är endast 0,6%. Enligt kända resultat i geometriska talteorin (se [13]) är för stora N detta systematiska fel $o(N^{-2/3})$, och man känner också en gräns åt andra hållet: felet avtar inte snabbare än $N^{-3/4}$. Här är alltså den systematiska stickprovsdragningen klart gynnsammare än den slumpvisa. Simpsons regel och andra formler, som bygger på polynominterpolation ger naturligtvis mycket större noggrannhet per punkt än bägge dessa förfaranden. Vid beräkning av arean av en yta, som definieras genom olikheter, ger visserligen stickprovsmetoderna enklare funktionsberäkningar och därigenom ett enkelt räkneprogram och mindre arbete per punkt, men i stort sett är den rena stickprovsmetodiken utan intresse i två dimensioner.

I flera dimensioner ställer sig saken annorlunda. Låt K vara en kub i den k -dimensionella euklidiska rymden, med axelparallella kanter av längden 1. Varje kant indelas i h^{-1} lika stora delintervall, vilket ger en indelning av kuben i $N = h^{-k}$ kuber K_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$), vardera av volymen h^k . Vi skall jämföra tre uppskattningar av multipelintegralen $I = \int_K f dx$,

där $f(x)$ är en funktion av vektorn $x = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}\}$, definierad i kubens K , och som där har kontinuerliga partiella derivator av fjärde ordningen.

Först betraktar vi den systematiska provtagningen. Låt $x_1, x_2, \dots, x_N$ vara medelpunkterna av kuberna $K_1, K_2, \dots, K_N$. Integralen approximeras av medeltalet av storheterna $f(x_v)$. Av Taylor's formel följer efter integration:

$$(1) \quad \int_{K_v} f dx = h^k \cdot [f(x_v) + \frac{h^2}{24} \cdot \nabla^2 f(x_v) + O(h^4)],$$

där

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^{(1)2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{(2)2}} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x^{(k)2}}.$$

Alltså är

$$\int_K f dx - \frac{1}{N} \sum_v f(x_v) = \frac{h^2}{24} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_v \nabla^2 f(x_v) + O(h^4) = \frac{N^{-2/k}}{24} \cdot \int_K \nabla^2 f \cdot dx + O(h^4).$$

Det systematiska felet avtar alltså inte snabbare än $N^{-2/k}$, eftersom i allmänhet

$$\int_K \nabla^2 f \cdot dx \neq 0.$$

Betrakta sedan den enklaste Monte Carlo-metoden. Antag då, att $x_1, x_2, \dots, x_N$ är N oberoende observationer av en stokastisk variabel X , som har en homogen sannolikhetsfördelning i K . Sätt

$$S = \frac{1}{N} \sum_v f(x_v).$$

Då är medelvärde och varians²⁾ för S :

$$E[S] = E[f(X)] = \int_K f(x) dx = I$$

$$D^2[S] = \frac{1}{N} \{E[f^2] - E[f]^2\} = \frac{1}{N} \left\{ \int_K f^2 dx - I^2 \right\}.$$

Medelavvikelsen för S avtar alltså så snabbt som $N^{-1/2}$, och det är snabbare än vad det systematiska felet avtar vid den systematiska provtagningen, när $k \geq 5$. Här har vi alltså ett fall, där Monte Carlo-metoden kan vara en effektiv numerisk metod³⁾.

²⁾ Beteckningssättet följer i huvudsak Cramér [1].

³⁾ Thomas [15] kommer till ett annat resultat i denna fråga. Författaren kan inte inse, att Thomas' argumentering är bindande.

En motsvarighet till Simpsons regel får man genom att i (1) approximera $h^2 \nabla^2 f$ på enklaste sätt med centraldifferenser. Med denna formel blir felet av storleksordningen $h^4 = N^{-4/k}$, som är bättre än Monte Carlo-metoden för $k < 8$.

Nu bör man i numeriska sammanhang alltid ta asymptotiska uppskattningar med en nypa salt. För höga värden på k , låt oss säga för $k \geq 6$, måste N vara mycket stort för att $h = N^{-1/k}$ skall kunna betraktas som »litet». Detta innebär emellertid inte enbart, att asymptotiska formler blir tvivelaktiga, utan även att de argument, som kunde tänkas tala för användningen av ett regelbundet gitter, vacklar. Det är därför tänkbart, att Monte Carlo-metoden i praktiken konkurrerar framgångsrikt med den generaliserade Simpsonska regeln även för $k < 8$. Om integrationsområdet är mer invecklat, t. ex. definierat av en eller flera algebraiska olikheter, tillkommer svårigheter vid randpunkterna, om man använder ett kubiskt gitter, och dessa är väsentliga vid högre dimensions-tal, ty antalet randpunkter är av storleksordningen $h^{-(k-1)} = hN$. Då får man välja mellan att komplicera räkneprogrammet eller att minska noggrannheten.

Som exempel kan nämnas, att man redan för den fyrdimensionella enhetssfärens volym $\frac{1}{2}\pi^2$ med $4^4 = 256$ punkter erhåller en relativ medelavvikelse på c:a 9% med slumpvis provtagning, medan det systematiska relativa felet är c:a 4% med samma antal regelbundet ordnade stickprov i första »kvadranten».

Ett något mer invecklat exempel behandlade författaren för ett par år sedan på den svenska relämaskinen BARK — enbart i experiment-syfte. Det gällde att beräkna gravitationspotentialen Φ mellan två homogena klot K_1 och K_2 med massan 1 och radien 1 och centralavståndet 10. Sättes gravitationskonstanten lika med 1, så är resultatet som bekant $\Phi = 0,1$. Om P_1 och P_2 är två godtyckliga punkter i respektive klot med inbördes avstånd r_{12} , omgivna av masselementen dP_1 resp. dP_2 , så gäller

$$\Phi = \int_{K_1} \int_{K_2} \frac{dP_1 dP_2}{r_{12}}.$$

Denna (sexdimensionella) integral kan tolkas som medelvärdet av $1/r_{12}$, om P_1 och P_2 väljes slumpvis i kloten. BARK försågs med slumpvisa koordinater x, y, z , som var rektangulärfördelade i intervallet $(-1, 1)$ (se avsnitt 4), men endast de koordinat-triplar för vilka $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ accepterades. Räkningarna avbröts, när 500 accepterade punktpar erhöles. Skattningen av $E[1/r_{12}]$ blev 0,10004. Medelfelet i medeltalet skattades till 0,00028, vilket stämmer med det teoretiska värdet.

För att få 1000 accepterade punkter behövdes 1894 försök, varur man f. ö. kan erhålla uppskattningen $\pi \approx 6000/1894 \approx 3,17$.

Det här exemplet visar bl. a. att det ibland hörda påståendet att »Monte Carlo-metoden kan med en rimlig mängd arbete endast ge 2 à 3 decimala siffror» måste preciseras. Däremot gäller det allmänt, att medelavvikelsen endast avtar proportionellt mot kvadratroten ur arbetsmängden.

3. »Importance sampling». Till skillnad från andra statistiska provtagningsproblem har man vid Monte Carlo-metoden frihet att välja själva populationen, som stickprov skall dras ur. Vi skall se på ett enkelt exempel av Kahn [11], att valet av population kan inverka starkt på metodens effektivitet. Låt A vara ett område med volymen 1. Integralen

$$I = \int_A f(x) dx$$

kan tolkas som medelvärdet $E[f(X)]$, där X är en stokastisk variabel med homogen fördelning i A . Den kan emellertid tolkas allmännare som

$E\left[\frac{f(X)}{g(X)}\right]$, där X nu betyder en variabel med sannolikhetstätheten $g(x)$ i området A , ty

$$I = \int_A \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) dx.$$

Antag, att $x_1, x_2, \dots, x_N$ är en serie oberoende observationer av X . Hur beror variansen av skattningen

$$S = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \frac{f(x_v)}{g(x_v)}$$

på valet av $g(x)$? Medelvärde och varians är

$$E[S] = I, \quad D^2[S] = \frac{1}{N} \left(\int_A \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}^2 g(x) dx - I^2 \right).$$

Mindre varians betyder större noggrannhet per arbetsmängd. Problemet att söka minimum av $D^2[S]$ med bivillkoren $\int_A g(x) dx = 1$, $g(x) \geq 0$ kan

behandlas med variationskalkyl. (Man sätter lämpligen $g(x) = h(x)^2$.) Resultatet är, att minimum inträffar, då $g(x)$ är proportionell mot $|f(x)|$, dvs.

$$g(x) = \frac{|f(x)|}{\int_A |f(x)| dx}.$$

Varje intervall bör representeras i proportion till dess betydelse för slutresultatet. Detta kallas »importance sampling». Sådan provtagning ger väsentliga förbättringar, i synnerhet då $f(x)$ varierar inom vida gränser. Om $f(x) \geq 0$ i hela intervallet, så är minimivariansen noll, vilket f. ö. då kan inses direkt. Någon bokstavlig tillämpning av detta resultat kan det inte bli tal om; i fallet $f(x) \geq 0$ skulle en sådan ju kräva, att man kände $\int_A f(x)dx$, dvs. att problemet redan vore löst! Men resultatet visar,

att det närmast till hands liggande populationsvalet inte alltid är det bästa, och det ger en »tumregel» av allmän räckvidd: man bör försöka dimensionera ett Monte Carlo-spel så, att sannolikheten för varje möjligt spelförlopp står ungefär i proportion till medelvärdet för dess bidrag till slutresultatet. Om spelets *längd* är en statistisk variabel, så måste man även ta hänsyn därtill. Man bör också tänka på, att mer komplicerade stickprovsförfaranden vanligen kräver mer förberedelsearbete och att de även kräver längre tid per genomfört spel än en mer rakt på sak gående metod.

4. Slumpvisa tal. I stället för roulette eller tärning använder man vid Monte Carlo-spelen vanligen serier av slumpvisa tal för att dirigera de sannolikhetsmässiga valen. I förordet till Kendall-Smiths tabeller och den där citerade litteraturen diskuteras några principiella och praktiska problem, som är gemensamma för all produktion och prövning av sådana serier. Det gäller framför allt att undvika frekvensfelaktigheter och korrelationer i serierna. Här skall vi endast ta upp några synpunkter på användningen av slumpvisa tal vid matematikmaskiner.

Det primitivaste sättet är att alstra de slumpvisa talen utanför maskinen, direkt eller indirekt i en form, som kan läsas av maskinens inmatningsorgan, t. ex. på hålremsa eller hålkort. Vid några försök med artificiella tidsserier, som nyligen gjorts på BARK [7], stansades i förväg några tusen siffror från Kendall-Smiths tabeller på en hålremsa, som sedan lästes in i maskinen. Eftersom behovet av slumpvisa tal ofta blir mycket stort — flera miljoner binära siffror till ett problem är inte onaturligt — söker man gärna efter andra möjligheter. Två frågor ligger då nära till hands:

1. Kan man utnyttja någon naturlig källa för att alstra slumpvisa tal direkt till maskinen, t. ex. elektronrörsbrus eller radioaktivitet?
2. Kan man från en given, relativt liten mängd av tal alstra en större serie »slumpvisa tal» genom att utföra föreskrivna aritmetiska eller kombinatoriska operationer?

Några matematikmaskiner, bl. a. Manchester Electronic Computer,

har ett organ för automatisk produktion av slumpvisa tal. Frekvensfelaktigheter kan elimineras genom en enkel princip (se [17]), som nog bäst förklaras i slantsinglingsterminologi. Antag, att Per och Pål vill singla slant rättvist med en slant, som de misstänker vara felaktig. Man kan dock anta, att kasten blir oberoende och att man har en konstant sannolikhet p för krona. De får då singla två gånger, varvid fyra möjligheter finns, med sannolikheterna p^2 , pq , qp , q^2 . (Vi sätter $q = 1 - p$.) Endast de två mellersta alternativen godtas. Om det andra alternativet, dvs. krona-klave, inträffar, så vinner Per. Om det tredje alternativet, dvs. klave-krona, inträffar, så vinner Pål. Om den första eller fjärde möjligheten inträffar, så måste man kasta på nytt, tills något av de accepterade alternativen inträffar. Detta spel är tydligen rättvist, felaktigheten hos slanten kan endast påverka spelets längd. Om $p = \frac{1}{2}$, måste i medeltal vartannat tvåkastsförsök underkännas, om t. ex. $p = \frac{1}{4}$, så underkänns i medeltal 5 försök av 8.

Vad beträffar den andra frågan, så rekommenderar Karl Pearson sådana förfaranden i förordet till Tippetts tabeller. Man kan läsa en tabell först vågrätt, därefter lodrätt och sist diagonalt eller något liknande. Kendall [12, p. IX] avråder däremot från sådant på grund av risken för korrelationer mellan olika försök. Vid den ovan beskrivna potentialberäkningen på BARK stansades två cykliska remsor med fyrsiffriga decimala tal i intervallet $(0, 1)$ ur Kendall-Smiths tabeller. Den ena remsan innehöll m tal, den andra innehöll n tal, m och n relativa primtal. (I det aktuella fallet var $m = 139$, $n = 159$.) BARK bildade summan *modulo 1* av ett tal x från den ena remsan och ett tal y från den andra remsan. Låt $z_1, z_2, \dots$ vara den så uppkommande serien. Den har tydligen perioden mn . Låt oss avbryta serien efter en period. Man kan visa, att om x och y är oberoende observationer av en rektangulärfördelad variabel, så är två godtyckliga tal z_μ, z_ν i serien *parvis oberoende*, men talen i en period är likväl *inte ömsesidigt oberoende*, ty man har exempelvis relationen

$$z_\mu - z_{\mu+m} - z_{\mu+n} + z_{\mu+m+n} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Den distinktionen är annars ganska ovanlig i praktiska sammanhang. Det beskrivna förfarandet, som alltså producerar mn tal ur $m+n$ givna, torde trots det ömsesidiga beroendet vara användbart i många fall. Exempelvis har alla moment av första och andra graden rätta medelvärden. Förfarandet har inte återfunnits i litteraturen.

Vid amerikanska maskiner har man försökt gå ännu längre i samma utrymmesekonomiska riktning. I en föreslagen metod (se [14], pp. 33—35) utgår man från ett enda, säg fyrsiffrigt tal z_0 , varefter man successivt

bildar z_{n+1} av de fyra mellersta siffrorna i z_n^2 . Exempel: $z_0 = 1563$, $z_0^2 = 02442969$, $z_1 = 4429$, $z_1^2 = 19616041$, $z_2 = 6160$, etc. I Los Angeles har man gjort 16 experiment, varvid samtliga slutade med nollföljder eller med perioder med högst fyra tal. Längden av serien till det första upprepade talet var i medeltal 52, den längsta av serierna hade 104 tal. Med tiosiffriga tal har man haft större framgång i ett studerat fall. Flera varianter finns beskrivna.

I en metod, som anvisats av Lehmer, definieras z_n av kongruensen

$$z_n \equiv z_0 \cdot k^n \pmod{M},$$

där M är ett stort tal, t. ex. $10^8 + 1$, och k är en primitiv rot modulo M . z_n kan enkelt beräknas rekursivt. Standardprov på denna metod har gett tillfredsställande resultat.

Om Z är en rektangulärfördelad variabel i intervallet $(0, 1)$, så har $W = F^{-1}(Z)$ fördelningsfunktionen $F(w)$. Därigenom är problemet att ta stickprov ur en godtycklig fördelning i princip återfört på det behandlade fallet. Ibland är andra sätt att alstra en fördelning lämpligare. Mer information om dessa ting finns i v. Neumann's artikel i [14] och i en översiktsartikel av Votaw och Rafferty [17].

5. Matrisproblem. Vi skall betrakta ett spel, där en bricka kan flyttas mellan m olika punkter

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \dots, \mathfrak{P}_m.$$

Flyttningen sker vid en diskret serie tidpunkter $n = 0, 1, 2, \dots$. Vid en flyttning från $\mathfrak{P}_i$ till $\mathfrak{P}_j$ multipliceras ett kapital, som brickan för med sig, med en faktor v_{ij} . Denna flyttning har sannolikheten p_{ij} , som antages vara oberoende av hur brickan kommit till $\mathfrak{P}_i$, och den beror inte heller explicit av n . Sådana spel behandlas i teorin för »random walk» eller allmänare i teorin för Markoffkedjor (se [4]). Vi antar vidare, att det för varje punkt $\mathfrak{P}_i$ har definierats en sannolikhet $p_i = 1 - \sum_j p_{ij}$

för att spelet skall sluta, samt att det är möjligt att från varje punkt $\mathfrak{P}_k$ nå en punkt $\mathfrak{P}_i$, där $p_i > 0$, antingen direkt eller indirekt. Man kan då visa, att ett spel med sannolikheten 1, dvs. nästan säkert, har ett slut. Sätt

$$a_{ij} = v_{ij} p_{ij}.$$

Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Vi skall nu tolka den transformation, som förmedlas av matrisen A . Låt e_i vara den i -te koordinatvektorn (skriven som radmatris), dvs. en vektor, vars i -te komponent är 1, medan övriga komponenter är noll. Om spelarens kapital före en flyttning är K och om brickan ligger i $\mathfrak{P}_i$, så bestämmes situationen av *kapitalvektorn*

$$a = K \cdot e_i.$$

Antag att brickan sedan flyttas till $\mathfrak{P}_j$. Kapitalvektorn efter flyttningen är då $a' = K v_{ij} \cdot e_j$. Låt *medelvärde för kapitalvektorn* efter n flyttningar vara

$$\alpha^{(n)} = \{\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_m^{(n)}\},$$

där den i -te komponenten alltså betyder sannolikheten för att brickan efter n flyttningar ligger i $\mathfrak{P}_i$, multiplicerad med det av denna händelse betingade medelvärde för kapitalet. Ur definitionerna och sannolikhetskalkylens additionssats följer, att den i -te komponenten för $\alpha^{(n+1)}$ är

$$\alpha_i^{(n+1)} = \sum_v p_{vi} \alpha_v^{(n)} v_{vi} = \sum_v \alpha_v^{(n)} a_{vi},$$

alltså

$$\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} \cdot A,$$

vilket är den sökta tolkningen av matrisen A . Om kapitalvektorn vid spelets början är fullt bestämd, så är alltså

$$\alpha^{(n)} = a^{(0)} \cdot A^n.$$

Enligt en känd sats i matriskalkylen är för stora värden på n

$$\alpha^{(n)} = a^{(0)} \cdot A^n \sim c \lambda_1^n \cdot r_1,$$

om A har ett egenvärde λ_1 , vars modul är större än alla andra egenvärdesmoduler till A . Den motsvarande egenvektorn är r_1 . Om $a^{(0)}$ inte är en av de undantagsvektorer, som gör att c blir noll, så kan man alltså genom en statistisk analys av kapitalvektorföljden $\alpha^{(n)}$ vid ett antal spel få en uppskattning av åtminstone det största egenvärdet och den motsvarande egenvektorn för A^4).

Summan av alla de (positiva och negativa) kapitalmängder, som under spelets gång passerar punkten $\mathfrak{P}_j$ är lika med j -te komponenten av vektorn

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(n)}.$$

Denna vektor har medelvärde⁵⁾

⁴ I allmänare fall gäller en mer komplicerad asymptotisk relation.

⁵ Om brickan stannar i samma punkt flera gånger i följd, skall kapitalet räknas för varje gång.

$$E[r] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{(n)} = \alpha^{(0)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \alpha^{(0)} \cdot (I - A)^{-1},$$

under förutsättning, att serien konvergerar. Det villkoret gäller säkert, om alla egenvärden för matrisen A ligger i det inre av enhetscirkeln. Om brickan startar med kapitalet 1 i $\mathfrak{P}_i$, så är alltså medelvärdet för vektorn $r = r^{(i)}$ lika med den i -te raden i inversen till matrisen $I - A$.

Om B är en given matris, vars egenvärden ligger i ett halvplan (t. ex. om B är positivt definit), så finns det tydligen ett tal z , så att $zB = I - A$, där A uppfyller de ovan angivna villkoren. Då kan B inverteras med ett spel av den just beskrivna typen. Man väljer först för varje punkt $\mathfrak{P}_k$ sannolikheten p_k för att spelet skall avbrytas. Elementen a_{ij} i A kan sedan på oändligt många sätt spjälkas upp i två faktorer v_{ij} och p_{ij} , så att p_{ij} blir ett möjligt system av övergångssannolikheter till ett spel. Om man spelar ett stort antal spel, som alla startar i $\mathfrak{P}_i$ och bokför vid varje spel den kapitalmängd r_{ij} , som under spelets gång passerar punkten $\mathfrak{P}_j$, så kan man uppskatta medelvärdet för r_{ij} , som är lika med elementet (i, j) i inversen till $I - A$.

Om man gör bokföring för varje punkt $\mathfrak{P}_j$, så kan man samtidigt få en hel rad i inversen till B , och därigenom också den i -te komponenten till den kolumnvektor, som satisfierar ekvationssystemet

$$B \cdot u = b,$$

där b är en given kolumnvektor. Man kan f. ö. dra ut betydligt mer information ur ett spel genom att inte enbart använda den fullständiga kedjan

$$\mathfrak{P}_i \rightarrow \mathfrak{P}_{j_1} \rightarrow \mathfrak{P}_{j_2} \rightarrow \dots$$

utan även delkedjor

$$\mathfrak{P}_{j_n} \rightarrow \mathfrak{P}_{j_{n+1}} \rightarrow \mathfrak{P}_{j_{n+2}} \rightarrow \dots$$

Därigenom kan man ofta få hela inversmatrisen samtidigt.

Den här beskrivna metoden har presenterats av Wasow [18]. Tidigare hade en variant av denna idé föreslagits av v. Neumann och Ulam. Se även [3, 5].

Vid valet av stoppsannolikheter och vid faktoriseringen av matriselementen har man stor frihet. Man bör då försöka favorisera de flyttningar, som har utsikt att leda till spelförlopp, som ger stora bidrag i förhållande till sin längd. Faktoriseringen behöver inte vara konstant från spel till spel, varför tidigare erfarenheter kan ge god hjälp. Till och med inom samma spel kan man byta uppdelning.

Elementen i matrisen A^n är summor av n -lediga produkter av elementen i matrisen A . Varje sådan produkt

$$a_{ij_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_{n-1} j_n}$$

motsvarar exakt ett möjligt spelförlopp med n flyttningar

$$\mathfrak{P}_i \rightarrow \mathfrak{P}_{j_1} \rightarrow \mathfrak{P}_{j_2} \rightarrow \mathfrak{P}_{j_3} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathfrak{P}_{j_{n-1}} \rightarrow \mathfrak{P}_{j_n},$$

och ger det förväntade bidraget från detta speciella förlopp till slutkapitalet i punkten $\mathfrak{P}_{j_n}$. Medelvärdet av bidraget från ett speciellt förlopp är därför bestämt av matrisstrukturen och av valet av z och kan inte påverkas av en förnuftig faktorisering. Däremot kan spelförloppets sannolikhet påverkas.

Att tvångsmässigt avbryta alla spel efter n flyttningar innebär ett systematiskt fel. Det är i själva verket samma fel som begås, när man avbryter Neumannserien

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$$

efter A^n . Det är också ekvivalent med att avbryta det klassiska iterationsförfarandet för lösning av ekvationssystemet $B \cdot u = b$:

$$x^{(v+1)} = A \cdot x^{(v)} + z \cdot b; \quad x^{(0)} = 0,$$

efter beräkningen av $x^{(n+1)}$.

6. Differens- och differentialekvationer. Randvärdesproblem vid linjära differensekvationer utgör en speciell klass av linjära ekvationssystem. Följande exempel är kanske av ett visst intresse. Betrakta ett rutnät (gitter) i xy -planet, där varje ruta är en kvadrat med sidan h . Låt u_{rs} vara en funktion, definierad i gitterpunkterna (rh, sh) , där r och s är hela tal. Antag att u_{rs} satisfierar den partiella differensekvationen

$$(2) \quad u_{rs} - \frac{u_{r+1,s} + u_{r-1,s} + u_{r,s+1} + u_{r,s-1}}{4} = 0$$

i de gitterpunkter, som ligger i det inre av t. ex. en rektangel

$$0 \leq x \leq (a+1)h, \quad 0 \leq y \leq (b+1)h,$$

och som dessutom i gitterpunkterna på denna rektangels sidor antar föreskrivna värden (randvärden). Detta randvärdesproblem ger i själva verket ett system av ekvationer med ab obekanta storheter u_{rs} ⁶). Ekvation (2) är välkänd i numeriska sammanhang: man får den, om man i Laplace's ekvation

⁶ Alla de obekanta u_{rs} skall alltså (trots dubbelindiceringsen) uppfattas som en vektor i ab dimensioner.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

approximerar derivatorna med finita centraldifferenser.

Betrakta nu ett spel av den typ, som beskrevs i avsnitt 5, där en bricka flyttas mellan gitterpunkterna i xy -planet. Antag att sannolikheten överallt är $\frac{1}{4}$ för en flyttning till var och en av de fyra grannpunkterna i rutnätet. Startkapitalet är $\frac{1}{4}$, och alla kapitalfaktorerna v_{ij} sätts lika med 1, utom vid övergång till en randpunkt, där de skall vara noll. Spelet startar i den inre grannpunkten till en randpunkt $\mathfrak{P}_0$, och det kan avbrytas, när randen uppnås igen, eftersom kapitalet då är slut⁷). Om man tillämpar tankegången (eller resultaten) i avsnitt 5, finner man, att medelvärdet för det kapital, som går genom punkten (rh, sh) under ett spel är en funktion av (r, s) , som satisfierar (2) i rektangelns inre gitterpunkter, antar randvärdet 1 i $\mathfrak{P}_0$ och är lika med 0 i övriga randpunkter. Allmänare randvärdesproblem behandlar man genom att variera den vid starten använda randpunkten, så att produkten av startkapital och användningsfrekvens blir proportionell mot randvärdet i punkten.

Man kan också vända på spelet. Man startar i en punkt, där man önskar känna lösningen. Spelet slutar, när randen uppnåtts, varvid man skall få en vinst, som är lika med randvärdet i den uppnådda punkten. Vinstens medelvärde är lika med värdet i startpunkten av lösningen till det givna randvärdesproblemet.

Från fysikalisk synpunkt är det inte överraskande, att det är ett samband mellan Laplace's ekvation och random walk-spel med obegränsad spellängd, eftersom Laplace's ekvation ger gränsvärden, då $t \rightarrow \infty$, för lösningar till differentialekvationen

$$(3) \quad \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right),$$

som förekommer i teorin för diffusion, där teoretiska fysiker (bl. a. Ehrenfest) sedan länge har använt random walk som modell. Om man tvångsmässigt avbryter varje spel efter n flyttningar, så ger medelvärdet för det kapital, som dessförinnan gått genom punkten (rh, sh) , om h är litet, en approximation till värdet i punkten

$$x = rh, \quad y = sh, \quad t = nh^2$$

av den lösning till (3), som försvinner för $t = 0$ och antar de föreskrivna

⁷ Man skulle också kunna starta i $\mathfrak{P}_0$ med startkapitalet 1, men då avbryts i genomsnitt $\frac{3}{4}$ av alla spel redan efter en flyttning, vilket är onödigt och dessutom ökar variansen.

randvärdena vid varje tidpunkt $t > 0$. Dessa medelvärden, som vi skall beteckna $u_{rs}^{(n)}$, satisfierar i inre punkter rekursionsformeln

$$u_{rs}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot (u_{r+1,s}^{(n)} + u_{r-1,s}^{(n)} + u_{r,s+1}^{(n)} + u_{r,s-1}^{(n)}); \quad u_{rs}^{(0)} = 0.$$

Denna formel kan också direkt användas för approximativ lösning av (3), om $\Delta t = h^2$. Den har även använts för iterativ lösning av (2), men den är då betydligt mindre effektiv än vissa andra eliminations- och iterationsmetoder.

Eigenvärdesproblem för Schrödingerekvationen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (E - V(x, y)) \cdot \psi = 0$$

kan, om $V \geq 0$, behandlas med nästan samma spel: flyttningssannolikheterna behöver inte ändras, men kapitalfaktorn skall vara lika med $e^{-h^2 V(\mathfrak{P})/4}$ för varje flyttning från punkten $\mathfrak{P} \equiv (rh, sh)$. Kac och Donsker [9] har prövat metoden på ett endimensionellt fall, som kan lösas även med analytiska metoder, nämligen $V(x) = x^2$. Det minsta egenvärdet är då $1/\sqrt{2} \approx 0,71$. Med 100 spel à 2000 flyttningar erhöles medeltalet 0,75. Deras teoretiska analys av metoden startar inte från differens-ekvationen utan från vissa asymptotiska satser i sannolikheteorin. De har därigenom kunnat generalisera metoden till att omfatta även sådana random walk-spel, där förflyttningarna har en given kontinuerlig fördelning. Vid användning av normalfördelning fick man med 200 spel à endast 100 flyttningar uppskattningen 0,74.

Thomas [15] har jämfört Monte Carlo-metoder och traditionella numeriska metoder på några speciella problem, bl. a. just på lösningen av Laplace's ekvation. Resultatet är där, liksom vid de andra problem han betraktat, ganska nedslående för Monte Carlo-metoden. I ett speciellt, rimligt, tredimensionellt fall uppskattade han, att Monte Carlo-metoden skulle kräva $3 \cdot 10^{10}$ arbetsenheter för en noggrannhet av 1% , medan en s. k. extrapolerad relaxationsmetod kräver $3 \cdot 10^7$ arbetsenheter. Det är svårt att se av Thomas' kortfattade framställning, om han refererar till den här beskrivna metoden eller någon annan. Vidare är hans laborationer med storleksordningar inte helt övertygande, varför det kan tänkas, att hans siffror är alltför pessimistiska.

7. Ett atomfysikaliskt exempel. En skur av partiklar (t. ex. neutroner) tränger in i en platta. En individuell partikels bana i plattan kan beskrivas som en random walk. Den har en sannolikhet μds för en kollision i ett intervall av längden ds , där μ är en funktion av partikelns

energi och plattans egenskaper. Vid en kollision kan en partikel bli absorberad, eller också kan den undergå en riktnings- och energiändring. Således kan en partikel antingen reflekteras, absorberas eller släppas igenom. Man vill nu veta hur stor bråkdel av partikelskuren, som trän-ger igenom plattan och hur mycket energi dessa partiklar för med sig.

Detta är en förenklad version av ett problem, som behandlats av Kahn [10, 14] och andra. Det verkar väl upplagt för en direkt tillämpning av Monte Carlo-metoden och har i själva verket betytt mycket för metodens utveckling. Det beklagliga är emellertid, att sannolikheten för genomträngning är av storleksordningen 10^{-6} à 10^{-10} , så att en ren imitation av det naturliga skeendet är meningslös för ändamålet.

En partikels tillstånd bestäms av tre koordinater (x, α, γ) , som anger läge, energi och hastighetsriktning. Man känner en funktion $f(x, \alpha, \gamma, x', \alpha', \gamma')$ som ger sannolikhetstätheten för att en partikel i tillståndet (x, α, γ) efter nästa kollision skall vara i tillståndet (x', α', γ') . Här är x, α och γ egentligen kontinuerliga variabler, men låt oss idealisera och antaga, att man har ett ändligt antal diskreta tillstånd. Situationen är då densamma som vid matrisproblemen. Det är lämpligt att associera ett »kapital» till neutronen och att faktorisera den verkliga övergångssannolikheten $f = vf^*$, där v är en kapitalfaktor, och f^* är den fiktiva övergångssannolikheten, som användes vid räkningen. Låt $\Phi(x, \alpha, \gamma)$ vara en uppskattning (erhållen genom gissning och tidigare erfarenheter), av »betydelsen» (importance) av tillståndet (x, α, γ) , varmed menas sannolikheten, att en partikel som vid ett tillfälle är i tillståndet (x, α, γ) kommer att tränga igenom plattan. Då ger, enligt Kahn, formlerna

$$f^* = f \cdot \frac{\Phi(x', \alpha', \gamma')}{\Phi(x, \alpha, \gamma)}, \quad v = \frac{\Phi(x, \alpha, \gamma)}{\Phi(x', \alpha', \gamma')},$$

en faktorisering, som utan att införa något systematiskt fel väl favoriserar de för sammanhanget viktiga övergångarna. Spelet avbryts, när en partikel absorberats, reflekterats eller släppts igenom. I det sistnämnda fallet noteras förutom »kapitalet» även riktningen och energin.

v. Neumann har anvisat en elegant variant, känd som »klyvnings-tekniken». Man indelar (x, α, γ) -rymden i områden av olika betydelse, skilda genom ytor

$$\Phi(x, \alpha, \gamma) = 2^{-\sigma}.$$

Vid en passage från ett mindre betydande område till ett mer betydande låter man partikeln klyvas till två partiklar, vardera med halva »kapitalet». Vid en passage i omvänd riktning får man välja mellan att avbryta spelet eller att fortsätta det med fördubblat kapital. Valet sker med en

slantsingling eller motsvarande. Denna teknik för inte in något systematiskt fel utan koncentrerar bara uppmärksamheten till de intressanta spelen.

8. Under de senaste åren har Monte Carlo-metoden prövats inom flera vetenskaper. Några problemtitlar kan nämnas: en matematisk modell av fotografiska emulsioner har utarbetats av Fröberg [6]. King [14] har beräknat effekten av den uteslutna volymen på antalet konfigurationer av polymerkedjor med ett givet antal länkar, ett problem som dittills saknat angreppspunkt. Geografiska problem rörande migration och kulturspridning har behandlats av Hägerstrand [8]. Ett annat viktigt tillämpningsområde är operationsforskningen, där man ofta möter matematiska problem av säregen typ. Där kan det vara möjligt att behandla problem med Monte Carlo-metoden mera realistiskt än vad gängse analytiska och numeriska metoder tillåter.

I många problem är Monte Carlo-tekniken kanske inte den definitiva behandlingsmetoden, men den kan likväl göra stor nytta, ty redan en ganska blygsam tillämpning kan ge sådana informationer om storleksordningar o. dyl., som är nödvändiga för en teoretisk analys, som ju nästan alltid måste starta med en serie beslut om idealiseringar och approximationer.

LITTERATUR

- [1] H. CRAMÉR: *Mathematical Methods of Statistics*. Uppsala och Princeton 1945-46.
- [2] J. H. CURTISS: *Sampling Methods Applied to Differential and Difference Equations*. Proc. of a Seminar on Scientific Computation, Nov. 1949, IBM Co., New York, pp. 87-109.
- [3] J. H. CURTISS: *Monte Carlo Methods for the Iteration of Linear Operators*. National Bureau of Standards Report 2365 (1953).
- [4] W. FELLER: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. New York 1950.
- [5] G. E. FORSYTHE och R. A. LEIBLER: *Matrix Inversion by a Monte Carlo Method*. Math. Tables and other Aids to Computation, vol. 4 (1950), pp. 127-129.
- [6] C.-E. FRÖBERG: *On a Mathematical Model of a Photographic Emulsion*. Arkiv för Fysik, Band 7, Nr. 42 (1954), pp. 497-502.
- [7] U. GRENANDER och M. ROSENBLATT: *Statistical Analysis of Stochastic Processes*. I manuskript.
- [8] T. HÄGERSTRAND: *Innovationsförloppet ur korologisk synpunkt*. Diss., Lund (1953).
- [9] M. KAC och M. D. DONSKE: *The Monte Carlo Method and its Applications*. Proc. of a Computation Seminar, Dec. 1949, IBM Co., New York, pp. 74-81. (Även publicerat i Journal of Research of National Bureau of Standards, vol. 44 (1950), pp. 551-557.)
- [10] H. KAHN: *Stochastic (Monte Carlo) Attenuation Analysis*. RAND Corp., Report No. R-163 (1949). (Se även tidskriften Nucleonics, vol. 6 (1950).)

- [11] H. KAHN och A. W. MARSHALL: *Methods of Reducing Sample Size in Monte Carlo Computations*. Journal of the Oper. Res. Soc. of America, vol. 1 (1953), pp. 263–278.
- [12] M. G. KENDALL och BABINGTON SMITH: *Tables of Random Sampling Numbers*. Tracts for Computers, No. XXIV, Cambridge 1951.
- [13] E. LANDAU: *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Band 2, Teil 8.
- [14] *Monte Carlo Method*. Proc. of a Symposium, Los Angeles 1949. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 12 (1951).
- [15] L. H. THOMAS: *A Comparison of Stochastic and Direct Methods for the Solution of Some Special Problems*. Journal of the Oper. Res. Soc. of America, vol. 1 (1953), pp. 181–186.
- [16] S. ULAM och N. METROPOLIS: *The Monte Carlo Method*. J. Am. Stat. Ass., vol. 44 (1949), pp. 335–341.
- [17] D. F. VOTAW JR. och J. A. RAFFERTY: *High Speed Sampling*. Math. Tables and other Aids to Computation, vol. 5 (1951), pp. 1–8.
- [18] W. WASOW: *On the Inversion of Matrices by Random Walks*. Math. Tables and other Aids to Computation, vol. 5 (1951), pp. 78–81.

OM TO GEOMETRISKE STEDER VED LIGESIDEDE HYPERBLER

SIGURKARL STEFÁNSSON

Vi begynder med at repetere nogle velkendte fakta vedrørende hyperbler:

En hyperbel kaldes ligesidet, når dens asymptoter er vinkelrette på hinanden. Det af en hyperbeltangent mellem asymptoterne afskårne stykke halveres af røringspunktet. En diameter i hyperblen halverer alle de korder, som er parallelle med tangenterne i dens skæringspunkter med hyperblen. Arealet mellem asymptoterne og en variabel tangent er konstant.

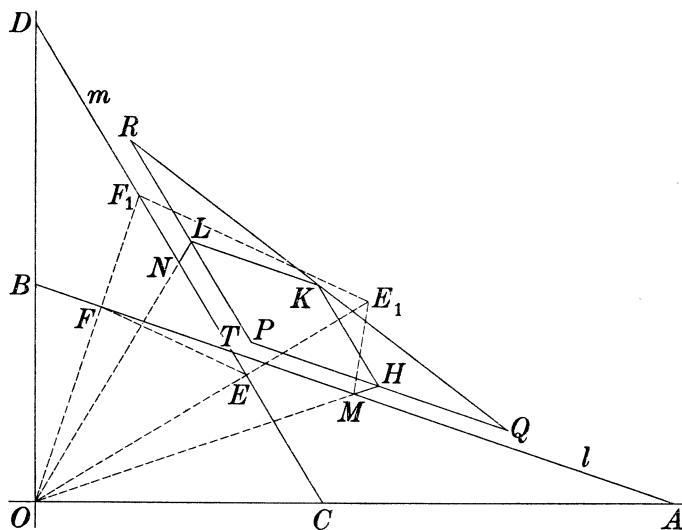


Fig. 1.

På fig. 1 er OA og OD en ligesidet hyperbels asymptoter, l og m to af dens tangenter, som skærer asymptoterne i A og B , henholdsvis C og D . Lodlinien fra O på m skærer denne i E . Lodlinien fra O på l skærer denne i F og m i F_1 . En linie gennem F_1 parallel med FE skærer OE i E_1 . Trækkes forbindelseslinien mellem E_1 og AB 's midtpunkt M , kan man bevise, at trekanten OE_1M bliver ligedannet med trekanten OF_1N , hvor N er

midtpunktet af DC , idet vinklerne ved O er lige store, og ligeledes forholdene mellem de hosliggende sider. Om vinklerne har man nemlig

$$\begin{aligned}\angle MOE_1 &= \angle COE_1 - \angle COM = \angle D - \angle A; \\ \angle NOF_1 &= \angle NOD - \angle FOB = \angle D - \angle A,\end{aligned}$$

og af ligestorheden af trekkanterne OAB og OCD følger

$$\frac{AB}{2} \cdot OF = \frac{CD}{2} \cdot OE \text{ eller } OM \cdot OF = ON \cdot OE,$$

således at

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OE}{OF} = \frac{OE_1}{OF_1}.$$

Hermed er beviset fuldført. Ved hjælp af denne ligedannethed løses let følgende opgave, senere citeret som opgave 1:

Bestem en ligesidet hyperbel af centret O og to tangenter l og m .

Man finder først punkterne E, F, F_1 og E_1 ; derefter afsætter man vinklen OE_1M lig den kendte vinkel OF_1N (samme omløbsretning). Herefter fås punktet M , hvorefter asymptoterne let bestemmes.

Opgaven behandles ganske på samme måde, selv om O ligger i den spidse vinkel mellem de givne tangenter.

Lad trekanten PQR på fig. 1 være indskrevet i den ligesidede hyperbel, og lad l og m være de tangenter, som er parallelle med PQ og PR . Diametrene OM og ON vil da gå igennem midtpunkterne H og L af disse trekant-sider. Kaldes den tredje sides midtpunkt K , bliver $\angle LKH = \angle FTE$; og da endvidere $\angle LOH = \angle FOE$ og firkant $OFTE$ er indskrivelig, gælder dette sidste også om firkanten $OLKH$. Herved bevises let den kendte sætning:

I. *Det geometriske sted for centerne i de ligesidede hyperbler, der går igennem vinkelspidserne i en fast trekant, er dennes nipunktskirkel¹.*

Et sidestykke til ovenstående bliver at søge det geometriske sted for centerne i de ligesidede hyperbler, som rører siderne i en fast trekant.

Da en om en ligesidet hyperbel omskreven trekant altid er stumpvinklet, behøver man kun at tage stumpvinklede trekanten i betragtning.

På fig. 2 er C den stumpe vinkel i trekant ABC . Man kan begynde med at bestemme de ligesidede hyperbler, som har AC til den ene asymptote, men rører de to andre sider af trekanten i punkter, som ligger i det ende-

¹ En trekants nipunktskirkel går igennem sidernes midtpunkter, højdernes fodpunkter og midtpunkterne for liniestykkerne mellem højdeskæringspunktet og vinkelspidserne.

lige. Lad et punkt D mellem A og C være centrum for en sådan hyperbel; den anden asymptotes skæringspunkter med AB og BC betegnes H og H_1 .

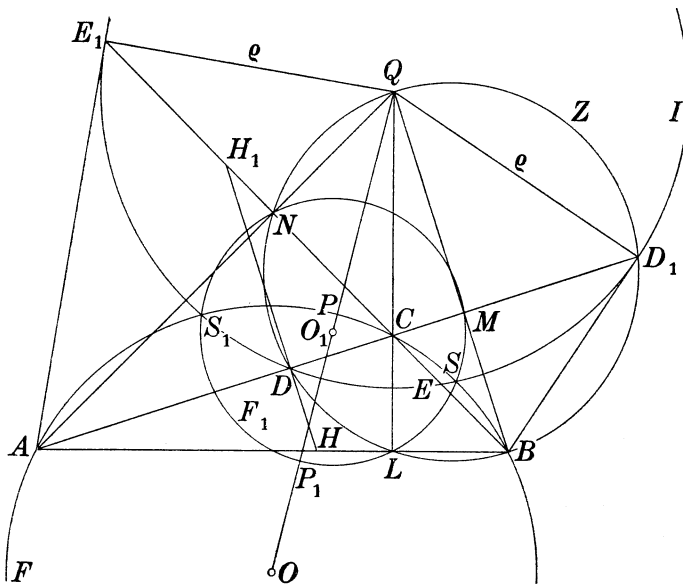


Fig. 2.

Ved til de lige store trekanter DCH_1 og DHA at addere firkan-
ten $HDCB$ ses, at trekanterne BHH_1 og BCA er lige store, således at
 $BH \cdot BH_1 = BA \cdot BC$ eller

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BC}{BH_1}.$$

Idet M betegner fodpunktet på AC af højden fra B , fås af to par ens-
vinklede trekanter

$$\frac{BH}{BA} = \frac{MD}{MA}, \quad \frac{BC}{BH_1} = \frac{MC}{MD}.$$

Indsættes dette ovenfor, fås

$$\frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MD}$$

eller

$$MD^2 = MA \cdot MC.$$

Herved er hyperbelcentret D bestemt. Af de ensvinklede trekanter
 BMC og AMQ , hvor Q betegner højdernes skæringspunkt, finder man
 $MA \cdot MC = MB \cdot MQ$, således at ligningen ovenfor også kan skrives

$$MD^2 = MB \cdot MQ.$$

D ligger derfor på cirklen over BQ som diameter.

Ved analoge betragtninger — hvor man dog i stedet for addition af arealer anvender subtraktion — findes et hyperbelcentrum D_1 på AC 's forlængelse i samme afstand fra M som D . Vi har da vist:

Hyperbelcenterne D og D_1 på AC er skæringspunkterne mellem linien AC og den cirkel Z , som har BQ til diameter, hvor Q er højdernes skæringspunkt. D og D_1 deler AC harmonisk.

Analogt gælder:

Hyperbelcenterne E og E_1 på BC er skæringspunkterne mellem linien BC og den cirkel, som har AQ til diameter.

Da Q er radikalcentrum for de cirkler, som har trekantens sider til diametre, er

$$QN \cdot QA = QL \cdot QC = QM \cdot QB.$$

Ved betragtning af de retvinklede trekanten AE_1Q og BD_1Q ses, at disse produkter også er lig med kvadraterne ϱ^2 på QE_1 og QD_1 . En inversion med dette produkt til inversionspotens og inversionscentrum i Q vil føre punkterne N , M og L over i A , B og C , hvoraf følger:

Den omskrevne cirkel F og nipunktscirklen F_1 er inverse figurer med inversionscentrum i Q og inversionspotensen ϱ^2 .

Ved denne inversion føres trekantsiden AC over i cirklen Z , hvoraf følger, at D og D_1 må ligge fast. Det samme gælder E og E_1 og ligeledes S og S_1 , skæringspunkterne mellem F og F_1 . Disse 6 punkter vil da alle ligge på samme cirkel med centrum i Q og radius ϱ . Denne cirkel I vil vi kalde trekanten ABC 's *polarcirkel*.

Det er let at udtrykke ϱ ved den omskrevne cirkels radius R og liniestykket $OQ = e$ (Eulers linie). Hertil kan man benytte, at P og P_1 er inverse punkter (fig. 2):

$$\varrho^2 = QP \cdot QP_1 = (e - R) \left(\frac{e}{2} + \frac{R}{2} \right) = \frac{e^2 - R^2}{2},$$

d. v. s.

$$\varrho = \sqrt{\frac{e^2 - R^2}{2}}.$$

Man kan også udtrykke ϱ ved R og trekantsidernes kvadratsum, som jeg vil betegne med d^2 , idet d er diagonalen i en kasse med dimensionerne a , b og c . Af

$$BL = a \cos B$$

fås

$$QB = \frac{BL}{\sin A} = \frac{a}{\sin A} \cos B = 2R \cos B,$$

og af

$$CM = -a \cos C$$

fås

$$QM = CM \cot A = -\frac{a}{\sin A} \cos A \cos C = -2R \cos A \cos C.$$

Herefter bliver

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= QM \cdot QB = -4R^2 \cos A \cos B \cos C \\ &= 2R^2 [2 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)] = 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{8R^2 - d^2}{2}, \end{aligned}$$

altså

$$\varrho = \sqrt{\frac{8R^2 - d^2}{2}}.$$

Ved sammenligning af de fundne udtryk for ϱ^2 fås

$$e^2 - R^2 = 8R^2 - d^2,$$

d. v. s.

$$e^2 + d^2 = (3R)^2$$

eller

$$e = \sqrt{9R^2 - d^2}.$$

Ovenstående betragtninger tyder på, at polarcirklen netop er det søgte geometriske sted for centrene i de ligesidede hyperbler, som rører den stumpvinklede trekants sider. Ved beviset for denne sætning, som går tilbage til Steiner¹, kan vi udelade polarcirkelns skæringspunkter med trekantens sider.

På figur 3 er O centret for en vilkårlig af disse hyperbler, koordinat-akserne X og Y dennes asymptoter, Q højdernes skæringspunkt, Z den cirkel, som har BQ til diameter, I_1 cirklen gennem O med centrum i Q . Kan man nu bevise, at cirklerne I_1 og Z har trekantsiden AC til radikalakse, fremgår straks deraf, at cirklen I_1 må være identisk med polarcirklen I .

X -aksens skæringspunkter med trekantens sider betegnes med $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ og $(\gamma, 0)$; Y -aksens skæringspunkter med siderne kan følgelig betegnes ved $\left(0, \frac{k^2}{\alpha}\right)$, $\left(0, \frac{k^2}{\beta}\right)$, $\left(0, \frac{k^2}{\gamma}\right)$, hvor k^2 er produktet af de stykker, som en hyperbeltangent afskærer af asymptoterne.

¹ Werke 2, S. 677.

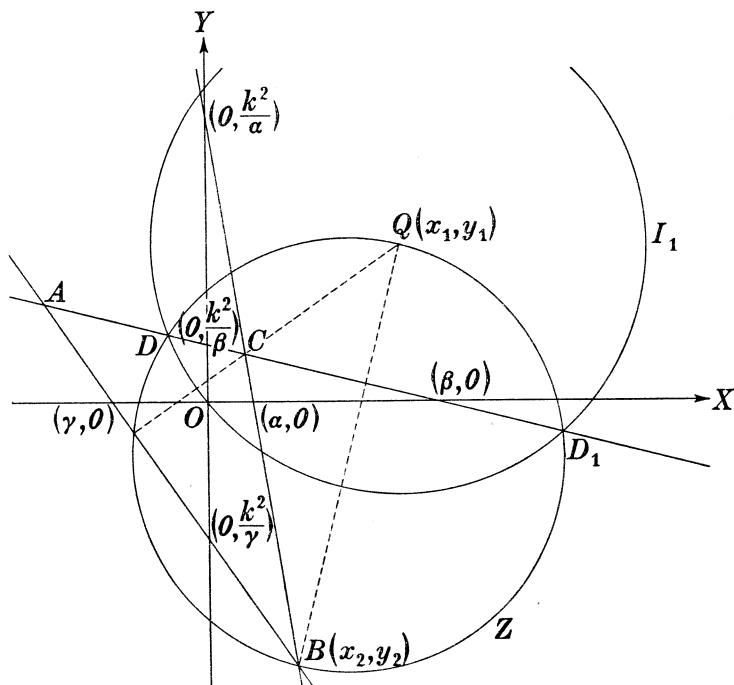


Fig. 3.

Ligningen for BC bliver

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{k^2/\alpha} = 1$$

eller

$$k^2x + \alpha^2y = \alpha k^2,$$

for siden AB analogt:

$$k^2x + \gamma^2y = \gamma k^2.$$

Idet $\alpha \neq \gamma$, fås heraf B 's koordinater

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}, \frac{k^2}{\alpha + \gamma} \right).$$

Ligningerne for trekantens højder h_b og h_c bliver henholdsvis

$$y - \frac{k^2}{\alpha + \gamma} = \frac{\beta^2}{k^2} \left(x - \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} \right)$$

og

$$y - \frac{k^2}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma^2}{k^2} \left(x - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \right).$$

Ved at løse disse to ligninger fås for Q 's koordinater:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)-k^4}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}, \frac{k^4(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-(\alpha\beta\gamma)^2}{k^2(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)} \right).$$

Cirklerne I_1 og Z har ligningerne

$$x^2 - 2x_1x + y^2 - 2y_1y = 0$$

og

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + y^2 - (y_1 + y_2)y = -x_1x_2 - y_1y_2.$$

Heraf fås ved subtraktion

$$\underline{(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y = x_1x_2 + y_1y_2},$$

hvilket er radikalaksens ligning.

Ved indsættelse af de ovenfor fundne udtryk for x_1, y_1, x_2 og y_2 fås for koefficienterne i radikalaksens ligning

$$x_2 - x_1 = \frac{\alpha^2\gamma^2 + k^4}{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)} = n \neq 0$$

$$y_2 - y_1 = \frac{\beta^2(\alpha^2\gamma^2 + k^4)}{k^2(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)} = \frac{\beta^2 n}{k^2}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \beta n.$$

Ved indsættelse af disse udtryk for koefficienterne i radikalaksens ligning fås denne på formen

$$k^2x + \beta^2y = \beta k^2,$$

hvilket netop er ligningen for trekantsiden AC . Punktet O ligger altså på polarcirklen. Tilbage har vi nu at bevise, at et vilkårligt punkt på polarcirkelns periferi er centrum for en ligesidet hyperbel, som rører alle sider i trekanten ABC . Dette er allerede bevist for polarcirkelns skæringspunkter med trekantens sider.

Ifølge løsningen af opgave 1 findes der altid en og kun en ligesidet hyperbel, som rører to givne linier og har centrum i et givet punkt, som ikke ligger på nogen af linierne. Lad dette være et punkt O af de buer, hvori polarcirklen deles af den stumpe vinkel C 's hosliggende sider, og lad os bestemme den ligesidede hyperbel, der har O til centrum og rører disse. Lad os dernæst trække den tangent til denne hyperbel, som er parallel med AB og ligger på samme side af C som denne. Lad os kalde denne tangents skæringspunkter med de andre tangenter for A_1 og B_1 . Trekantene ABC og A_1B_1C vil da blive ligedannede med lighedspunkt i C , og det samme vil blive tilfældet med deres polarcirkler. Idet lighedspunktet C ligger inden i begge cirkler og ligedannethedsforholdet er positivt, kan de

to cirkler ikke have noget punkt fælles, medmindre de falder helt sammen. Ifølge den allerede beviste del af sætningen vil punktet O sikkert ligge på polarcirklen for A_1B_1C , og idet O netop var et punkt af ABC 's polarcirkel, må de to cirkler være identiske. Hermed er beviset fuldført, og vi har da, idet vi sammenfatter:

En stumpvinklet trekants polarcirkel er den cirkel, som ligger fast ved den inversion, som fører vinkelspidserne over i højdernes fodpunkter. Den har centrum i højdernes skæringspunkt.

Polarcirklen deler de sider, som den skærer, harmonisk, og disse delingspunkter ligger også på de cirkler, som har til diametre forbindelseslinierne mellem en vinkelspids og højdernes skæringspunkt.

Polarcirklen går igennem skæringspunkterne for trekantens omskrevne cirkel og dens nipunktsirkel.

II. *Polarcirklen er det geometriske sted for centrene i de ligesidede hyperbler, som rører trekantens sider.*

For polarcirkelns radius ϱ gælder formlerne

$$\varrho = \sqrt{\frac{e^2 - R^2}{2}} \text{ og } \varrho = \sqrt{\frac{8R^2 - d^2}{2}},$$

hvor e er Eulers linie og d diagonalen i en kasse med dimensionerne a , b og c .

For Eulers linie gælder formelen

$$e = \sqrt{9R^2 - d^2}.$$

Endvidere gælder følgende sætning:

En stumpvinklet trekant er sin egen polare figur med hensyn til sin polarcirkel.

Når en i en ligesidet hyperbel indskreven trekant ABC udarter på en sådan måde, at to af dens vinkelspidser A og B konvergerer mod det samme punkt S , vil dens nipunktsirkel konvergere mod en cirkel gennem punktet S , midtpunktet af CS og projektionen af C på hyperblens tangent i S .

Heraf følger:

Ia. *Det geometriske sted for centrene i de ligesidede hyperbler, som rører en fast linie t i et fast punkt S og går igennem et fast punkt C , er en cirkel gennem C , S og C 's projektion på t .*

Når en om en ligesidet hyperbel omskreven trekant udarter på en sådan måde, at røringsspunktet for siden AB konvergerer mod røringsspunktet S for siden CB , vil dens polarcirkel konvergere mod en cirkel, der rører CB i C og har centrum på normalen fra S på AC . Heraf fås:

IIa. *Det geometriske sted for centerne i de ligesidede hyperbler, som rører en fast linie m og en anden fast linie l i et givet punkt S , er en cirkel, som rører l i skæringspunktet for l og m og har sit centrum på normalen fra S på m .*

Ved hjælp af de fire sætninger I, Ia, II og IIa vil man være i stand til at bestemme en ligesidet hyperbel af fire elementer i 7 tilfælde af 9, hvilket fremgår af følgende oversigt.

1. 4 punkter. Løses ved I.
2. 3 punkter og en tangent. Løses ved I (se nedenfor).
3. 3 punkter og tangenten i et af dem. Løses ved I og Ia.
4. 2 punkter og tangenten i dem begge. Løses ved Ia eller IIa.
5. 2 punkter, tangenten i et af dem og en tangent til. Løses ved Ia og IIa.
6. 2 punkter og 2 tangenter.
7. 1 punkt med tangent og to tangenter. Løses ved II og IIa.
8. 1 punkt og 3 tangenter.
9. 4 tangenter. Løses ved II.

Løsningen af opgave 2 er ikke så umiddelbart indlysende som de andre. Lad A , B og C være de givne punkter, l den givne tangent. Gennem et punkt P af l vil der ifølge tilfælde 1 kunne bestemmes en ligesidet hyperbel, som også går igennem A , B og C og skærer l anden gang i P_1 . Idet afhængigheden mellem P og P_1 er en en-entydig algebraisk afhængighed, hvor P og P_1 kan ombyttes, er den en involution på linien l . Er denne involution hyperbolsk, vil dens dobbeltpunkter netop være røringpunkterne for de søgte ligesidede hyperbler. Trækker man højderne i trekanten ABC , vil de skære l i tre punkter, som i den ovennævnte involution svarer til l 's skæringspunkter med trekantens sider, hvorefter eventuelle dobbeltpunkter kan findes.

Ved behandlingen af de andre opgaver kan man i nogle af tilfældene vælge imellem flere forskellige kombinationer af de anførte geometriske steder.

I opgaverne ovenfor kan to givne tangenter specielt være parallelle. En tangent med røringpunkt kan i visse tilfælde erstattes af en asymptote, et punkt af en asymptoteretning. Såvel nipuncirciklen som polar-cirklen kan da udarte til en ret linie, en fælles diameter for den pågældende samling ligesidede hyperbler.

MATEMATIKKURSERNA PÅ GYMNASIET I SVERIGE

Den 15 november 1953 hölls på Matematiska Institutionen i Lund en diskussion om gymnasiets matematikkurser, arrangerad av Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Inledare voro undervisningsrådet C. E. Sjöstedt och professor O. Frostman, Stockholm. I den livliga diskussion som följde yttrade sig en rad talare representerande universiteten, skolorna och Skolöverstyrelsen, vars representant i sitt inledningsanförande redogjorde för förslaget till nya kursplaner i matematik på gymnasiet. Från universitetshåll framfördes krav på att vissa för fortsatt utbildning väsentliga moment skulle beredas plats i kursen, och som exempel nämndes främst exponential- och logaritm-funktionerna samt deras derivator.

Ett stencilerat referat av diskussionen har utsänts till medlemmarna i föreningen, och det är en omarbetning av detta som följer nedan.

Inledningsanförande av undervisningsrådet C. E. SJÖSTEDT:

Kursplanerna i matematik för det nya gymnasiet ha ännu ej fastställts av Kungl. Maj:t. Ett av Skolöverstyrelsen (SÖ) utarbetat förslag till kursplaner har av Kungl. Maj:t återremitterats till SÖ med uppdrag att ytterligare skära ner kurserna. De anbefallda nedskärningarna komma huvudsakligen att genomföras i de detaljerade metodiska anvisningar, som nu hålla på att utarbetas.

Först och främst skall i dessa anvisningar minimikursen klart preciseras. Den nya uppläggningsen av matematiken kommer att karakteriseras av tre skilda kurser med olika slutmål, nämligen kurserna för a) reallinjens matematiska gren, b) dess biologiska gren och c) den allmänna linjens sociala gren.

I ett tidigare förslag, som utsänts på remiss till läroverken, förutsattes samläsning mellan allmänna linjen och reallinjen på gymnasiets lågstadium och mellan reallinjens biologiska gren och allmänna linjens sociala gren på dess högstadium. Orsaken till förslaget om samläsning var bristen på matematiklärare. Remissyttrandena gingo emellertid i klart negativ riktning, och då dessutom vid en beräkning antalet genom en ev. samläsning inbesparade lärarekrafter visade sig vara relativt liten, övergav

man inom SÖ det nämnda förslaget till förmån för det ovan angivna med tre helt skilda kurser. Vinsten av en sådan uppdelning kan knappast överskattas.

När timtalet för ämnet matematik år 1933 genom dåvarande ecklesiastikministerns nyck skars ned, blev situationen hopplös och man kan inte klandra dem som två år senare medverkade i förslaget om specialkursen på gymnasiet. Det har emellertid varit mycket besvärligt med en skrivning gemensam för dem, som läst enbart allmänna kursen, och dem som även haft specialkursen med.

Reallinjens matematiska gren kommer sannolikt att leda fram till samma resultat som det som nu nås av elever, som läsa både allmän kurs och specialkurs, detta trots den beskärning, som skall äga rum. Nu blir man på den matematiska grenen av med en barlast av för matematik mindre begåvade elever. Detta tycks ej ha fullt beaktats av matematiklärarna, ej heller att allmänna linjen och reallinjen enligt förslaget icke skola samläsa. På allmänna linjen komma framdeles elever av sådan typ att gå, som nu äro realister, men som, då de nått upp i de högre ringarna, visat sig allt mera humanistiskt inställda, dels sådana som nu äro latinare men ha matematik som tillvalsämne.

Reduktionen av timtalet måste medföra en rationalisering av kurserna. Sådana moment, som ej behövas, skall rensas bort.

De metodiska anvisningarna komma att innehålla en detaljerad kursplan med preciserade direktiv. På den där angivna minimikursen kan läraren sedan bygga vidare, i den mån klassens standard så medger.

Den nämnda rationaliseringen måste ifråga om varje kursmoment göras med utgångspunkt från frågan: »Vad kommer jag att ha för nytta av detta längre fram?» På gymnasiets lågstadium blir det då en ganska stark reduktion av den traditionella kursen. I det följande skall närmast kursen för reallinjens matematiska gren behandlas. På lågstadiet där har man att göra eleverna väl förtrogna med elementär algebra och elementär geometri. Det är nödvändigt att ge dem en ordentlig träning inom de områden, på vilka man sedan skall bygga vidare. Speciellt får repetitionen av realskolans geometrikurs icke försummas. Brister i detta hänseende ha tidigare förekommit på sina håll, och konsekvenserna därav ha kunnat göra sig märkbara ända upp i de högsta ringarna. Nödvändigheten av den ovan nämnda repetitionen av realskolans geometri påpekas också särskilt i de nya metodiska anvisningarna.

Trigonometrikursen kommer att radikalt skäras ner. Trigonometriens grunder, som skall läsas under de två första gymnasieåren, kommer att omfatta föga mer än vad som nu läses på latinlinjen. På reallinjens matematiska gren tillkommer sedan bl. a. additions- och subtraktions-

teoremen samt begreppet radian och de trigonometriska funktionernas derivator, medan kapitlet om trigonometriska ekvationer ej skall ägnas något mera betydande arbete. Allmänna linjens trigonometrikurs blir lika med den nuvarande latinlinjens. På reallinjens biologiska gren blir den något emellan matematiska grenens och den allmänna linjens. Främst kommer här att medtagas så mycket trigonometri, som fysiken kräver.

Även kursen i rymdgeometri skall minskas, mest på allmänna linjen, minst på reallinjens matematiska gren. Biologiska grenen skall läsa mindre stereometri, än som nu hör till allmänna kursen. Nedskränningarna går mest ut över de geometriska tillämpningarna. Kapitlet om serier kommer att kvarstå oförändrat, men om sammansatt ränta skall man läsa mindre än nu på reallinjen, medan för allmänna linjen ingen reduktion göres på detta avsnitt. I studentskrivningarna skall uppgifter på sammansatt ränta ges för allmänna linjen, men ej för någondera grenen av reallinjen. (Speciella trigonometriska ekvationer skall ej heller lämnas som skrivningsuppgifter i studentexamen på reallinjen, men enkla trigonometriska ekvationer kunna uppträda som tillämpningar i problem av annan art.)

Sannolikhetskalkyl och statistik äro icke avsedda att utgöra några tyngande moment i den nya kursen. Inga studentproblem skall lämnas på dessa områden. — Endast definitionen på matematisk sannolikhet och några elementära tillämpningar därav skall tas med. — Även ifråga om statistik åsyftar man blott en orientering, ingen omfattande teori. Enkla tillämpningar, främst i samband med begreppen medelvärde, spridning, felberäkning och korrelation skola förekomma.

Den nya kursen avser att ge funktionsläran en dominerande plats. Även på allmänna linjen skall man ha en rätt fullig kurs i funktionslära med enkla tillämpningar. På denna linje skall analytiska geometrien huvudsakligen utgöra en inledning till funktionsläran (räta linjen). På reallinjens biologiska gren skall något mera analytisk geometri medtagas: räta linjen enligt nuvarande allmänna kursen (ej normalformen, ej heller beräkning av vinkeln mellan två räta linjer). — Reallinjens matematiska gren skall läsa analytisk geometri till ungefär samma omfattning som nuvarande specialkursen; dock skall svårare problem ifråga om ellips och hyperbel uteslutas men teorien behandlas i samma utsträckning som förut. — Funktionsläran skall på allmänna linjen omfatta hela rationella funktioner, på reallinjens biologiska gren detsamma som nuvarande allmänna kursen. Detta senare bör gå bra att lära in, när man får ett enhetligt elevmaterial. På reallinjens matematiska gren blir kursen i funktionslära i det hela identisk med nuvarande specialkursens.

Man har diskuterat, huruvida exponential- och logaritmfunktionerna kunna behandlas på reallinjens matematiska gren. I metodiska anvisningarna tas med ett moment härom, men avsnittet om dessa funktioners derivata blir ej obligatoriskt. Det har syntts värdefullare att i stället ägna större intresse åt derivatkalkylens grunder. Dessa ha på sina håll hittills varit försummade. Läraren bör i detalj syssla med dessa saker och förbereda begreppet derivata genom en mängd exempel.

Begreppet integral skall komma med i den nya matematikkursen. Någon integralkalkyl skall läsas på allmänna linjen, mera på reallinjens biologiska gren och än mera på dess matematiska. Enkla yt- och volymberäkningar skola genomföras. — Införandet av integralbegreppet kommer dock icke att innebära någon mera betydande utvidgning av kursomfånget.

Talaren uttryckte avslutningsvis förhoppningen, att den nya matematikkursen tack vare rationaliseringen och trots det reducerade timtalet skall innebära en förbättring av matematikens ställning på gymnasiet.

Inledningsanförande av professor O. FROSTMAN:

Det finns knappast något skolämne som är så hårt tyglat av förordningar vare sig med hänsyn till omfånget eller framställningsmetoden som matematiken. Något svängrum för den enskilde lärarens initiativ finns inte. Anvisningarna för bedömningen av skrivningsuppgifterna ha blivit för definitiva. Ej heller är det lyckligt, att de skriftliga proven så helt dominera ämnet. Problemens svårighetsgrad har i viss mån ökat, samtidigt som kursinnehållet har urvattnats. Ökningen av svårighetsgraden hos de givna uppgifterna beror främst på att antalet arbetsmoment per uppgift genomsnittligt har stigit. Sådana problem bli svåra att hinna med men kräva ej något större mått av matematisk fantasi. — Skolans arbete förvandlas nu till ett rutinarbete inom ett innehållsmässigt begränsat område. — Enligt undervisningsrådet Sjöstedt skall i de metodiska anvisningarna minimikursen noga fixeras. Man frågar då: »Skall de skriftliga uppgifterna ges blott på minimikursen?» Då löper man risk att området för problemgivningen ännu mer begränsas, att rutinarbetet ökas och matematikundervisningen urartar.

Ett exempel på en sådan olycklig utveckling lämnar latingymnasiets matematik. Kursen gjordes i 1933 års stadga så snäv, att de medicinska fakulteterna icke godtog den som grund för läkarnas yrkesutbildning. Vid 40-talets slut hade trots detta kuggningsprocenten i studentexamen i matematik blivit abnormt hög. Som nyss påpekats, leder en alltför stark begränsning av kursomfånget ofta till konstlade problem. Så ges

f. n. på allmänna kursen ofta uppgifter, i vilka man skall studera funktionen $y = P_2(x)$, där P_2 är ett andragradspolynom i x , men parabelns viktiga egenskaper ingå ej i kursen. Likaså studerar man i en mångfald uppgifter funktionen $y = P_3(x)$, där P_3 är ett tredjegradspolynom i x , men den motsvarande kurvans intressanta egenskaper, som nära sammanhånga med att den har en medelpunkt, kan man ej ordentligt få fram, därför att den fullständiga teorien för inflexionspunkter ej faller inom kursområdet. Inflexioner med horisontell tangent förekomma ofta i de givna problemen. Många elever tro, att alla inflexionstangenter äro horisontella.

Det kan synas onödigt att kritisera nu existerande kurser, men det bör understrykas, att det förgångnas misstag ej får upprepas. — Det vore lyckligare, om kursen vore så stor som möjligt i förhållande till timtalet, men de skriftliga uppgifterna gjordes lättare. Det kunde lämpligen ges ett par svåra uppgifter, resten lätta. Ba eller AB borde ej vara så svårt för eleverna att uppnå. Det stora arbete, som nu nedlägges på problemlösning, ger förhållandevis klen utbytte.

Formelsamlingen utesluter kunskapsprov och kan kanske slopas. — Nu kombineras i problemen ofta alltför heterogena element. Exempel: Bestäm i funktionen $y = x^3 + ax^2 + 5x + 3$ konstanten a så, att y , y' och y'' för $x = 2$ bilda en aritmetisk serie. — Om för många moment ingå i ett och samma problem, blir bedömningen av lösningen besvärlig.

Det är emellertid lätt att kritisera dåliga problem, mycket svårare att åstadkomma goda. I varje fall är det mycket tidsödande.

Talaren var ense med undervisningsrådet Sjöstedt, att man ägnat för mycken tid åt trigonometriska ekvationer. På detta område hade mycket okynne bedrivits. Han uttryckte vidare en viss ängslan, att gränserna för problemområdena skulle dragas alltför snävt och beklagade, att problem på binomialteoremet ej längre få tas med i skrivningen.

Även hos lärare möter man en stark opinion för mindre och mindre kurser, men lärarna glömma då, att detta leder till färre och mindre problemområden och därmed till svårare problem.

Talaren övergick sedan till att detaljerat skärskåda vissa områden i matematikkursen.

Den trigonometriska formelapparaten kan ej undvaras på den matematiska grenen, men för mycken exercis bör undvikas. Han hälsade med tillfredsställelse, att onaturliga triangelsolveringsproblem skulle utrensas.

Inom analytiska geometrien är koordinatbegreppet och valet av ett lämpligt koordinatsystem viktigt. Större uppmärksamhet borde ägnas åt dessa grundläggande saker. Eleverna ha ofta svårt att inse, att koordinatsystemet kan väljas fritt och ej behöver vara givet på förhand.

Det skulle vara fördelaktigt, om funktionsläran finge en bredare bas. På rationella kurvskaror har under senare år alltför mycket arbete nedlagts, och alltför mycket intresse har ägnats åt extrempunktsproblemet. Man skulle redan nu i skolan kunna visa, att $(1+x/n)^n$ är ständigt växande och skulle så kunna komma fram till funktionen e^x .

Många lärare frukta kanske, att en del nya saker i funktionsläran ej kan förstås av eleverna. Man får ta mycket liberalt på begreppet »förstå». Hur blygsamma anspråk man än har på begripandet, måste man ändå räkna med att en stor del av våra elever ej fatta det matematiskt väsentliga. Redan de rationella talen och de negativa talen bereda svårigheter ur definitionssynpunkt och man måste ta åskådningen till hjälp. Som exempel anfördes slutligen, att det är mycket få elever, som verkligen begripit faktorteoremet.

Professor L. GÅRDING visade med en rad exempel, att det matematiska stoff, som nu behandlas i skolan är mycket gammalt, det yngsta från 1600-talet, och frågade: »Har det sedan 1600-talet kommit fram något inom matematiken, som är värt att tagas upp i skolan?» Den stränga teorin för gränsvärden, komplexa tal och irrationaltal är av senare datum och har fundamental betydelse inom matematiken. Ännu behandlas dessa begrepp intuitivt i skolan. Även om de i sin strängaste utformning varken kan eller bör tas upp där, kommer skolan förr eller senare att bli tvingad till en betydligt mera ingående behandling av dessa begrepp än vad som nu är fallet.

Talaren varnade bl. a. för införande av beteckningen $\int f(x)dx$ för obestämd integral. Beteckningen är onödig, då de integraler (primitiva funktioner) som förekomma kan skrivas upp direkt utan detta hjälpmedel. Den har sitt existensberättigande i andra sammanhang genom att den ger det rätta resultatet $\int f[g(t)]g'(t)dt$ vid variabelsubstitution och genom den bekväma formeln för partiell integration. Dessa formler kommer säkert inte med i skolan.

Slutligen kommer eleverna troligen att få svårigheter på grund av att de i beteckningen för den obestämda integralen försöker tilldela symbolen $f(x)dx$ någon mystisk betydelse. Detta kommer säkert att ge anledning till många missuppfattningar och fel av olika slag.

Fil. lic. L. SANDGREN skisserade ett förslag till införandet av exponentialfunktionen på gymnasiet. Metoden (NMT, Bind 1, Hefte 4, pp. 156–160) går ut på att bland funktioner av typen $y = a^x$ söka den (med $a = e$), vars derivata i punkten $(0, 1)$ blir $= 1$ och för vilken följaktligen

allmänt gäller $dy/dx = e^x$. Talaren antydde också, hur man visar, att det existerar en derivata i nämnda punkt. Från derivatan för $y = e^x$ kommer man sedan lätt över till derivatorna för $y = a^x$ och $y = {}^a\log x$. Fördelen med metoden är att man på ett mycket åskådligt sätt kan övertyga sig om existensen och entydigheten av talet e . För skolans del torde det inte vara nödvändigt med de stränga bevisen härför. Framställningen blir så enkel, att den bör kunna användas även på reallinjens biologiska gren och på allmänna linjen.

Om man lade ner mindre arbete på att lösa komplicerade uppgifter inom de hela rationella funktionernas område, t. ex. sådana som uppgift nr. 8 i studentskrivningen å reallinjen (allmän kurs) v. t. 1952, vilka sakna matematiskt intresse, så skulle man vinna tid för införandet av exponentialfunktionen.

Undervisningsrådet SJÖSTEDT önskade, att formelsamlingen slopas. För inflexionspunkt med horisontell tangent borde beteckningen »terrasspunkt« införas. Prof. Frostman ansåg matematiken hårt tyglad. Dock är minimikurs och rättelsemall avsedda att vara en hjälp åt mindre vana lärare. Talaren skulle vara glad att slippa rättelsemallen, men en lärareförening hade bett att få den. Lärarna ha fritt val att utöver minimikursen ta med så mycket, som klassens standard tillåter. — Endast för betyget godkänd skall skrivningsuppgifterna nödvändigtvis falla inom minimikursens område.

Han instämde i mycket av den kritik, som prof. Frostman framfört, men hur skall svårigheterna undvikas? Går man igenom kursen *grundligt*, kan problemdrillen undvikas.

Talaren belyste sin inställning till denna fråga genom en bild, ursprungligen emanerande från norskt lärarehåll: Skall man lära en pojke att hitta genom en tät skog med en massa slingrande vägar, så skall man inte lära honom alla de olika vägarna, utan lära honom att använda kompassen. — Talaren har 14 skrivningar per år att svara för och är tacksam för förslag från matematiklärarnas sida till lämpliga naturliga problem.

BOKMELDINGER

CARL HYLÉN-CAVALLIUS — LENNART SANDGREN: *Plan geometri*. Hermods, Malmö, 1953. 15+293 s. Sv. kr. 21.00.

(Innehållsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 67.)

Att en ny lärobok i matematik på högskolestadiet kommer ut är alltid en mycket intressant händelse — i föreliggande fall är det fråga om en bok av så hög kvalitet både i pedagogiskt avseende och med tanke på urvalet av sakinnehåll, att händelsen måste rubriceras som en sensation. Det slutgiltiga omdömet om en lärobok, det må gälla vilket undervisningsstadium som helst, kristalliseras naturligtvis inte ut, förrän boken varit i bruk ett antal år och visat, vad den duger till, ur de studerandes synpunkt. Men såvitt anmälaren kan se, måste den bli ett utomordentligt hjälpmedel för de ett- och tvåbetygsstuderande vid universiteten och högskolorna vid studiet av geometrikurserna — både för dem som vilja läsa in kursen snabbt och för dem som vilja tillägna sig gedigna geometriska kunskaper.

Det förefaller, som om författare och förläggare av läroböcker först under de senaste decennierna börjat göra klart för sig, vilken betydelse en boks typografi har för att göra studiet av boken lustbetonat och därmed effektivt. En bok med aldrig så förträffligt sakinnehåll riskerar att inte komma till sin rätt hos en stor del av läsarna, om bristerna i typografiskt avseende är alltför stora. I detta fall är typografien tvärtom mönstergill: det gäller både stilsorterna och varierandet av dem och de bortåt 300 utomordentligt klara och välritade figurerna. Antagligen finns det ett eller annat tryckfel, något som i en matematisk text kan vara besvärande, men anmälaren har för sin del, trots ivrigt letande efter fel, icke funnit några.

Författarna börja boken med en tämligen utförlig framställning av vektorer i planet, inklusive den skalära produkten. De motivera i bokens förord detta med, att vektorbegreppet spelar en framträdande roll inom olika grenar av ren och tillämpad matematik, och att man dessutom har nytta av det vid behandlingen av parallellkoordinatsystem. Jag är inte alldeles övertygad om, att det är idealiskt ur pedagogisk synpunkt; det torde nog vålla en del studerande vissa svårigheter att plötsligt kastas

in i en relativt oprövad begreppsvärld. Å andra sidan erbjuder det metodiskt stora fördelar, och bokens första fyra kapitel, vilka behandla räta linjen, parallellkoordinatsystem, speciellt rätvinkliga system, och koordinattransformationer, bygger genomgående på vektorframställningen.

Det följande kapitlet, betitlat likställighet, triangelgeometri och harmonisk delning, är en verklig fyndgruva för elementargeometriskasatser. Jag vet mig inte någonstades ha läst en så koncentrerad och ändå överskådlig och lättillgänglig framställning av hithörande frågor. Man noterar som ett kuriosum, att författarna mena, att en punkt, som befinner sig mellan en sträckas ändpunkter, delar sträckan i ett negativt delningsförhållande. Det är ju en konventionssak, men det torde väl vara vanligare att definiera delningsförhållandet med motsatt tecken mot vad författarna göra.

Efter ett överskådligt kapitel om cirkeln, omfattande harmoniska och ortogonala cirklar, cirkelknippen, pol och polar samt inversion, följer ett intressant kapitel om linjära avbildningar, bl. a. kongruenstransformationer, affina avbildningar, transformationsgrupper, parallell- och centralprojektion i rymden. Kägelsnitten behandlas dels (först) syntetiskt såsom snitt i en rotationskon, dels i ett särskilt kapitel analytiskt. De rent geometriska aspekterna träda på ett lyckligt sätt i förgrunden framför de algebraiska.

Boken avslutas med ett kapitel om homogena koordinater samt ett om kägelsnitten ur projektiv synpunkt, varvid framställningen föres något utöver gällande tvåbetygskurs.

En lärobok i matematik är ingen bra lärobok, om den inte innehåller rikligt med exempel, både sådana som demonstrationsräknas av författaren och sådana, som läsaren får räkna för att utröna, om han tillgodogjort sig innehållet. Föreliggande bok innehåller 100 exempel av det förra slaget och 500 av det senare (med svar i allmänhet). Ett ordentligt sakregister avslutar.

Både författare och förlag äro att gratulera till sin utomordentliga skapelse.

Sven Hilding

LARS HÖRMANDER — LENNART SANDGREN: *Matematisk problemsamling för två betyg*. Lunds Studentkårs Intressebyrå, Lund, 1954. 55 s. Sv. kr. 8.00.

Den problemsamling, som härmed föreligger, är indelad på samma sätt som den i Lund 1942 utgivna samlingen. De båda författarna tillkännager i förordet:

»Vid utarbetandet av denna problemsamling har vi huvudsakligen använt oss av två källor: Tentamensskrivningar, som givits för två betyg i fil. kand.- och ämbetsexamen under de senaste tio åren, och problem, som sammanställts för seminarieövningar vid Lunds Universitet. Dessutom har utnyttjats ett 50-tal problem ur Matematisk problemsamling, 2-betygskursen (Lund 1942).

Försök har gjorts att indela problemen i kapitel efter deras innehåll . . .«

Häftet innehåller 300 problem med svar. Till ett 50-tal av problemen finnas dessutom kortfattade anvisningar. Problemen har fördelats på följande sätt: Algebra 59 st. (fördelade på 2 kapitel), analys 187 st. (10 kap.) och geometri 54 st. (2 kap.).

De utvalda problemen är tillämpningar på de viktigaste momenten i 2-betygskursen. De är i allmänhet väl valda, möjligen kunde färre algebraproblem medtagits till förmån för geometrin. De 50 uppgifterna ur den förra samlingen kanske också kunde utbytts mot »färskare« tentamensproblem.

Samlingen är välredigerad och förefaller att vara noggrant genomarbetad. Man önskar blott, att de värdefulla anvisningarna voro fler. Häftet kommer säkert att göra samma lycka som lundasamlingen av år 1942, vilken det tydligen avser att ersätta.

Hans Riesel

STIG HJALMARS: *Teoretisk fysik*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1953. 255 s. Sv. kr. 28.00.

(Innehållsförteckning i NMT, detta hefte, s. 67.)

Denne lærebog i teoretisk fysik tilsigter, som forfatteren siger, at »tillsammans med någon lämplig lärobok i teoretisk mekanik ge en kortfattad framställning av principerna för den teoretiska makrofysiken«. Bogen er udarbejdet på grundlag af forelæsninger, som forfatteren har holdt for fysikstuderende på Stockholms Högskola. Forfatteren har valgt at skrive i en usædvanlig kortfattet stil, der muliggør, at bogen dækker et stort område. Samtidig udmærker bogen sig ved en overordentlig klarhed og er særdeles omhyggeligt udarbejdet. Det har været forfatterens hensigt at omtale principperne, hvorfor han ikke har medtaget mange eksempler, og opgaver er udeladt.

Eftersom bogen omfatter de fleste af makrofysikkens discipliner, er det yderst bekvemt, at den indledes med et kapitel, hvori der gives en oversigt over de matematiske hjælpemidler og en gennemgang af teorien for vektorfelter. Dette kapitel tjener samtidig som en nyttig formelsamling.

Det herefter følgende korte afsnit om hydrodynamik gør læseren fortrolig med en simpel og anskuelig anvendelse af vektorfelternes teori.

Et hovedafsnit i bogen omfatter teorien for elektromagnetisme. Forfatteren har naturligt valgt den sædvanlige oplægning af dette emne. Som udgangspunkt vælges således beskrivelsen af statiske elektriske og magnetiske felter i det tomme rum. Derpå redegøres for det mere komplicerede tilfælde af stationære felter i stoffer. Efter en diskussion af kvastationære felter opstilles de fuldstændige Maxwellske ligninger. På basis heraf behandles bl. a. energi-impulssætningen og de retarderede elektromagnetiske potentialer hidrørende fra kontinuerte fordelinger af strømme og ladninger. Det kan noteres, at forfatteren med største omhu redegør for de »skålgigen ointressanta« muligheder for enhedsvalg i elektrodynamikken. I fortsættelse af elektrodynamikken gennemgås de vigtigste principper i optikken i et kort afsnit. Der gives en udmærket klar fremstilling af sammenhængen mellem den geometriske optik og bølgebeskrivelsen.

Det afsluttende større afsnit om termodynamik fortjener særlig omtale. Forfatteren har gjort sig umage for at klargøre grundbegreberne i termodynamikken, der jo ofte anses for en vanskelig disciplin, og i det hele er stilen bredere end i de foregående afsnit. Samtidig har forfatteren også i dette afsnit kunnet gennemføre en klar matematisk beskrivelse. Efter indførelse af første hovedsætning gives der en redegørelse for luftarters egenskaber. Dernæst diskuteres anden hovedsætning og nogle af dens konsekvenser. Entropibegrebet behandles dog ikke så udførligt som det øvrige, og en omtale af termodynamikkens tredje hovedsætning havde været ønskelig. Man får et lille indblik i irreversible processer og i transformationer mellem de forskellige termodynamiske variable. Til sidst gives en kort fremstilling af kemisk termodynamik.

Som det fremgår af det ovenstående, kan de forskellige afsnit i bogen læses uafhængigt af hinanden. Forfatteren har, som nævnt, sammenfattet de matematiske forudsætninger i første kapitel. Hvad angår de fysiske grundantagelser, er disse også fremstillet i en knap og klar postulatagtig form. Det har ikke været bogens hensigt at redegøre for det vanskelige problem om den eksperimentelle basis for og begrænsningen af de fysiske antagelser, der gøres i bogen.

Det må fremhæves, at bogen først og fremmest er værdifuld for fysikstuderende i tilknytning til forelæsninger. Den vil dog også være velegnet til studium for den, som vil genopfriske sine kundskaber inden for den klassiske teoretiske fysik.

Der er tradition for at fremstille den klassiske mekanik på klar matematisk form. Det er bogens fortjeneste, at den fremstiller de øvrige klassiske discipliner på samme vis.

P. Kristensen. J. Lindhard

ERNST S. SELMER: *Differensial- og integralregning*. Akademisk Forlag, Oslo, 1954. 8+315 s. N. kr. 30.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, dette hefte, s. 69.)

På ethvert undervisningstrin, hvor matematikken doceres, vil der altid kunne rejses spørgsmål, for det første det forholdsvis let besvarede om det rimeligste emnevalg, og når dette er besvaret, det langt vanskeligere spørgsmål om den grundighed, hvormed de enkelte områder indenfor det fastlagte stof bør behandles. Om det sidstnævnte spørgsmål vil der altid være delte meninger, og de forskellige synspunkter vil og kan aldrig forenes. I Danmark er der gennem årene skabt en rodfæstet tradition for, at man overalt giver den mest eksakte behandling af det matematiske stof, og netop på et tidspunkt, hvor man i hvert fald for det matematiske gymnasiums vedkommende har følt, at man dog på enkelte punkter burde lette behandlingen af visse grundlags- og eksistensspørgsmål en smule, er det højst interessant at stifte bekendtskab med dette omfattende værk, hvor behandlingen på væsentlige punkter helt afviger fra den gængse.

Bogen, der i første række er bestemt for universitetsstuderende med matematik som hjælpefag, specielt økonomer, er skrevet i en let og frisk stil, der virker umiddelbart suggererende. Den giver med sit begrænsede omfang en introduktion i et endog meget stort antal af differential- og integralregningens anvendelsesområder. Udover behandlingen af differentiation og integration for funktioner af een variabel findes en mere udførlig gennemgang af rækkelæren, specielt potensrækkernes teori, et mindre afsnit om komplekse tal og et omfattende afsnit om funktioner af flere variable, hvori også behandles væsentlige dele af rummets analytiske geometri.

Det har tilsyneladende for bogens forfatter været et hovedsynspunkt overfor læseren på intet sted at øve vold mod dennes sunde fornuft. Behandlingen af grænseværdibegrebet bliver derfor ganske kortfattet, og begrebet kontinuitet i een variabel defineres simpelthen ved, at den til funktionen svarende kurve er sammenhængende. Ligeledes behandles differentialregningens middelværdisætning ved en anskuelsesbetragtning. Der kunne nævnes adskillige andre eksempler af tilsvarende art, således for eksempel indførelsen af begrebet omvendt funktion, hvor alle de sædvanlige vanskeligheder slet ikke træder frem i lyset, men hvor bogens læsere sikkert alligevel vil have fornemmelsen af fuld forståelse.

Enhver, der underviser i matematik, har sikkert den for så vidt besynderlige erfaring, at dele af det underviste stof i den trykte fremstilling virker tungt og vanskeligt tilgængeligt, medens det talte ord i selve

undervisningen langt lettere bringer over vanskelighederne. Man må beundre den særprægede indsats, som forfatteren af denne bog har gjort ved at bringe den trykte fremstilling langt mere nær den mundtlige, end man sædvanligvis ser. Ved denne sjældne evne har forfatteren gjort bogen ligefrem underholdende. Dertil må yderligere føjes, at bogen er forsynet med en endog meget lang række af velvalgte eksempler.

Uanset, om man er enig med forfatteren i den valgte behandlingsform eller ikke, må bogen på det varmeste anbefales til nøjere studium af enhver, der underviser i matematik, det være sig i gymnasiet eller ved den højere undervisning. Den er ved hele sin form et kraftigt indlæg i den aldrig afsluttede diskussion, hvordan matematik bør doceres, når man vil afveje behandlingens dybde og stoffets fremstilling med elevernes absorptionsevne, og den vil hos enhver læser anspore til dyb eftertanke.

Kai Rander Buch

MOTTATTE BØKER

Staff of the Bateman Manuscript Project (editor A. Erdélyi): *Higher transcendental functions, I and II*. McGraw-Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1953. 26+302 pp. and 17+396 pp. sh. 49/- and 56/6.

Volume I: The gamma function 1-55 * The hypergeometric function 56-119 * Legendre functions 120-181 * The generalized hypergeometric series 182-201 * Further generalizations of the hypergeometric function 202-247 * The confluent hypergeometric function 248-295 * Subject index 296-300 * Index of notations 301-302.

Volume II: Bessel functions 1-114 * Functions of the parabolic cylinder and of the paraboloid of revolution 115-132 * The incomplete gamma functions and related functions 133-152 * Orthogonal polynomials 153-231 * Spherical and hyperspherical harmonic polynomials 232-263 * Orthogonal polynomials in several variables 264-293 * Elliptic functions and integrals 294-383 * Subject index 384-392 * Index of notations 393-396.

L. B. Benny: *Mathematics for students of engineering and applied science*. Oxford University Press (Geoffrey Cumberlege), London, 1954. 7+783 pp. sh. 35/-.

Limits — convergence of series — binomial, exponential and logarithmic series — hyperbolic functions 1-38 * Imaginary and complex quantities — Demoivre's theorem — algebraic equations 39-69 * Determinants 70-81 * The elements of plane co-ordinate geometry 82-124 * The elements of solid co-ordinate geometry 125-162 * Vectors and vector products 163-188 * Differentiation and its applications 189-229 * The expansion of functions in series — the theorems of Taylor and Maclaurin 230-259 * Integration 260-318 * Applications of integration 319-377 * Differential equations 378-441 * Functions of more than one independent

variable — partial differentiation and its applications 442–499 * The integration of linear differential equations in series 500–516 * Fourier series — harmonic analysis 517–541 * Partial differential equations 542–581 * Multiple integrals and their applications 582–630 * Spherical trigonometry 631–664 * Differentiation of vectors 665–685 * Errors of observation — method of least squares 686–704 * Exercises 705–732 * Answers 733–780 * Index 781–783.

L. Bergman: *Schwingende Kristalle*. Dritte Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953. 52 S., 51 Fig. Kart. DM 2.60.

Die piezoelektrischen Erscheinungen 5–20 * Die piezoelektrischen Kristalle im hochfrequenten Wechselfeld 20–31 * Die Anwendung der schwingenden Kristalle in der Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 31–38 * Die Anwendung der schwingenden Kristalle in der Ultraschalltechnik 39–45 * Die Bedeutung des Ultraschalles in Wissenschaft und Technik 45–51 * Schrifttumsverzeichnis 52.

Ludwig Bieberbach: *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 66.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953. 9 + 338 S. DM 36.00, ganzleinen DM 39.60.

Die grundlegenden Existenzsätze 1–20 * Singuläre Stellen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung 21–33 * Das Verhalten der Lösungen von $dw/dz = (aw+bz)/(cw+dz)$ für konstante a, b, c, d im Punkte $(0, 0)$ 34–46 * Ausserwesentlich singuläre Stellen zweiter Art 46–81 * Differentialgleichungen erster Ordnung im Grossen 81–107 * Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Kleinen 108–182 * Differentialgleichungen der FUCHSSchen Klasse 182–189 * Die hypergeometrische Differentialgleichung 189–257 * Die BESSELSche Differentialgleichung 257–289 * Differentialgleichungen der FUCHSSchen Klasse mit vier singulären Punkten 289–302 * Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten 302–323 * Einiges über nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung 324–335 * Namen- und Sachverzeichnis 335–338.

Paul F. Byrd and Morris D. Friedman: *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 67.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954. 12 + 355 S., 22 Fig. DM 36.00, ganzleinen DM 39.60.

Introduction 1–7 * Definitions and fundamental relations 8–41 * Reduction of algebraic integrands to Jacobian elliptic functions 42–161 * Reduction of trigonometric integrands to Jacobian elliptic functions 162–181 * Reduction of hyperbolic integrands to Jacobian elliptic functions 182–190 * Tables of integrals of Jacobian elliptic functions 191–222 * Elliptic integrals of the third kind 223–239 * Table of miscellaneous elliptic integrals involving trigonometric or hyperbolic integrands 240–248 * Elliptic integrals resulting from Laplace transformations 249–251 * Hyperelliptic integrals 252–271 * Integrals of the elliptic integrals 272–281 * Derivatives 282–287 * Miscellaneous integrals and formulas 288–296 * Expansions in series 297–306 * Appendix 307–350 * Bibliography 351 * Index 352–355.

Helfred Christoffersen: *Regning og matematikk i realskolen*. (Fabritius pensumoversikter til repetisjon.) Fabritius & Sønner, Oslo, 1954. 80 s.

Aritmetikk og algebra 5–34 * Praktisk regning 35–55 * Plangeometri 56–80.

Walter Grossmann: *Grundzüge der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953. 8+261 S., 54 Abbildungen. Ganzleinen DM 19.80.

Grundzüge der Fehlerlehre 6–47 * Ausgleichung von direkten Beobachtungen 48–58 * Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen 59–142 * Ausgleichung von bedingten Beobachtungen 143–220 * Anhang 221–253 * Schrifttum 254 * Namen- und Sachverzeichnis 255–261.

Stig Hjalmar: *Teoretisk fysik*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1953. 255 s. Sv. kr. 28.00.

(Anmeldtd i NMT, dette hefte, s. 62.)

Vektorfält 13–33 * Hydromekanik 37–48 * Det elektrostatiske fältet i vakuum 51–74 * Det elektrostatiske fältet i materiella medier 75–94 * Fältet från permanenta magneter 94–98 * Det stationära elektromagnetiske fältet 98–118 * Det kvasistationära elektromagnetiske fältet 119–125 * Det allmänna elektromagnetiske fältet 125–142 * Geometrisk optik 145–156 * Vågoptik 156–172 * Elektromagnetisk optik 172–181 * Termodynamikens första huvudsats 185–200 * Termodynamikens andra huvudsats 200–221 * Irreversibla processer och jämviktssvillkor 221–231 * Kemisk termodynamik 231–243 * Beteckningar 244–248 * Register 249–255.

Carl Hyltén-Cavallius och Lennart Sandgren: *Plan geometri*. Hermods, Malmö, 1953. 15+293 s. Sv. kr. 21.00.

(Anmeldtd i NMT, dette hefte, s. 60.)

Vektorer 1–9 * Parallellkoordinatsystemet och räta linjen 10–26 * Skalär produkt och rätvinkliga koordinater 27–41 * Koordinattransformationer 42–53 * Likställighet, triangelgeometri och harmonisk delning 54–69 * Cirkeln 70–92 * Lineära avbildningar 93–106 * Syntetisk kägelsnittsgeometri 107–141 * Analytisk kägelsnittsgeometri 142–190 * Speciella egenskaper hos ellips, hyperbel och parabel 191–205 * Homogena koordinater 206–244 * Kägelsnittet från projektiv synpunkt 245–282 * Svar til övningar 283–289 * Index 290–293.

Olaf Ingebrigtsen og Kay Piene: *Oppgavesamling for realskolens og gymnasets 2 første klasser*. Tredje, reviderte opplag. J. W. Cappelens Forlag, Oslo, 1954. 128 s.

Oppgaver i aritmetikk—algebra 5–59 * Oppgaver i geometri 60–84 * Blandede oppgaver 85–128.

George Jaffé: *Drei Dialoge über Raum, Zeit und Kausalität*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954. 211 S. Kart. DM 9.60.

Die Dialoge schliessen sich an Berkeley's *Three Dialogues between Hylas and Philonous* an. Die beiden ersten Dialoge erscheinen hiermit in zweiter Auflage (Zwei

Dialoge über Raum und Zeit, Akademische Verlagsanstalt m. b. H., Leipzig, 1931). Der dritte Dialog wird hier zuerst veröffentlicht.

Lyman M. Kells: *Elementary differential equations*. 4th ed. McGraw-Hill Book Co., London, 1954. 10+266 pp. sh. 30/-.

Definitions und elementary problems 1-12 * Applications 13-28 * Differential equations of the first order and the first degree 29-49 * Applications involving differential equations of the first order 50-63 * First-order equations of degree higher than the first 64-73 * Linear differential equations with constant coefficients 74-95 * Applications of linear equations with constant coefficients 96-123 * Miscellaneous differential equations of order higher than the first 124-135 * Applications 136-149 * Differential equations in more than two variables. Existence theorems 150-162 * Solution by series and by methods involving successive approximations 163-182 * Partial differential equations of the first order 183-201 * Partial differential equations of order higher than the first 202-219 * Applications of partial differential equations 220-240 * Answers 241-262 * Index 263-266.

W. Lietzmann: *Der Pythagoreische Lehrsatz*. Siebente Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953. 96 S., 73 Fig. Kart. DM 3.60.

Einiges aus der Geschichte des pythagoreischen Lehrsatzes 5-13 * Zerlegungsbeweise 13-32 * Der pythagoreische Lehrsatz im euklidischen System 32-40 * Pythagoreischer Lehrsatz und Ähnlichkeitslehre 40-51 * Berechnungen mit Hilfe der pythagoreischen Gleichung 51-57 * Funktionsbetrachtungen 57-67 * Pythagoreische Zahlen 68-79 * Das Fermatsche Problem 79-92 * Einiges über die Literatur zum pythagoreischen Lehrsatz 92-95 * Namenverzeichnis 96.

W. Lietzmann: *Wo steckt der Fehler?* Dritte, erweiterte Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953. 185 S., 121 Fig. Kart. DM 5.80.

Täuschungen und Fehlschlüsse 9-64 * Trugschlüsse 65-116 * Warnzeichen aus der Analysis des Unendlichen 117-184 * Namenverzeichnis 185.

Rolf Nevanlinna: *Eindeutige analytische Funktionen*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 46.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953. 10+379 S. DM 46.50, ganzleinen DM 49.50.

Einleitung 1-3 * Konforme Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Gebiete 4-22 * Lösung des DIRICHLETSchen Problems für ein schlichtes Gebiet 22-37 * Funktionentheoretische Majorantenprinzipien 37-67 * Beziehungen zwischen nichteuklidischen und euklidischen Massbestimmungen 67-114 * Punktmengen vom harmonischen Mass Null 114-163 * Erster Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen 163-184 * Beschränktartige Funktionen 185-217 * Meromorphe Funktionen endlicher Ordnung 217-236 * Zweiter Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen 237-264 * Anwendung des zweiten Hauptsatzes 264-286 * Die RIEMANNSche Fläche einer einwertigen Funktion 286-314 * Der Typus einer RIEMANNSchen Fläche 314-327 * Die AHLFORSsche Theorie der Überlagerungsflächen 327-362 * Literaturverzeichnis 363-370 * Namen- und Sachverzeichnis 371-379.

Rolf Nevanlinna: *Uniformisierung*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 64.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953. 10 + 391 S. DM 46.50, ganzleinen DM 49.50.

Einleitung 1–9 * Algebraische Funktionen 10–40 * Begriff der RIEMANNSchen Fläche 40–100 * Funktionentheoretische Grundsätze 100–135 * Existenzsätze 135–162 * Geschlossene RIEMANNSche Flächen 162–196 * Der RIEMANNSche Abbildungssatz 196–214 * Gruppen von linearen Transformationen 214–240 * Uniformisierung 240–274 * Schlichtartige Flächen 275–311 * Offene RIEMANNSche Flächen 311–384 * Literaturverzeichnis 385–387 * Namen- und Sachverzeichnis 388–391.

R. Rothe: *Höhere Mathematik II*. Neunte, verbesserte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 22.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953. 210 S., 98 Abbildungen. Kart. DM 6.50.

Integralrechnung 9–85 * Unendliche Reihen, insbesondere Potenzreihen 85–141 * Integrale, die von einem Parameter abhängen. Linienintegrale. Integrale im Komplexen 141–162 * Von den Determinanten und den Vektoren nebst Anwendungen 162–205 * Register 206–210.

R. Rothe: *Höhere Mathematik III*. Sechste, verbesserte und erweiterte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 23.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953. 242 S., 166 Abbildungen. Kart. DM 8.20.

Krumme Flächen und krummlinige Koordinaten des Raumes 9–32 * Linienintegrale im Raume. Doppelintegrale und mehrfache Integrale 33–122 * Gewöhnliche Differentialgleichungen reeller Veränderlicher 123–236 * Register 237–242.

R. Rothe — I. Szabó: *Höhere Mathematik VI*. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 45.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953. 251 S., 54 Abbildungen. Kart. DM 17.60.

Einige ausgewählte Sätze aus der Funktionentheorie und ihre Anwendungen auf spezielle Funktionen 11–62 * Weiterführung der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 63–114 * Spezielle lineare Differentialgleichungen 114–211 * Partielle Differentialgleichungen 211–247 * Register 248–251.

Ernst S. Selmer: *Differensial- og integralregning*. Akademisk Forlag, Oslo, 1954. 8 + 315 s., 113 fig. N. kr. 30.00.

(Anmeldt i NMT, dette hefte, s. 64.)

Funksjoner 1–40 * Derivasjon 41–80 * Anvendelser av differensialregningen 81–127 * Rekkeutviklinger 128–157 * Komplekse tall 157–167 * Integrasjon 167–200 * Anvendelser av integralregningen 200–230 * Funksjoner av flere variable 231–288 * Formelsamling 289–292 * Fasit til øvelsesoppgavene 293–315.

George B. Thomas: *Calculus*. Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge (Mass.), 1953. 614 pp. \$ 6.50.

The rate of change of a function 9–39 * Derivatives of algebraic functions 40–78 * Applications 79–113 * Integration 114–185 * Applications of integration to physics

186–214 * Polar coordinates 215–223 * Transcendental functions 224–259 * Hyperbolic functions 260–280 * Methods of integration 281–329 * Vectors and parametric equations 330–361 * Solid geometry and vectors 362–400 * Partial differentiation 401–452 * Multiple integrals 453–473 * Infinite series 474–535 * Differential equations 536–559 * Answers to problems 560–601 * Formulas from elementary mathematics 603–608 * Index 609–614.

L. Fejes Tóth: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 65.) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953. 10 + 197 S. DM 24.00, ganzleinen DM 27.00.

Einige elementargeometrische Sätze 1–28 * Sätze aus der Theorie der konvexen Körper 28–55 * Lagerungs- und Überdeckungsprobleme in der Ebene 55–99 * Packungs- und Deckungswirtschaftlichkeit einer Scheibenfolge 99–113 * Extremaleigenschaften der regulären Polyeder 113–157 * Irreguläre Lagerungen auf der Kugel 157–171 * Lagerungen im Raum 171–189 * Literaturverzeichnis 189–193 * Namen- und Sachverzeichnis 194–197.

Ernst Trost: *Primzahlen*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus, II.) Verlag Birkhäuser, Basel, 1953. 95 S. Brosch. SFr. 13.50.

Grundlagen und erste Übersicht 7–19 * Zahlentheoretische Funktionen 19–24 * Allgemeine Primzahlkriterien 24–34 * Spezielle Primzahlen 34–43 * Primzahlsummen 43–49 * Allgemeine Aussagen über $\pi(x)$ und p_n 50–66 * Elementarer Beweis des Primzahlsatzes 66–73 * Elementarer Beweis des Satzes über die arithmetische Progression 73–78 * Die Siebmethode 79–88 * Die Goldbachsche Vermutung 89–93 * Literaturverzeichnis 94–95.

Siegfried Valentiner: *Vektoranalysis*. (Sammlung Götschen 354.) Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1954. 138 S., 19 Fig. DM 2.40.

Einleitung 7–12 * Rechnungsregeln der Vektoranalysis 13–80 * Anwendungen in einigen physikalischen Gebieten (Potentialtheorie, Hydrodynamik, Elektrizität) 81–108 * Lineare Vektorfunktionen, Dyaden, Tensoren 109–134 * Formelsammlung 135–138.

R. Zurmühl: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953. 11 + 481 S., 115 Abbildungen. DM 28.50.

Einführung, Hilfsmittel 1–9 * Gleichungen 9–91 * Lineare Gleichungen und Matrizen 91–166 * Interpolation und Integration 166–221 * Ausgleichsrechnung 221–265 * Darstellung willkürlicher Funktionen 265–318 * Differentialgleichungen: Anfangswertaufgaben 319–375 * Differentialgleichungen: Rand- und Eigenwertaufgaben 376–474 * Sachverzeichnis 475–481.

OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av de signerte oppgaver 22–28 sendes til oppgaveredaktøren, professor R. Tambs Lyche, Holmengrenda 7, Oslo. Slike løsninger vil bli trykt i et følgende hefte i den utstrekning plassen tillater, dog vanligvis bare den beste løsning av hver oppgave. Løsninger av oppgaver i dette hefte må være sendt innen 10. august 1954.

De enklere, ikke signerte oppgaver er stillet av redaksjonen, og løsninger av dem vil ikke bli trykt.

Redaksjonen er takknemlig for forslag til oppgaver. Slike forslag kan sendes til oppgaveredaktøren, helst sammen med oppgavestillerens egen løsning.

22. Ett område i planet med ytan S är belagt med en massa med tätheten 1. Visa, att områdets tröghetsmoment med avseende på en godtycklig axel vinkelrät mot planet är $\geq S^2/2\pi$. När inträffar likhet?

Lars Hörmander

23. Funktionerna $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, är definierade för alla x och har k kontinuerliga derivator. Vidare går $f_n^{(k)}(x)$ likformigt mot noll då $n \rightarrow \infty$. Visa att om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{k-1} f_n^{(\nu)}(x)$$

existerar för k olika x -värden, så existerar det för alla x och är ett polynom av grad $< k$.

Tore Herlestam

24. Evaluate

$$\lim_{q \rightarrow 1-} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu^2} x^{\nu} (1-q)^{\nu}}{(1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2\nu})}.$$

Martin G. Beumer

25. Om α är ett tal > 1 skall man beräkna volymen av det n -dimensionella område, som definieras av olikheterna

$$x_1 \geq x_2^{\alpha}, x_2 \geq x_3^{\alpha}, \dots, x_{n-1} \geq x_n^{\alpha}, x_n \geq x_1^{\alpha}.$$

Svensk 2-betygsskrivning, dec. 1953. Generaliserat.

26. Bevisa identiteten

$$\sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu} \frac{\log \nu}{\nu} = \log 2 \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{\log \nu}{\nu},$$

och använd denna för att visa att

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\log \nu}{\nu} = C \log 2 - \frac{1}{2}(\log 2)^2,$$

där C är Eulers konstant.

Tore Herlestam

27. When n is an integer, and $\varphi(n)$ is Euler's indicator, prove:

$$\sqrt{\frac{1}{2}n} < \varphi(n) < n \quad \text{for } n > 2.$$

Martin G. Beumer

28. La $x_1, x_2, \dots, x_n$ være reelle variable. La $\Delta_n = |a_{ij}|$ være determinanten med elementene $a_{ij} = |x_i - x_j|$. Beregn det n -dobbelte integralet

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \Delta_n dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

R. Tambs Lyche

29. På en sirkelbue AB ligger n punkter $A_1, A_2, \dots, A_n$. Hvor mange konvekse brukne linjer kan en trekke fra A til B med knekkpunkter i ett eller flere av punktene $A_1, A_2, \dots, A_n$?

30. Gitt en rotasjonskjegle og et punkt P innenfor den. Søk de plane snitt som har P till brennpunkt.

31. La α og λ være gitte reelle tall, $\lambda > 1$. Tallfølgen $\{a_n\}$ er definert ved

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \lambda^{a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Undersøk for hvilke verdier av α og λ tallfølgen $\{a_n\}$ konvergerer. (Smlgn. løsning av dansk prisoppgave i NMT, Bind 1, s. 179–181.)

32. La AC være en korde gjennom et brennpunkt B i et egentlig kjeglesnitt. Vis at om D er det punkt på styrelinjen der tangentene i A og C møtes, så er $\angle ABD$ rett.

La to egentlige kjeglesnitt i et plan ha et felles brennpunkt B og berøre hverandre i et punkt P . Vis at skjæringspunktet Q for styrelinjene ligger på fellestangenten i P og at $\angle PBQ$ er rett.

33. La (a_i, b_i) og r_i for $i = 1, 2, 3$ være sentrene og radiene i tre sirkler. Finn vilkåret for at de tre sirkler har en felles tangent.

34. Idet $a_1, a_2, \dots, a_n$ er n positive tall ($n > 2$), som oppfyller betingelsen

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1,$$

skal en finne den minste verdi av produktet

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right).$$

LØSNINGER

Oppgave 19.

Riktig løst av E. Bøhn, A. Lødemel og H. Sandum.

Oppgave 20.

La ε_1 og ε_2 bety ± 1 . Tilfellet L_1 parallell med L_2 ($1 - l^2 = 0$) er ikke tatt med.

En enhetsvektor

$$\mathbf{s} = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2 + \gamma (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)$$

bestemmes slik at $\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}_1 = \varepsilon_1 c_1$, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}_2 = \varepsilon_2 c_2$. Det gir

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 c_1 - \varepsilon_2 c_2 l}{1 - l^2}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_2 c_2 - \varepsilon_1 c_1 l}{1 - l^2},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{(1 - c_1^2)(1 - c_2^2) - (l - \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_1 c_2)^2}}{1 - l^2}.$$

Den negative verdi av γ er ikke tatt med, da den bare ville gi enhetsvektorer som er motsatt rettet de vi nå har. Er $|d|$ lengden av det søkte linjestykke, må for passe verdier av t_1 og t_2 :

$$\mathbf{a}_1 t_1 + \mathbf{b}_1 + d \mathbf{s} - \mathbf{a}_2 t_2 - \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}.$$

Multipliseres denne likning skalart med $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, finnes

$$d = \frac{(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{\sqrt{(1 - c_1^2)(1 - c_2^2) - (l - \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_1 c_2)^2}},$$

og ved skalar multiplikasjon med $\mathbf{a}_1 - l \mathbf{a}_2$ finnes

$$t_1 = \frac{(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{a}_1 - l\mathbf{a}_2)}{1 - l^2} - \alpha d.$$

Er $\gamma = 0$ blir det ingen løsning hvis ikke $(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = 0$, dvs. linjene skjærer hverandre, og da kan d velges fritt. De søkte linjers likninger kan skrives

$$\mathbf{r} = \mathbf{st} + \left[\frac{(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{a}_1 - l\mathbf{a}_2)}{1 - l^2} - \alpha d \right] \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1.$$

Anders Lødemel

Også riktig løst av E. Bohn, J. I. Try og P. Wulff Pedersen.

Oppgave 21.

a. ABC är en triangel, där $A \geq 90^\circ$. O er bisektrisernas skärningspunkt. Drag linjerna OD , OE , OF och OG , så at de halvera de vinklar, som BO och CO bilda med normalerna från O mot triangelns sidor. AOD , DOE , EOF , FOG , GOA , BDE och CFG äro de 7 sökta trianglarna.

Bevis: Vinklarna vid A , D , E , F och G äro spetsiga, ty höjderna från O , B och C falla inom deltrianglarna. Ytterligare är

$$\begin{aligned} \angle AOD &= 90^\circ - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(90^\circ - \frac{1}{2}B) < 90^\circ, \quad \angle DOE = 90^\circ - \frac{1}{2}B < 90^\circ, \\ \angle EOF &= \frac{1}{2}(90^\circ - \frac{1}{2}B) + \frac{1}{2}(90^\circ - \frac{1}{2}C) < 90^\circ, \text{ osv.} \end{aligned}$$

b. Varje triangelns vinkelsumma är 180° , således är medelvärdet av vinklarna i alla deltrianglarna $= 60^\circ$.

Om $A \geq 90^\circ$ måste den delas i minst två delar, och A , B och C bilda minst 4 vinklar i deltrianglarna. Dessa vinklars medelvärde är $< 60^\circ$. Således är medelvärdet av de återstående vinklarna $> 60^\circ$. I vissa punkter av den figur, som bildas, då ABC uppdelas i spetsvinkliga deltrianglar, förekomma 3 eller flera vinklar, som tillsammans utgöra ett halvt varv. I andra punkter kan förekomma 5 eller flera vinklar, som tillsammans bilda ett helt varv. Ett medelvärde som är $> 60^\circ$, erhålles endast då ett helt varv delas i 5 delar, och således måste någon sådan punkt förekomma. De 5 där sammanstötande trianglarna bilda en utåt konvex femhörning*. För at erhålla en triangel måste man til den foga ytterligare minst 2 trianglar. Således krävs 7 spetsvinkliga deltrianglar.

Johan Stark

Også riktig løst av A. Bager, E. Bohn og A. Lødemel.

* De 5 sammenstøtende trekanter må tilsammen danne en mangekant med *minst* 5 sider. For å utfylle denne til en trekant kreves minst to nye trekanter, og dette kan bare skje om mangekanten er en femkant som da blir konveks.

Red.

KRONIKK

MØTEREFERATER FOR 1953 FRA DE UTGIVENDE FORENINGER

NMT vil i 1. hefte av hvert bind gi møterefater fra foregående år for de utgivende foreninger. Denne gang gir vi også en kort redegjørelse for Matematikkseksjonen i Norsk Lektorlag, p. g. a. denne seksjons spesielle karakter.

DANSK MATEMATISK FORENING.

Følgende foredrag har været holdt i foreningen:

- 9.2 V. Jørgensen: *Om en analytisk funktions værdiområde. (Anvendelse af Ahlfors' udvidelse af Schwarz' lemma.)*
- 2.3 J. F. Steffensen: *Nogle træk af mit liv som matematiker og aktuar.*
- 23.3 E. B. Schieldrop, Oslo: *Tippetoppens bevægelse belyst ut fra et bestemt centralt teorem.*
- 30.3 W. Feller, Princeton, New Jersey: *Differentialekvationer och halvgrupper.*
- 25.4 J. G. van der Corput, Amsterdam: *The calculus of asymptotic residues.*
- 4.5 B. Segre, Rom: *Algebraic geometry and topology.*
- 6.5 B. Segre, Rom: *Algebraic and differential geometry.*
- 7.5 B. Segre, Rom: *Geometry upon an algebraic variety.*
- 28.9 D. Gale, Providence, Rhode Island: *Games and their solutions.*
- 14.10 W. Kaplan, Ann Arbor, Michigan: *A generalization of Gross' star theorem.*
- 19.10 E. Hemmingsen, Syracuse, New York: *Om matematikundervisningen ved amerikanske skoler og universiteter.*
- 9.11 A. E. Heins, Pittsburgh, Pennsylvania: *A class of boundary value problems in diffraction theory.*
- 11.11 A. F. Andersen: *En klassisk rækkesætnings udviklingstrin gennem de sidste halvtreds år.*
- 7.12 C. M. Christensen: *Om formelle potensrækker.*

Endvidere har foreningens medlemmer været indbudt til 3 foredrag i Selskabet for de eksakte videnskabers historie, holdt af E. J. Dijksterhuis, Utrecht:

- 9.3 *Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für das Denken Blaise Pascals.*
- 9.3 *Die Mechanik im 17. Jahrhundert und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Physik.*
- 10.3 *Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft.*

Videre til 2 foredrag i Fysisk Forening:

- 27.4 K. O. Nielsen: *Om elektronregnemaskinens fysiske principper.*
- 11.5 C.-E. Frøberg, Lund: *Matematiska metoder vid räkning med elektronräknemaskiner.*

FORENINGEN AF MATEMATIKLÆRERE VED GYMNASIESKOLER OG
SEMINARIER I DANMARK.

- 8.3 (Fredericia) og 17.3 (København). T. Bang: *Store primtal*.
20.10 M. Pihl: *Det historiske islæt i matematik- og fysikundervisningen* (diskussion).
21.10 C. M. Christensen: *Tilnærmet beregning i skolen*.
21.10 G. Schmidt-Nielsen: *Matematikkens stilling på seminarierne* (diskussion).

FINLANDS MATEMATISKA FÖRENING.

- 21.1 O. Tammi: *Sileiden funktioiden koeffikienttiprobleemasta* [Koefficientproblemet för släta funktioner].
11.2 L. Myrberg: *Positiivisista harmonisista funktioista Riemannin pinnalla* [Positiva harmoniska funktioner på en Riemannsk yta].
11.3 R. Nevanlinna: *Dirichlet'n periaatteesta osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa* [Dirichlets princip i teorien för partiella differentialekvationer].
15.4 P. Kustaanheimo: *Finiittisestä maailmankuvasta* [Om en finit världsbild].
5.5 H. Cramér, Stockholm: *Några problem rörande stokastiska processer*.
22.5 L. E. J. Brouwer, Amsterdam: *Die Ordnung im Kontinuum*.
9.9 O. Lehto: *Rajoitettuihin funktioista* [Funktioner med begränsad karaktistik].
30.9 W. Kaplan, Ann Arbor, Michigan: *Über schlichte, beinahe konvexe Abbildungen*.
6.10 W. Haack, Berlin: *Über die Randwertaufgabe der partiellen Differentialgleichungen vom gemischten Typus*.
10.10 P. J. Myrberg: *Algebrallisista iteraatioista* [Om algebraiska iterationer].
18.11 S. Mattila: *Satunnaisfunktion Laplace-transformaatioista* [Laplace-transformation av stokastiska funktioner].
16.12 L. Myrberg: *Poisson'in differentiaaliyhtälöstä avoimilla Riemannin pinnoilla* [Poissons differentialekvation på öppna Riemannska ytor].

FINLANDS MATEMATIK- OCH FYSIKLÄRARFÖRBUND.

- 4.2 Årsmöte. Föredrag av
L. Kotkatlahti: *Korjaustuntien lukumäärän korjaamisesta* [Höjandet av korrigeringstimmarnas antal].
3-7.8 Excursions- och föreläsningsdagarna i Joensuu:
K. Väisälä: *Differentiaalit ja niiden käyttö* [Differentialer och deras användning].
K. Väisälä: *Differentiaali- ja integraalilaskennan opettamisesta lukiossa* [Undervisningen av differential- och integralräkning i gymnasiet].
W. Hyppönen: *Pohjois-Karjalan malmikentistä* [Om Nordkarelenens malmdistrikt].
K. Väisälä: *Matematiikan, fysiikan ja kemian asema uudistetussa lukiossa ja ylioppilaskirjoituksissa* [Matematiken, fysiken och kemien i det reformerade gymnasiet och i studentskrivningarna].
K. Väisälä: *Kokonaisuudesta ideaaleihin* [Från hela tal till idealer].
O. Laukama: *Didaktisista näkökohdista audiovisuaalisten välineiden käytössä* [Didaktiska synpunkter vid användandet av audiovisuella apparater].

V. Heinonen: *Audiovisuaalisten välineitten paikallisesta organisatiosta [Den lokala organisationen vid användandet av audiovisuella apparater].*

Dagarnas program upptog dessutom flere excursionser till omgivningens gruv-distrikt, läroanstalter och fabriksanläggningar.

Inom förbundet verkar på olika håll i Finland 7 matematik- och fysiklärarklubbar. Varje klubb har sina egna möten med föredrag, föreläsningar och diskussioner. År 1953 hade Helsingfors klubb 6 möten.

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGID.

Der blev holdt 6 møder. Mødernes hovedemner var følgende:

1. T. Einarsson: *Om tyngdemålinger.*
2. L. Ásgeirsson: *Undersøgelser i forbindelse med Hadamards tre cirklers sætning.*
3. S. Stefánsson: *Om hyperbelkonstruktioner.*
4. V. Ögmundsson: *Om hyperkomplekse tal.*
5. L. Ásgeirsson og S. Stefánsson: *Beretninger fra mødet i Lund.*
6. Þ. Karlsson: *Om radiale kræfters virkninger i aksiale kompressorer.*

Foreningen uddelte bogpræmier til dem, som fik udmærkelse i matematik til studentereksamen.

NORSK MATEMATISK FORENING.

- 5.3 R. Tambs Lyche: *Det gjenfunne Abelmanuskript.*
- 5.3 I. Johansson: *En unødig pedagogisk vanskelighet ved grensebegrepet.*
- 4.9 Ø. Ore, New Haven, Connecticut: *Sannsynlighetsregningen i renessansen.*
- 29.9 K. E. Aubert: *Om entydig produktspaltning og idealteori.*
- 17.11 P. Hoel, Los Angeles, California: *Statistical confidence bands for polynomial curves.*

NORSK LEKTORLAGS MATEMATIKKSEKSJON.

Matematikkseksjonen i N. L. er ingen vanlig forening, med lover, styre osv. Men alle matematikklærere som er medlemmer av N. L. er dermed også med i Seksjonen. Når N. L. holder sine landsmøter (hvert tredje år), pleier det å være møter for de enkelte fag, likeså er det ved de distriktsvise kretsmøter som holdes en eller to ganger i året gjerne slike møter.

I Bergen og i Trondheim er det en egen seksjon for lærerne i de matematisk-naturvitenskapelige fag, som holder møter også utenom kretsmøtene. Endelig er det i Oslo en egen Matematikkseksjon som har møter en eller to ganger hvert semester.

Om disse foredragene foreligger det melding:

- 25.10 i Halden krets. L. Wethe: *Feilregning i undervisningen, spesielt i realgymnasets fysikk.*
- 25.10 i Bergens realistseksjon. Aa. Kvamme: *Samfunnsregningen.*

Matematikkseksjonen i Oslo:

- 17.2 G. Østrem: *Fra matematikkundervisningen i den høyere skole i Sverige. (Med demonstrasjon av lærebøker og eksamensoppgaver.)*
- 16.4 I. Johansson: *Samspillet mellom fantasi og logikk i teordannelsen.*
- 20.10 A. Næss: *Logikk og matematikk.*

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET.

21.2 Möte i Stockholm:

M. Tideman: *En extremitätskap hos avbildningen av en cirkel på en reguljär polygon.*

G. Dahlquist: *Stabilitet vid numerisk integration.*

A. Pleijel: *Några olikheter för konvexa kurvor med begränsad krökningsradie.*

H. Bergström: *Generaliserade poissonfördelningar som gränsfördelningar.*

S. Comét: *Användning av snabba elektroniska maskiner på beräkning av symmetriska gruppens karaktärer.*

L. Carleson: *En variationsmetod vid Painlevés problem.*

O. Hanner: *Eilenberg-Steenrods axiom för homologi-teori.*

13.6 Möte i Uppsala:

L. Hulthén: *Variationsprincipen för kontinuerliga spektra.*

S. Lyttkens: *Ett problem om indikator-diagram för hela funktioner.*

B. Andersson: *Ett svängningsproblem (inom balkteori).*

24.10 Möte i Stockholm:

H. Rådström: *Dekomposition av konvexa punktmängder.*

L. Carleson: *Ett problem sammanhängande med axelsymmetriska strömningar.*

L. Hörmander: *Om Cauchys problem vid ljuskvationen.*

H. Wold: *De statistiska metoderna ur naturvetenskaplig och samhällsvetenskaplig synpunkt.*

S. Lundqvist: *Ett problem om icke-linjära svängningar vid elektriska system.*

B. Andersson: *En uppskattning av Gabriels konstant.*

B. Kjellberg: *En sats om funktioner av exponentialtyp.*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I LUND.

15.11 Höstsammanträde. Föredrag av

T. Gustafson: *Om det svenska och europeiska atomenergiarbetet.*

Vidare förekom en synnerligen livlig diskussion om gymnasiets matematikkurser med inledningsanföranden av C. E. Sjöstedt och O. Frostman. Ett utförligt referat finnes på annan plats i detta häfte.

FORENINGSNYTT

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING I LUND

avhöll sitt årsmöte på Fysiska Institutionen i Lund söndagen den 11 april 1954. Till styrelse valdes: Lektor A. Leide, ordf., rektor J. Hemmingsson, v. ordf., lektor B. Adell, sekr., adjunkt E. Malmsjö, kassaförv. Arbetsutskott: Ordf., sekr. samt prof. Edlén och Smith. Efter årsmötet hölls följande föredrag:

G. Arvidsson: *Några synpunkter på MKSA-systemet och dess användning inom skolkurserna.*

K. Lundmark: *Frågor och problem inför sommarens totala solförmörkelse.*

T. Wilner: *Experimentell atomfysik (med demonstrationer).*

FÖRENINGEN FÖR MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIG UNDERVISNING
I STOCKHOLM

avhöll sitt årsmöte den 4–5 januari 1954, första dagen i Saltsjöbaden och andra dagen i Tekniska museet, Stockholm. Till styrelse valdes: Lektor E. Knave, ordf., lektor F. Ehrnst, v. ordf., lektor B. Gustaver, sekr. och skattmäst. Arbetsutskott: Ordf., v. ordf., sekr., lektor G. Beskow och lektor K. Persson. Efter årsmötet hölls följande föredrag:

- A. Leide: *Granskning och eftergranskning av studentstilarna i matematik och fysik* (diskussion).
- N. Herlofson: *Radioastronomi*.
- B. Lindblad höll ett orienterande anförande om Stockholms observatorium. Därefter skedde visning av observatoriet och dess instrument.
- E. Ingelstam: *MKSA-systemet som grund för skolans fysikundervisning*.
- T. Althin: *Ett tekniskt museums roll i undervisningen*. Med demonstrationer av T. Wilner.
- I. Hjerpe demonstrerade kemiska skolförsök och visade ny kemimateriel.
- K. Lindberg, Köln, och S. Lindholm demonstrerade fysikaliska skolförsök och visade ny fysikmateriel.

UTNEVNELSER

Til professor i matematik ved Danmarks Tekniske Højskole: Dr. phil. Erling Følner.

Till professor vid Åbo Akademi: Docenten G. af Hällström.

Till biträdande professor vid Tekniska Högskolan, Helsingfors: Fil. dr. O. Lokki.

Till docent vid Helsingfors Universitet: Fil. dr. O. Tammi.

Till docent vid Kauppakorkeakoulu, Helsinki (Finska Handelshögskolan): Fil. dr. S. Mattila.

Til rektor ved Menntaskólinn að Laugarvatni: Dr. Sveinn Þorðarson.

Til professor ved Norges Tekniske Høgskole, Trondheim: Dr. philos. Henrik Selberg.

Til lektor ved Oslo Universitet: Cand. real. Johannes Østvold.

Till professor vid Stockholms Högskola: Fil. dr. Lennart Carleson.

Till professor i matematik vid Tekniska Högskolan: L. G. Borg.

Till laborator vid Tekniska Högskolan: Fil. dr. Hans Rådström och fil. dr. Ulf Hellsten.

Till docent vid Uppsala Universitet: Fil. dr. Bengt Stolt.

Till docent vid Lunds Universitet: Fil. dr. Tord Ganelius.

DOKTORGRADER

Dissertationer vid Helsingfors Universitet:

28.3.53 Y. Kilpi: *Über lineare normale Transformationen im Hilbertschen Raum*.

23.5.53 J. Hintikka: *Distributive Normal Forms in the Calculus of Predicatives*.

Disputats ved Københavns Universitet:

29.4.54 A. Jensen: *A Distribution Model Applicable to Economics*.

PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

I prisopgavekonkurrencen for 1954, arrangeret af den danske matematiklærerforening, indkom 24 besvarelser. 1. præmie (100 kr.) tildeltes *Anton Jensen*, III G mn., Østre Borgerdydsskole, København. 2. præmie (50 kr.) tildeltes *Erik Jansen*, II G mn., Christianshavns Gymnasium, København. Opgavernes tekst findes i NMT, Bind 1 (1953), s. 175—177.

SUMMARY IN ENGLISH

E. J. DIJKSTERHUIS: *The integration methods of Archimedes.*

Written in German. See p. 5.

FREDRIK EHRNST: *Reflexions on heuristic teaching of mathematics.*

The advantage of guiding the pupils in a natural way up to definitions and theorems is illustrated by elementary examples. Time insufficiency should not prevent the teacher from employing such heuristic instruction to a certain extent.

GERMUND DAHLQUIST: *The Monte Carlo-method.*

The article is a survey of some important applications of the Monte Carlo-method in statistics and numerical analysis. Comparisons as to speed and accuracy are made with conventional methods. The article contains the following sections:

1. Introduction. 2. Multiple integrals in n dimensions, with an application on the Swedish relay computer BARK. 3. Importance sampling. 4. Ways of generating random numbers, including a formation of sums modulo 1 of two different sequences, used on the above-mentioned computation on BARK. 5. Matrix inversion by a random walk method. 6. Numerical solution of partial differential equations by the same method. 7. The passage of a shower of particles (e.g. neutrons) through a slab. 8. Mentioning of some other applications.

A comprehensive list of references is given.

SIGURKARL STEFÁNSSON: *Two loci connected with the equilateral hyperbola.*

It is shown that the locus of the center of an equilateral hyperbola passing through the corners of a fixed triangle, is the nine-point circle of this triangle. The corresponding locus if the hyperbola touches the sides of the triangle, is another circle. Coincidence of two of the defining, fixed elements is also considered. The results are used to solve several construction problems for the equilateral hyperbola.

The teaching of mathematics in the Swedish gymnasium.

Report from a discussion at a meeting in Lund, where an official plan for revision and reduction of the mathematical courses was presented. Several aspects of the present and proposed curriculum were criticised, especially by university teachers. A simple introduction of the exponential and logarithmic functions (cf. NMT, Vol. 1, 1953, pp. 156–60) was suggested.