# GUSTAF ENESTRÖM

## TILL HUNDRAÅRSMINNET AV HANS FÖDELSE

K.-G. HAGSTROEM

Med Gustaf Eneström erövrade Sverige en gång en rangplats i den genuint internationella forskningsgren, som behandlar matematikens historia. Under 80- och 90-talen och fram till första världskriget utförde denne i vårt land numera tämligen okände vetenskapsman ett högt uppskattat livsverk, som huvudsakligen kvarlever i form av 30 volymer av tidskriften *Bibliotheca Mathematica*. Eneström var därjämte verksam som försäkringsmatematiker och biblioteksman. Då nu ett hundra år förflutit sedan hans födelse, kan det vara motiverat att med en kort minnesteckning hedra honom och bringa i erinring ett namn, som man icke kan undgå att träffa på, när man på ett eller annat område vill fördjupa den lärdomshistoriska aspekten på matematiken.

### *Matematikens historia: en svår disciplin.*

För att bli en framgångsrik forskare i *matematikens historia*, Gustaf Enestöms huvudsakliga arbetsområde, erfordras ganska sällsynta kvalifikationer. Detta gäller även om det mer omfattande forskningsområdet *de exakta vetenskapernas och teknikens historia* eller ändå generellare

*vetenskapens historia, kulturens historia.* Men de vidsträcktare områdena innehålla dock större mängder av konkret stoff, som kan draga till sig intresset och tjäna forskningen till underlag, varigenom insatser kunna göras utan egentlig djuplodning. En forskare i astronomiens historia kan alltjämt producera intressanta bidrag till exempelvis solurens, astrolabiernas, mätningsinstrumentens historik; eller han kan ägna sig åt att följa världsåskådningarnas reflexer i tidevarvens religion, diktning, filosofi: visserligen ett abstrakt ämne men med ett relativt lättillgängligt material. Icke så forskaren i matematikens historia: skall han tränga till bottnen i sitt arbete, måste han själv verkligen vara något av en matematiker, och vi veta att redan detta är en ganska sällsynt gåva. Men dessutom måste han vara humanistisk lärd i vanlig mening, om ej källorna till gamla tiders tänkande för alltid skola vara tillslutna för honom. Visserligen kunde han begränsa studierna till *den moderna matematikens historia*, men en forskare, som verkligen vill »etablera sig« i denna bransch, torde sällan helt vilja eller våga begränsa sig på ett sådant sätt, särskilt som det historiska intresset gärna fängslas av uppgiften att följa matematikens utveckling som organiskt helt från uräldsta tider fram till våra dagar: det matematiska tänkandets successiva framträdande i tiden och fortskridande från dunkel till klarhet.

En forskare inom matematikens historia kan också begränsa sig till personalhistoria, till matematikens synliga utanverk och inskränka sina studier av vetenskapens realia till att citera auktoriteternas åsikter, när han kan få tillfälle därtill. Men redan en ytlig kännedom om verkligheten på detta område avslöjar, att matematikerna stundom själva råka in i inbördes tvister. Det kan gälla prioriteten till en upptäckt, värdet av en arbetsmetod, den inbördes värdesättningen av vetenskapens skilda grenar o. s. v., och man kan ofta konstatera, att matematiker, trots storheten och högheten i deras ämnen, personligen kunna vara små. Även om en forskare i matematikens historia knappast kan antagas kapabel som slutlig skiljedomare mellan oeniga specialister, så måste det dock krävas av honom en viss förmåga att följa med deras diskussioner och försöka forma ett objektivt omdöme.

I den äldre matematiken spela *arabernas* och *hinduernas* insatser vid sidan av grekernas en så betydande roll, att kännedomen om semitiska språk och sanskrit, förutom naturligvis latin och grekiska samt de moderna språken, äro högst värdefulla, om ej alldeles oundgängliga förutsättningar. Numera sysslar en stor del av den aktuella forskningen med kilskriftsurkunder, och även Ostasiens kulturkrets är indragen i intressesfären. För att kunna följa med hela forskningsfältets utveckling måste man nästan vara *polyhistor*, en numera mycket ovanlig företeelse. Att

på detta område anse sig »professorskompetent« blir i våra dagar, med den klassiska bildningens dekadans och obenägenheten för lärda mödor, allt omöjligare, och det är kanske närmast ett glädjeämne, att inga ordinarie lärostolar finnas, vilka måste besättas. Å andra sidan är det lika beklagligt, om på grund härav ett forskningsområde av en så stor betydelse blir helt försummat.

*Försäkringsmatematiken.*

Det är ett faktum, kanske ägnat att i förstone förvåna, att intresset för studier i matematikens historia ofta är förknippat med verksamhet som försäkringsmatematiker. Eneström var, som vi skola se, verksam på det befolkningsstatistiska och försäkringstekniska området, och han har efterlämnat en ganska betydande produktion av denna art, dock föga känd även för de svenska kollegerna. Anledningen till sammanhanget kan icke enbart vara den omständighet, som med skämtsam självironi uttrycktes i Anders Lindstedts definition, ofta citerad: aktuarie = misslyckad astronom. Med andra ord: man blir försäkringsmatematiker, när man inte kan försörja sig på sitt vetenskapliga arbete inom det matematiska ämnesområdet. Ty detsamma skulle lika väl kunna sägas om den pedagogiska banan, vilken alltid tagit huvudparten av dem som försökt bli vetenskapsmän, men inte orkat med det, av ekonomiska eller andra skäl. Men kanske är det så, att en något mera praktisk läggning och ett på mera konkreta resultat inriktat intresse predestinerar samtidigt för den tillämpade matematiken och för den matematiska forskningens historiska behandling. I England kan man nämna Todhunter, som lät sitt historieintresse till stor del resultera i ett studium av sannolikhetsteoriens historia, och Augustus de Morgan, som var utövande försäkringsmatematiker och en intresserad forskare på det historiska området. För matematikhistorikern är det naturligt, att livförsäkringsmatematiken tilldrar sig en stor uppmärksamhet, då den utgör tillämpningen av en av den rena matematikens mera abstrakta discipliner, sannolikhetsteorien, och samtidigt det praktiska räknande som karakteriserar dess statistiska aspekt motiverar studiet av räknekonstens utveckling. Liknande samband äger dock som sagt rum mellan astronomiens studium och försäkringsmatematisk eller statistisk verksamhet. Redan Gauss sysslade med utredningar av änkepensionering, och hos Laplace förefanns ett stort intresse för försäkringens idé. Det var kanske närmast i egenskap av vana räknare, som de lockades till dessa ämnen. Halleys namn är förknippat med den första dödlighetstabellen, och i förberedelserna till denna skymtar även den store Leibniz' skugga.

*Forskarens levnadsöden och verksamhet.*

Gustaf Hjalmar Eneström föddes den 5 september 1852 i Nora stad. Hans föräldrar voro bruksägaren Jakob Filip E. (f. 1800, d. 1860) och hans hustru i andra giftet Anna Augusta Lundquist (f. 1815, d. 1892). Han hade ett enda helsyskon, Emma Lovisa, kallad Emmy (f. 1850, d. 1936, ogift), och många äldre halvsyskon, av vilka sju nådde mogen ålder. Släkten är numera mycket talrik. Efter mogenhetsexamen i Stockholms Gymnasium 1870 inskrevs Eneström som student i Västmanland-Dala nation i Upsala och avlade redan året därpå filosofie kandidatexamen. Förarbetena för examen, vilken förutom teoretisk filosofi (med *cum laude*) och matematik (med *laudatur*) omfattade astronomi, historia, latin och nordiska språk, böra rimligtvis ha påbörjats redan under gymnasietiden. Det kan antecknas, att Enestrőms matematiska begåvning bevisas av att hans lösningar i det skriftliga provet vid 1870 års mogenhetsexamen ansågos värda att publiceras i *Tidskrift för matematik* (4, 1871). Det var kanske denna tidiga berömmelse, som förskaffade den unge kandidaten ett uppdrag att hjälpa till med katalogiseringen av Upsala observatoriebibliotek år 1874. För övrigt deltog han ganska ivrigt i studentlivet, var medlem av Matematiska Föreningen, dess »sexmästare« 1871 till 1873, dess sekreterare 1873 till 1874 o. s. v. Han sysslade under tiden med samlandet av material till en bibliografi över gamla svenska kalendarier och med arbeten i matematiskt historiska ämnen. Det är anledning att konstatera, att det historiska intresset bland Upsalamatematikerna var ovanligt stort vid denna tid, kanske på grund av den nyssnämnda tidskriften för elementär matematik, som utgavs av Dillner. De historiska studierna odlades även av F. W. Hultman och E. M. Dahlin, varav den sistnämnde år 1875 disputerade på en avhandling om matematikens historia i Sverige före 1679. På hösten 1875 blev Eneström e. o. amanuens vid Upsala universitetsbibliotek, och året därpå hade den blivande forskaren sin första avhandling i matematikens historia färdigtryckt i universitetets årsskrift: *Framställning af striden om det isoperimetriska problemet. En monografi.* År 1879 trycktes nästa stora avhandling, den om *Differenskalkylens historia.* Året förut, 1878, hade första delen av bibliografien över svenska almanackor utkommit, redigerad tillsammans med G. E. Klemming, vilken redan tidigare gjort förarbeten för ett dylikt arbete. Andra delen, kalendarier 1749 till 1879, utgavs av Eneström ensam år 1879. En kulturhistorisk skildring av Västmanland-Dala nation hade utarbetats tillsammans med M. B. Swederus och tryckts i Upsala 1877. Under 1876 gjordes en studieresa för forskningar i de svenska landsortsbiblioteken. I april 1879 tillträdde Eneström en tjänst som ama-

nuens vid Kungl. Biblioteket i Stockholm, och Upsalastudierna voro slut.

På den rena matematikens område dominerade vid denna tid Karl Weierstrass och Leopold Kronecker i Berlin. Bernhard Riemann hade år 1866 avlidit vid Lago Maggiore efter att förgäves ha sökt bot för sin lungsot. Den matematiska världen överraskades år 1876 av första upplagan av hans skrifter, en liten volym fylld av epokgörande tankar, men otillgänglig för de flesta. I Frankrike verkade Charles Hermite, samt de ännu helt unga Émile Picard och Henri Poincaré. Bland senare fullföljare av dessas gärning in i vår tid må nämnas Hadamard, Borel, Lebesgue. Göttingenfakultetens första glansperiod med Gauss och Riemann var förbi, men dess andra storhetstid, under Felix Kleins ledning, stod inför sin uppblomstring. Ett av de vetenskapliga huvudintressena var vid denna tid *aritmetiseringen* av funktionsteorien och dess exakta grundläggning, bl. a. med tillhjälp av Georg Cantors nyupptäckta *mängdteori* och på basis av Riemanns djupa tankar. I Sverige hade år 1859 en matematiker av rang, Carl Johan Malmsten, lämnat Upsala för att ägna sig åt politiken och sedermera bli landshövding i Skaraborgs län. Han är mest bekant för att hava i Sverige infört studiet av Cauchy's teori för analytiska funktioner. Men just nu steg en ny stjärna upp över den nordiska horisonten. Weierstrasslärjungen Gösta Mittag-Leffler, som blivit kandidat i Upsala terminen före Enström och doktor 1872, hade efter en utlandsvistelse åren 1873 till 1876 som s. k. bysantinsk stipendiat blivit professor i Helsingfors år 1877 och var kvar där till 1881. Då knöts Mittag-Leffler till den nybildade Stockholms Högskola, dit han 1883 lockade Sonja Kowalevskij, en annan av Weierstrass' adepter, och omgav sig med en växande skara av lärjungar. Med sina utlandsförbindelser och sin enskilda förmögenhet fördunklade han alla, som ej väl passade in i hans ljuskrets. Vad Enström beträffar, så drogs han till en början in däri. Han åtog sig att redigera en matematisk bibliografi över nyutkommen litteratur, — den fick namnet *Bibliotheca Mathematica*. Den skulle utgivas som appendix till Mittag-Lefflers nya tidskrift *Acta Mathematica*, vilken 1882 startade med uppbåd av kungligt beskydd samt bistånd av lärda sällskap och mäktiga gynnare. Tidskriften skulle främst ägna sig åt den weierstrasska funktionsteoriens vidare utveckling. Dess bibliografiska appendix torde ha avsett att locka in till redaktionen all utkommande litteratur, men Enström publicerade även smärre historiska notiser, dels av sig själv, dels av kolleger inom den matematikhistoriska disciplinen. Efter tre årgångar av denna karaktär, 1884, 1885 och 1886, avskildes emellertid *Bibliotheca Mathematica* till en självständig tidskrift. Under 13 år lyckades

Eneström — säkert med uppbjudande av alla sina ekonomiska resurser och med tillämpning av sträng personlig sparsamhet — att hålla denna nya serie av tidskriften vid liv. Redaktören trädde i förbindelse med forskarna i olika länder, särskilt i Tyskland, Frankrike och Italien, där intresset för matematikens historia var livligt, och knöt många kollegiala vänskapsband. Den andra serien omfattade årgångarna 1887 till och med 1899. Från 1892, då Eneströ ms moder avled, blevo utlandsresorna så gott som årliga, och kontakten med utländska vetenskapsmän allt livligare. Från år 1900 övertogs tidskriftens utgivande av det vittberömda vetenskapliga förlaget B. G. Teubner i Leipzig, varvid dess format och omfång förstorades. Förändringen tillkom på utgivarens eget initiativ och i full förståelse för de större möjligheter till spridning, som detta förlag kunde erbjuda. Att huvudspråket måste bli tyska i st. f. franska kunde ju inte betyda något för en helt internationellt hållen publikation, särskilt som numera den tyska matematiken intog en hög rang. Förhållandet mellan utgivare och förlag synes hava varit det allra bästa. Av denna tredje serie av *Bibliotheca Mathematica* utkommo 14 volymer.

Med otrolig energi utarbetade Eneström alltjämt artiklar i skilda ämnen för sin tidskrift och animerade andra forskare till insatser för klargörande av de dunkla punkterna i det matematiska tänkandets utveckling, ej alltid så rätlinig och förnuftsenlig, som man kunde förvänta. Om något studium kan stämma till ödmjukhet ifråga om vetandets visshet, så är det väl det lärdomshistoriska. Eneström blev känd som en mycket noggrann och mycket kritisk forskare. Speciellt väckte de av honom publicerade systematiska anmärkningarna till Moritz Cantors bekanta standardverk om den äldre matematikens historia stor uppmärksamhet. De fylla sammanlagt över 800 sidor av tidskriftens tredje serie och referera sig till de flesta av originalarbetets sidor. Av de nämnda 800 sidorna härröra åtminstone 600 (1300 notiser) från Eneströ ms egna forskningar. Som historiker var han särskilt intresserad för och kunnig i medeltidens matematik, både den arabiska och den rent europeiska (37 arbeten), 1500-talets författare (35 arbeten), infinitesimalkalkylens uppkomst och utveckling på 1600-talet (44 arbeten), Eulers verk och hans samtid (26 arbeten); men det finns insatser av E. på de flesta områden. De allmänna betraktelserna om nyttan av lärdomshistorisk forskning och av akademisk undervisning häri m. m. dylikt fyller en stor del av tidskriftens ledande artiklar (37 st.).

Eneström medarbetade också i ett flertal tidskrifter, bl. a. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* och i den franska (senare) upplagan av den stora matematiska encyklopedien. Vidare var han medarbetare i den nya utgåvan av Eulers samlade skrifter. Ett värdefullt arbete ut-

förde han genom att granska och kritisera korrekturen till några större handböcker i matematikens historia: Wieleitners i *Sammlung Schubert*, Tropfkes *Geschichte der Elementarmathematik* (andra upplagan) och D. E. Smith's *History of Mathematics*, II. De sista korrekturarken till Tropfke kommo aldrig åter från Stockholm, då arbetet avbröts av Eneströms död den 10 juni 1923. Författaren tillägnade sista bandet av sin handbok åt minnet av sin värderade medarbetare, vars bortgång han fann vara en svår förlust för forskningen.

Den uppskattning av Eneströms expertis, som gjorde, att han över hela världen tillkallades som sakkunnig, torde hava berett honom en inre tillfredsställelse över ett väl förrättat värv. Sålunda gladde det honom, att han i Descartes' samlade arbeten (X, p. 211) säges ifråga om de s. k. kossiska tecknen äga »la plus incontestable autorité«. Ledamotskap av akademierna i Padova och Madrid samt av schweiziska naturforskaresällskapet voro de enda yttre utmärkelser, som kommo honom till del, om jag undantar hedersdoktoratet i Lund 1918, en något senkommen svensk hedersbetygelse, som mottagaren ej satte något större värde på.

Under första världskriget upphörde utgivandet av *Bibliotheca Mathematica*. Det var meningen att omedelbart efter kriget återupptaga serien, men det blev aldrig av. Försök gjordes att intressera amerikanska donatorer för stödjandet av tidskriftens fortsättande, men förgäves. Man lyckades sedermera skaffa understöd för en amerikansk publikation, men då var Eneström redan borta.

Måhända hade en mindre anspråkslös ställning kunnat ge Eneström ett värdefullt stöd vid försöken att efter första världskriget återuppliva tidskriften. Såsom innehavare av en personlig professur vid ett svenskt universitet och ledamot av Vetenskapsakademien — vartill han väl länge borde varit berättigad — skulle han kanske kunnat rädda *Bibliotheca Mathematica* åt vår tid.

Jämsides med redaktionsarbetet och de egna specialstudierna sysslade Eneström som redan nämnts med ett flertal utredningar av försäkringsmatematisk och statistisk natur samt med rena biblioteksarbeten. Sålunda har han gjort beräkningar för småskollärarinnornas och folkskollärarnas tjänstepensionering, för barnmorskornas pensionering och sjukförsäkring och utrett personalförhållandena bland elementarläroverkens lärare. Han var vidare bibliotekarie i Högsta Domstolen, Regeringsrätten, Lagberedningen, Lagrådet och Svea Hovrätt. Den sistnämnda institutionens bibliotek nyordnades enligt hans anvisningar år 1920.

Under pensionsutredningarna fick Eneström tidigt intresse för försäkringsmatematiska och dödlighetsstatistiska spörsmål av teoretisk art. Här hade för övrigt Malmsten, L. Lindelöf och Gyldén visat vägen.

Den förstnämnde spelade en aktiv roll vid organiserandet av det första svenska livförsäkringsbolaget, *Skandia*, som tillkom år 1855. Gyldén framträdde år 1872 vid sidan av Per Johan Fagerström som drivande kraft vid stiftandet av bolaget *Thule*. Eneströms insatser i försäkringsmatematiken, ehuru färgade av tidens tänkesätt, göra likväl ett mycket vetenskapligt intryck, baserade som de äro på kontinuerliga betraktelser och begreppsbildningar, som verka förvånande moderna, när man besinnar, att de härstamma från 1880- eller 1890-talen.

Av alldeles särskilt intresse är det försök till objektiv, opartisk belysning av livförsäkringsbolagens affärsprinciper och resultat, som Eneström publicerade så tidigt som år 1892 (i samarbete med W. O. Schöldström). Det är ett första försök att förmå allmänheten till en kritisk granskning och jämförelse mellan olika försäkringsgivares erbjudanden, och den torde på sin tid ha haft ett välgörande inflytande för tillkomsten av vederhäftig och saklig kritik inom branschen. Det kan för övrigt nämnas, att Eneström räknade som sin personliga vän Johannes Karup i Gothabanken, som han ofta gästade under sina resor, och med vilken han livligt korresponderade. En nutida försäkringsman kan i brevväxlingen finna intressanta ting.

Det bör vara av intresse att omnämna, att Eneström under studiet av pensionskassornas ekonomi år 1893 händelsevis påträffade en rent algebraisk sats, vilken han publicerade i *Öfversigt* 1893. Satsen återfanns på annan väg av den japanske matematikern Kakeya (1912). Med anledning härav offentliggjorde Eneström år 1920 en not i *The Tôhoku Mathematical Journal* med sitt bevis för satsen, vilken varit känd under Kakeyas namn. Då satsen alltjämt förekommer i litteraturen med denna ursprungbeteckning, kan det kanske vara skäl att här återgiva den under beteckningen:

*Eneström-Kakeyas sats.*

Låt koefficienterna $a_r$ i ekvationen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_r z^r + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{1}$$

vara reella positiva tal, och betrakta talen

$$a_{n-1} : a_n,\ a_{n-2} : a_{n-1},\ \ldots\ a_1 : a_2,\ a_0 : a_1 . \tag{2}$$

Betecknas med $m$ det minsta, med $M$ det största av talen (2), så uppfyller en godtycklig rot $z$ till ekvationen (1) villkoret

$$m < |z| < M .$$

Vid tillämpningen på pensionskassornas statistik spelas koefficienternas

roll av de successiva »levandetalen« $l_x$ under de $n+1$ levnadsåldrarna från inträdet till pensionsåldern, och rötterna i ekvationen (1) tjäna till att uttrycka den fortlöpande tillströmningen till kollektivet.

I *Nordisk Försäkringstidskrift* 1950 finns en utförlig bibliografi över Eneströms försäkringsmatematiska kvarlåtenskap samt erforderliga litteraturanvisningar.

*Personlighet och eftermäle.*

Sådant var Gustaf Eneströms *curriculum vitae*, i yttre måtto händelsefattigt, men andligen innehållsrikt. Om hans person vet man föga. Han bildade aldrig familj, men umgicks mycket med sin något äldre syster Emmy, också hon ogift. Under hans första år i Stockholm voro hans bokhyllor ofta under flyttning från en östermalmsgata till en annan. Till slut hamnade han en trappa upp i huset nr 77 vid Grevturegatan. Där kunde man ännu år 1950 träffa en gammal dam, som mindes enstöringen från 1910-talet. Att Eneström älskade vandringar i den svenska naturen, utländska resor och klassisk musik har berättats som det mest karakteristiska för hans personliga levnadssätt. Torftigheten i vår vetskap om honom kan endast förklaras genom hans nästan abnorma anspråklöshet och tillbakadragenhet. Vid den tid, då han var ung, var det en ej ovanlig inställning hos unga akademiker av radikal läggning (ofta avhånade som »intelligensaristokrater«) att förakta examensmeriter, titlar och utmärkelser och att uteslutande vilja arbeta för vetandets egen skull. Detta var kanske särskilt vanligt vid Stockholms Högskola under dess tidiga år, men sjukdomen förekom vid alla lärosäten. Det råder väl ej något tvivel om att Eneström mer än de flesta infekterats av denna misantropiska ringaktning av världslig ära och ryktbarhet. Hela hans levnad bär vittne om en stolthet utan fåfänga, som gör ett mycket sympatiskt intryck, ehuru man misstänker, att den bidragit till svårigheter, från vilka han ingalunda blivit förskonad. Att Eneström var en för sin tid ovanligt fördomsfri man och av s. k. frisinnad åskådning framgår kanske därav, att den tidning, som han hedrade med små korrespondenser och bidrag, var *Göteborgs Handels- och Sjöfartstidning*, S. A. Hedlunds och Viktor Rydbergs organ. Eneströms frisinnade inställning till kvinnofrågan framlyser för övrigt av en del av hans arbeten, bl.a. av en »note bibliographique sur les femmes dans les sciences exactes« (Bibl. Math. 1896).

Man har förmodat, att den ringa uppskattning, som visades Eneström i Sverige, skulle berott på hans egen avvisande hållning gent emot kollegerna, på hans kritiska inställning, och i viss mån är väl detta också riktigt. Förmodligen hade han svårt att trivas i den glans, som omgav den

egentliga matematikens företrädare, och där Eneströms egna discipliner föga uppskattades. Han skrev själv en gång, att de flesta matematiker, med vilka han i början av 70-talet kom i beröring, voro av den meningen, att undersökningar i matematikens historia voro ett onyttigt slöseri med tiden, ej alls förtjänstfulla, utan rent av förkastliga. Vore nämligen de äldre åsikterna riktiga, så innefattades de i den nyare matematiska teorien; vore de åter felaktiga, skulle det enbart verka förvillande att syssla med dem.

På den internationella matematikerkongressen i Heidelberg i augusti 1904 höll Eneström ett föredrag med titeln »*Welcher Platz gebührt der Geschichte der Mathematik in einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften?*«, där man finner ett intressant uttalande av honom om forskningsområdets verkliga karaktär. Han menar sig med full rätt kunna hävda, att matematikens historia, uppfattad som en verklig utvecklingshistoria för det matematiska tänkandet, är *en rent matematisk disciplin.*

Förmodligen hade han hoppats, att Mittag-Leffler, som för övrigt var bibliofil liksom han själv, skulle visa förståelse för forskning i matematikens historia. Besvikelsen över att hans arbete ej rönte någon uppskattning kan ha gjort honom skygg för kollegerna inom landet. Några avundsamma eller nedsättande yttranden om andra finner man dock ej hos honom. Jag bortser då från hans något överdrivna, men rent sakliga krav på absolut noggrannhet i historiska omdömen och citat. Mången har säkert anklagat Eneström för hänsynslöshet mot Moritz Cantor, vars nimbus som ofelbar auktoritet inom matematikens historia obarmhärtigt förstördes genom Eneströms otaliga anmärkningar i *Bibliotheca Mathematica*, men anklagelsen är obefogad. Mellan de två männen fanns ingen fiendskap: det framgår av deras korrespondens. De voro båda så mycket vetenskapsmän, att de kunde se skillnad på person och sak. Något eftermäle över Cantor fick Eneström ej tillfälle att skriva: Cantor dog ej förrän 1920, 91 år gammal.

Omutligt hängiven sina studier, men tolerant och anspråkslös i fråga om sin egen person, lät Eneström sina känslor och sina besvikelser helt träda tillbaka för det livsverk han gjort till sitt, och där gick han orubbligt och med den kända västmanlanddalska envisheten sin förutbestämda bana framåt — mot en odödlighet utan yttre glans eller akademisk pompa. Endast *en* yttring av Eneströms besvikelse över utebliven uppskattning finns att notera: han bestämde om sitt biblioteks rika skatter, att de aldrig finge sammanblandas med det mittagleffl erska institutets. *Bibliotheca Enestroem* förvaltas därför nu av Stockholms Högskola. Det består, förutom av en stor samling gammal litteratur till matematikens historia, av Eneströms samlingar av anteckningar till undersökningar i skilda

ämnen, av hans omfattande korrespondens med utländska kolleger[1]), av hans lappkatalog över matematisk litteratur, speciellt över gammal svensk matematik, av särtryck och tidningsexemplar med hans artiklar i skilda ämnen, samt av ett stort antal småskrifter till matematikens historia och diverse antikvariska kataloger, beräkningar till pensionsutredningar o. d. Allt finns samlat och bevarat för forskare, som kunna ha för avsikt att på en eller annan punkt fortsätta Eneströms gärning. Ett *monumentum aere perennius* över en forskargärning av ovanliga mått.

Det råder väl icke något tvivel om att Enestrom var före sin tid i fråga om intresset för den lärdomshistoriska synen på vetenskapen. Matematikernas oförstående inställning i början av 1870-talet förefaller oss nu ganska oförklarlig, helst som vi konstaterat förekomsten av lärdomshistoriska studier i Upsala vid den tiden. Den var kanske närmast inspirerad av Malmsten, men han lämnade det groende intresset åt sitt öde, och det förkvävdes av den nyväckta entusiasmen för weierstrassk funktionsteori, i vilken man såg det enda saliggörande och varav man hoppades på en fulländning av den matematiska analys, vilken naturvetenskaperna behöva. Man hängav sig åt en viss övertro på *differentialekvationernas* makt att lösa världsgåtorna och trodde sig i funktionsteorien ha funnit det perfekta verktyget. I denna hänförelse fanns ingen plats över för de historiska betraktelserna. Numera är allt ganska annorlunda, och de lärdomshistoriska synpunkterna ha kommit till heders. Vi ha redan framhållit, att Enestrom medarbetade i flera handböcker i matematikhistoria, och studiet är i våra dagar populärt i länder, vilka kunna kosta på sig en forskning av denna världsfrånvända art. Enestrom var fanbäraren för den lärdomshistoriska aspekten på matematiken under en lång tidsperiod. Den svenska kultursocieteten har ingen större del i hans insats, men detta gör den icke mindre beundransvärd, snarare mer, eftersom den ensammes börda är tung.

Brist på erkännande sammanhänger väl för övrigt med själva ämnets natur: år 1904 avled en annan lärdomshistoriker inom matematiken, Eneströms illustre vän och kollega, Paul Tannery, alltjämt verksam som fabriksdisponent i franska tobaksmonopolet (Pantin), utan att ha blivit placerad på den professur i Collège de France, för vilken han med sin lingvistiska, filosofiska och matematiska lärdom av all världens fackmän ansågs självskriven.

[1]) Bland korrespondensen finner man också en del porträtt, originalen till de bilder, varmed utgivaren smyckade det 1879 utgivna tioårsregistret av *Bibliotheca Mathematica*. Däremot finnes där intet originalfotografi av Enestrom själv.

# EXPONENTIAL- OCH LOGARITMFUNKTIONEN PÅ GYMNASIET

H. GASK

Genom gymnasiets omorganisation och tillkomsten av nya kursplaner har det gamla problemet om exponential- och logaritmfunktionen på skolstadiet fått ny aktualitet i Sverige. Traditionellt räknas $e$ och de naturliga logaritmerna till den högre matematiken och förekommer inte i den svenska skolundervisningen, där man i funktionsläran uteslutande sysslar med enkla algebraiska och trigonometriska funktioner, trots att exponentialfunktionen genom sin förmåga att återge olika tillväxtförlopp spelar en avgörande roll i t. ex. nationalekonomi, biologi och medicin. I dessa ämnen liksom i statistik, där exponentialfunktionen kommer in på ett tidigt stadium, hör det till undantagen att studenterna kan någon matematik utöver studentkursen.

Det är alltså önskvärt att exponentialfunktionen och dess derivata studeras i skolan, och skall detta göras, kan man som bekant inte undgå funktionen $e^x$. I slutet av trettiotalet fördes i Danmark [1] en diskussion om det lämpligaste sättet att införa denna funktion. Det segrande förslaget framfördes av Harald Bohr, som först definierade $\log x$ som $\int_1^x \frac{dt}{t}$ och sedan $e^x$. Ett annat förslag (Andersen) var att definiera $e^x$ som $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ eller $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Bägge förslagen har nackdelen att definitionerna måste verka konstlade och Andersens fordrar dessutom en hel del kunskaper i analys. Jessen utgick från funktionen $a^x$, som i skolan definieras då $x$ är rationellt och — fast naturligtvis inte strängt — då $x$ är irrationellt, och bevisade direkt att den kan deriveras; här kommer som bekant talet $e$ in på ett naturligt sätt. Vi skall följa denna väg, som har den fördelen att direkt ansluta sig till moment som redan finns i skolkursen.

För fullständighets skull definieras först exponential- och logaritmfunktionerna. Framställningen följer här nära Jessens citerade artikel. Därefter behandlas dessa funktioners derivator och talet $e$ definieras genom egenskapen $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$. Detta sätt att definiera $e$ är inte nytt

utan förekommer t. ex. i en funktionslära av Josephson [2]. Det eventuellt nya i artikeln är den enkla härledningen av $e = \lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha}$. Bevisen har gjorts så åskådliga, att de inte ligger utom räckhåll för en gymnasist. I en kompletterande not ges de stränga härledningarna, som bygger på att funktionen $a^x$ är konvex. För detta ges ett enkelt bevis med derivation efter $a$. I skolan kan kanske detaljerna i denna not förbigås, varför den skrivits i mera komprimerad form. — Vi vill framhålla, att vi endast syftar till att ange en möjlig logisk uppbyggnad av stoffet. Vid presentation för eleverna ger läraren naturligtvis en mycket bredare framställning med exempel behandlande ränta, tillväxtförlopp etc.

Incitamentet till de diskussioner som lett till denna artikel har givits av professor M. Riesz.

*Definition av exponentialfunktionen.*

Låt $a$ vara ett positivt tal. Om $x$ är ett positivt heltal så menar man med $a^x$ produkten av $x$ stycken faktorer $a$, med $a^0$ menar man talet 1, med $a^x$ där $x$ är ett negativt heltal menar man $1/a^{-x}$. Funktionen $a^x$ som därmed är definierad för hela $x$ har tydligen egenskapen

$$a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}. \tag{1}$$

Låt $n$ vara ett positivt heltal. Då $a$ växer från 0 till $\infty$ växer $a^n$ kontinuerligt från 0 till $\infty$; till ett givet $b \geqslant 0$ finns alltså precis ett tal $a$ så att $a^n = b$, man skriver då $a = \sqrt[n]{b}$.

Låt nu $x = \frac{p}{q}$ vara ett rationellt tal ($q > 0$). Vi definierar

$$a^x = \sqrt[q]{a^p}.$$

Denna definition fordrar emellertid att man visar, att $a^x$ får samma värde vid en annan framställning $x = \frac{r}{s}$, d. v. s. vi måste visa, att om $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ så är $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[s]{a^r}$. Men detta är detsamma som $(\sqrt[q]{a^p})^{qs} = (\sqrt[s]{a^r})^{qs}$ eller $a^{ps} = a^{rq}$, vilket är klart eftersom $ps = rq$. — Ekvationerna (1) gäller fortfarande om $x_1$ och $x_2$ är rationella. Ty skriv $x_1 = \frac{p_1}{q}$ och $x_2 = \frac{p_2}{q}$, där $p_1$, $p_2$ och $q$ är hela tal och $q$ är positivt. Vi skall visa, att $\sqrt[q]{a^{p_1+p_2}} = \sqrt[q]{a^{p_1}}\sqrt[q]{a^{p_2}}$. Upphöjes detta till $q$ ser man emellertid att det är detsamma som $a^{p_1+p_2} = a^{p_1}a^{p_2}$, vilket redan bevisats vara riktigt. — Den andra ekvationen bevisas analogt.

Det återstår nu att definiera $a^x$ för irrationella $x$. Först konstaterar vi emellertid några egenskaper hos $a^x$ för rationella $x$. För enkelhets skull antar vi $a > 1$; fallet $a < 1$ behandlas analogt.

Det är klart, att om $x_1 < x_2$ så är $a^{x_1} < a^{x_2}$. Funktionen $a^x$ är alltså monotont växande. Vidare är $a^x$ kontinuerlig. Det räcker att bevisa detta för $x = 0$, d. v. s. att $a^h \to 1$ då $h \to 0$, ty därav följer $a^{x+h} = a^x a^h \to a^x$ då $h \to 0$. Eftersom $a^{-h} = \frac{1}{a^h}$ räcker det t. o. m. att bevisa, att $a^h \to 1$ då $h \to +0$; då $a^h$ är monoton följer detta om vi visar, att $a^{1/n} \to 1$ då $n \to \infty$. Sättes $a^{1/n} = 1+b$ är $b > 0$ och man får om man upphöjer till $n$ och kastar bort positiva termer att $a > 1+nb$, d. v. s. $b < \frac{a-1}{n}$; alltså är $1 < a^{1/n} < 1+\frac{a-1}{n}$ varför $a^{1/n} \to 1$ då $n \to \infty$ och kontinuiteten är bevisad.

Om nu $x$ är irrationellt följer, att det finns precis ett tal $c$ så att $a^r < c < a^s$ för alla rationella tal $r$ och $s$ med $r < x < s$, och vi definierar då $a^x = c$. Därmed är funktionen $a^x$ definierad för alla $x$ med egenskaperna (1); den är kontinuerlig och monotont växande.

*Definition av logaritmfunktionen.*

Låt $a$ vara positivt men $\neq 1$. Då $x$ går från $-\infty$ till $+\infty$ genomlöper $a^x$ alla värden mellan 0 och $\infty$ monotont. Till varje positivt tal $y$ finns alltså exakt ett $x$ för vilket $a^x = y$, och man skriver $x = {}^a\log y$. Funktionen ${}^a\log y$ är tydligen en monotont växande, kontinuerlig funktion av $y$ (för $a > 1$).

*Derivatan av exponential- och logaritmfunktionen. Talet e.*

Tag $a > 1$. På fig. 1 är kurvan $y = a^x$ uppritad för två värden på $a$. Om $a$ ökar så ökar $a^x$ för positiva $x$ och avtar för negativa $x$. Lutningen (se noten) av kurvan för $x = 0$ ökar alltså med $a$. För $a = 1$ är den noll. *Vi inför benämningen e för det tal* (se noten) *för vilket lutningen är* 1. Då gäller, att

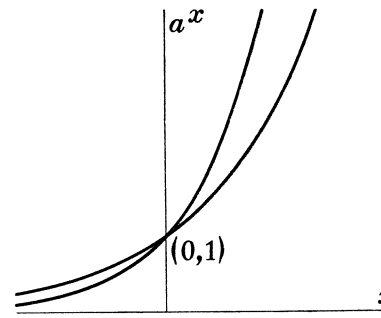

Fig. 1.

$$\frac{e^h-1}{h} \to 1 \text{ då } h \to 0 . \tag{2}$$

Vi kan nu beräkna derivatan av $e^x$. Man får

$$\frac{de^x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x .$$

Med hjälp härav är det enkelt att beräkna derivatan av funktionen $a^x$ med allmänt positivt $a$. Vi skriver $a = e^c$, $(c = {}^e\log a)$, och får

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{de^{cx}}{dx} = ce^{cx} = {}^e\log a \cdot a^x .$$

Härav följer också genast derivatan av logaritmfunktionen $y = {}^a\log x$. Ty man har $x = a^y$, alltså $\frac{dx}{dy} = {}^e\log a \cdot a^y = {}^e\log a \cdot x$; alltså

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,{}^a\log x}{dx} = \frac{1}{x \cdot {}^e\log a}.$$

*Talet e som gränsvärde.*

Låt $\alpha$ vara ett tal $> -1$. Sätter vi $h = {}^e\log(1+\alpha)$ så följer, att $h \to 0$ då $\alpha \to 0$, varav $\frac{\alpha}{{}^e\log(1+\alpha)} = \frac{e^h-1}{h} \to 1$ då $\alpha \to 0$. Nu är $(1+\alpha)^{1/\alpha} = e^{{}^e\log(1+\alpha)/\alpha}$ och alltså gäller

$$\lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e . \tag{3}$$

---

Not. Att kurvan $y = a^x$ har en tangent i origo måste bevisas. Det följer av olikheten:

$$\frac{a^x-1}{x} > \frac{a^{x'}-1}{x'} \text{ då } x > x' > 0 \text{ och } a > 0,\ a \neq 1 .$$

Det räcker att bevisa den då $x$ och $x'$ är rationella; i det allmänna fallet följer den genast av kontinuiteten. Elementära bevis finns i Hardy-Littlewood-Polya: Inequalities; ett av dessa återges i Jessens citerade arbete. Vi ger här ett bevis med derivation. Bilda

$$f(a) = \frac{a^x-1}{x} - \frac{a^{x'}-1}{x'},$$

$$\frac{df}{da} = a^{x-1} - a^{x'-1} \begin{cases} > 0 \text{ för } a > 1 \\ < 0 \text{ för } a < 1. \end{cases}$$

Funktionen $f(a)$ har alltså minimum $= 0$ för $a = 1$, varmed olikheten är bevisad.

Geometriskt uttrycker olikheten, att lutningen av kordan mellan kurvpunkterna $(0, 1)$ och $(x, a^x)$ för $x > 0$ är en växande funktion av $x$, d. v. s. att kurvan $y = a^x$ ligger under varje korda med $(0, 1)$ som vänstra ändpunkt. Men nu är

$$y = a^x = a^{x_0}a^{x-x_0} \quad (x_0 \text{ godtyckligt})$$

och härav följer att kurvan ligger under varje korda; man säger att kurvan är konvex. Av fig. 2 framgår då, att $\frac{a^h-1}{h}$ avtar när $h$ avtar mot noll, att $\frac{a^k-1}{k}$ växer när $k$ växer mot noll och att

(4) $$\frac{a^h-1}{h} > \frac{a^k-1}{k} \text{ då } h > 0 > k .$$

Antag nu, att $a > 1$. Då är kvoten $\frac{a^h-1}{h}$ positiv om $h > 0$ och avtar med $h$. Den har alltså ett gränsvärde

$$d_a = \lim_{h \to +0} \frac{a^h-1}{h} ,$$

och av (4) följer t. ex. då $k = -1$, att

$$d_a > \frac{a^{-1}-1}{-1} = 1-a^{-1} > 0 .$$

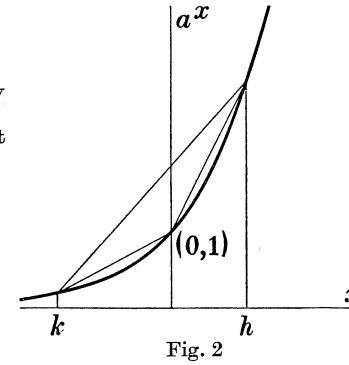

Fig. 2

Vidare följer, att

$$\frac{a^{-h}-1}{-h} = a^{-h}\frac{a^h-1}{h} \to d_a \text{ då } h \to +0 .$$

Alltså har kurvan $y = a^x$ en tangent i (0, 1) med lutningen $\lim_{h \to 0} \frac{a^h-1}{h} = d_a > 0$. Om $b = a^c$ ($c = {}^a\log b$), så blir

$$d_b = \lim_{h \to 0} \frac{b^h-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{ch}-1}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{a^{ch}-1}{ch} = c \cdot d_a .$$

Härav ser man att det finns ett och tydligen endast ett tal $e$, nämligen $a^{1/d_a}$, för vilket $d_e = 1$, d. v. s.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1 .$$

Det är lätt att få en uppfattning om storleken på $e$. Eftersom $\frac{e^h-1}{h}$ avtar mot 1 då $h$ avtar mot noll följer t. ex. att $e-1 > 1$, d. v. s. $e > 2$, och eftersom $\frac{e^k-1}{k}$ växer mot 1 då $k$ växer mot noll följer t. ex. då $k = -\frac{1}{2}$ att $e^{-\frac{1}{2}}-1 > -\frac{1}{2}$, $e^{\frac{1}{2}} < 2$ och $e < 4$. I själva verket inser man omedelbart att (3) kan skärpas till att $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ växer (avtar) mot $e$ då $\alpha$ avtar (växer) mot 0, vilket ger att

$$(1+h)^{1/h} < e < (1-h)^{-1/h} \quad (h > 0) .$$

## REFERENSER:

[1] A. F. Andersen: *Eksponential- og Logaritmefunktioner*, Matem. Tidsskr. A, 1934, 38—64.

B. Jessen: *Hvorledes behandler man simplest Potenslæren?* Matem. Tidsskr. A, 1938, 25—34.

H. Bohr: *Om Logaritme- og Eksponentialfunktion.* Matem. Tidsskr. A, 1939, 46—81.

[2] O. Josephson: *Funktionslära för gymnasiet 2*, 4. uppl., Sthlm. 1929, 45 ff.

# OM ET GEOMETRISK STED VED ELLIPSE OG HYPERBEL

DAVID FOG

I danske gymnasielærebøger i matematik, udkommet så sent som 1930, kan man finde en metode til bestemmelse af geometriske steder, hvis indhold kan gengives således:

»For at bestemme det geometriske sted for et punkt $P(x, y)$, der opfylder en given betingelse, indfører man nogle hjælpestørrelser (parametre), der f. eks. kan være koordinater til variable punkter eller hældningskoefficienter for variable linier. Er parametrenes antal $n$, danner man — med anvendelse af den til $P$ knyttede betingelse — ialt $n+1$ ligninger, indeholdende disse parametre, $P$'s koordinater $x$ og $y$ samt visse givne konstanter $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Elimination af parametrene fører til en ligning af formen

$$f(x, y, k_1, k_2, \ldots, k_r) = 0 \,. \tag{1}$$

Dette er ligningen for det geometriske sted.«

Denne metode er, når den ikke nærmere kommenteres, direkte forkert eller — for at sige det mindre stærkt — meget ufuldstændig. Thi man får jo kun bevist, at hvert punkt $P(x, y)$, som opfylder den givne betingelse, tilfredsstiller ligningen (1), men ikke det omvendte, at hvert punkt, der tilfredsstiller (1), opfylder betingelsen og derfor hører med til det geometriske sted. Med andre ord: Man får bevist, at stedet er indeholdt i kurven (1); men man får ikke konstateret, om det er identisk med hele denne kurve. I mange tilfælde vil det faktisk kun udgøre en del af den.

Dette spørgsmål kan vel i dag betragtes som logisk afklaret, både for lærere og lærebogsforfattere. Ikke desto mindre eksisterer problemet fremdeles — nemlig for eleverne, og dets pædagogiske betydning og vanskelighed er usvækket. Som illustration til nævnte problem kan nedenstående eksempler, hvor forholdet træder særlig skarpt frem, derfor muligvis have interesse.

*Eks. 1.* Givet ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \tag{2}$$

Vi søger det geometriske sted for et punkt $P(x, y)$, fra hvilket tangenterne til (2) er parallelle med et par konjugerede diametre.

Ligningen for en ellipsetangent med hældningskoefficient $\alpha$ kan skrives

$$y=\alpha x\pm\sqrt{a^2\alpha^2+b^2}\,.^{1}) \tag{3}$$

Betragtes her $x$ og $y$ som givne og $\alpha$ som ubekendt, kan (3) siges at bestemme hældningskoefficienterne for de gennem $P$ gående ellipsetangenter. Ligning (3) kan omskrives til

$$\alpha^2(x^2-a^2)-2\alpha xy+y^2-b^2=0\,. \tag{4}$$

Kaldes de to hældningskoefficienter $\alpha_1$ og $\alpha_2$, har man altså:

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{2xy}{x^2-a^2}\,,\qquad \alpha_1\alpha_2=\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}\,. \tag{5}$$

Betingelsen for, at $P$ er et punkt af det geometriske sted, er

$$\alpha_1\alpha_2=-\frac{b^2}{a^2}\,. \tag{6}$$

Elimination af de to parametre $\alpha_1$ og $\alpha_2$ mellem de 3 ligninger (5) og (6) giver (idet den første ligning (5) slet ikke kommer til anvendelse)

$$\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$$

eller, efter reduktion,

$$\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1\,. \tag{7}$$

Efter den anførte recept skulle da (7) være ligningen for det geometriske sted. Dette er også tilfældet; men ved de ovenstående regninger er kun dokumenteret, at stedet er indeholdt i ellipsen (7). Det er imidlertid ikke vanskeligt at bringe det manglende i orden:

Da ellipsen (7) omslutter den givne ellipse (2), kan man fra ethvert punkt af (7) trække to tangenter til (2). Lad nu $P(x, y)$ være et vilkårligt punkt af (7). Indsættes $P$'s koordinater som $x$ og $y$ i (4), bestemmer denne ligning hældningskoefficienterne for de to fra $P$ gående tangenter til (2),

[1]) At tangenter parallelle med $y$-aksen ikke kommer med ved fremstillingen (3), er en detaille, der i denne forbindelse er uden betydning.

og disse hældningskoefficienter tilfredsstiller da også ligningerne (5). Af (7) og den sidste (5) kan man imidlertid udlede (6), d. v. s. $P$ tilfredsstiller betingelsen og er et punkt af det geometriske sted.

Det skal ikke forties, at opgaven kan løses langt lettere ved, at man først betragter det specielle tilfælde $b = a$, altså cirklen

$$x^2+y^2 = a^2 . \tag{8}$$

For denne ser man rent elementærgeometrisk, at stedet er cirklen

$$x^2+y^2 = 2a^2 . \tag{9}$$

Anvender man dernæst en sådan retvinklet projektion (eller ret affinitet), at cirklen (8) føres over i ellipsen (2), går samtidig cirklen (9) over i ellipsen (7). Da den om $P$ krævede betingelse bevares ved projektion (affinitet), bliver (7) det søgte geometriske sted.

*Eks. 2.* Vi vil dernæst betragte den tilsvarende opgave for hyperblen

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1 , \tag{10}$$

altså igen søge stedet for et punkt $P$, hvorfra tangenterne er parallelle med et par konjugerede diametre. Resultatet bliver her helt anderledes end før.

Den til (3) svarende tangentligning er

$$y = \alpha x \pm \sqrt{a^2\alpha^2-b^2} , \tag{11}$$

og ved at gå frem ganske som før og erstatte (6) med

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{b^2}{a^2} \tag{12}$$

finder man til sidst ligningen

$$\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2} = 1 . \tag{13}$$

Denne gang fremstiller (13) imidlertid ikke det geometriske sted. Ved betragtning af en figur ser man nemlig, at hyperblen (13) ligger helt i de to konvekse områder, som begrænses af den oprindelige hyperbels grene, og der kan derfor ikke trækkes tangenter til (10) fra noget punkt af (13). Intet punkt af (13) opfylder altså den stillede betingelse. Ifølge regningerne findes der heller ingen punkter uden for (13) med denne egenskab, og det søgte geometriske sted eksisterer derfor slet ikke.

Dette resultat kan man også let komme til direkte, når man erindrer,

at af to konjugerede hyperbeldiametre vil den ene altid være mere, den anden mindre stejl end asymptoterne. Der findes da ingen hyperbeltangenter parallelle med den sidste.

*Tilføjelse.* Et specielt tilfælde af det her fremdragne problem står man overfor ved parameterfremstilling af kurver. Eksempelvis kan vi betragte de 3 parameterfremstillinger

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin^2 t\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{1}{t^2}. \end{cases}$$

At spørge om, hvilken kurve der ved variation af $t$ fremstilles ved et af de 3 ligningspar, er det samme som at spørge om det geometriske sted for de punkter $(x, y)$, der tilfredsstiller dette ligningspar for samme, men varierende værdi af $t$.

Benytter man den i begyndelsen af denne artikel anførte metode og eliminerer $t$, fås i alle 3 tilfælde ligningen $y = x^2$, og dog fremstiller intet af de anførte ligningspar denne parabel, men kun en (større eller mindre) del af den.

# EN UNØDVENDIG PEDAGOGISK VANSKELIGHET VED LIMES-BEGREPET

INGEBRIGT JOHANSSON

Foredrag i Norsk Matematisk Forening 5. mars 1953

At gymnasiaster og studenter ofte har vanskelig for å oppfatte det matematiske limes-begrep riktig, er noe alle vet som har hatt med undervisning eller eksamen i slike ting å gjøre. Og det går naturligvis ikke an å fremstille begrepet lettere enn det i virkeligheten er, uten at det går ut over forståelsen og den praktiske beherskelse. Men forfatteren av denne artikkel mener at de fleste lærebokforfattere gjør det vanskeligere enn det behøver å være fordi de formulerer definisjonen slik at det blir en skrikende uoverensstemmelse i grammatisk struktur mellom defiens og definiendum.

La oss sammenligne utsagnene

(1) *Når n er delelig med 2, så er* $(-1)^n = 1$,

og

(2) *Når x går mot a, så går* $f(x)$ *mot b* .

De har begge den samme grammatiske struktur, nemlig

(3) *Når U, så V* ,

og vi ser at del-utsagnene $U$ og $V$ i (1), altså »$n$ er delelig med 2« og »$(-1)^n = 1$«, er meningsfylte utsagn hver for seg. Dette er det *normale*, i matematikken likesom ellers. Men det er ikke slik i (2), når man (som det oftest gjøres) definerer at (2) skal være en forkortelse for

(4) *Til hvert positivt tall* $\varepsilon$ *fins det et positivt tall* $\delta$, *slik at for hvert tall x i variasjonsområdet for denne variable gjelder, at når avstanden mellom x og a er mindre enn* $\delta$, *så er avstanden mellom* $f(x)$ *og b mindre enn* $\varepsilon$,

eller, formulert med logiske og matematiske tegn,

$$(5) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(|x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon) .$$

(Her står $\forall$ for »for alle... gjelder at«, $\exists$ for »det eksisterer... slik at«, $\in$ for »element i«, $M$ for variasjonsområdet for den variable $x$, og $\rightarrow$ for »når... så«.)

Hva enten man ser på ordfremstillingen (4) eller symbolfremstillingen (5), vil man lete forgjeves etter utsagnene »$x$ går mot $a$« og »$f(x)$ går mot $b$«, som (2) er sammensatt av. Man finner bare utsagn som »ligner« dem, nemlig $|x-a| < \delta$ og $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Hertil kommer at den virkelige logiske vanskelighet ved utsagnet (4) eller (5), nemlig rekkefølgen $\forall\exists\forall$ for kvantorene i (5), ikke på noen måte gjenspeiler seg i (2). Intet under derfor, at de fleste elever i grunnen blir hengende fast i anskuelige forestillinger uten å kunne heve seg over dem.

Man skal naturligvis ikke forakte de anskuelige forestillinger; de har sin verdi både pedagogisk og praktisk. Utsagnet (2) er også egentlig blitt til ut fra anskuelige forestillinger, og det passer godt til dem. For når man tenker seg at et bevegelig punkt $x$ på en tallinje nærmer seg til et fast punkt $a$, samtidig med at punktet $f(x)$ på en annen tallinje nærmer seg til $b$, så er utsagnene »$x$ går mot $a$« og »$f(x)$ går mot $b$« meningsfylte hver for seg.

Jeg er så langt fra å ville fjerne meg fra de anskuelige forestillinger, at jeg tvert om mener at lærebøkene i matematisk analyse burde stille opp en eksakt definisjon av det isolerte utsagn »$x$ går mot $a$« tilpasset til anskuelsen. Det er i virkeligheten meget lett å gjøre det; man kan bare si at dette utsagn skal bety

(6) *Variasjonsområdet for $x$ innskrenkes til en tallfølge som konvergerer mot $a$,*

eller, hvis man foretrekker en mere »levende« språkbruk,

(7) *$x$ gjennomløper en tallfølge som konvergerer mot $a$.*

Da må man naturligvis ha definert (og innøvet) på forhånd hva det betyr at en tallfølge konvergerer, f. eks. ved å si at $\{x_n\} \rightarrow a$ skal bety at enhver $\varepsilon$-omegn om $a$ (man kan naturligvis bruke andre ord) inneholder alle $x_n$ på et endelig antall nær. Utsagnet (2) kommer etter dette — uten ny definisjon, men bare rett og slett ved å bruke den grammatiske konstruksjon »når... så« på helt normal måte — til å bety

(8) *Når $\{x_n\} \rightarrow a$, så $\{f(x_n)\} \rightarrow b$,*

eller, formulert i ord,

(9) *Når (d. v. s. hver gang når) $x$ gjennomløper en tallfølge som konvergerer mot $a$, så vil $f(x)$ gjennomløpe en tallfølge som konvergerer mot $b$.*

Baketter kan man så *bevise* at dette utsagnet er ekvivalent med (4) eller (5). Denne ekvivalens (som man neppe kan unnvære helt) kan deretter anvendes som et nyttig kriterium, uten at man i definisjonen har gjort vold på grammatikken.

Når man (slik som jeg foreslår) definerer »$x$ går mot $a$« ved (6) eller (7), vil fremstillingen i detalj kunne formuleres meget nær som i H. Bohr og J. Mollerup: Matematisk analyse II (København 1940). Man finner dog heller ikke i denne bok noen definisjon av det isolerte utsagn »$x$ går mot $a$«. Det henger antakelig sammen med at limes-begrepet på side 47 i boka, likesom i mange andre lærebøker i matematisk analyse, er litt anderledes enn det som jeg har hatt for øye i denne artikel. Man får det om man i (5) erstatter $|x-a| < \delta$ med $0 < |x-a| < \delta$. Etter min mening burde man i så fall istedenfor (2) heller si

*Når $x$ går mot $a$ uten å være lik $a$, går $f(x)$ mot $b$.*

Jeg vil imidlertid utsette til en senere artikkel diskusjonen av fordeler og mangler ved de to limes-begreper.

# BOKMELDINGER

Oystein Ore: *Cardano, The Gambling Scholar.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1953. 249 sider. $ 4.00.

(Innholdsfortegnelse i NMT, denne årgang, s. 127.)

Den store læge Gerolamo Cardano (1501–76) var ogsaa en betydelig matematiker og erindres jo i matematikkens historie særligt for det bidrag, han ydede til løsningen af tredjegradsligningen. Men han — der var en lidenskabelig spiller — beskæftigede sig ogsaa med teorien for hasardspil og skrev herom en bog (»Liber de Ludo Aleae«), hvori er foregrebet væsentlige træk af sandsynlighedsregningens grundlæggelse, saaledes som denne sædvanligt ellers tilskrives Pascal og Fermat som resultat af en brevveksling opstaaet i tilknytning til et berømt problem stillet til Pascal af spilleren Chevalier de Méré. Denne bog af Cardano, som hidtil ikke har været tilstrækkeligt paaagtet, foreligger nu i en engelsk udgave, oversat af Sidney Henry Gould og kommenteret af Oystein Ore, og i forbindelse med denne udgave af en betydningsfuld matematikhistorisk kilde giver Ore en fængslende skildring af Cardanos stormfulde liv.

Cardano var virkelig, hvad man med en noget forslidt vending kalder for en »typisk renaissanceskikkelse«, stor i fejl og dyder, en mand hvem livet skænkede store sejre, men som ogsaa led dybe nederlag — forskyldt og uforskyldt. I tegningen af denne gribende livsskæbne viser Ore fremragende evner for karakterskildring, og man fornemmer bag den enkle og af megen humor prægede stil en varm medfølelse med og indtrængende forstaaelse af Cardano. I kraft heraf, og fordi der her gives et tidsbillede med mange almene træk, fortjener Ores bog opmærksomhed langt udover fagfællers kreds. Den kan læses uden specielle matematiske kundskaber, og snarere kunne man bebrejde forfatteren, at han i afsnittet om prioritetsstridighederne vedrørende tredjegradsligningen ikke i saa henseende har stillet lidt større krav til læserne.

Der kan i visse moderne fremstillinger af store forskeres liv være en beklagelig tendens til herodyrkelse, ofte ledsaget af moralfilosoferende betragtninger over videnskabens kaar med altfor direkte — og derfor ikke rimelige — sammenligninger med nutidens forhold, men i saa henseende udviser Ore prisværdig reservation. Kun et enkelt sted finder man en direkte hentydning til nutidige forhold, idet han i forbindelse

med hemmeligholdelsen af del Ferros løsning af tredjegradsligningen skriver: »We know through experience that it (hemmeligholdelsen af videnskabelige opdagelser) may be justified in times of crises, for specific purposes, but if extended for more than short periods, it will in the end, surely and inexorably, lead to the most confusing, even absurd, situations«.

Nogle faa citater vil tjene til belysning af Ores humørfulde stil: I forbindelse med omtalen af Luca Paciolis berømte »Summa de Arithmetica« siges: »Perhaps it may also be worth mentioning that one of the most commonplace terms of modern civilization makes an innocuous debut, namely the word million«. Og da der fortælles om, hvorledes videnskabsmændene oprindeligt hemmeligholdt deres opdagelser af praktiske grunde, medens det modsatte senere blev tilfældet, skriver han: »...this attitude changed gradually into the modern view that a scholar's principal road to recognition and reputation is through the publication of all his secrets, be they large or small—or, in some instances, even if they are no secrets at all«. Naar det om den ubekendte $x$ hedder, at den »is being chased so anxiously and with such varying degree of success by school children all over the world«, viser jo netop dette ordvalg, at Kiellands lille Marius' forskræmte ansigt ved denne lejlighed er dukket op i den norskfødte forfatters erindring.

I afsnittet om Cardano the Gambler gives en oversigt over de forskellige spil fra denne tid, og den megen sagkundskab ogsaa paa dette felt synes at være i smuk overensstemmelse med forlagsreklamens bemærkning om professor Ore, der karakteriseres som »a devoted gambler (for small stakes) himself«. Den parentetiske bemærkning virker jo beroligende, men glædeligt er det, at det saaledes antydede maadehold dog ikke forhindrer en overordentlig levende og lidet fordømmende skildring af Cardanos spillelyst, der ikke just synes at være præget af begrænsningen til »small stakes«. Cardano var iøvrigt meget overtroisk, men man læser med stor interesse om hans forsøg paa at rationalisere denne overtro og hans filosofi om held og uheld i det saa omskiftelige liv. Hvor oplysende er i saa henseende ikke det af Ore anførte citat om plan og tilfældighed: »For example, I have an enemy, and thus his bad luck is part of my plan; but if his power should be increased by marriage of his daughter, this pertains to luck and has nothing to do with my plan«. Som middel imod melankoli anbefaler Cardano spil, men kan ogsaa i saa henseende give andre gode raad, som f. eks. det, at »it is helpful to think of the misery of those who were the cause of your melancholy«.

Med hensyn til selve bogen om hasardspillets teori er det rigtigt, at man her finder en forstaaelse af sandsynlighedsbegrebet og dets anven-

delse, som fuldtud retfærdiggør karakteristikken af denne bog som »the first milestone in the long and very scenic road of probability from the past to its present dominating position in the mathematical and physical sciences«. Ganske vist løste Cardano ikke det af de Méré opstillede problem, der gav anledning til brevvekslingen mellem Pascal og Fermat, men han formulerede det, og paa en række eksempler viste han, at han havde en sikker opfattelse af sandsynligheden defineret som »forholdet mellem antallet af gunstige og antallet af mulige tilfælde«, ligesom han ogsaa kendte og anvendte sætningen om multiplikation af sandsynligheder for det tilfælde, at udfaldene er lige sandsynlige, nemlig for sandsynligheden for gentagelser af samme udfald. Han synes ogsaa at have haft en forstaaelse af de store tals lov i den helt primitive form, at ved et stort antal gentagelser af samme spil vil den relative hyppighed af et bestemt udfald ligge i nærheden af dettes sandsynlighed — en med ovennævnte sandsynlighedsdefinition jo slet ikke indlysende indsigt.

Læsningen af Cardanos bog om hasardspillets teori frembyder mange vanskeligheder, hvorfor dens store betydning hidtil har været næsten overset, men takket være professor Ores omhyggelige kommentar og hans oversigt over de grundlæggende tanker i denne klassiske afhandling er studiet af den nu let tilgængeligt for enhver, der interesserer sig for matematikkens historie. Og med den enkle og nøjagtige — og dog saa fængslende — skildring af Cardanos liv som baggrund er det med den allerstørste forventning, man ser hen til forfatterens kommende bog om Niels Henrik Abel.

*Mogens Pihl*

Fr. Fabricius-Bjerre: *Afbildningslære for maskin-, bygnings- og elektroingeniører*. Jul. Gjellerups Forlag, København, 1953. 87 s. Kr. 11.50.

Fr. Fabricius-Bjerre: *Lærebog i geometri, I, Analytisk geometri*, 2. udgave. Jul. Gjellerups Forlag, København, 1953. 169 s. Kr. 24.00.

(Innholdsfortegnelse for begge bøker i NMT, denne årgang, s. 131.)

Ovannämnda böcker utgöra tillsammans en ny, reviderad upplaga av första bandet av författarens »Lærebog i Geometri« som utkom 1947. Underrubriken »for maskin-, bygnings- og elektroingeniører« i den förstnämnda boken har tillkommit på grund av en omläggning av studieplanerna vid Danmarks tekniske højskole. Sakligt sett är den icke motiverad, ty varken texten, figurerna eller övningsuppgifterna kunna sägas vara speciellt avsedda för blivande ingenjörer. Det är fastmer

fråga om en allmän inledning till den deskriptiva geometrien. Den senare boken, som vänder sig till i huvudsak samma läsare, är en allmän lärobok i analytisk geometri och vektorlära.

»Afbildningslære« innehåller en gentemot första upplagan något förkortad framställning av de första grunderna av läran om kurvor och ytor, parallellprojektion, dubbel rätvinklig projektion, sned och ortogonal axonometri samt perspektiv avbildning. Framställningen är klar och lättfattlig. Den visar tydligt författarens styrka i teorien. Vissa betraktelser och beteckningar hade enligt undertecknads mening kunnat moderniseras.

På sidan 66 ges en praktisk anvisning som lätt kan missuppfattas vid okritisk användning. Det borde ha framhållits att om man vid den ortogonaldimetriska avbildningen bortser från förkortningen på två koordinataxlar, måste man förlänga eventuellt förekommande sfärers radier i motsvarande grad.

Boken innehåller 57 geometriska övningsuppgifter.

I »Lærebog i geometri I« är vektorräkningen kombinerad med den klassiska analytiska geometrien. Ett kapitel på 23 sidor om lineära avbildningar är helt omarbetat. Detta som även innehåller en kort redogörelse för tensorbegreppet samt ett under rubriken »Tillæg« infört kapitel »Indledning til geometrien i det $n$-dimensionale rum« ger läsaren vidare synpunkter och lämpar sig som förberedelse för längre gående studier. Övningsuppgifternas antal är 132.

Figurerna äro väl konstruerade med undantag av fig. 57. Då andra gradens ytor avskäras med plan har tecknaren angivit även de sistnämnda som ogenomskinliga och tydligen tänkt sig kroppar i stället för ytor.

Det är som sagt även här fråga om en allmän lärobok i geometri och icke en sådan speciellt för tekniska högskolor.

På grund av den exakta och goda framställningen kan undertecknad gärna instämma i den av S. Bundgaard vid anmälning av första upplagan framförda rekommendationen att anskaffa Fabricius-Bjerres bok i högre läroanstalter, gymnasiers elevbibliotek och andra ställen där den kan vara en nyttig orientering på geometriens område.

*E. J. Nyström*

## OPPGAVER TIL LØSNING

Løsninger av oppgaver merket med stjerne innsendes til redaksjonssekretæren innen 15. april 1954. De andre oppgavene er lettere, og løsninger av dem blir ikke offentliggjort.

14. Konstruer en ligebenet trekant $ABC\,(AB = AC)$, når man kender $OO_a$ og $R$, hvor $O$ er centrum for den omskrevne cirkel og $O_a$ centrum for den cirkel, der rører siden $BC$ og de to andre siders forlængelser.

*Jes Nielsen*

15. Vis at

$$e < \frac{3}{\ln 3}.$$

*R. Tambs Lyche*

16. Kan jordklotets centralprojektion uppvisa konturen som en cirkel med den ena polen på konturen?

*E. J. Nyström*

17. La $p$ være et ulike primtall. Vis at

$$(p-1)^{p^n}+1$$

er delelig med $p^{n+1}$, men ikke med $p^{n+2}$.

*Michael Nyberg*

18. La $A$, $B$, $C$ og $D$ bety arealene av sideflatene i et tetraeder. Vis at

$$D^2 = A^2+B^2+C^2-2BC\cos(B, C)-2AC\cos(A, C)-2AB\cos(A, B)$$

når $(B, C)$, $(A, C)$ og $(A, B)$ betegner de indre vinkler mellom de respektive sideflater.

*Olav Bjørn Skaar*

*19. Sök en rät linje som skär två givna räta linjer i rymden under givna vinklar.

*E. J. Nyström*

*20. La de to gitte linjer $L_1$ og $L_2$ i forrige oppgave ha likningene

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1 t+\boldsymbol{b}_1 \quad \text{og} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_2 t+\boldsymbol{b}_2$$

der $\boldsymbol{a}_1$ og $\boldsymbol{a}_2$ er enhetsvektorer. Sett $l = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ og la $c_1$ og $c_2$ være cosinus til de vinkler den søkte linje $L$ danner med $L_1$ og $L_2$. Finn en formel for lengden av det stykke av $L$ som avskjæres av $L_1$ og $L_2$.

*R. Tambs Lyche*

*21. Vis, at en trekant, der indeholder en stump eller ret vinkel, kan deles i 7 trekanter, der kun indeholder spidse vinkler.

Det formodes, at det ikke er muligt at dele en stump- eller retvinklet trekant i færre end 7 spidsvinklede trekanter. Undersøg rigtigheden af denne formodning.

*Fr. Fabricius-Bjerre*

## LØSNING

*Oppgave 13.*

a. $\dfrac{\varphi(x_1x_2)}{x_1x_2} \geqq \dfrac{\varphi(x_1)}{x_1} = \operatorname{tg}\alpha,$

där $\alpha$ er strålens vinkel mot positiv $x$-riktning. Strålen vrider sig i positiv led eller ej alls, när $x$ växer.

b. För två godtyckliga $x$-värden $u$ och $v > 0$ gäller samtidigt (sätt $x_1 = u$, $x_2 = v/u$ respektive $x_1 = v$, $x_2 = u/v$):

$$\frac{\varphi(v)}{v} \geqq \frac{\varphi(u)}{u}, \quad \frac{\varphi(u)}{u} \geqq \frac{\varphi(v)}{v}.$$

Endast likhetstecknet kan gälla, dvs. $\varphi(x)/x$ är konstant. De sökta funktionerna är av formen $kx$, där $k \geqq 0$.

c. Påstående: för varje $\delta$ hur litet som helst kan man finna ett $\varepsilon$ så att $\varphi(x) < \delta$ för alla $x < \varepsilon$.

Bevis: Det räcker om $\varphi(x)$ är kontinuerlig t. ex. till höger i $x_0$. Välj först $\alpha$ så att $\varphi(x)$ är begränsad (övre gräns $G$) i intervallet $(x_0, x_0+\alpha)$. För varje $x < \alpha$ kan man finna ett positivt heltal $N$, så att $Nx$ ligger i detta intervall. Då är för $x < \alpha$

$$\varphi(x) \leqq \frac{\varphi(Nx)}{N} \leqq \frac{G}{N}.$$

Välj sedan $\varepsilon < \alpha$ och så att $\varepsilon < x_0\delta/G$. Då är för alla $x < \varepsilon$

$$N \geqq \frac{x_0}{\varepsilon} > \frac{G}{\delta} \quad \text{och} \quad \varphi(x) \leqq \frac{G}{N} < \delta\,, \qquad \text{v.s.b.}$$

*Åke Wallstén*

Riktig løsning er også innsendt av Mogens Christensen, Odd G. Eriksen, Johannes Kvamsdal, Jan Lanke, A. Lødemel, Henrik Meyer og Poul Wulff Pedersen.

## PRISOPPGAVER FOR NORSKE GYMNASELEVER

Den beste samlingen besvarelser på oppgavene nedenfor vil bli tildelt H. K. H. Kronprins Olavs premie på 100 kr. Eventuelt vil det bli delt ut ekstrapremier. I konkurransen kan alle norske gymnasiaster være med og dessuten de som tar examen artium i 1954, men ingen kan vinne hovedpremien mer enn en gang. Oppgavene er slik at en kommer fram ved hjelp av realgymnasets pensum. Jo enklere og mer elementære løsningsmåter en kan finne, dess bedre. Oppgavene bør drøftes og greies ut så fullstendig som råd er.

En sender løsninger til rektor Kay Piene, Skjerstadvn. 2a, Smestad, innen 1. 8. 1954, ledsaget av en erklæring om at oppgavene er selvstendig løst. Oppgi skole og klasse.

**1.** I en sirkel med radius $r$ kan innskrives trekanter der sidene danner a) en aritmetisk rekke, b) en geometrisk rekke.

Undersøk de mulige verdier for differens $d$ og kvosient $k$ i rekkene, beskriv variasjonen av trekantskarene når minste side vokser, og nevn spesielle trekanter og deres sidelengder. (O. I.)

**2.** Gitt en trekantet pyramide $ABCT$ som kan skjæres av et plan parallelt med $AT$ slik at snittflaten blir et rektangel.

Bevis at pyramiden ikke kan skjæres av et plan parallelt med $AT$ slik at snittflaten blir et trapes med like lange ikke-parallelle sider. (O. M.)

**3.** Gitt ellipsen $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$. Fra et punkt $P$ utenfor ellipsen trekkes de to tangentene. Normalene i tangeringspunktene skjærer hverandre i $Q$.

Finn $Q$'s koordinater uttrykt ved $P$'s koordinater. Studer den kurven som $Q$ beskriver når $P$ gjennomløper hyperbelen $xy = ab$. Undersøk om $Q$ kan beskrive den samme kurven ved at $P$ beskriver en annen kurve enn hyperbelen. (O. M.)

**4.** Finn de reelle løsninger i ligningen:

$$x^8+4ax^7+6a^2x^6+4a^3x^5-4a^3x^3-6a^2x^2-4ax-1 = 0;\ a \text{ er reell}.$$

Faktoriser venstre side når $a = +1$ og $a = -1$. (M. N.)

**5.** Studer funksjonen $y = \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4}$, og tegn den kurven $C$ som den representerer.

Vi betegner med $A$ det punktet på $C$ som har en abscisse lik $-1$ og med $D$ tangenten i dette punktet. Finn ligningen for $D$ og koordinatene til det punktet $B$ forskjellig fra $A$ der tangenten skjærer $C$.

Den variable rette linje $y = h$ skjærer $y$-aksen i et punkt $P$. For hvilke verdier av $h$ skjærer denne linjen $C$ i to forskjellige punkter $M_1$ og $M_2$, i to sammenfallende punkter, og i et eneste punkt? Uttrykk som funksjon av $h$ koordinatene til midtpunktet $I$ for $M_1M_2$ og koordinatene til det punktet $Q$ som er harmonisk forbundet med $P$ m. h. t. $M_1$ og $M_2$. Finn herav det geometriske sted for $I$ og for $Q$ når $h$ varierer. Lag figur.

Når $M_1$ og $M_2$ eksisterer, betegner vi med $m_1$ og $m_2$ projeksjonene av $M_1$ og $M_2$ på $x$-aksen. Vis at hver sirkel som går gjennom $m_1$ og $m_2$ skjærer rettvinklet en fast sirkel uavhengig av verdien av $h$ (tangentene i skjæringspunktet er vinkelrette). Finn sentrum og radius i denne sirkelen.

**6.** Løs ligningen

$$\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\cos x} = \frac{1+\sin 4x+\cos 4x}{\cos 2x}.$$

## PRISOPGAVER FOR DANSKE GYMNASIEELEVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier udskriver herved nedenstående prisopgaver for gymnasieelever og kursuselever til studentereksamen.

Opgaverne ønskes behandlet så fuldstændigt som muligt, og der lægges vægt på en omhyggelig og overskuelig fremstilling.

For den bedste besvarelse udsættes en præmie på 100 kr., men der kan også uddeles ekstrapræmier. For at kunne komme i betragtning ved præmieuddelingen skal man have løst mindst fire af opgaverne.

Besvarelserne indsendes senest 20. april 1954 til lektor Holger Jensen, Sundvej 8, Hellerup. Besvarelserne skal ledsages af en erklæring om, at opgaveløsningerne er selvstændigt arbejde. (Benyttelse af litteratur dog tilladt).

## Opgave nr. 1.

Givet funktionen

$$y = x^3 - ax + b\,.$$

Angiv betingelsen for, at funktionens grafiske billede har [1]) tre forskellige punkter beliggende på $x$-aksen, [2]) eet og kun eet punkt på $x$-aksen.

Bestem dernæst den kurve, der adskiller de områder i planen, fra hvis punkter der kan trækkes [1]) tre normaler og [2]) een og kun een normal til parablen $y^2 = px$.

## Opgave nr. 2.

Givet et parallelogram $OACB$. Fra $O$ udgår tre halvlinier $a$, $b$ og $c$, der indeholder henholdsvis siderne $OA$ og $OB$ samt diagonalen $OC$ i parallelogrammet.

En linie $l$ skærer $a$ i $A_1$, $b$ i $B_1$ og $c$ i $C_1$. Idet

$$x = \frac{OA_1}{OA},\ y = \frac{OB_1}{OB},\ z = \frac{OC_1}{OC},$$

skal man bevise, at

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

## Opgave nr. 3.

Bevis, at toppunkterne for de omdrejningskegleflader, der indeholder et givet keglesnit, ligger på et andet keglesnit.

Bevis dernæst, at toppunkterne for de omdrejningskegleflader, der indeholder det fundne keglesnit, ligger på det givne.

## Opgave nr. 4.

Lad $A$ og $a$ være to positive tal. Man danner talfølgen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

hvor

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right),\ a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right),\ a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{A}{a_2}\right) \text{ o.s.v.}$$

Bevis, at

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a - \sqrt{A}}{a + \sqrt{A}}\right)^{2^n},$$

og derefter, at $a_n \to \sqrt{A}$ for $n \to \infty$.

Idet $A = 10$ og $a = 3$, skal man bestemme en sådan værdi af $n$, at $a_n$'s afvigelse fra $\sqrt{10}$ er mindre end $10^{-6}$.

Opgave nr. 5.

Idet $ABC$ og $A_1B_1C_1$ er to kongruente trekanter, hvor $ABC$ angiver omløbsretningen imod uret og $A_1B_1C_1$ omløbsretningen med uret, skal man vise, at de tre midtpunkter af liniestykkerne $AA_1$, $BB_1$ og $CC_1$ ligger på en ret linie $l$.

Bevis endvidere, at man ved en parallelforskydning langs $l$ kan føre $A_1B_1C_1$ over i en trekant, der er symmetrisk med $ABC$ med hensyn til $l$.

Opgave nr. 6.

Undersøg og afbild funktionen $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ for $0 < x < \infty$, og benyt funktionens egenskaber til at vise, at ligningssystemet

$$x^y = y^x$$

$$x - y = a,$$

hvor $a$ er et givet positivt tal, har een og kun een løsning.

## LØSNING AV TO DANSKE PRISOPPGAVER

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier i Danmark stilte en rekke prisoppgaver til besvarelse innen 15. april 1953. Her gjengis besvarelsen av to av disse oppgaver ved 1. premie-vinneren Leif Kristensen, Nykøbing M.

*Opgave nr. 4.*

Funktionen $f(x)$ er defineret og kontinuert for alle $x$ og periodisk med perioden $2p$. Ethvert interval af længden $2p$ kan deles i et endeligt antal intervaller, således at $f(x)$ er differentiabel i ethvert indre punkt af disse intervaller med en differentialkvotient, hvis numeriske værdi er mindre end eller lig med et givet positivt tal $a$.

Idet $x_0$ er et vilkårligt tal, skal man bevise, at

$$f(x_0)+a(x-x_0) \leqq f(x) \leqq f(x_0)-a(x-x_0) \quad \text{for} \quad x_0-p \leqq x \leqq x_0$$

og

$$f(x_0)-a(x-x_0) \leqq f(x) \leqq f(x_0)+a(x-x_0) \quad \text{for} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0+p\,.$$

Når det endvidere er givet, at

$$\int_{x_1}^{x_1+2p} f(x)dx = 0 ,$$

hvor $x_1$ er et vilkårligt tal, skal man bevise, at

(1) $$|f(x)| \leqq \tfrac{1}{2}pa \text{ for alle værdier af } x .$$

Bevis, at (1) kan skærpes til

$$|f(x)| < \tfrac{1}{2}pa ,$$

når $f(x)$ er differentiabel i hele sit definitionsområde.

*Løsning.*

$x_0-p \leqq x \leqq x_0$:

Ifølge det givne om funktionen $y = f(x)$ kan intervallet $(x|x_0)$ deles op i et endeligt antal delintervaller (delepunkter $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n = x_0$), således at funktionen er differentiabel i de åbne og kontinuert i de lukkede intervaller. Middelværdisætningen kan altså anvendes på delintervallerne:

$$f(x_{i+1})-f(x_i) = (x_{i+1}-x_i)f'(\alpha_i) , \quad x_i < \alpha_i < x_{i+1} ,$$

og da $|f'(x)| \leqq a$, haves

$$-a(x_{i+1}-x_i) \leqq f(x_{i+1})-f(x_i) \leqq a(x_{i+1}-x_i)$$

$$-a\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right) \leqq a\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)$$

$$-a(x_n-x_1) \leqq f(x_n)-f(x_1) \leqq a(x_n-x_1) ,$$

og idet $x_1 = x$ og $x_n = x_0$, haves

(1) $f(x_0)+a(x-x_0) \leqq f(x) \leqq f(x_0)-a(x-x_0), \quad (x_0-p \leqq x \leqq x_0),$ q.e.d.

$x_0 \leqq x \leqq x_0+p$:

Intervallet $(x_0|x)$ deles op i delintervaller, middelværdisætningen kan anvendes på. (Delepunkter: $x_1 = x_0, x_2, \ldots, x_n = x$.)

$$-a\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right) \leqq a\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) ,$$

der giver

(2) $f(x_0)-a(x-x_0) \leqq f(x) \leqq f(x_0)+a(x-x_0), \quad (x_0 \leqq x \leqq x_0+p) ,$ q.e.d.

Af (1) og (2) haves:

$$\left.\begin{matrix} f(x_0)+a(x-x_0) \\ f(x_0)-a(x-x_0) \end{matrix}\right\} = g(x) \leqq f(x) \leqq h(x) = \begin{cases} f(x_0)-a(x-x_0), & (x_0-p \leqq x \leqq x_0) \\ f(x_0)+a(x-x_0), & (x_0 \leqq x \leqq x_0+p). \end{cases}$$

På disse kontinuerte funktioner anvendes sætningen:

Er $F(x)$ og $G(x)$ begge kontinuerte funktioner i intervallet $b \leqq x \leqq c$, og $F(x) \leqq G(x)$ for alle $x$ i dette interval, haves:

$$\int_b^c F(x)\,dx \leqq \int_b^c G(x)\,dx\,,$$

hvor lighedstegnet kun gælder, når $F(x) = G(x)$ for alle $x$ i intervallet.

$$\int_{x_0-p}^{x_0+p} g(x)\,dx \leqq \int_{x_0-p}^{x_0+p} f(x)\,dx \leqq \int_{x_0-p}^{x_0+p} h(x)\,dx\,,$$

hvoraf, idet $\int_{x_0-p}^{x_0+p} f(x)\,dx = 0$:

$$-\tfrac{1}{2}pa \leqq f(x_0) \leqq \tfrac{1}{2}pa\,.$$

Uligheden

(3) $$|f(x)| \leqq \tfrac{1}{2}pa$$

er altså gyldig for alle $x$, når $\int_{x_0-p}^{x_0+p} f(x)\,dx$ er lig 0 ($x_0$ et vilkårligt tal).

Lighedstegnene gælder kun, når $f(x)$ henholdsvis er lig $g(x)$ og $h(x)$ for alle værdier i intervallet.

Da $g(x)$ og $h(x)$ ikke er differentiable for $x = x_0$, kan ulighed (3) altså skærpes til

$$|f(x)| < \tfrac{1}{2}pa\,,$$

når $f(x)$ er differentiabel i hele sit definitionsområde.

*Opgave nr. 5.*

a) Find alle de værdier af $x$, for hvilke funktionen

$$y = (\sqrt{2})^x - x$$

har værdien 0.

b) Bevis, at talfølgen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

hvor $a_1 = \sqrt{2}$ og $a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$, er konvergent, og find dens grænseværdi.

c) Bevis, at talfølgen

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

hvor $b_1 = \sqrt{3}$ og $b_{n+1} = (\sqrt{3})^{b_n}$, er divergent.

*Løsning.*

a) $y = f(x) - x = (\sqrt{2})^x - x = (\sqrt{2})^x \left(1 - \frac{x}{(\sqrt{2})^x}\right)$, $-\infty < x < \infty$.

Da $(\sqrt{2})^x \to 0$, vil $y \to \infty$ for $x \to -\infty$.

Da $(\sqrt{2})^x \to \infty$ og $\frac{x}{(\sqrt{2})^x} \to 0$, vil $y \to \infty$ for $x \to \infty$.

$$y' = \ln \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^x - 1, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$y' = 0 \quad \text{for} \quad (\sqrt{2})^x = \frac{1}{\ln \sqrt{2}}, \quad x = -\frac{\ln \ln \sqrt{2}}{\ln \sqrt{2}} \approx 3{,}059 .$$

$$y_{\min} = \frac{1}{\ln \sqrt{2}} + \frac{\ln \ln \sqrt{2}}{\ln \sqrt{2}} \approx -0{,}173 .$$

Da funktionen, der er kontinuert, er aftagende i intervallet

$$-\infty < x \leqq -\frac{\ln \ln \sqrt{2}}{\ln \sqrt{2}}$$

og negativ i højre endepunkt af intervallet, medens $y \to \infty$ for $x \to -\infty$, haves, at funktionen antager værdien 0 een gang og kun een gang i dette interval. På tilsvarende måde haves, at funktionen kun antager værdien 0 een gang i intervallet $-\frac{\ln \ln \sqrt{2}}{\ln \sqrt{2}} \leqq x < \infty$.

Da funktionen er nul for $x = 2$ og $x = 4$, haves altså, at disse er de eneste nulpunkter.

b) $a_1 = \sqrt{2}, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}, \ldots$ .

Da $f(x) = (\sqrt{2})^x$ er voksende for alle $x$, haves, idet $f(2) = 2$,

$$f(x) < 2 \quad \text{for} \quad x < 2 ,$$

hvoraf, hvis $a_n < 2$:

$$f(a_n) = a_{n+1} < 2 .$$

Heraf følger, da $a_1 = \sqrt{2}$ $(< 2)$, at samtlige elementer er mindre end 2.

Da $y = f(x) - x > 0$ for $x < 2$, haves

$$a_n < f(a_n) = a_{n+1} .$$

*Talfølgen er altså voksende og begrænset, hvoraf følger, at den er konvergent* med en grænseværdi $s$, der er mindre end eller lig 2. Af den nødvendige betingelse for konvergens:

$$a_{n+1}-a_n \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty ,$$

findes

$$f(a_n)-a_n \to 0 \quad \text{for} \quad a_n \to s ,$$

og da $y = f(x)-x$ er kontinuert:

$$f(s)-s = 0 .$$

Heraf følger, at $s = 2$, idet dette er det eneste nulpunkt, der tilfredsstiller uligheden $s \leqq 2$.

c) $b_1 = \sqrt{3}, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1} = (\sqrt{3})^{b_n}, \ldots .$

$$y = (\sqrt{3})^x - x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty ,$$

$$y' = \ln \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})^x - 1 = 0 \quad \text{for} \quad x = -\frac{\ln \ln \sqrt{3}}{\ln \sqrt{3}} \approx 1{,}091 .$$

Da $y \approx 0{,}857\ (> 0)$ for $x = \sqrt{3} \approx 1{,}732$, haves $y > 0$ for $x \geqq \sqrt{3}$. Antages $b_n \geqq \sqrt{3}$, haves

$$b_n < (\sqrt{3})^{b_n} = b_{n+1} .$$

Da $b_1 = \sqrt{3}$, er altså talfølgen voksende. For en eventuel grænseværdi $s$ ($s > \sqrt{3}$) må der (da $y$ er kontinuert) iflg. den nødvendige betingelse for konvergens ($b_{n+1}-b_n \to 0$ for $n \to \infty$) gælde, at $(\sqrt{3})^s - s = 0$, og da denne ligning ikke tilfredsstilles af nogen værdi større end $\sqrt{3}$, haves, at *talfølgen er divergent.*

## FORENINGSMEDDELSE

De to danske foreninger: Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier og Foreningen af Fysik- og Kemilærere ved Gymnasier og Seminarier har indbudt de nordiske landes matematik-, fysik- og kemilærere ved de højere skoler og seminarier til en *kongres i Aarhus* i dagene 3.—6. august 1954.

Kongressen afholdes på Aarhus Universitet, og foredrag og forhandlinger finder sted dels ved enkelte fællesmøder, dels i to sektioner: en for matematik og en for fysik-kemi. Program for kongressen udsendes omkring den 1. marts.

# SUMMARY IN ENGLISH

GUSTAF ENESTRÖM. K.-G. HAGSTROEM.

Written in memory of Gustaf Eneström (1852–1923), the Swedish actuary who became famous for his contributions to the history of mathematics. He founded the *Bibliotheca Mathematica* and edited it from the beginning in 1884, and after it had been taken over by Teubner in Leipzig 1900, and continued his numerous contributions to the journal until it was stopped by the first World war. To a great extent, the contributions consisted of (frequently critical) remarks to Cantor's famous standard work on the history of mathematics.

In pure mathematics, Eneström was the discoverer (1893) of a theorem which has later been credited to Kakeya (1912): Let the coefficients of the equation

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

be real and positive, and

$$m = \min\left(\frac{a_{i-1}}{a_i}\right), \quad M = \max\left(\frac{a_{i-1}}{a_i}\right), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \quad n.$$

Then $m < |z| < M$ for all roots of the equation.

THE EXPONENTIAL AND THE LOGARITHMIC FUNCTIONS IN THE (SWEDISH) GYMNASIUM SCHOOLS. H. GASK.

An introduction to the number $e$ and the function $e^x$ is given which has certain advantages over the traditional methods. It can be used in the schools and is useful for those who have to use exponential functions without having much mathematical training, e.g. biologists, statisticians, economists, etc. The function $a^x$ is considered for different values of $a$ and it is made plausible by a diagram (p. 158) that there exists one and only one number $a = e$ such that the corresponding curve has derivative 1 at the origin. From $\lim (e^h - 1)/h = 1$ the formula $e = \lim (1+\alpha)^{1/\alpha}$ follows very easily (p. 159). This heuristic approach can be made rigorous in a simple geometric fashion which is entirely accessible to pupils of the higher classes of the Gymnasium.

## A CERTAIN LOCUS IN CONNECTION WITH AN ELLIPSE OR A HYPERBOLA. David Fog.

If to the ellipse or hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

we want to determine the locus of a point $P(x, y)$ from which the tangents to the given curve have conjugate directions, the slopes $\alpha_1$ and $\alpha_2$ of the two tangents, being solutions of the equation

$$\alpha^2(x^2-a^2)-2\alpha xy+y^2\mp b^2=0\,,$$

have to satisfy the condition $\alpha_1\alpha_2=\mp b^2/a^2$. Eliminating $\alpha_1$ and $\alpha_2$ we obtain

$$\frac{x^2}{2a^2}\pm\frac{y^2}{2b^2}=1\,,$$

which represents the locus in question in the case of an ellipse (upper sign), but not in the case of a hyperbola (lower sign).

This illustrates the fact that a collection of points $(x, y)$ represented by parametric equations need not be identical with the curve $f(x, y)=0$ obtained by eliminating the parameters, but may often constitute only a part of it (in extreme cases nothing at all).

## AN AVOIDABLE DIDACTIC DIFFICULTY WITH THE CONCEPT OF LIMIT. Ingebrigt Johansson.

The ordinary $\varepsilon$-$\delta$-definition of the sentence »If $x$ tends to $a$, then $f(x)$ tends to $b$« is difficult for two reasons: 1) The limit concept is in itself a difficult concept. 2) As distinct from other *if-then*-sequences, the two part sentences »$x$ tends to $a$« and »$f(x)$ tends to $b$« receive no separate meanings for themselves. The former difficulty is of course not avoidable, the latter, however, can be eliminated by starting from the concept of a convergent sequence and defining afterwards the meaning of the sentence »$x$ tends to $a$« as being »the range of $x$ is restricted to a sequence converging to $a$«.

# INNHOLDSFORTEGNELSE


VIGGO BRUN: A generalization of the formula of Simpson for non-equidistant ordinates ..... 10– 15

VIGGO BRUN: Det gjenfunne manuskript til Abels Parisavhandling ..... 91– 97

SVEND BUNDGAARD: En didaktisk bemærkning om indførelsen af de komplekse tal ..... 16– 24

DAVID FOG: Om et geometrisk sted ved ellipse og hyperbel ..... 161–164

OTTO FROSTMAN: En sats av Fáry med elementära tillämpningar ..... 25– 32

ERLING FØLNER: Elementer af von Neumann's spilteori ..... 115–126

H. GASK: Exponential- och logaritmfunktionen på gymnasiet ..... 156–160

K.-G. HAGSTROEM: Gustaf Eneström. Till hundraårsminnet av hans födelse ..... 145–155

HENRY JENSEN: Om koordinater i de danske kort ..... 51– 58

INGEBRIGT JOHANSSON: En unødvendig pedagogisk vanskelighet ved limes-begrepet ..... 165–167

FR. LANGE-NIELSEN: Niels Henrik Abel ..... 65– 90

ROLF NEVANLINNA: Den fyrdimensionella rymden ..... 98–114

ÅKE PLEIJEL: Nils Erik Fremberg in memoriam ..... 7– 9

P. RUBINSTEIN, VILJO O. LAINE, BJØRN RUDBERG, SIGURD ÅSTRAND, EINAR LUNELL, C. E. SJÖSTEDT: Geometriundervisningen i realskolan ..... 33– 50

Redaksjonelt ..... 5

Bokmeldinger

L. BIEBERBACH: Theorie der geometrischen Konstruktionen (SIGMUND SELBERG) ..... 59

FR. FABRICIUS-BJERRE: Afbildningslære for maskin-, bygnings- og elektroingeniører. — Lærebog i geometri, I, Analytisk geometri (E. J. NYSTRÖM) ..... 170

WALTER LIETZMANN: Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie (JOHN OLAV STUBBAN) ..... 61

OYSTEIN ORE: Cardano, The Gambling Scholar (MOGENS PIHL) ..... 168

Mottatte bøker ..... 127

Kronikk, meddelelser ..... 62, 132, 181

Oppgaver

Oppgaver til løsning ..... 62, 134, 172

Løsninger ..... 135, 173

Eksamensoppgaver ..... 136

Prisoppgaver for norske gymnaselever ..... 174

Prisopgaver for danske gymnasieelever ..... 175

Løsning av to danske prisoppgaver ..... 177

Summary in English ..... 63, 143, 182