



N. H. Abel

NIELS HENRIK ABEL

FR. LANGE-NIELSEN

De ytre omrids av Abels liv tør være vel kjent. Men da enkelte Abel-biografier og de fleste oppslagverker gir et nokså fortegnet bilde av hans liv og skjebne, kan det være på sin plass å gi en oversikt over hans levnetsløp som en innledning til en omtale av hans videnskapelige innsats.

Niels Henrik Abel ble født 5. august 1802, og han døde 6. april 1829 seksogtyve år og otte måneder gammel. Han tilhørte en embetsslekt, hans far og farfar var prester og hans oldefar var rådmann i Bergen. Hans mor var en kjøbmannsdatter fra Risør. I hans første barndom var forholdene i hjemmet lyse, og økonomien var god. Hans morfar var på den tid en rik mann, som bl. a. skjenket hele 2000 spesiedaler til Norges universitet ved dets opprettelse i 1811. Under de forvirrede økonomiske forhold i årene efter 1814 mistet Abels morfar hele sin formue, og samtidig ble også hans foreldres økonomiske stilling av mange årsaker meget bekymringsfull. Abels far var en begavet mann, som hadde en meget god teologisk embetseksamen fra universitetet i København. Han ble ridder av Dannebrog for sine fortjenester av kystforsvaret i sitt prestegjeld i 1801. Han ble valgt til stortingsmann både i 1814 og i 1818. Men han var ingen sterk karakter, og i hans siste leveår var forholdene i hjemmet ulykkelige. Abels mor skildres som »helt karakterløs« og drikkfeldig og også hans far lå i sine siste år under for den samme svakhet. Faren døde i 1820 og etterlot enke og seks barn i stor fattigdom. Niels Henrik var familiens eneste håp, og de store byrder som hans sørgelige familieforhold la på ham både økonomisk og på annen måte, var den vesentligste årsak til de vanskeligheter han møtte i sitt liv.

Høsten 1815 kom Abel inn på Christiania Katedralskole. Skolen disponerte adskillige legater, og Abel hadde i hele sin skoletid friplass og stipendier. Fra begynnelsen av 1818 fikk skolen en ny matematikklærer, den senere professor Bernt Holmboe. Abel hadde også tidligere klart seg fint i matematikk, men under Holmboes vekkende undervisning tok hans utvikling som matematiker straks en meget sterk fart, og Holmboe har innlagt seg uvisnelig fortjeneste ved sin veiledning av Abel. Han ga ham

privatundervisning og gjennomgikk bl. a. en rekke av Eulers verker med ham, og han lot ham også ellers lese de store klassikere. Når Felix Klein sier: »Abel war völli^g Autodidakt« (Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Berlin 1926, s. 101), så forekommer uttalelsen meg ikke helt treffende, og dette gjelder enda mer Kleins uttalelse om »die wenigen ihm zugänglichen Bücher«. Det norske universitetsbibliotek var i virkeligheten forbausende godt forsynt med matematisk litteratur, og Katedralskolens og universitetsbibliotekets utlånsprotokoller viser at Abel både i sine siste skoleår (1818–21) og under sin studietid ved universitetet (1821–25) lånte en imponerende mengde matematiske verker. Da han i 1825 drog ut på sin store utenlandsreise, hadde han gjennom iherdige studier ervervet seg et grundig kjennskap til sin samtids matematiske viden. Men det er riktig at de elementære forelesninger som den gang ble holdt ved Christiania universitet, ikke kunne gi Abel noe som helst, da han alt fra skoledagene hadde kunnskaper som gikk meget videre.

Mellom Abel og hans lærer Holmboe utviklet det seg snart et varmt personlig vennskap som aldri kjölnet, og som ble et av de viktigste støttepunkter i Abels liv. Men det var også andre som støttet ham. Holmboe ble aldri trett av å forkynne hvilket matematisk geni hans unge elev var, og i de små forhold i Christiania den gang forplantet Abels ry som matematiker seg også til Universitetets lærere allerede før han var ferdig med skolen. Vi har en uttalelse fra denne tid fra professor Chr. Hansteen, hvor denne omtaler Abel som et stort geni og sier at man vil skaffe ham økonomisk støtte når han blir student, og man »venter da engang i ham at see en af Jordens første Mathematici«. Hansteen var professor i anvendt matematikk og hadde en innflytelsesrik stilling ved Universitetet. Han ble en av Abels virksomste velyndere.

Det er sikkert ikke mange universiteter som har mottatt en ung student med så stor varme og velvilje som det unge og fattige norske universitet møtte Abel med, da han i 1821 hadde tatt sin studentereksamen. Han fikk straks en plass på Regensen, en universitetsstiftelse for fattige studenter. For å sikre at han skulle kunne vie seg til studiene, skjöt universitetets lærere sammen til en månedlig understøttelse til ham. De åpnet også sine hjem for ham. I 1823 forærte professoren i matematikk, Rasmusen, Abel 100 spesiedaler til en reise til København for at han kunne gjøre bekjentskap med danske matematikere. I januar 1824 foreslår universitetet at staten skal bevilge Abel et reisestipendium til utlandet og en fast understøttelse hjemme inntil han kan tiltre reisen. Finansdepartementet og Kirkedepartementet mente imidlertid at Abel var så ung at han fremdeles burde bli hjemme et par år for ved universitetet å

utdanne seg videre »i de Sprog og andre Bividenskaber, som det er tro- ligt at han i hans endnu havende unge Alder ikke besidder i den Grad som det kunde ansees ønskeligt for at han med fuld Nytte for sin Hoved- videnskap skulde kunne anvende det paatænkte Ophold ved fremmede Universiteter«, og de bevilget ham derfor i mars 1824 et hjemmestipen- dium på 200 spd. årlig i inntil to år. At Abels utenlandsreise ble utsatt på grunn av de nevnte departementers holdning har senere vært kritisert fra enkelte hold, men kritikken er neppe berettiget. Med den støtte han nu hadde fått kunne han arbeide uforstyrret videre, og den tiden han ennå ble hjemme har hatt stor betydning for hans utvikling som matematiker. Han offentliggjorde sine første arbeider i »Magazin for Naturvidenska- berne«, som ble redigert av Hansteen.

I august 1825 ble hans fornyede ansökning om reisestipendium inn- vilget. Han fikk 600 spd. årlig i to år, en for den tid ganske stor sum. Dessverre måtte han av denne bevilgning efterlate noen penger til sine brødre, för han i september 1825 drog ut på sin store reise. Han oppholdt seg i Berlin til våren 1826, fulgte så sine norske venner på en nokså kost- bar reise over Österrike, Nord-Italia og Schweiz, var i Paris fra juli til desember 1826 og atter i Berlin fra januar til mai 1827, da han vendte tilbake til Christiania. Allerede under sitt förste opphold i Berlin vant han en trofast venn i geheimeråd Crelle, som i 1826 startet det berönte tids- skrift »Journal für die reine und angewandte Mathematik«, til hvilket han straks knyttet Abel som medarbeider. Det meste av Abels senere pro- duksjon ble trykt i dette tidsskrift.

Mens Abel var i utlandet inntraff allerede hösten 1825 en begivenhet, som senere har gitt anledning til sterk kritikk mot universitetet. Dette innstillet nemlig Abels lærer Holmboe til stillingen som lektor i matema- tikk efter professor Rasmusen som hadde sökt avskjed. Holmboe ble også utnevnt og dermed var universitetets eneste faste lærerstilling i ren matematikk beslaglagt. Fakultetet er i denne forbindelse naturligvis fullt oppmerksom på Abel. Det mener imidlertid at Holmboe vil passe bedre til denne stilling hvor det vesentlig skal undervises i elementær matema- tikk, men fakultetet erklærer samtidig at Abel er »fortrinlig skikket til at beklæde en Lærerpost i den höiere Mathematik, som man maaske turde gjøre sig Haab om med Tiden at see oprettet ved Universitetet«. Fakul- tetets uttalelse slutter med å fremheve »hvor vigtigt det vil være, saavel for Videnskaberne i Almindelighed, som for vort Universitet i Særde- leshed, at ei Student Abel tabes af Sigte«. Universitetet la adskillig vekt på at den nye lektor måtte kunne overta undervisningen allerede i ja- nuar 1826, og at man ikke uten skade for Abels arbeide kunne avbryte hans utenlandsreise. Det har senere vært innvendt mot dette at Abel

kunne ha vært utnevnt, og så kunne Holmboe ha vikariert for ham. Det er ikke naturlig å forlange at fakultetet skulle resonnerer slik. Abel var bare 23 år, og han var nettopp sendt ut med et reisestipendium. Det var derfor uvisst når Abel i tilfelle kunne ha overtatt stillingen, og universitetet var så beskjedent utstyrt med lærerkrefter, at det ble ansett nødvendig å få den nye mann straks. Fakultetet hadde den gang ingen grunn til å anta at den stilling det her gjaldt, skulle bli Abels vesentligste chance. Det er heller ingen ting som tyder på at Abel selv skulle ha følt universitetets avgjørelse som noe skjebneslag.

En mere berettiget kritikk har vært rettet mot myndighetenes holdning overfor Abel, da han i mai 1827 kom hjem fra sin reise. Reisestipendiet var da forlengst oppbrukt, bl. a. fordi Abel også hadde måttet støtte sine brødre. Reisen hadde dessuten falt dyrere enn beregnet, hvilket delvis skyldtes en overflødig kostbar reiserute, og delvis at Abel neppe var noen fremragende økonom. Den siste tiden i Berlin hadde han levet på lån fra Holmboe.

Ved hjemkomsten anbefalte universitetet straks en ny bevilgning til ham. Finansdepartementet svarte imidlertid helt avvisende. Denne beklagelige holdning kan delvis forklares ved at reisestipendiet var ment å dekke tiden helt til september 1827. Abel sendte da inn en ny ansökning, som igjen ble varmt anbefalt av universitetet, og under sakens videre behandling pekte universitetet på at det bare gjaldt å skaffe Abel understøttelse i en kortere tid, da han snart ville kunne påregne å få en stilling som vikar for professor Hansteen, og resultatet ble at det i begynnelsen av september 1827 ble bevilget Abel 200 spd. for året 1. juli 1827—1. juli 1828. Departementet hadde ment at bevilgningen skulle være forskudd på senere lønn, men universitetet satte seg ut over dette og bevilget Abel beløpet som et nytt stipendium.

I oktober 1827 fikk Abel mot kausjon av Holmboe og Hansteen et banklån på 200 spd. (som kausjonistene senere måtte betale mesteparten av). Fra 1. januar 1828 ble Abel vikar for Hansteen ved den militære höiskole, og i februar ble han — fremdeles som vikar for Hansteen — konstituert som dosent ved universitetet med en lønn på 400 spd. årlig, fra 1. januar 1829 hevet til 600 spd. Disse ansettelser ga ham efter tidens og landets forhold et rimelig levebröd, men han var kommet meget forgjeldet hjem fra utlandet, og han måtte stadig støtte sin familie, så hans økonomiske stilling var fremdeles vanskelig.

Sommeren 1828 syntes det å åpne seg en mulighet for at Abel kunne få en stilling i Berlin. På grunn av visse forhindringer i Berlin kunne denne plan ikke gjennomføres på dette tidspunkt. Det vidner unektelig om små

og fattige forhold at den nevnte plan ikke beveget Universitet og myndighetene til å sette noe inn på å skaffe Abel en varig stilling hjemme.

Selv om det kan reises berettiget kritikk mot hjemlandets behandling av Abel etter hjemkomsten fra utlandet, så må det dog fremheves at denne kritikk ofte har vært urimelig overdrevet og i dårlig overensstemmelse med de faktiske forhold. Tross alt skaffet Universitetet og hans venner også i denne tid ham dog såvidt gode økonomiske vilkår at hans videnskapelige arbeide ikke ble hemmet. Han utfoldet i virkeligheten en helt fabelaktig produktivitet fra han kom hjem og til han i januar 1829 ble liggende syk av tuberkulose på Froland hovedgård, en av Norges få herregårder. Han døde ikke i elendighet som det har vært påstått, men i et av Norges rikeste hjem hvor han nød den kjærligste pleie. To dager etter Abels død skriver hans venn Crelle fra Berlin at kallelsen til Berlins universitet var endelig i orden. Han ville der ha kommet i ganske anderledes gunstige forhold hva videnskapelig miljø angikk. Men økonomisk ville det neppe ha vært noen forbedring, for lønnen var satt til 600 Thaler, og med den lønn ville Abel ikke ha fått det rummeligere i Berlin, enn han nu ville ha hatt det hjemme om han hadde fått leve.

*

Skjønt Abel har gjort en banebrytende innsats på mange områder av matematikken har *Sylow* [2] sikkert rett i at han først og fremst var algebraiker, og han har også selv sagt at ligningsteorien var hans yndlingsstudium. Hans interesse for denne teori skriver seg helt fra skoledagene. Atten år gammel skrev han en nu tapt avhandling hvor han mente å ha funnet en algebraisk løsning av den alminnelige 5tegradsligning. De norske matematikere har vel neppe følt seg kompetente til å bedømme avhandlingen, og Hansteen sendte den da til professor Degen i København med anmodning om at han ville fremlegge den for Det kongelige Videnskabselskab. I et brev av mai 1821 skriver Degen at han gjerne vil fremlegge avhandlingen, men at han først vil ha metoden anvendt på et numerisk eksempel. Abel hadde da imidlertid selv funnet feilen i sitt resonnement. Degen skriver videre i det nevnte brev: »Neppe kan jeg ved denne Anledning undertrykke det Önske, at den Tid og de Aandskræfter, et Hoved som Hr. A. skjænker en i mine Öine noget steril Gjenstand, maatte ydes et Emne, hvis Uddannelse vil have de vigtigste Følger for hele Analysen og dens Anvendelse paa dynamiske Undersøgelser, jeg mener de *elliptiske Transcendenter*. Ved tilbørligt Anlæg for Undersøgelser af dette Slags vil den alvorlige Gransker ingenlunde blive staaende ved disse ellers i og for sig selv høyst mærkværdige Functioners mange og

smukke Egenskaber, men opdage maghellanske Gjennemfarter til store Partier af eet og samme uhyre analytiske Ocean». Det siste var en i sannhet vellykket og imponerende profeti, som har bevart Degens navn i matematikkens historie. Men det første råd om å forlate den »sterile gjenstand« fulgte Abel heldigvis ikke. Han var nu blitt overbevist om at en algebraisk løsning av ligninger av femte og høyere grad i alminnelighet ikke var mulig, og han satte seg det mål å bevise umuligheten. Han nådde dette mål og offentliggjorde sitt bevis i 1824 i en liten avhandling skrevet på fransk og trykt på hans egen bekostning i Christiania. For å spare penger hadde han redigert avhandlingen så knapt at den ikke var lett å forstå. Han offentliggjorde derfor senere i Berlin en utførligere redaksjon i 1. bind av Crelles Journal (1826), men tankegangen var helt den samme. Ved en algebraisk løsning (en løsning »ved rottegn« som vi kort sier) menes som bekjent en løsning ved hvilken ligningens rötter uttrykkes ved ligningens koefficienter ved hjelp av de fire første regningsarter og rotutdragning. Abel gjennomfører først den enklere oppgave å bestemme den alminnelige form for et slikt rotuttrykk, og viser så, hva der er betydelig vanskeligere, at ingen slik form kan tilfredsstille en alminnelig ligning av 5. eller høyere grad. Han benytter herunder bl. a. en ny setning av Cauchy om det antall verdier en rasjonal funksjon av n størrelser kan anta ved permutasjon av disse størrelser. Ved dette arbeide var Abel trådt inn i rekken av de store matematikere, men det tok dessverre adskillig tid før det ble erkjent.

Skjønt det bryter den kronologiske fremstilling er det mest hensiktsmessig å nevne Abels senere rent algebraiske arbeider her. I alminnelighet kunne ligninger av høyere grad altså ikke løses ved rottegn. Men for spesielle ligninger var dette mulig, og Abel stilte seg som neste mål å bestemme hvilke klasser av ligninger som var algebraisk løselige. Dette emne kom han stadig tilbake til hele resten av sitt liv. I sine arbeider om elliptiske funksjoner (hvorom senere) fant han en mengde eksempler på slike ligninger. Han fikk bare offentliggjort ett større rent ligningsteoretisk arbeide, nemlig den berømte avhandling om den klasse algebraisk løselige ligninger, som ettertiden har gitt navnet de Abelske ligninger. Denne avhandling ble sendt til Crelle i mars 1828, men ble først trykt et år senere, noen dager før Abels død. Den algebraiske løselighet beror her på visse rasjonale forbindelser mellom ligningsröttene. I Abels etterlatte papirer fantes videre et likeså berømt bruddstykke av en større avhandling »Sur la résolution algébrique des équations«, som selv i denne ufullendte form inneholder fundamentale resultater. Fra et historisk synspunkt er det av interesse at man her i forbindelse med Abels innførelse av et vilkårlig rasjonalitetsområde har ment å finne de første spirer til

begreper som tallegeme og dermed beslektede begrepsdannelser. (jfr. Bell [9] s. 214).

Abel står i disse arbeider som den nærmeste og mest direkte forløper for Galois. Det er foruten hele tankegangen i den ovenfor nevnte avhandling om de Abelske ligninger særlig Abels nye og fruktbare definisjon av en lignings irreduktibilitet og hans anvendelse av den størrelse som senere er blitt kalt Galois' resolvent, som har hatt betydning for Galois' arbeider (jfr. Sylow [2]). Det er på det rene at Galois har studert Abel, som er en af de få forfattere som han citerer. Men Galois nådde gjennom det gruppeteoretiske synspunkt som det lykkedes ham å gjennomføre, ennå langt videre enn Abel, og det er intet som tyder på at Abel har sett ligningsteorien fra et så høyt liggende utsiktspunkt som Galois.

Tiden fra Abel i 1824, 21 år gammel, gjennomførte sitt umulighetsbevis og til 1832, da Galois døde 20 år gammel, er en helt enestående periode når det gjelder ligningsteoriens utvikling. I disse otte år gjorde denne teori større fremskritt enn i alle tidligere århundreder, og også større enn i tiden fra 1832 og til idag.

Det bør fremheves at det ikke er bare gjennom de arbeider som er nevnt ovenfor, at Abels algebraiske interesser kommer til syne. Hans algebraiske synspunkter og metoder spiller en vesentlig rolle også i flere av hans viktigste arbeider fra andre områder enn ligningsteorien, særlig da i beviset for det store Abelske teorem og i hans undersøkelser over de elliptiske funksjoner.

De arbeider Abel hadde offentliggjort for umulighetsbeviset av 1824, ble lenge ansett for å være mindre betydelige. Først trekvart århundrede senere ble man oppmerksom på at et av dem var endog meget betydelig. Det var en avhandling som var blitt trykt på norsk i »Magazin for Naturvidenskaberne« i 1823. Den viktigste del av denne avhandling ble trykt opp igjen på tysk i 1. bind av Crelles Journal. Abel løser her en integral-ligning, og det var først gjennom Fredholms og Volterras oppdagelser omkring år 1900, at betydningen av Abels arbeide ble klar. Ikke så å forstå at Abel hadde utviklet den moderne teori for integralligninger. Men som et eksempel på eftertidens dom kan nevnes at den amerikanske matematikk-historiker E. T. Bell sier [9] s. 524—25: »It is customary to attribute the origin of integral equations as a distinct department of analysis to Abel's solution« »no analyst before Abel recognized that integral equations presented a basically novel problem in analysis.« Abel rakk imidlertid ikke å ta opp dette emne igjen.

En meget stor del av Abels produksjon gjelder integralregningen, dette uttrykk tatt i en nokså omfattende betydning. Det dreier seg særlig om tre grupper av problemer:

- 1) Å bestemme for hvilke funksjoner $f(x)$ integralet $\int f(x)dx$ kan uttrykkes i endelig form ved hjelp av visse klasser av funksjoner, nemlig ved rasjonale, eksplisitt algebraiske, eksponentielle og logaritmiske funksjoner (herunder kombinasjoner av et endelig antall av de operasjoner som karakteriserer de nevnte funksjonsklasser). Disse funksjoner betegnes som elementære funksjoner.
- 2) Å finne relasjoner mellom summer av bestemte integraler av samme form, idet man undersøker hvilken forbindelse som må finne sted mellom integralenes grenser for at de nevnte relasjoner skal bestå.
- 3) Integralenes omvendingsproblem d. v. s. å studere $x = \varphi(u)$ når $u = \int_a^x f(t)dt$. Istedetfor å betrakte det bestemte integral som en funksjon av integralets øvre grense skal man altså betrakte integralets øvre grense som en funksjon av integralets verdi og klarlegge denne funksjonssammenheng. (Dette problem kan vel snarere sies å tilhøre funksjonsteorien enn integralregningen).

De to første problemgrupper hadde matematikerne tatt fatt på allerede på 1600-tallet i differensial- og integralregningens første tid. Omvendingsproblemet derimot ble først fremlagt av Abel. Før ham var det ikke andre enn Gauss som for alvor hadde gitt seg i kast med det, og Gauss hadde intet offentliggjort om disse undersøkelser.

Abel erkjente i høyere grad enn noen tidligere matematiker, at det fantes dyptgående forbindelser mellom disse tre problemgrupper, og denne erkjennelse var av vesentlig betydning for de store oppdagelser han her gjorde. Han innså at disse problemer grep inn i hverandre, slik at undersøkelser på et av disse områder kunne finne støtte i resultater fra et annet. Han førte derfor disse undersøkelser frem samtidig, hvilket særlig kommer til uttrykk i det siste store, men dessverre ufullførte, arbeide han fikk offentliggjort »Précis d'une théorie des fonctions elliptiques«, trykt kort tid efter hans død.

Hva det første problem angår, så hadde man lenge før Abels tid nådd så langt at man kunne integrere de funksjonsklasser hvis integraler alltid lar seg uttrykke ved elementære funksjoner. Man var også klar over at integraler av algebraiske funksjoner i alminnelighet ikke kunne uttrykkes på denne måte. Dette var dog mulig under spesielle betingelser. Abel stilte seg da som mål å bestemme hvilke betingelser som måtte være oppfylt for at integrasjonen av algebraiske differensialer skulle kunne ut-

föres ved elementære funksjoner, og det er typisk for ham at han foresatte seg å bestemme alle disse tilfeller. Selv om han ikke kunne gjennomføre hele dette program, så nådde han dog vesentlige resultater. Efter bestemte uttalelser i det nettopp nevnte siste arbeide har han dessuten på dette felt sittet inne med meget, som han ikke fikk offentliggjort, og som dessverre heller ikke hans efterlatte papirer gir noen meddelelse om.

Innenfor problemgruppe 2) forelå det för Abels tid et fundamentalt resultat, nemlig de elliptiske integralers addisjonsteorem, som var oppdaget av Euler. Ved et elliptisk integral forståes et integral av formen $\int R(x, \sqrt{f(x)}) dx$, hvor R er en rasjonal funksjon og $f(x)$ et polynom i x av 3. eller 4. grad. Navnet er en historisk tilfældighet, det skriver seg fra at ellipsens buelengde uttrykkes ved et slikt integral. Et elliptisk integral kan i alminnelighet ikke uttrykkes ved elementære funksjoner. Matematikerne stillet seg da den oppgave å undersøke om grensene i to bestemte elliptiske integraler av samme form kunne fikseres slik at summen (eller differansen) av de to integraler fikk et elementært uttrykk. Efter at en rekke forskere hadde arbeidet med slike og lignende problemer kom Euler frem til sitt addisjonsteorem, som kan skrives på følgende form:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

hvor

$$z = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}.$$

Resultatet er altså at summen av to elliptiske integraler av samme form kan uttrykkes ved bare ett integral, hvis det siste integrals grense avhenger algebraisk som ovenfor angitt, av de to første integralers grenser. Herav følger videre at summen av et vilkårlig antall slike integraler er lik et eneste integral hvis grense kan uttrykkes algebraisk ved grensene for integralene i summen. (Alle elliptiske integraler kan ved variabeltransformasjoner overføres til tre normalformer. I alle tre har kvadratroten den form som ovenfor er brukt. Ovenfor er gjengitt addisjonsteoremet for de såkalte integraler av første slags. Euler fant også tilsvarende addisjonsteoremer for elliptiske integraler av annen og tredje slags).

Den oppdagelse som av mange regnes som Abels ypperste, det store Abelske teorem som det ofte kalles, er en meget vidtgående generalisering av Eulers addisjonsteorem. Også Abel behandler her integraler av formen $\int R(x, y) dx$ hvor R er en rasjonal funksjon av x og y , men istedenfor som Euler å gå ut fra at y er bestemt ved ligningen $y^2 = f(x)$ hvor f er et polynom i x av 3. eller 4. grad, lar Abel y være definert ved en alminnelig

algebraisk ligning $F(x, y) = 0$, som er av n te grad i y og hvor koeffisientene for de forskjellige potenser av y er hele rasjonale funksjoner av x . Når y er bestemt på denne måte har man senere kalt integralet $\int R(x, y)dx$ for et Abelsk integral. Det Abelske teorem sier da, kort gjengitt, at integralgrensene kan bestemmes slik at en sum av Abelske integraler kan uttrykkes ved elementære funksjoner nærmere bestemt ved algebraisk-logaritmiske funksjoner.

$$\int_{x_1}^{x_1} R(x, y)dx + \dots + \int_{x_r}^{x_r} R(x, y)dx + \int_{x_{r+1}}^{x_{r+1}} R(x, y)dx + \dots + \int_{x_{r+\mu}}^{x_{r+\mu}} R(x, y)dx =$$

algebr.-logaritmisk funksjon av grensene $x_1, x_2, \dots, x_{r+\mu}$.

De nedre grenser betraktes som konstanter og angis ikke her. De øvre grenser $x_1, \dots, x_{r+\mu}$ tilfredsstiller visse algebraiske relasjoner. Abel stiller videre det spørsmål hvor mange av disse øvre grenser som er bestemt ved de øvrige, og kommer til det overmåde viktige resultat at dette tall ikke avhenger av antall integraler i summen, men bare av ligningen $F(x, y) = 0$. Dette minste antall avhengige integraler er ovenfor betegnet med μ , og vi kan da skrive

$$\sum_{v=1}^{v=r} \int_{x_v}^{x_v} R(x, y)dx = - \sum_{v=1}^{v=\mu} \int_{x_{r+v}}^{x_{r+v}} R(x, y)dx +$$

algebr.-logaritm. funksjon av $(x_1, x_2, \dots, x_{r+\mu})$.

Tallet μ avhenger altså ikke av r , som kan velges vilkårlig, slik at summen av et hvilket som helst antall integraler kan uttrykkes ved summen av et bestemt antall integraler + elementære funksjoner. For de elliptiske integraler er etter Eulers addisjonsteorem $\mu = 1$. Tallet μ har man senere kalt integralets slekt eller også den slekt som karakteriserer kurven $F(x, y) = 0$. Dette slektsbegrep har vist seg å være av fundamental betydning i de algebraiske funksjoners teori.

Det Abelske teorem er av overmåde stor rekkevidde. Jacobi karakteriserer det i 1832 i følgende ord: »Wir halten es, wie es in einfacher Gestalt ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspricht, für die grösste mathematische Entdeckung unserer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte, grosse Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen kann.«

Ofte Mittag-Leffler skriver i sin Abelbiografi [6], [7] at det Abelske teorem fremdeles, hundrede år etter Abels fødsel, betegner høydepunktet i matematikkens utvikling.

Det fremgår av Abels etterlatte papirer at han har funnet sitt store teorem i studietiden i Christiania før utenlandsreisen. Også hovedlinjen i

beviset, som er av rent algebraisk natur, foreligger i hans opptegnelser fra denne tid. Han arbeidet videre med disse problemer under sin reise, og straks etter ankomsten til Paris i juli 1826 tar han fatt på redaksjonen av en stor avhandling, som han ville forelegge for Académie des Sciences (Institut de France), og som skulle gi en inngående fremstilling både av addisjonsteoremet i sin generelle form og av en rekke spesialtilfeller som skulle vise dets slagkraft overfor de klasser av algebraiske funksjoner som matematikerne hittil hadde beskjeftiget seg med. Abel la meget arbeide på denne avhandling, og vi har flere vidnesbyrd om at han selv var fornøyet med resultatet. Han viste personlig avhandlingen til Cauchy, »men han vilde neppe kaste Öjnene paa den. Og jeg tør uden Bram sige at den er god. Jeg er nysgjerrig efter at høre Institutets Dom« (brev til Holmboe av 24. oktober 1826). Avhandlingen ble også fremlagt for Akademiet den 30. oktober 1826 og Legendre og Cauchy ble oppnevnt til å bedømme den.

Når Abel nu hadde fått fremlagt denne avhandling for datidens mest høytstående videnskapelige forum, så kunne han håpe at han derved skulle vinne en seier av avgjørende betydning for sin fremtid. Han hadde iallfall gode grunner til å tro og håpe det. Det er neppe noen annen avhandling i matematikkens historie som av eftertiden har vært i den grad overhopet med superlativer som denne Abels Pariser-avhandling. Et par eksempler: »eine der grossartigsten mathematischen Abhandlungen, die je geschrieben wurden« (Krazer [15]). »Il n'y a peut-être pas, dans l'histoire de la Science, de proposition aussi importante obtenue à l'aide de considérations aussi simples.« (Picard [16] s. 437).

Men det gikk ikke som han ventet. Istedenfor en seier kom denne avhandling på grunn av en rekke sørgelige tilfældigheter til å betegne Abels største og smerteligste nederlag. Cauchy var opptatt med sine egne epokegjørende arbeider, og Abels avhandling ble liggende ulest. I de siste dager av desember 1826 måtte Abel forlate Paris uten å ha hørt et ord om sin store avhandling. Etter et nytt opphold i Berlin kom han i mai 1827 hjem til Norge (jfr. foran).

Abel rettet aldri noen direkte henvendelse til Akademiet i Paris for å få rede på hva det var blitt gjort med hans avhandling, men høsten 1828 sendte han til Crelles Journal en avhandling som behandlet et viktig spesialtilfelle av det Abelske teorem, nemlig det såkalte hyperelliptiske tilfelle hvor ligningen $F(x, y) = 0$ har formen $y^2 = f(x)$ hvor $f(x)$ er et polynom i x av n te grad. Det var som nevnt kjent gjennom Eulers addisjonsteorem at hvis $n = 3$ eller 4 , så er slekten $\mu = 1$. Abel viste nu at hvis $n = 5$ eller 6 så er $\mu = 2$, for $n = 7$ eller 8 er $\mu = 3$ o. s. v.

I innledningen til denne avhandling som ble trykt i desember 1828,

uttaler Abel også det generelle teorem og nevner at han i 1826 har innlevert en avhandling om dette til Akademiet i Paris. Avhandlingen av desember 1828 vakte straks stor oppsikt. Legendre gir i januar 1829 i et brev til Abel uttrykk for sin store begeistring uten å være oppmerksom på at dette spesialtilfelle (det hyperelliptiske) også var behandlet i Pariseravhandlingen som fremdeles lå ulest hos Cauchy. Og Jacobi skriver i mars 1829 til Legendre og spør hvordan i all verden en slik avhandling har kunnet bli oversatt av Akademiet. Jacobis brev førte til at avhandlingen ble funnet frem igjen og det ble avgitt en hastverksuttalelse om den i juni 1829. (Abel var død i april). Derefter kom avhandlingen igjen på avveier, og den ble først trykt i 1841, hvorpå manuskriptet forsvant, — for alltid trodde man. (Angående nærmere enkeltheter henviser jeg til min avhandling [13].) Hösten 1952 hendte så det overraskende at Viggo Brun fant det aller meste av originalmanuskriptet til Pariseravhandlingen i et manuskriptbibliotek i Firenze [11], [12].

Men Abel vendte enda engang tilbake til sitt store teorem. Julen 1828 reiste han til Froland hovedgård for å tilbringe ferien sammen med sin forlovede som var guvernante der. Den 6. januar 1829, »et datum mera minnesvärdt i kulturens historia än konungars och kejsares och enskilda länders märkesdagar» (Mittag-Leffler [6]) skrev han en liten avhandling hvor han på snaue to sider gir beviset for den første store hovedsats i Pariser-avhandlingen. Avhandlingen ble trykt hos Crelle en ukes tid før Abels død. Det er den siste avhandling Abel rakk å skrive.

*

Innenfor den problemgruppe 3 som foran er betegnet som integrale-nes omvendingsproblem gjorde Abel en oppdagelse som fikk en både vidtrekkende og dyptgående innflytelse på hele ettertidens matematiske utvikling, nemlig oppdagelsen av de elliptiske funksjoner.

Eulers addisjonsteorem for de elliptiske integraler er anført foran. Euler var selv fullt oppmerksom på det spesialtilfelle som fremkommer ved å sette $k = 0$:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Hvis vi kaller det første integral for u , det annet for v og det tredje for w , så får vi ved å anvende omvendingen på disse integraler:

$$x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad z = \sin w$$

og addisjonsteoremet gir i dette tilfelle bare den bekjente sats at hvis

$$u + v = w$$

så er

$$\sin w = \sin u \sqrt{1 - \sin^2 v} + \sin v \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sin u \cos v + \cos u \sin v.$$

Spesialtilfellet viser hvor enkel sammenhengen blir når vi her gjennomfører omvendingen og altså betrakter integralets øvre grense som funksjon av integralets verdi istedenfor å betrakte integralets verdi som en funksjon av den øvre grense.

Det er bemerkelsesverdig at hverken Euler eller hans nærmeste efterfølgere, av hvilke særlig må nevnes Legendre, forsøkte å anvende den samme tankegang på de elliptiske integraler ($k \neq 0$).

Formentlig tilskyndet av Degens profetiske råd kastet Abel seg over studiet av de elliptiske integraler, særlig Legendres arbeider over samme. Senest i første del av 1823 hadde han funnet frem til omvendingen som nettopp var den »maghellanske gjennomfart«, som Degen hadde forutsett uten å ane hvor den lå, og han styrte snart for full fart inn i det nyoppdagede analytiske ocean. »Mit dem Blicke des Genies erfasste dieser (Abel) sogleich im Beginne seiner wissenschaftlichen Laufbahn den Gedanken der Umkehrung des elliptischen Integrals, an dem Euler und Legendre, beide während der Arbeit eines Menschenalters, vorübergegangen waren. Er stellte sich die Aufgabe, nachdem man doch die Analogie dieses Integrals mit dem Arcussinus immer wieder betont hatte, endlich auch das Analogon des Sinus zu schaffen.« (Krazer [15]). Han fant at når det elliptiske integrals øvre grense betraktes som en funksjon av integralets verdi, så kommer man frem til en funksjonsklasse med særdeles bemerkelsesverdige egenskaper. Mens omvending av integralene $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ og $\int_1^x \frac{dt}{t}$

fører til enkeltperiodiske hele transcendente funksjoner, så er de omvendte funksjoner av de elliptiske integraler dobbeltperiodiske funksjoner, men de er ikke hele funksjoner, idet de i hvert periodeparallelogram har poler (hvor funksjonsverdien blir uendelig). Disse elliptiske funksjoner som ettertiden har kalt dem, er dobbeltperiodiske, meromorfe funksjoner.

Allerede før utenlandsreisen har Abel funnet de elliptiske funksjoners fundamentalegenskap, den dobbelte periodisitet. Under oppholdet i utlandet gjorde han en rekke nye oppdagelser om de elliptiske funksjoner (jfr. Abels brever i [2]). I Paris har han høyst sannsynlig studert Cauchys berømte avhandling av 1825 om integrasjonsveier i de komplekse tallsplan, og han har herved lært meget som kom ham til nytte for de elliptiske funksjoners teori, selvom hverken Abel eller hans nærmeste efterfølgere våget å legge Cauchys nye teori til grunn for sin fremstilling.

I september 1827 utkom første del av Abels avhandling »Recherches sur les fonctions elliptiques« i Crelles Journal. Det var en stor avhandling, den første del opptar 90 sider i Abels samlede verker [1], og avslutningen som ble trykt i mai 1828, 26 sider. »Es ist dies die grosse Fundamentalpublikation, mit der für das mathematische Publikum, da Gauss ja seine Resultate zurückgehalten hatte, die Theorie der elliptischen Funktionen — in Gegensatz zu Legendres Theorie der elliptischen Integrale — beginnt« (Klein [8]). Abel meddeler straks i begynnelsen at avhandlingene skal behandle de omvendte funksjoner. Han utvikler addisjonsteoremene for disse og beviser ved hjelp herav den dobbelte periodisitet. Han bestemmer så funksjonenes nullpunkter og poler. Derpå behandler han det såkalte multiplikasjonsproblem, idet han viser at hvis $x = \varphi(\alpha)$ er en elliptisk funksjon av α (x er integralets øvre grense, α integralets verdi), så kan $\varphi(m\alpha)$ uttrykkes rasjonalt ved $\varphi(\alpha)$ og to elliptiske hjelpfunksjoner (m helt rasjonalt tall). Så behandles divisjonsproblemet som består i å bestemme $\varphi(\alpha)$ ved hjelp av $\varphi(m\alpha)$. Dette problem fører til meget interessante algebraiske resultater, idet Abel her finner klasser av algebraisk løselige ligninger av n te grad. Ut fra sin forkjærlighet for ligningsteorien erklærer Abel at denne side av undersøkelsene har hans særlige interesse. I tilknytning til disse algebraiske undersøkelser meddeler han sin berømte sats om lemniskatens deling, en fullstendig analogi til Gauss' resultater for sirkelen. Endelig følger utviklingen av de elliptiske funksjoner i uendelige produkter og rekker. I denne siste forbindelse innfører Abel de funksjoner som senere under navn av thetafunksjoner ble gjort til gjenstand for inngående undersøkelser av Jacobi, og som med andre betegnelser og i en noe annen form av ham ble brukt som grunnvoll for teorien.

Allerede i første del var det lagt et fullstendig grunnlag for hele den senere utvikling av de elliptiske funksjoner, selv om den såkalte transformasjonsteori for de elliptiske integraler (hvorom senere) først kom i annen del. Det er også her den dobbelte periodisitet som gir nøkkelen. I annen del behandler Abel også den såkalte komplekse multiplikasjon (jfr. [17] og [18]). Det er nevnt foran at $\varphi(m\alpha)$ kan uttrykkes rasjonalt ved $\varphi(\alpha)$ hvis m er hel rasjonal. Abel viste at det også finnes hele komplekse tall k slik at $\varphi(k\alpha)$ kan uttrykkes rasjonalt ved $\varphi(\alpha)$ og at k i så fall må tilhøre hva vi idag kaller et kvadratisk-imaginært tallegeme. Abels oppdagelser i forbindelse med denne komplekse multiplikasjon har ført til vesentlige resultater i algebra og tallteori, og spesialister på disse felter betegner disse oppdagelser som høydepunktet i hans produksjon (jfr. Fuetter [19]).

De elliptiske funksjoner og de mangfoldige teorier som — på de forskjellige områder av matematikken — tok sitt utspring fra denne kilde,

har hatt en enorm betydning for hele det 19. århundredes matematiske utvikling. Virkningene har vært meget store i funksjonsteori, algebra, tallteori, gruppeteori og analytisk geometri, og de elliptiske funksjoner har også funnet fruktbare anvendelser i mekanikken og i andre grener av den anvendte matematikk. Det er meget forståelig at den tyske matematiker Richelot for over hundrede år siden betegnet de oppgaver som de elliptiske funksjoner stilte den matematiske videnskap overfor, som »die Aufgaben welche diesem Jahrhundert zur Lösung anheimfielen«. Som et eksempel på vår egen samtids dom kan nevnes Bells uttalelse ([9] s. 395): »Abel revolutionized the subject, and at the same time opened the floodgates of nineteenth-century analysis, in 1827. . . .«.

Foruten fundamentalpublikasjonen »Recherches. . . « fikk Abel skrevet enda syv større eller mindre avhandlinger om de elliptiske funksjoner. De seks ble offentliggjort før hans død, den syvende var den for omtalte, ufullførte »Précis. . . «. Denne overordentlige arbeidsinnsats hadde imidlertid også en ytre foranledning, nemlig den såkaldte kappestrid mellom Abel og Jacobi. Denne kappestrid, »der für jeden Mathematiker ein unvergleichliches Interesse bietet« (Klein [8]), betegner en dramatisk og ofte omtalt episode i matematikkens historie. Men til tross for den citerte uttalelse av Klein er det neppe mange som har studert kappestridens forløp i detaljer.

Carl Gustav Jacob Jacobi var født 10. desember 1804, og han var altså to år yngre enn Abel. Han var fra 1826 privatdosent ved universitetet i Königsberg og ble i januar 1828 professor der. Han var medarbeider i Crelles Journal fra sommeren 1826. Han offentliggjorde fra høsten 1827 til våren 1829 en rekke korte avhandlinger om elliptiske integraler og elliptiske funksjoner. For det meste ble det i disse arbeider bare fremsatt satser uten bevis. Bevisene kom i Jacobis berømte lærebok »Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum« som ble ferdigtrykt i mai 1829, og som i mange år var den mest benyttede lærebok i dette emne ved Europas universiteter. Jacobi døde i 1851. Han var en av sin tids toneangivende matematikere, og han gjorde en fremragende innsats på mange forskjellige områder av matematikken.

Det oppstod etterhvert den tradisjon at Abel og Jacobi hver for seg og uavhengig av hverandre hadde oppdaget de elliptiske funksjoner og alle deres viktigste egenskaper, og at deres arbeider i 1827—29 i stadig vekselvirkning hadde skapt den nye teori, idet de gjensidig hadde kunnet støtte seg på hverandres arbeider. Denne oppfatning av kappestridens forløp har dog tydeligvis hatt sine motstandere, for da Jacobis elev Borchardt i 1875 offentliggjorde en meget interessant brevveksling mellom Jacobi og Legendre i Crelles Journal protesterte han i en innledning heftig

mot »une grave erreur historique« som holdt på å spre seg, idet det var blitt hevdet at det var Abel alene som hadde oppdagerretten. Borchardt finner derfor grunn til å gjenta påstanden om de to konkurrenters uavhengighet og jevnbyrdighet. En av dem som ikke var enig i dette var Mittag-Leffler (jfr. [6], [7]), og han skrev i den anledning til C. A. Bjerknes, som i første omgang var enig med Borchardt, men som etter mere inngående studier kom til det resultat at den tradisjonelle oppfatning gjorde Abel stor urett. Bjerknes behandler kappestriden inngående i sin Abel-biografi [3], og han går her lenger enn Mittag-Leffler, idet han beskylder Jacobi for å ha benyttet seg av resultatene i første del av Abels »Recherches« uten å medgi dette faktum. Beskyldningen ble gjentatt i den franske utgave av Bjerknes' bok [4], som fremkalte indignerte protester, spesielt fra tysk og fransk hold. Det ble bebudet at det skulle komme inngående imøtegåelser av Bjerknes' fremstilling av kappestriden mellom Abel og Jacobi. Det er ikke blitt stort av disse imøtegåelser, til tross for at de fleste matematikere har kviet seg ved å godta Bjerknes' påstand for så vidt sakens moralske side angår.

Første del av Abels »Recherches« (jfr. foran) utkom 20. sept. 1827. Praktisk talt samtidig kom et hefte av »Astronomische Nachrichten« (redigert av Schumacher) som inneholdt to brever (til S.), datert 13. juni og 2. august 1827, fra Jacobi, og hvor denne uten bevis fremsetter en vidtgående sats om de elliptiske integralers transformasjon. Denne transformasjonsteori går ut på ved en rasjonal variabelsubstitusjon $y = f(x)$ å transformere et elliptisk integral til et annet av nøyaktig samme form, men med en annen verdi av den såkalte modul k (se formlene i Eulers addisjonsteorem foran). En slik transformasjon (fremsatt av engelsmannen Landen) var kjent allerede fra 1775. Den ble gjerne fremstillet i trigonometrisk form, men den svarer, som Jacobi har gjort oppmerksom på, til en rasjonal transformasjon av 2. grad. Legendre interesserte seg sterkt for transformasjonsteorien, særlig fordi den kom til nytte ved den numeriske beregning av elliptiske integraler, og Legendre hadde nylig til sin store glede funnet en ny rasjonal transformasjon av 3. grad, men dette siste funn kjente Jacobi ikke til, da han sendte sine brever til »Astronomische Nachrichten«. Han uttaler her den viktige sats at det finnes rasjonale substitusjoner av en hvilketsomhelst heltallig grad n , ved hvilke et elliptisk integral overføres til et annet av samme form. Den 5. aug. 1827 skriver Jacobi et brev til Legendre, hvor han meddeler både den nevnte sats og en annen sats av lignende art (det såkaldte komplementære teorem) og viser hvorledes de nye satser kan nyttiggjøres til numeriske beregninger. Brevene til Schumacher og Legendre beveger seg helt i den eldre teoris tankebaner, idet de bare taler om elliptiske integraler og ikke

inneholder noe som helst om det vi kaller elliptiske funksjoner, d. v. s. de omvendte funksjoner av integralene.

Legendre ble henrykt over Jacobis resultater, ikke minst fordi de falt helt innenfor rammen av Legendres egen teori og ikke betegnet noe brudd med Legendres egen tankegang. Han fremla dem i Académie des Sciences i november 1827 og ledsaget dem med de sterkeste lovord, som også fant veien til dagspressen, og som med et slag gjorde Jacobi så berømt som en matematiker kan bli i denne verden.

I september forelå altså de nevnte to samtidige publikasjoner. Dermed begynner kappestriden mellom Abel og Jacobi, — eller rettere sagt, dermed er den i virkeligheten avgjort.

Efter Jacobis brev av 12. april 1828 til Legendre er det på det rene at han da han 5. aug. 1827 skrev sitt brev til Legendre, ikke hadde funnet noe bevis for sine transformasjonssetninger. Han vendte seg nu først til andre emner og skrev i august tre avhandlinger som ikke hadde noe med elliptiske funksjoner å gjøre.

Schumacher var ikke begeistret over nakne satser uten bevis, og 5. november skriver han til Jacobi med en inntrengende anmodning om å sende beviset. Jacobi daterer så 18. november 1827 en avhandling som bringer beviset, og som kom i »Astronomische Nachrichten« i januar 1828. Her innfører nu også Jacobi den omvendte funksjon av det elliptiske integral. Han bruker andre betegnelser enn Abel, idet han betegner den omvendte funksjon med sinam u , en betegnelse som ble dominerende helt til slutten av århundredet. Forøvrig legger han ikke særlig vekt på de omvendte funksjoner. De annonseres med ordene: »Notatione nova simplicioreque abhinc utar«. (Jeg vil herefter benytte en ny, enklere betegnelse). Han viser at sinam u er enkeltperiodisk, men den dobbelte periodisitet, som særlig karakteriserer de elliptiske funksjoner i motsetning til de trigonometriske, forekommer ikke. Det finnes ingen henvisning til Abels arbeide.

Det er særlig i det begivenhetsforløp som her er skildret at Bjerknæs fant grunnlag for sin beskyldning mot Jacobi. Han fant det utenkelig at ikke Jacobi skulle ha sett Recherches i god tid før 18. november. Det hefte av Crelles Journal hvor Recherches stod, inneholdt nemlig også en avhandling av Jacobi, som dessuten hadde flere andre avhandlinger liggende til trykning hos Crelle, og som derfor måtte være spent på hvert nytt hefte. Da Jacobi på denne tid strevet med å finne beviset for sine transformasjonssetninger, måtte han være meget interessert i enhver ny avhandling om elliptiske integraler og funksjoner, mente Bjerknæs. Bjerknæs visste ikke når Recherches kom til Königsberg, men han antok at vedkommende hefte måtte ha kommit dit senest en måned før Jacobi

18. november daterte sitt bevis. Ved en pussig tilfældighet vet vi nu at Recherches er kommet til Königsberg adskillig før Bjerknes antok. I sin Jacobi-biografi [20] meddeler Koenigsberger nemlig at universitetsbiblioteket i Königsberg i et brev av 4. oktober 1827 klager til Crelles Journal over at det siste hefte er sendt med posten, hvilket har påført biblioteket en portoutgift på en Thaler, og dette ansees overflødig, »da gar keine Eile nötig ist«. Koenigsberger tilføyer i direkte forbindelse hermed: »Zunächst ging dieses Heft aber an Bessel, der erst nach einiger Zeit Jacobi davon Mitteilung macht: »Es ist ein neues Heft des Crelleschen Journals angekommen (B. 2, H. 2) mit einer Abhandlung über elliptische Transcendenten von Abel. Sie werden mir am besten sagen können, ob der Gesichtspunkt unter welchem er sie ansieht, interessant ist.« Denne Bessels meddelelse er iallfall interessant. For det første viser ordene »erst nach einiger Zeit« at Koenigsberger har visst *når* Jacobi fikk meddelelsen. Da Koenigsberger hevder Jacobis uavhengighet av Abel, ville han sikkert ha oppgitt tidspunktet hvis det hadde ligget meget nær for 18. november eller efter denne datum. Jacobi har derfor formentlig fått meldingen i god tid før. For det annet er den siste setningen om »der Gesichtspunkt unter welchem er sie ansieht« av betydelig interesse. Det er ikke godt å forstå at det her kan siktes til annet enn »omvendingen«. Det var jo den som betegner det nye synspunkt i Recherches. Nu fremhever Koenigsberger gang på gang det nære, daglige personlige samarbeide mellom Jacobi og Bessel, han taler bl. a. om »der über den Gang der Untersuchungen Jacobis genau unterrichtete Bessel«. Det er vel da ikke for dristig å slutte av den citerte meddelelse fra Bessel til Jacobi at hvis Jacobi på det tidspunkt skulle ha gjennomført omvendingen og oppdaget en klasse dobbeltperiodiske funksjoner, så har han iallfall ikke nevnt noe om det til Bessel, hvilket er påfallende. Bessel hadde f. eks. fått skriftlig meddelelse om Jacobis transformasjonssetning, før den ble sendt til Schumacher. Koenigsberger påstår ikke at Jacobi ikke i forbindelse med Bessels meddelelse har sett Recherches, men tilføyer mere forsiktig: »Zu einem wirklichen Studium der recherches wird Jacobi nach allem was wir wissen wohl kaum vor Ende des Jahres gekommen sein.«

Den siste antagelse er neppe riktig. Det foreligger nemlig et brev av 12. januar 1828 fra Jacobi til Legendre, og brevet viser at han på det tidspunkt har gjennomarbeidet hele den utkomne del av Recherches meget grundig og at han har omskrevet Abels resultater til sin egen betegnelsesmåte. Den største del av brevet består i et referat av Recherches. Han nevner blant meget annet Abels funn av den dobbelte periodisitet uten med et ord å antyde at Jacobi på sin side hadde innført de omvendte funksjoner og funnet periodisiteten. Jacobis avhandling av 18. november,

hvor han selv innfører de omvendte funksjoner, var på det tidspunkt ennå ikke utsendt. Han bebuder denne avhandling i brevet til Legendre uten å gi noen detaljer om dens innhold og uten å hevde at det bevis som der er gitt, er funnet uten kjennskap til Recherches. Det er i det hele tatt en besynderlig motstrid mellom brevet av 12. januar 1828 og enkelte senere uttalelser av Jacobi. Det er riktignok først flere år senere (i 1832) at Jacobi uttrykkelig sier at også han har funnet den dobbelte periodisitet. Han sier det ikke i sine arbeider fra årene 1827–29, og i det nettopp nevnte brev tillegger han altså uten reservasjoner Abel æren for denne oppdagelse.

Da Legendre kort etter mottok Jacobis avhandling av 18. november 1827 oppdaget han at beviset for det såkalte komplementære teorem ennå manglet. Etter en tid purret han Jacobi etter dette bevis. Dette Legendres brev kryssedes med et brev av 12. april 1828 fra Jacobi, som der leverer beviset for det komplementære teorem ved hjelp av Abels formler fra Recherches. (»Pour démontrer ceci, il faut remonter aux formules analytiques concernant la multiplication, données la première fois par M. Abel«).

Dette står altså i et privatbrev. I Jacobis offentliggjorte arbeider gis ingen direkte henvisning til Abel for dette bevis' vedkommende. I mellomtiden (juni 1828) hadde Legendre funnet et bevis som ikke bygget på de nevnte abelske formler. Legendre hadde lenge meget vanskelig for å sette seg inn i og for å forsone seg med Abels tankegang, som bygget helt på de omvendte funksjoner, og som derfor fjernet seg meget sterkt fra Legendres egen.

I Jacobis brev av 12. april finner man videre hans konfidensielle (»Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant«) erklæring om det heuristiske resonnement som førte ham til de satser som han i august 1827 meddelte Schumacher og Legendre. Også her er det uklarerheter for så vidt som han sier at han før 5. august har funnet en ligning som han i brevet av 12. januar 1828 hadde betegnet som »théorème fondamental de M. Abel«. Uoverensstemmelsen forklares kanskje lettest ved å anta med Bjerknes at det dreier seg om det samme resultat skrevet på to helt forskjellige måter, først med direkte, men etter Recherches med »omvendte« betegnelser. I så fall gir uttalelsen ingen opplysning om når Jacobi innførte omvendingen. At bevisene først er funnet senere sies uttrykkelig, men ikke når de ble funnet.

Abel hadde i begynnelsen av februar 1828 fullført annen del av Recherches, som inneholdt en fullstendig teori for de elliptiske integralers transformasjon med alle beviser gjennomført på grunnlag av de omvendte funksjoner og deres dobbelte periodisitet. Før avsendelsen til Crelle (12. febr. 1828) ble han oppmerksom på Jacobis transformasjonssats fra sep-

tember 1827. Den gjorde ikke større inntrykk på ham, og han nøyet seg med å føye til en efterskrift, hvor han peker på at Jacobis sats er inneholdt som spesialtilfelle i en av hans egne formler i den nettopp fullførte avhandling, hvorpå han gjennomfører beviset i detalj også i den spesielle form som Jacobi uten bevis hadde gitt denne sats. Annen del av Recherches med denne tilføyelse ble som nevnt trykt i mai 1828.

Et ganske annet inntrykk gjorde Jacobis før nevnte avhandling av 18. november 1827, som ikke kom Abel i hende før i april. Postgangen til Norge om vinteren var i de tider meget langsom. Det har tydeligvis berørt Abel sterkt at denne Jacobis avhandling innfører omvendings-tanken uten å nevne Recherches som dog hadde foreligget for offentligheten to måneder før Jacobis avhandling ble avsendt og 3—4 måneder før den ble trykt. Abel reiste imidlertid ingen prioritetsstrid. Han nøyet seg med å skrive en stor avhandling hvor han betraktet hele transformasjonsteorien fra et langt mere generelt og høytliggende synspunkt enn Jacobi hadde anlagt, og denne avhandling (datert 27. mai 1828) sendte han til »Astronomische Nachrichten« hvor den utkom i juni eller juli 1828. Abel ytret aldri et nedsettende ord om Jacobi, men at han har tenkt sitt kan man se av at han i et brev til Holmboe betegner avhandlingen som »min dødelse af Jacobi«. Dødelse er et selvlaget jargonuttrykk, »was im Memorial [2] mit »exécution«, von Bjerknæs [4] mit »mortification« über-
setzt wird, und wofür wir im Deutschen wohl »Abschlachtung« sagen würden« (Krazer [15], note 27). Denne avhandling ble fra alle sider betegnet som et virkelig mesterverk, og Jacobi skriver om den i et brev til Legendre: »Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux«. Abel skrev som nevnt enda en rekke viktige arbeider om de elliptiske funksjoner. Det er betegnende at han i disse arbeider tar for seg og beviser setninger som Jacobi etterhvert fremsetter uten bevis i sine korte notiser i Crelles Journal i 1828.

For en som i dag studerer kappestridens forløp er det nærmest ubegripe-
lig at det noensinne har vært tale om jevnbyrdighet mellom Abel og Jacobi når det gjelder oppdagelsen av de elliptiske funksjoner og oppbygningen av deres teori. En slik jevnbyrdighet påstås da heller ikke lenger fra tysk side (jfr. Krazer [15] og især Faber [23] i hvilket siste verk det gis et ganske kort og efter min mening uklanderlig historisk resumé av Abels og Jacobis innsats).

Om Bjerknæs' angrep på Jacobis moral vil det vel alltid være delte meninger. Mange vil vel foretrekke Mittag-Lefflers forklaring ([6], [7]) som går ut på at Jacobi tenkte om Abels tanker og omsatte dem til sitt eget formelsprog, som avvek adskillig fra Abels, og da kjente han dem ikke lenger igjen, men trodde at de var hans egne. Det er mulig man kunne

komme spørsmålet nærmere, hvis man kunne få adgang til hele korrespondansen mellom Jacobi og Bessel og mellom Jacobi og Crelle. Men en ting kan det neppe være delte meninger om, og det er at den måten på hvilken Jacobi citerer — eller rettere sagt ikke citerer — Abel, den er iallfall høyst utilfredsstillende for å bruke et meget mildt uttrykk. Det er nevnt foran at Jacobi i den private korrespondanse med Legendre gir Abel stor honnør. Men billedet er et annet når man kommer til Jacobis offentliggjorte arbeider. Der er omtalen av Abels arbeider overordentlig sparsom på det felt det her gjelder. Et særlig drastisk eksempel er en avhandling datert 21. juli 1828 og trykt i Crelles Journal om høsten. Jacobi meddeler her — som vanlig uten bevis — en del resultater vedrørende de elliptiske funksjoner. Denne avhandling er den første hvori Jacobi direkte omtaler de elliptiske funksjoners dobbelte periodisitet, og han understreker her ganske sterkt betydningen av denne fundamentalegenskap. Abel og hans arbeider nevnes overhodet ikke i avhandlingen. På det tidspunkt har Jacobi bevislig studert både første og annen del av Recherches meget nøye og antagelig også »Solution d'un problème général. . . .« (Dødselen). Det er da helt utillatelig å unnlate å nevne den mann som hadde skapt hele teorien for de dobbeltperiodiske funksjoner og som så klart hadde vist hvilket overordentlig effektivt forskningsmiddel nettopp den dobbelte periodisitet er. Hvis Jacobi ville hevde at han uavhengig av Abel hadde funnet den dobbelte periodisitet, så burde han iallfall ha sagt det her.

Særlig uheldig er det at Abel er så helt utilstrekkelig citert også i »Fundamenta nova«, for efterat denne samlede læreboksfremstilling var utkommet var det naturlig nok forholdsvis få som søkte til Abels og Jacobis originalavhandlinger. I et brev av januar 1829 til Legendre lover Jacobi at han i første del av Fundamenta nova skal gjøre rede for hva som spesielt tilhører Abel. Dette løfte ble ikke holdt. Riktignok begynner Fundamenta nova med en hyldest til Abel, hvor det sies at Abel på en beundringsverdig måte har gjennomført en undersøkelse av de elliptiske integralers addisjon og multiplikasjon. I ordene »nostra laude majore« (som her tar sikte på første del av Recherches) gjenlyder ordene »elle est audessus de mes éloges«, men det tales i denne forbindelse ikke om de omvendte funksjoner, og henvisningen gir ikke noesomhelst inntrykk av hva Abel har utrettet. Henvisningen er i det hele tatt meget uklar og gjelder bare første del av Recherches, ingen av Abels andre fundamentale arbeider nevnes med et ord i hele verket. Senere nevnes Abel en eneste gang til, helt en passant, i forbindelse med multiplikasjonen. Men Abel nevnes overhodet ikke i forbindelse med innførelsen av de omvendte funksjoner eller ved den dobbelte periodisitet eller ved transformasjonen eller ved

utviklingen i uendelige produkter og rekker o. s. v., og denne iøynefallende mangel kompenseres ikke ved en hyldest i alminnelige vendinger i bokens første linjer.

Abel hadde mange skuffelser i sitt liv. Det er nesten en tilfredsstillelse å tenke på at han ble spart for å se Fundamenta nova som først utkom etter Abels død. Hadde han vært i sin fulle kraft kunne han nok ha hevdet sine rettigheter. Men hvis han hadde fått se Fundamenta nova på sitt dødsleie måtte det ha blitt ham en bitter skuffelse.

*

Abel gjorde en vesentlig innsats på ennå et viktig område av matematikken, nemlig læren om uendelige rekker. Han står her ved siden av Cauchy som en av grunnleggerne av den moderne rekketeori, som han beriket med nye satser, og han er samtidig en av de fremste representanter for den rensende kritikk, som i begynnelsen av det 19. århundrede gjorde seg gjeldende overfor de synsmåter som på dette felt hadde preget de fleste av det 18. århundredes matematikere.

I tiden før sin utenlandsreise hadde Abel selv behandlet uendelige rekker med adskillig lettsindighet. Han hadde bl. a. ivrig studert Euler og denne store læremester oppfordret som bekjent ikke til synderlig forsiktighet i omgangen med rekker. Abel har formentlig alt før sin reise hatt sine tvil om holdbarheten av de eldre matematikeres slutninger, for allerede i den første tid i utlandet kommer hans kritikk på dette felt i full virksomhet, bl. a. under innflytelsen av Cauchys »Analyse Algébrique« fra 1821, en bok som han tydeligvis har fått tak i kort etter ankomsten til Berlin. Men også i dette utmerkede verk fant han en feil på et ikke uvesentlig punkt.

Abel skriver i et brev til Holmboe av 16. januar 1826: »Divergente Rækker er i det Hele noget Fandenskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa. Man kan faae frem hvad man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer Jeg har i det hele faaet Öjnene op paa en meget forbausende Maneer; thi naar man undtager de allersimpleste Tilfælde for Ex: de geometriske Rækker, saa gives der i hele Mathematiken næsten ikke en eneste Række, hvis Sum er bestemt paa en stræng Maade.« I et brev til Hansteen av 29. mars 1826 hevder han et lignende synspunkt (jfr. [2]).

I 1826 skrev han så sin store avhandling om binomialrekken, som ble trykt i Crelles Journal. Om denne avhandling skriver Knopp i sin bekjente lærebok »Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen« (Berlin 1922): »Die Entdeckung der Binomialreihe durch Newton bildet einen

der grossen Marksteine in der Entwicklung der mathematischen Wissenschaften Später hat Abel diese Reihe erneut zum Gegenstand von Untersuchungen gemacht, die einen wohl gleich wichtigen Markstein in der Entwicklung der Reihentheorie bilden.«

Euler var den første som ga en gjennomført behandling av binomialrekken for reell variabel og en hvilkensomhelst reell eksponent. Cauchy utvidet undersøkelsene til kompleks variabel. Abel tok i sin avhandling skrittet fullt ut, idet han lot både den variable og eksponenten være hvilkensomhelst komplekse tall. Han løste konvergensspørsmålene fullstendig, idet han også undersøkte forholdene på konvergenscirkelen og klarla i hvilke punkter på konvergenscirkelen rekken er divergent eller konvergent og bestemte rekkens sum i de punkter på konvergenscirkelen hvor rekken konvergerer.

I en innledning til avhandlingen beviser Abel seks alminnelige setninger om uendelige rekker. Innholdet av disse meget vesentlige setninger finnes idag i alle større lærebøker om rekker. Her fremla han bl. a. den Abelske partielle summasjon som har vist seg å være et så nyttig verktøy. Videre den Abelske grenseverdisats (også kalt den Abelske kontinuitetssats) som sier at hvis en potensrekke konvergerer i et punkt (også om vedkommende punkt ligger på konvergenscirkelen), så vil rekkens sum ved radial tilnærming til nevnte punkt kontinuerlig nærme seg rekkesummen i punktet. Kontinuiteten strekker seg altså i tilfelle helt ut til konvergenscirkelen. Beviset beror i virkeligheten på at rekken er uniformt konvergent i det lukkede intervall som avsluttes i vedkommende konvergenspunkt. Begrepet uniform konvergens ble først definert og klarlagt lenge efter Abels død, men han var også her en vesentlig forløper. Videre finnes i den nevnte innledning den tidligere ikke beviste sats at selv om to rekker bare konvergerer betinget, så vil den rekke som dannes av dem ved den alminnelige produktregel, såfremt den konvergerer, ha en sum som er lik produktet av de to første rekkers summer. Beviset er en enkel og elegant anvendelse av grenseverdisatsen.

Abel fikk bare offentliggjort en eneste liten avhandling til som handlet spesielt om uendelige rekker. Det er »Note sur un mémoire de M. Olivier«, som ble trykt i Crelles Journal i begynnelsen av 1828. Avhandlingen som er på bare tre sider er et fullendt lite mesterverk, og den er dessuten meget lettlest. Noten til Olivier egner seg godt som avslutning på denne oversikt over Abels arbeider. Den gir så å si Abel i et nøtteskall, idet den også leverer en frapperende illustrasjon til en hyppig citert, prinsipiell programerklæring av Abel. Programerklæringen finnes i det efterlatte arbeide »Sur la résolution algébrique des équations« og lyder så:

» En effet on se proposait de résoudre les équations, sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pourrait bien parvenir à la résolution, quoique cela ne fût nullement certain; mais si par malheur la résolution était impossible, on aurait pu la chercher une éternité, sans la trouver. Pour parvenir infailliblement à quelque chose dans cette matière, il faut donc prendre une autre route. On doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque. Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. Par exemple, dans le calcul intégral, au lieu de chercher, à l'aide d'une espèce de tâtonnement et de divination, d'intégrer les formules différentielles, il faut plutôt chercher s'il est possible de les intégrer de telle ou telle manière. En présentant un problème de cette manière, l'énoncé même contient le germe de la solution, et montre la route qu'il faut prendre; et je crois qu'il y aura peu de cas où l'on ne parvienne à des propositions plus ou moins importantes, dans le cas même où l'on ne saurait répondre complètement à la question à cause de la complication des calculs. Ce qui a fait que cette méthode, qui est sans contredit la seule scientifique, parce qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé, a été peu usitée dans les mathématiques, c'est l'*extrême complication* à laquelle elle paraît être assujettie dans la plupart des problèmes, surtout lorsqu'ils ont une certaine généralité; mais dans beaucoup de cas cette complication n'est qu'apparente et s'évanouira dès le premier abord. J'ai traité plusieurs branches de l'analyse de cette manière, et quoique je me sois souvent proposé des problèmes qui ont surpassé mes forces, je suis néanmoins parvenu à un grand nombre de résultats généraux qui jettent un grand jour sur la nature des quantités dont la connaissance est l'objet des mathématiques. «

Olivier hadde skrevet en avhandling i Crelles Journal hvor han påstod at hvis i en rekke med reelle, positive ledd $a_0, a_1, \dots, a_n \dots, na_n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, så er rekken konvergent, og hvis $na_n \rightarrow A > 0$, så er rekken divergent. Det siste er riktig, men den første del av satsen motbeviste Abel

idet han ved en enkel regning viste at rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ er divergent.

Det var ingen tilfeldighet at Abel valgte dette eksempel. I et efterlatt arbeide »Sur les séries« som dessverre først ble offentliggjort i 2. utgave av hans verker (1881), men som er skrevet i 1827, beviser han de bekjente logaritmiske konvergenzkriterier som sier at rekken

$$\sum \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log \log n \cdot \dots \cdot (\log_m n)^{1+\alpha}}$$

er konvergent hvis $\alpha > 0$, men divergent hvis $\alpha = 0$ (senere gjenoppdaget av flere, bl. a. av Bertrand).

Det ville ikke være særlig grunn til å dvele ved Abels note til Olivier, hvis han der bare hadde nøyet seg med å arrestere en feilaktig påstand. Men nu kommer tankegangen fra den ovenfor nevnte programmerklæring frem, idet Abel stiller spørsmålet: Er det overhodet mulig å finne en

funksjon $\varphi(n)$ som er slik at hvis $\varphi(n)a_n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$ så konvergerer rekken, og hvis $\varphi(n)a_n \rightarrow A > 0$ så divergerer den? Det er et problem som unektelig synes ganske krevende, men Abel løser det med lekende letthet. Han beviser først følgende hjelpesetning:

Hvis rekken $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ er divergent, så er også rekken

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}} + \dots$$

divergent. (Denne nyttige hjelpesetning utgjør en del av den setning som i moderne lærebøker kalles Abel-Dinis sats. Resten av denne sats finnes i det vesentlige i »Sur les séries« og ble gjenoppdaget av Dini).

Derefter forutsetter Abel at det finnes en funksjon $\varphi(n)$ med de ovenfor nevnte egenskaper. I så fall må rekken $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ være divergent, for her er $\varphi(n)a_n = 1$. Videre må under samme forutsetning rekken

$$\sum \frac{\frac{1}{\varphi(n)}}{\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \dots + \frac{1}{\varphi(n-1)}}$$

være konvergent, for her går $\varphi(n)a_n$ mot 0. Men efter den ovenfor angitte hjelpesetning er også den siste rekken divergent hvis $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ er divergent. Altså finnes det ikke noen slik funksjon $\varphi(n)$.

Dette resultat er det første ledd i en lang rekke undersøkelser ut igjennom hele det 19. århundrede, undersøkelser som prøvet å gi svar på spørsmålet: Er det mulig å finne noe *generelt* kriterium til å skille mellom konvergente og divergente rekker? Først henimot år 1900 var det helt klart at svaret er nei.

Det er vel begrunnet når Abels franske biograf Pesloüan [5] skriver om noten til Olivier: »Si l'on n'a point le temps de lire l'oeuvre d'Abel, du moins peut-on méditer sur ces quelques pages; il n'en est pas qui montrent mieux sa merveilleuse lucidité d'esprit et son admirable faculté d'invention.«

REFERENSER

- [1] *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, I–II. Christiania 1881.
- [2] E. HOLST, C. STØRMER, L. SYLOW: *Festskrift ved hundredeårsjubilæet for N. H. Abels fødsel*. Kristiania 1902.

- [3] C. A. BJERKNES: *Niels Henrik Abel. En skildring af hans liv og videnskabelige virksomhed*. Stockholm 1880.
- [4] C. A. BJERKNES: *Niels Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Traduction française. Revue et considérablement augmentée par l'auteur*. Paris 1885.
- [5] CH. LUCAS DE PESLOÜAN: *N. H. Abel. Sa vie et son oeuvre*. Paris 1906.
- [6] G. MITTAG-LEFFLER: *Niels Henrik Abel*. I »Ord och Bild« 1903.
- [7] G. MITTAG-LEFFLER: *Niels Henrik Abel*. Paris 1907.
- [8] F. KLEIN: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. I. Berlin 1926.
- [9] E. T. BELL: *The development of mathematics*. Second edition. New York. London. 1945.
- [10] VIGGO BRUN: *Niels Henrik Abel*. Det kongelige norske videnskabers selskab. Forhandling. Trondheim 1952.
- [11] VIGGO BRUN: *Abels »Pariseravhandling« og funnet i Firenze*. Aftenposten 11. febr. 1953. Oslo.
- [12] VIGGO BRUN: *Abels »Pariseravhandling«*. Aftenposten. 30. mai 1953. Oslo.
- [13] FR. LANGE-NIELSEN: *Zur Geschichte des Abelschen Theorems. Das Schicksal der Pariserabhandlung*. Norsk Matematisk Tidsskrift. 1927.
- [14] FR. LANGE-NIELSEN: *Abel og Académie des Sciences i Paris*. Norsk Matematisk Tidsskrift. 1929.
- [15] A. KRAZER: *Zur Geschichte des Umkehrproblems der Integrale*. Jahresb. d. D. M. V. 18, 1909.
- [16] EMILE PICARD: *Traité d'Analyse*. II. Paris 1905.
- [17] TH. SKOLEM: *Elliptiske Funktioners komplekse Multiplikation*. Norsk Matematisk Tidsskrift. 1926.
- [18] C. STÖRMER: *Abels opdagelser*. Norsk Matematisk Tidsskrift. 1929.
- [19] R. FUETER: *Vorlesungen über die singularen Moduln und die komplekse Multiplikation der elliptischen Funktionen*. Leipzig 1924 og 1927.
- [20] LEO KOENIGSBERGER: *Carl Gustav Jacob Jacobi*. Leipzig 1904.
- [21] LEO KOENIGSBERGER: *Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—29*. Leipzig 1879.
- [22] S. GUNDELFINGER: *Über die Entdeckung der doppelten Periodicität und Jacobis Anteil daran*. Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1898.
- [23] BURKHARDT-FABER: *Elliptische Funktionen*, Berlin und Leipzig 1920.
- [24] VIGGO BRUN: *Det gjenfunne manuskript til Abels Pariseravhandling*. Nord. Mat. Tidsskr. 1953.

DET GJENFUNNE MANUSKRIFT TIL ABELS PARISAVHANDLING

VIGGO BRUN

Abels avhandling »Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes« ble fremlagt i Académie des sciences i Paris den 30. oktober 1826. Legendre og Cauchy ble oppnevnt som kommisærer. Den 29. juni 1829 avga de en rapport. Abels død var da blitt kjent i Paris. Rapporten slutter slik:

»Da forskjellige omstendigheter har forsinket fremleggelsen av denne rapport, skal vi her få bemerke at Abel har valgt å la trykke en del av sin Mémoire i Crelles journal. Dette kunne ha gitt oss anledning til å gi vår rapport som en muntlig rapport. Men vi har nylig fått underretning om at denne unge matematiker, som var så lovende og som allerede hadde ydet videnskapen så store tjenester, er avgått ved døden mens han ennå forberedte nye avhandlinger. Denne skjebnesvangre nyhet kunne få oss til å frykte at matematikerne skulle bli berøvet kjennskapet til det arbeidet som vi har foran oss.

Det er derfor vi har funnet det rimelig å foreslå for akademiet å bevare et av forfatterens hedersverk (titres de gloire) ved å innsende hans arbeid i samlingen Savants étrangers.« Den er undertegnet av Legendre og Cauchy, men var skrevet med Cauchys hånd [5].

Men denne plan kom ikke til utførelse. Først da Holmboe i sin utgave av Abels samlede verker av 1839 beklager seg over at det har vært umulig å få tak i Abels Parisavhandling bestemmer man seg i Paris til å trykke avhandlingen. Den kom inn i Savants étrangers i 1841, tolv år etter Abels død. Matematikeren Libri fikk i oppdrag å tilse trykningen. I Poggenдорfs Handwörterbuch finner man følgende notis om ham: »Libri-Carucci dalla Sommaja, Guglielmo Brutus Icilius Timoleon. — Greve, professor i matematikk i Pisa til 1830, da han som politisk flyktning forlot sitt fedreland og reiste til Paris. Der ble han 1833 naturalisert, ble snart professor i analyse ved Sorbonnen, generalinspektør ved universitetet og de offentlige biblioteker, ble medlem av videnskapsselskapet. Men lot i 1848 alle disse stillingene i stikken og flyktet til England, da han ble anklaget for tyveri av bøker og håndskrifter (til en verdi av over 500 000 fr.)

fra de offentlige biblioteker. I 1850 ble han for dette i fravær dømt til ti års tukthusstraff.»

Libri hadde forresten ennå en ærefull stilling i Paris. Han var professor ved Collège de France. Det er ganske morsomt å lese hva Lebesgue sa om Libri da han omtalte sine forgjengere i embedet ved sin tiltredelsesforelesning i 1922 i Collège de France. Lebesgue sa:

»Libri som var mere historiker enn matematiker foreleste ikke her lenger enn til 1846. I 1848 flyktet han til England. Forelesningene ble overtatt av Hermite. La oss være takknemlige overfor Libri for at han har tillatt oss å innskrive Hermites ærefulle navn blant lærerne ved dette institutt og la oss glemme den rolle Libri spilte.»

Man får si at Lebesgue her uttrykker seg med ekte fransk diskresjon.

I Savants étrangers kan man etter Abels avhandling lese følgende tilføyelse av Libri:

»Da Akademiet har gjort meg den ære å overlate til meg å overvåke trykningen av denne memoiren, har jeg beflittet meg på å rette, så meget som mulig, trykkfeilene. Men da jeg imidlertid ikke har hatt manuskriptet forhånden (*sous les yeux*) da jeg leverte korrekturarkene så kan jeg ikke smigre meg med at jeg alltid har hatt held med meg i dette. Det har forekommet meg at det enkelte steder (særlig i følgene av og de numeriske utviklinger etter ulikhetene 103) er noen unøyaktigheter i regningen, men jeg har ikke trodd meg berettiget til å forandre noe i dette smukke arbeid. Jeg har da fått Akademiets tillatelse til her å trykke denne noten, som jeg ikke kan avslutte uten ennå engang å uttrykke min beundring for denne berømte matematiker fra Christiania, hvis alt for tidlige død var så stort et tap for videnskapen.»

Da Sophus Lie og Sylow arbeidet med utgivelsen av Abels samlede verker, gjorde de store anstrengelser for å få tak i manuskriptet til Abels Parisavhandling. I en note skriver de: »Det har forekommet oss meget ønskelig å sammenligne den trykte *Mémoire* med originalen, og Sophus Lie fikk i 1874 av Académie des sciences i Paris tillatelse til å undersøke og benytte Abels manuskript, men det ble konstatert i akademiets arkiver at manuskriptet ikke hadde befunnet seg der etterat avhandlingen var trykt.»

Det har hittil vært naturlig å tro at det tapte manuskript kunne befinne seg hos en eller annen manuskriptsamler. Libri kunne jo ha solgt det. Eller det kunne — som Klein påstår i *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* — være »endgültig verloren».

Da jeg i oktober i fjor besøkte Florens spurte jeg professor Sansone om man der hadde noen literære etterlatenskaper etter Libri. Sansone

viste meg da et særtrykk av Giacomo Candidos avhandling fra 1942: Sulla mancata pubblicazione, nel 1826, della celebre Memoria di Abel.

Det fremgikk av denne at en avskrift »fatta dal Libri« av Abels avhandling med en påskrift av Legendre skulle finnes i biblioteket Moreniana i Florens. Legendres påskrift var gjengitt i Candidos bok. Den lyder slik:

»Denne Mémoire er først blitt overgitt til M. Legendre som har bladet i den, men idet han så at skriften var litet leselig og de algebraiske tegn ofte dårlig formet, oversendte han den til sin kollega M. Cauchy med oppfordring om å ta seg av rapporten. M. Cauchy som var opptatt av andre saker og som ikke hadde mottatt noen påminnelse om å beskjeftige seg med Abels avhandling, ettersom denne bare hadde oppholdt seg i Paris noen få dager etter fremleggelsen av hans Mémoire i Akademiet, og ikke hadde sørget for at noen skulle følge saken likeoverfor kommisærene — så har, sier jeg, M. Cauchy glemt i løpet av svært lang tid den avhandling av Abel som han hadde til forvaring. Det var ikke før henimot mars måned 1829 at de to kommisærer fikk vite, gjennom en meddelelse som en av dem mottok fra en tysk videnskapsmann, at Abels Mémoire, som hadde vært presentert for Akademiet, inneholdt — eller turde inneholde — særlig interessante analytiske resultater og at det var forbauende at man ikke hadde avgitt noen rapport i Akademiet. På grunn av dette søkte M. Cauchy etter Mémoiren, fant den og ville til å skrive en rapport, men kommisærene ble holdt tilbake ved den betraktning at M. Abel allerede i Crelles Journal hadde offentliggjort en del av sin Mémoire som var presentert for Akademiet, og at han sannsynligvis ville fortsette å offentliggjøre resten, og at således Akademiets rapport som bare kunne være muntlig ville bli ubetimelig. På dette tidspunkt får vi pludselig melding om M. Abels død — et frygtelig tap for videnskapen — hvilket synes oss nå å gjøre rapporten nødvendig for å bevare for oss om mulig i samlingen Savants étrangers et av forfatterens hedersverk.«

Dette var jo av stor interesse og kanskje ennu mer opplysningen om at der fantes en avskrift av Abels avhandling. Skulle Libri virkelig ha påtatt seg det store arbeid å avskrive hele Abels avhandling? Og hvorfor skulle han i så fall ha kommet med sitt tillegg om at han ikke hadde manuskriptet forhånden (sous les yeux) da han leste korrektur? Men umulig var det jo ikke! Han kunne jo ha gjort det for å gjøre manuskriptet mere tydelig for typografene. Vi vet endogså at det har vært planer om en slik avskrift ved Libri.

I et brev fra Paris av 11. april 1832 fra Minister Löwenhielm skriver denne, antagelig til Hansteen:

»Af Sal. Abels här efterlemnade arbeten har jag icke kunnat få redo på flere än hans *Mémoire sur les fonctions transcendentes*. Den fanns hos herr Cauchy, och skulle af herr Liberi afskrivas, då denne i den gängse farsoten insiuknade — hos herr Gergonne har efterfrågan skett men han har icke ännu svarat.«

Det var med stor spenning jeg sammen med professor Procissi gikk til biblioteket Moreniana oppe ved Lorenzokirken. Skulle det kanskje være Abels originalmanuskript som var oppbevart der? Procissi hjalp meg med å finne frem manuskriptet. Der lå de gulnete bladene tett beskrevet, »par N. H. Abel, Norvegien« stod der. Den skriften skulle jeg vel kjenne! Det måtte vel være Abels egen! Og hvorfor skulle også Libri ha foretatt en slik avskrift, hvis hensikten var å gjøre teksten tydeligere for typografene? Bokstavene var små og plassen utnyttet til det ytterste, begge sider av arkene beskrevet. På siste side sto Abels adresse i Paris: »Rue Ste Marguerite No 41 faub. St. Germain«.

Var det virkelig over disse papirene Abel hadde sittet bøyet i Paris, da han avsluttet den avhandlingen, om hvilken han skrev til Holmboe: »Jeg tør uden Bram sige at den er god.« Det kunne neppe være tvil om at dette var det berømte forsvunne manuskript, det vil da si en tredjedel av det. Midtpartiet – hele to tredjedeler av avhandlingen – manglet. Nu visste jeg jo at man tidligere hadde latt seg narre. Jeg fikk derfor en italiensk fotograf til å ta en mikrofilm av manuskriptet med påtegningen på omslaget, angivelig skrevet av Legendre, og dessuten av et brev, skrevet av Libri. Filmen ble sendt til Matematisk Institutt i Oslo hvor Tambs Lyche og Johansson kom til samme resultat som meg. De oversendte så kopiene til rettskjemiker Bruff. Han sammenlignet kopiene med et ark, utlånt fra Universitetsbiblioteket, som var betegnet som: Den eldste kjendte redaksjon av »Det abelske teorem«. Bruffs meddelelse konkluderer med følgende uttalelse: »De anførte og en lang rekke andre likhetspunkter virker helt overbevisende og jeg kan etter foretatt undersøkelse uttale som min bestemte overbevisning at originalene til de innsendte fotografier av manuskriptet er skrevet av *Niels Henrik Abel* personlig«. Senere har Bruff også undersøkt skriften på omslaget om Abels avhandling. Han har sammenlignet skriften med kopier av brev fra Legendre til Sophie Germain fra årene 1817-1821, tilsendt fra Paris av M. Taton. Konklusjonen av undersøkelsen var at det ikke kan herske tvil om at påskriften på omslaget om Abels avhandling er skrevet av Legendre personlig.

Men hvor var det blitt av midtpartiet av avhandlingen? Jeg skrev i våres til professor Sansone og spurte om det kunne være noen mulighet for å finne mere av manuskriptet i Moreniana. I mai fikk jeg som svar

Rapport
 de
 M. Abel
 sur
 les propriétés générales d'une classe très étendue de fonctions transcendentes
 par N. H. Abel. Norwegian
 (présenté à l'Académie le 30 Octobre 1826)
 30 Octobre 1826.
 Commission
 d'histoire
 naturelle
 de l'Académie
 de l'Empire
 de France
 par N. H. Abel. Norwegian
 (présenté à l'Académie le 30 Octobre 1826)
 Les fonctions transcendentes, considérées jusqu'à présent par les géomètres
 ont en leur petit nombre. Parmi toutes les théories des fonctions transcendentes
 il n'est à cet égard que les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, fonctions
 qui dans le fond ne forment qu'une seule espèce. Ce n'est que dans ces dernières
 temps qu'on a commencé à considérer quelques autres fonctions, parmi
 celles-ci les transcendentes elliptiques dont M. Legendre a développé tout le
 système remarquable et élégant, tiennent le premier rang. L'auteur a
 voulu, par ses recherches, qu'il a l'honneur de présenter à l'Académie
 une classe très étendue de fonctions savoir, toutes celles dont la dérivée
 peuvent être exprimées au moyen d'équations algébriques dont tous les coefficients
 sont des fonctions rationnelles d'une même variable, et d'un nombre fini
 de fonctions de propriétés analogues à celles des fonctions logarithmiques et elliptiques.
 Les fonctions dont la dérivée est rationnelle, ou comme on voit la
 propriété qu'on peut exprimer une somme d'un nombre quelconque de
 semblables fonctions par une fonction algébrique ou logarithmique, quelle
 que soient d'ailleurs les variables de ces fonctions, ou de même une fonction
 elliptique quelconque c'est-à-dire une fonction dont la dérivée ne conti-
 ent d'autres irrationnalités qu'un radical du second degré sous lequel la
 variable ne passe pas le 4^e degré aura encore la propriété qu'on peut
 exprimer une somme quelconque de semblables fonctions par une fonction
 algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables de
 ces fonctions une certaine relation algébrique. Cette analogie entre
 les propriétés de ces fonctions a conduit l'auteur à chercher s'il ne
 serait pas possible de trouver des propriétés analogues de fonctions plus

devant l'Académie de l'Empire

Første side av Abels Parisavhandling.

den gledelige nyhet at det hadde lyktes professor Procissi, ved å gjennomgå samlingen ark for ark å finne resten av manuskriptet – på 8 sider nær. Kopier av de nyfunne sider ble oversendt til Matematisk Institutt i Oslo.

Jeg har sammenlignet kopien av Abels manuskript til hans »Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes« med den trykte tekst i »Mémoires présentés par divers savants à l'académie royale des sciences de l'institut de France« (Tome septieme, 1841).

Jeg har funnet ca. 36 språklige uoverensstemmelser av temmelig uvesentlig art. Libri har f. eks. rettet Abels »Comme on sait« til »Comme on le sait« og Abels »en remarquant que« til »puisque« og videre Abels »qu'on fait« til »qu'on fasse«.

Under memoirens titel har Abel skrevet »par N. H. Abel, Norvegien« mens Libri har »par M. N. H. Abel, Norwégien«.

Når det gjelder faglige uoverensstemmelser må en si at Libris korrekturelesning har vært ganske omsorgsfull. Man har inntrykk av at Libri har studert avhandlingen i detalj. Flere steder har Libri tilføyet henvisninger til tidligere formler. Som eksempel nevner jeg at Abel foran formel (39) setter »en remarquant que« mens Libri har tilføyet: »d'après (23), (24), (25) et (35)«. Av uoverensstemmelser i formlene har jeg funnet omkring 46. En del er rettelser av skrivfeil hos Abel. Men såvidt jeg kan se er ingen av uoverensstemmelsene av den art at det vil være av stor betydning for en bedre forståelse av Abels avhandling. I Sylows og Lies utgave av Abels samlede verker er allerede de fleste av trykkfeilene hos Libri rettet. Formel nr. 103 som Libri særlig nevner i sitt tillegg, som han følte seg usikker overfor, befinner seg på en av de 8 sider av Abels manuskript, som ikke er gjenfunnet. Forøvrig har Sylow en bemerkning om denne formelen i sine noter.

Til slutt skal jeg nevne et annet manuskript, som befinner seg i Biblioteca Nazionale i Rom. Professor Heegaard fant det i 1942 og mente å ha funnet originalen til Abels Parisavhandling. Etter krigens slutt fikk vi tilsendt kopier av manuskriptet og rettskjemiker Bruff undersøkte dem, men erklærte at han »nærmest fant det utelukket at det kunne være skrevet av Abel«.

Romamanuskriptet er på det aller nærmeste identisk med den trykte tekst i Savants étrangers som Libri forestod. Jeg har undersøkt de steder hvor det er uoverensstemmelse mellom Abels manuskript og Libris trykte tekst. Her har Romamanuskriptet overalt samme tekst som Libri med undtagelse av fire steder, nemlig følgende steder i Savants étrangers: side 188 linje 5, side 231 formel 115, side 245 linje 6 og side 262 linje 4.

Alle disse steder har det vistnok vært lett å oppdage feilene for en oppmerksom avskriver. Også Sylow har rettet disse feilene med undtagelse av den siste.

Det mest sannsynlige er vel at Romamanuskriptet er en avskrift av den trykte avhandling i Savants *étrangers*. Det kunne vel også tenkes at Libri selv eller en medhjelper hadde forfattet det for å selge det eller for å gjøre det tydeligere for typografene, som allerede berørt. Men det er hevet over tvil at det er Abels manuskript som har vært i trykkeriet. I margin finnes flere steder ordene: »Savants *étrangers* fl^{ie} . . .« tilføyet. Man kan også se at typografen hver gang han er kommet en side ned i den trykte tekst i Savants *étrangers* har satt en strek i Abels manuskript.

I Romamanuskriptet er også Libris tillegg som er tatt med i Savants *étrangers* gjengitt, men skrevet med en annen hånd enn selve avhandlingen i samme Romamanuskript. Hånden synes ikke å være Libris.

REFERENSER:

1. Viggo Brun: Niels Henrik Abel, i Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlinger Bd. XXV, Trondheim 1952 (fransk tekst).
2. Viggo Brun: Niels Henrik Abel. Neue biographische Funde. Journ. für d. r. u. angew. Mathem. 1953 eller 1954.
3. Viggo Brun: Det tapte Abelmanuskript. Norsk Mat. Tidsskr. B. 31, 1949.
4. Institut de France. Acad. des sciences. Procès-verbaux des séances. T. 8, 9, 10. Hedaye 1921.
5. Fr. Lange-Nielsen: Zur Geschichte des Abelschen Theorems. Das Schicksal der Pariserabhandlung. Norsk Mat. Tidsskr. B. 9, 1927.
6. Fr. Lange-Nielsen: Abel og »Académie des sciences« i Paris. Norsk Mat. Tidsskr. B. 11, 1929.
7. Svend Dahl: To berømte bogtyve. Aarbog for bogvenner 1919.

DEN FYRDIMENSIONELLA RYMDEN

ROLF NEVANLINNA

Artikel tryckt i Arkhimedes, band 1, översatt av Håkan Simberg.

Den geometrisk-fysikaliska rymden, vid vilken vi äro bundna och till vilken vi förlägga det konkreta fysiska skeendet, är *tredimensionell*: denna grundegenskap uppfatta vi som ett ovedersägligt sakförhållande. Som en intuitiv nödvändighet tvingar sig denna uppfattning på oss med sådan makt, att det kan förefalla lekmannen fåfängt att i detta självklara faktum söka finna någon mera vittbärande problematik. Det oaktat har inte endast det filosofiska eller matematiska teoretiska tänkandet, utan t. o. m. en sådan realvetenskap som fysiken i olika sammanhang ställts inför detta problem; just inom fysiken har man blivit nödsakad att räkna med möjligheten av rymder med ett större antal dimensioner. Även den stora allmänheten känner till Einsteins relativitetsteori, som innebär ett storlaget försök att beskriva det fysikaliska skeendet såsom en slags fyrdimensionell geometri i den s. k. Minkowski- eller »händelse«-rymden. Tre av de fyra dimensionerna äro vår vanliga geometris rymd-dimensioner medan den fjärde är tiden.

Denna framställning söker icke att beskriva relativitetsteorins speciella värld. Min avsikt är att allmännare klargöra vad man kan mena då man talar om rymder av högre dimension: hur det är möjligt, att den matematiska forskningen under de senaste hundra åren har kunnat utveckla geometrierna i högredimensionella rymder till lika fullständiga teorier, som den vanliga plan- eller rymdgeometrin, vilkas åskådliga innebörd omedelbart kan uppfattas även av icke-matematikern, därför att de svara mot vår omedelbara åskådning av den tredimensionella rymden.

Först måste vi göra klart för oss, vad vi egentligen mena när vi säga att rymden har tre dimensioner. Låt oss tänka att vi befinna oss i ett rum: det är en liten, sluten del av rymden. Rummet har en viss bredd, en viss längd och en viss höjd. Just dessa äro dess tre dimensioner. För en fjärde dimension eller för ännu flera finnes där ej plats. En position i detta rum bestämmes av tre tal, av vilka ett anger bredden, t. ex. av-

ståndet från sidoväggen, ett annat längden, avståndet från bakväggen och det tredje höjden, det vinkelräta avståndet från golvet plan.

Matematiskt uttryckes detta på följande sätt: vårt rum bestämmer ett

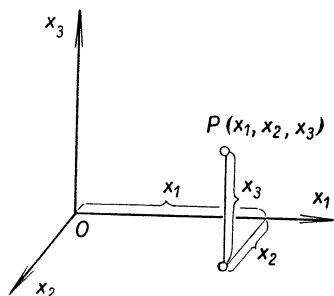


Fig. 1

rymdkoordinatsystem, vars begynnelsepunkt befinner sig t. ex. i den vänstra bakre vrån och vars längd-, bredd- och höjdaxlar äro golvet bakre kant, dess sidokant och skärningslinjen mellan väggarnas plan, som står vinkelrätt mot golvet. Den geometriska och den fysikaliska forskningen arbetar just med koordinatsystem av detta slag; dessa tänkas konstruerade i världsrymden. Att rymden är tredimensionell betyder att en punkts position i rymden

(fig. 1) bestämmas av *tre* mätetal eller koordinater, x_1 , x_2 , x_3 , i ett visst koordinatsystem.

Såsom kännetecken på att rymden är tredimensionell behöver man emellertid inte använda detta speciella sätt att lokalisera en punkt med tillhjälp av ett koordinatsystem bestämt av *tre mot varandra vinkelräta* axlar. Det finnes även andra sätt att bestämma en punkts position. Så anger man vanligtvis t. ex. ett ortsläge på jordytan med geografiska koordinater, längden och bredden. En tredje koordinat ingår redan däri att orten ligger på jordytan, alltså på jordradiens avstånd från jordens medelpunkt. Om vi nu tänka oss denna radie föränderlig, så förstår man, att en godtycklig punkt i rymden kan bestämmas så, att man anger dess avstånd från en godtyckligt vald fast utgångspunkt O och dessutom punktens geografiska längd och bredd på den sfär, vars medelpunkt är punkten O och som går genom den givna, valda punkten. Nu behövs det alltså igen *tre* tal eller koordinater för att bestämma punktens position; detta är kärnan i utsagan att rymden är tredimensionell.

Annorlunda är det med sådana delar av rymden, vars dimensionstal är lägre. En yta, t. ex. ett plan, har endast två dimensioner, och där bestämmas en punkts position på motsvarande sätt med *två* koordinater. På en endimensionell del av rymden, dvs. på en linje, räcker det med en enda koordinat för att fastställa en punkts läge, förutsatt att även i detta fall koordinatsystemets i och för sig godtyckliga begynnelsepunkt fastslagits.

För att riktigt uppfatta rymdens tre dimensioner är det nyttigt att till en början uppehålla sig vid dess en- och två-dimensionella delar, vid ytor och linjer, samt vid de samband och skiljaktigheter som råda mellan endimensionella linjer, tvådimensionella ytor och tredimensionella kroppar.

Endast med stöd av dessa analogier blir det möjligt att bilda sig en uppfattning om rymder av högre dimension, där den omedelbara geometriska åskådningen inte mera står till buds.

Mina ärade läsare ha måhända någon gång läst »lättfattliga« framställningar som önska lyfta på det förhånge som skiljer oss från den hemlighetsfulla fyrdimensionella världen. Detta sker ofta genom ett tankeexperiment i rakt motsatt riktning: man förflyttar sig från vår tredimensionella värld till en tvådimensionell och försöker leva sig in i den uppfattning tvådimensionella »ytvarelser« måste ha om sin egen rymd, som helt saknar den tredje dimensionen.

Ett sådant tankeexperiment är inte någon onyttig lek: just denna väg leder till den rätta uppfattningen av högre dimensioner. Därför ber jag mina läsare följa med på en tankeexkursion till den tvådimensionella rymden.

Därförinnan vill jag kort hänvisa till att det med hänsyn till människans fysiska organisation inte är självklart, att just den *tredimensionella* uppfattningen utvecklar sig och inrotar sig såsom någonting entydigt säkert. Våra biologiska livsbetingelser äro i själva verket inte alltför vitt skilda från dem, som gälla för *tvådimensionella* ytvarelser.

För det första är nämligen vår rörelsefrihet begränsad till en tvådimensionell yta, nämligen jordytan eller åtminstone till dess omedelbara närhet. På teknikens nuvarande ståndpunkt kunna vi höja oss ovanför jordytan eller skänka oss under den sträckor, som inte överstiga $\frac{1}{2}$ promille av det svängrum, som jordytan ger oss i vågrät led. Därför kan vår kunskap om rymdens tredje dimension, i höjd- och djupled, som *omedelbar upplevelse* endast i mycket små lokala omgivningar, såsom i vårt arbetsrum, jämföras med det som vi erfara i egenskap av ytvarelser, dvs. i vågrät led.

En tvådimensionell uppfattning står oss nära även av en annan, biologisk anledning. Vår rymdupplevelse grundar sig främst på synintryck, som uppstå som projektioner på ögats tvådimensionella näthinna. Vi se i själva verket med hjälp av tvådimensionella ytbilder; djupverkan i vårt synintryck beror på att våra två ögon motta olika projektioner, vilka sammansmältas till en helhet (stereoskopiskt seende). Till denna förnimmelse av »djup« bidrar ytterligare det att vi äro rörliga varelser. När vi röra oss förändras vårt synfält på ett oregelbundet sätt. Detta leder till bildandet av en tredimensionell rymduppfattning. Härvid är strävan efter så stor »stabilitet« eller »invarians« som möjligt, en ledande princip. Denna tendens till invarians visar överhuvud likt en röd tråd vägen för de mänskliga begreppens och uppfattningarnas utvecklingshistoria från det

undermedvetnas djup till den mänskliga kunskapens högsta toppar. Den omformar speciellt vår rymduppfattning även därigenom, att den, som vi uttrycka det, korregerar vårt perspektiviska seende, genom att förändra vår primära, subjektiva synbild (med centrum i ögat) till en homogen rymduppfattning som är oberoende av observationscentrum.

Just emedan vår fysiska organisation står nära det tvådimensionella, kunna vi även i all avbildning, som vädjar till synintryck, utan svårighet orientera oss med hjälp av *plana* bilder. I dessa frammanar vår fantasi lätt den felande tredje djupdimensionen.

Längre skall jag inte följa vår tredimensionella naturliga rymduppfattnings utvecklingshistoria med dess psykologisk-biologiska problem. Ovannämnda anmärkningar avse endast att påpeka, att vi inte genomgripande avvika från fingerade tvådimensionella ytvarelser, vars intryck vi nu skola söka klargöra. Dessa varelser äro fysiskt och biologiskt ännu sämre utrustade än vi, och vi skola föreställa oss, att de leva helt bundna till den tvådimensionella världen utan någon möjlighet att kunna bli medvetna om en tredje dimension.

Vi tänka oss nu dessa tvådimensionella individers levande på en yta, till exempel ett plan, och föreställa oss att detta plan befinner sig i vår tredimensionella värld. Från dess höjder betrakta vi tredimensionella varelser de primitiva ytvarelsernas rörelser och verksamhet. Utrustade med våra intellektuella förutsättningar skulle de otvivelaktigt skapa sig en plangeometri, en vanlig euklidisk geometri. Jag fäster uppmärksamheten vid ett par geometriska detaljer, som säkert vore bekanta för dem dels som praktiska erfarenheter (t. ex. som resultat av mätningar) dels som teorem i den teoretiska geometrins system. En punkt P 's position skulle dessa varelser säkert bestämma medels ett rätvinkligt koordinatsystem, genom att ange punktens två koordinater x_1 , x_2 i detta system. Punkten P 's avstånd r från koordinatsystemets begynnelsepunkt eller origo skulle

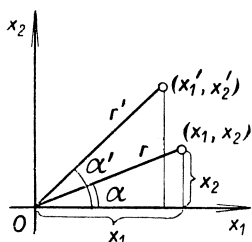


Fig. 2

de beräkna ur Pytagoras teorem: kvadraten på avståndet r är lika med summan av kvadraterna på kateterna x_1 och x_2 (fig. 2):

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Vinkeln α mellan sträckan OP och x_1 -axeln skulle de liksom vi bestämma ur formlerna

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{x_2}{r}.$$

Om nu $P'(x_1', x_2')$ är en annan punkt i planet, så gäller för den

$$r'^2 = x_1'^2 + x_2'^2$$

och

$$\cos \alpha' = \frac{x_1'}{r'}, \quad \sin \alpha' = \frac{x_2'}{r'}.$$

Vinkeln ω mellan strålarna OP' och OP skulle också våra plana varelser beräkna ur formeln

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos(\alpha' - \alpha) = \cos \alpha' \cos \alpha + \sin \alpha' \sin \alpha = \\ &= \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}}. \end{aligned}$$

De två uttryck, som vi ha anfört här ovan, och som ge storleken av avståndet mellan två punkter och storleken av vinkeln mellan två räta linjer, innehålla i själva verket i sammanträngd form hela plangeometrin. Sedan Gauss' och Riemanns tider veta vi nämligen hur man, då dessa båda metriska grundstorheter äro bekanta, kan utveckla hela geometrin enligt differentialgeometriska principer med användande av variationskalkyl. Och om vi nu antaga, att våra tänkta ytvarelser ha haft sin egen Gauss och sin egen Riemann, så skulle också de med tillhjälp av dessa grundformler ha utvecklat en fullständig plangeometri. Och denna skulle bli samma geometri, som vi känna från våra plangeometriska läroböcker.

Detta är ju i och för sig ingenting överraskande. Men en vacker dag kan det inträffa, att geometrerna i vår yttvärld uppfinna den *tredje* dimensionen, fastän denna dimension för dem är lika gåtfull som den fjärde dimensionen för oss. Hur skulle de kunna komma denna mysteriösa tredje dimension på spåren? Det skulle säkert inte ske såsom en åskådlig upplevelse, ty deras geometriska åskådning vore nog oåterkalleligt bunden vid den tvådimensionella världen. Men de tvådimensionella matematikerna skulle kanske resonera på följande sätt:

Ur vår geometriska åskådning kunna vi inte upptäcka en tredje dimension. Den kunna vi finna endast med hjälp av den abstrakta avbildning av geometrin på aritmetiken, som den *analytiska geometrin* innehåller. Denna analytiska framställning av geometrin kan inte uppfattas geometriskt, men den är i varje fall till sin byggnad en exakt bild av den geometriska, konkreta världen, den är som man säger isomorf med denna.

Vad visar då den analytiska geometrin? För det första, att en punkts position i den tvådimensionella världen uttryckes medels två koordinater. Om det alltså finnes en tredimensionell värld, måste en punkts position

i motsvarande analytiska geometri kunna uttryckas med tre koordinater x_1, x_2, x_3 , av vilka de två första äro våra vanliga plankoordinater, och den tredje anger koordinaten i den tredje dimensionens riktning.

Så långt är saken klar. Men hur skola geometrerna komma de geometriska lagar på spåren, som styra den åskådligt obegripliga tredimensionella världen? I det faktum, att en punkt i denna värld bestämmes av tre tal x_1, x_2, x_3 , innehålles i och för sig ingenting om byggnaden av det geometriska systemet. Till detta säga geometrerna: Vi kunna inte upptäcka dessa lagar endast genom att studera en åskådlig geometri. Men det är möjligt att finna dem, om man granskar den bild av den åskådliga geometrin, som den analytiska geometrin utgör, och formellt generaliserar den på ett så enkelt sätt som möjligt. Detta sker genom analogislut utgående från det, som vi känna till om den tvådimensionella analytiska geometrin.

Men — som ovan påpekades — den tvådimensionella analytiska geometris grundlagar kunna sammanfattas i de två formler, som ge avståndet mellan två punkter och vinkeln mellan två räta linjer. Den naturliga slutledningen är därför följande: För

att dessa grundlagar skola gälla också i den tredimensionella geometrin, måste man endast göra den korrektion som blir nödvändig, när den tredje dimensionen och motsvarande tredje koordinat x_3 kommer till. Man behöver inte länge granska ifrågasvarande uttryck för att inse att den enda naturliga generaliseringen av den tvådimensionella analytiska geometrin är följande:

Avståndet r från koordinatsystemets origo O till en godtycklig punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ beräknas fortfarande »pytagoreiskt» såsom kvadratroten ur de tre koordinaternas kvadratsumma (fig. 3):

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

och vinkeln ω mellan två strålar OP och OP' ($P' = P'(x_1', x_2', x_3')$) ur formeln

$$\cos \omega = \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}.$$

Om vi enas om detta, är hela den tredimensionella geometrin i princip skapad. I enlighet med de tidigare nämnda differentialgeometriska principerna blir nämligen även den tredimensionella geometrin fullt bestämd, så snart de två grundstorheterna, avståndet mellan två punkter och vinkeln mellan två räta linjer, äro givna.

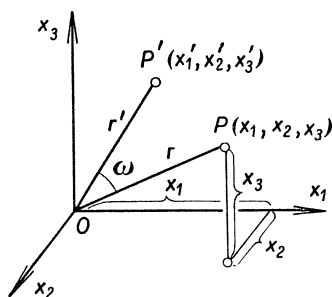


Fig. 3

När de tvådimensionella ytvarelserna på detta sätt ha skapat den tredimensionella euklidiska rymdens analytiska geometri, har deras geometriska instinkt inte bedragit dem. De regler för geometrin de på ovanbeskrivet sätt uppställt äro nämligen exakt de samma som vi känna från vår vanliga rymdgeometri (jmf. fig. 3). Därmed bli alltså ytvarelserna i stånd att utveckla den tredimensionella rymdgeometrin till samma fullständighet, som vi ha kunnat göra det. De skulle kunna samtala med oss om de geometriska relationerna i den tredimensionella rymden med en sådan noggrannhet, att vi, när vi hörde deras tal, alls inte kunde ana, att de helt och hållet sakna förmåga att bilda sig motsvarande geometriska åskådning av den tredje dimensionen.

När lekmännen i ytvärlden av sina vetenskapsmän få höra om den tredimensionella rymdens geometriska egenskaper, skulle de visst nog genast fråga om det inte vore möjligt att förklara dessa ting även *åskådligt*. Då skulle matematikerna självfallet råka i trångmål, och deras förklaring skulle inskränka sig till ungefär följande:

»Den tredimensionella världen kunna vi inte uppfatta genom en åskådlig generalisering av det som vi känna till om den tvådimensionella världen. Vi måste nöja oss med de observationer, som vi kunna göra i den analytiska geometrin, och dessa sakna naturligtvis alla *geometriska* kvaliteter. Önska vi binda dessa observationer vid vår vanliga geometriska åskådning, måste vi därför nöja oss med *yta* *bildningar* av skeendet i den tredimensionella världen. Detta kunna vi åstadkomma genom att projiciera de tredimensionella fenomenen på vår egen tvådimensionella värld«.

Uppfordrade att giva sådana avbildningar skulle de kanske som avbildningsobjekt välja den tredimensionella rymdens för oss välbekanta reguljära kroppar, den reguljära tetraedern, oktaedern, ikosaedern, kuben och dodekaedern (fig. 4). Med tillhjälp av den analytiska geometris

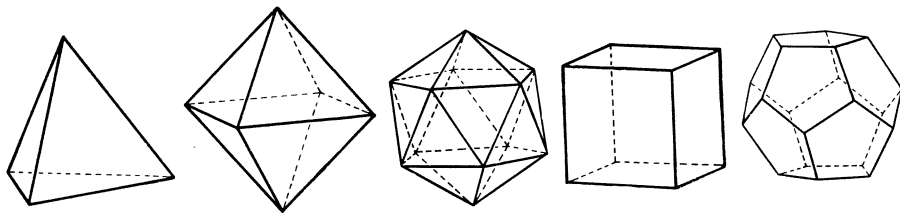


Fig. 4

metoder skulle de tvådimensionella matematikerna kunna projiciera dessa kroppar i planet. Genom att betrakta dessa plana projektioner kunde man naturligtvis skapa sig någon slags uppfattning om vad de avbildade tredimensionella kropparna åskådligt innebära. För oss *tredi-*

mensionella varelser räcker det i själva verket fullständigt med att betrakta dessa projektioner i planet. Emedan vi redan ha en uppfattning av den tredje dimensionen, kompletterar vår fantasi utan svårighet ytprojektionerna i djupled, så att vi även i de plana figurerna *se* motsvarande tredimensionella kroppar i deras symmetriska fulländning. För de tvådimensionella varelserna måste naturligtvis dessa figurer bli betydligt mera svårbegripliga. De framstå för dem som en oregelbunden anhopning av linjer och ge inte någon direkt uppfattning av figurernas reguljära karaktär. Men en viss antydning även i denna riktning kunde projektionerna i varje fall ge.

Det föregående tankeexperimentet har gjorts med en tendens, som antagligen redan har klarnat för läsaren. Vi förflytta oss nu från den tvådimensionella världen till vår egen ordinära tredimensionella värld. Det är kanske nu lättare att förstå hur man skall söka komma vidare till den fjärde dimensionen, vars åskådliga innebörd förblir gåtfull för oss ofullkomliga människor i den tredimensionella världen. Våra matematiker ha i själva verket vid konstruktionen av den fyrdimensionella rymden förfarit på alldeles samma sätt som vi ha föreställt oss att de tvådimensionella geometerna använde, då de skapade den tredimensionella världen. Den fyrdimensionella geometrin har utvecklats med ledning av de analogier som gälla när man övergår från den tvådimensionella analytiska geometrin till den tredimensionella. För den åskådliga uppfattningen ligger gränsen för vidare generalisering ovillkorligen vid tre dimensioner. Men med tillhjälp av *tal* har en exakt bild av geometrin kunnat konstrueras, och i denna värld, den analytiska geometrin, finnes det inga hinder för obegränsad generalisering. Vi resonera lika som de tvådimensionella geometerna:

I den fyrdimensionella världen måste en punkts position bestämmas av fyra koordinater x_1, x_2, x_3, x_4 . Avståndet (r) mellan två punkter samt vinkeln (ω) mellan två räta linjer beräknas, som en direkt generalisering av de två- och tredimensionella fallen, alltså på följande sätt:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

$$\cos \omega = \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' + x_4 x_4'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2}}.$$

Ur dessa grundlagar kunna vi nu bygga upp den fyrdimensionella geometrin in i minsta detaljer. Detta sker åter med användande av de ovan nämnda differentialgeometriska principer som utvecklats av Gauss och Riemann redan för mer än hundra år sedan. Nu är det utan vidare klart hur denna generalisering fortsättes till högre dimensioner, till fem-, sex-

osv. dimensionella rymder. Utvecklingen av den högre dimensionella geometrin på denna grund fordrar inte ens några särskilt djupa matematiska kunskaper. För att lösa den fyrdimensionella rymdens problem räcker det till med de kunskaper, som en vanlig matematikstuderande inhämtar under de två första studieåren.

Kanske läsaren nu närmare intresserar sig för fenomenen i den fyrdimensionella rymden. Räknetekniskt behärskar man fullständigt dem, fastän såväl matematikerna som lekmännen icke kunna förbinda dem med en direkt, geometrisk, åskådlig innebörd. Ur rikedomerna på fenomen i den fyrdimensionella rymden välja vi igen ett speciellt exempel, nämligen de reguljära kropparna. När jag i det följande kort anför deras kännetecken, måste man minnas att kropparna äro *fyrdimensionella*. De begränsas alltså inte av tvådimensionella ytor, liksom kropparna i vår rymd, utan av tredimensionella kroppar, och mellan dessa begränsande tredimensionella kroppar befinner sig den gåtfulla fyrdimensionella rymden. De fyrdimensionella reguljära kropparna *begränsas* i själva verket av våra välbekanta reguljära kroppar, tetraedrar, oktaedrar, ikosaedrar, kuber och dodekaedrar.

I den fyrdimensionella rymden finnes det varken mer eller mindre än *sju* reguljära kroppar. I det följande granska vi i korthet deras byggnad. Först och främst finnes det reguljära fyrdimensionella kroppar som begränsas av tredimensionella reguljära *tetraedrar*; det existerar tre olika kroppar av detta slag. Den enklaste fyrdimensionella reguljära kroppen begränsas av fem tetraedrar och antalet hörnpunkter är likaså fem. Sedan finnes det en kropp med 16 begränsande reguljära tetraedrar, medan antalet hörnpunkter är 8. Ytterligare har man en reguljär kropp begränsad av reguljära tetraedrar, men av mycket mera komplicerad art än de förenämnda: antalet gränstetraedrar är här hela 600 och hörnpunkternas antal är 120. Utom dessa kroppar finnes det en sådan fyrdimensionell reguljär kropp, som begränsas av tredimensionella *kuber*. Denna är den s. k. *fyrdimensionella kuben*, med 8 begränsande tredimensionella kuber, medan antalet hörnpunkter är 16. Den femte fyrdimensionella reguljära kroppen begränsas av reguljära *oktaedrar*; antalet begränsande vanliga tredimensionella oktaedrar är 24 och hörnpunkternas antal är likaså 24. Den sjätte och sista reguljära kroppen i den fyrdimensionella rymden är redan synnerligen komplicerad i det den begränsas av hela 120 reguljära tredimensionella *dodekaedrar* och antalet hörnpunkter stiger till 600.

Om man nu frågar sig vilken åskådlig innebörd kunde förenas med dessa svårbegripliga kroppar blir svaret precis detsamma, som geometerna i den tvådimensionella världen gav: Det finns endast två metoder därtill. Antingen nöja vi oss med att kunna karakterisera och undersöka

kropparna på rent *analytisk* väg, dvs. medels tal, eller också önska vi få en mera omedelbar geometrisk-åskådlig uppfattning av dem. Emedan vi en gång för alla sakna möjligheter att åskådligt uppfatta den fjärde dimensionen, måste vi då nöja oss med den metod som beskrevs i det föregående: nämligen att projiciera kropparna i vår lägre, tredimensionella rymd. Härvid bör man observera att projektionerna från den fyrdimensionella rymden på vår vanliga rymd naturligtvis äro tredimensionella, alltså »vanliga» kroppar.

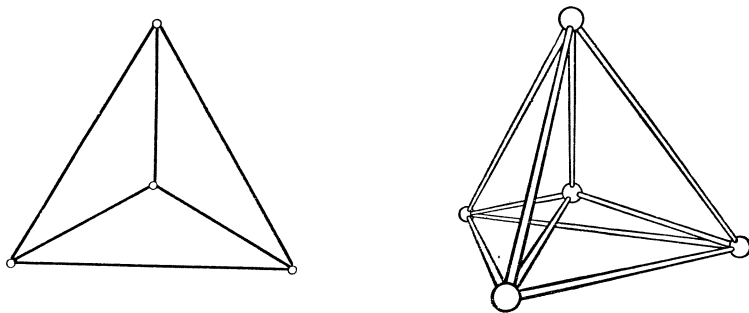


Fig. 5

Det kan ha sitt intresse att se exempel på sådana projektioner. I fig 5. finner man till höger projektionen på vår tredimensionella rymd av den ovan nämnda *reguljära fyrdimensionella tetraedern*, som begränsas av 5 reguljära tredimensionella tetraedrar. Till jämförelse återges i figuren till vänster projektionen på ett plan av en vanlig tredimensionell tetraeder. För att uppfatta figurerna kan det vara bra att tänka sig tetraederna konstruerade på följande sätt. Vi börja med en sträcka, vars längd är längdenheten. Utanför denna sträcka väljes därefter en punkt som, för enad med sträckans båda ändpunkter, låter en liksidig triangel uppstå. Utanför triangelns plan väljes därefter en ny punkt så att, då den sammanbindes med bastriangelns hörnpunkter, alla förbindelsesträckor åter äro lika långa som längdenheten. Så uppstår vår vanliga reguljära tredimensionella tetraeder. Denna konstruktion kan nu fortsättas till högre dimensioner. Utanför vår tetraeder och samtidigt utanför hela vår tredimensionella rymd, i den fjärde dimensionens riktning väljes en femte punkt så, att när den förbindes med alla fyra hörnpunkter i vår reguljära tetraeder, så bli sammanbindningssträckorna alla lika långa som längdenheten. På detta sätt uppstår den fyrdimensionella, reguljära tetraedern. Den har alltså en vanlig tetraeder som bas. Vidare begränsas den av fyra andra tredimensionella, reguljära tetraedrar, och dessa ha konstruerats så, att den femte hörnpunkten, som befinner sig i den fjärde

dimensionens riktning, har sammanbundits med alla hörnpunkter i den tredimensionella bastetraederns fyra sidotrianglar.

Vi skola ännu granska de två projektionerna i fig. 5 något närmare. Till vänster är den tredimensionella tetraedern projicerad i planet. I denna plana figur blir den yttersta stora triangeln dubbelt täckt. Å ena sidan är den en bild av en sidotriangel, å andra sidan delas den i tre delar som var och en är projektion av en av vår tetraeders sidotrianglar. På motsvarande sätt finner man i den figur som föreställer projektionen av den fyrdimensionella tetraedern, en vanlig tredimensionell tetraeder och inom den en punkt, som är bild av den femte hörnpunkten. Projektionens yttersta största tetraeder är bild av en av den fyrdimensionella tetraederns gränstetraedrer. Även i detta fall är projektionen dubbelt täckt. Projektionerna av fyra gränstetraedrar ligga innanför den yttersta tetraedern och de förstnämndas gemensamma hörnpunkt avbildas på den femte hörnpunktens projektionspunkt i figurens mitt.

Ytterligare har jag tagit med några projektioner av *den fyrdimensionella kub*en, som näst efter tetraedern är den enklaste av de fyrdimensionella reguljära kropparna. Vi kunna tänka oss, att kuben uppstår på följande sätt: Man utgår igen från längdenheten. Denna parallellförskjutes vinkelrätt åt sidan en lika lång sträcka. På detta sätt uppstår en kvadrat. Kvadraten, som vi tänka oss placerad framför oss i den vanliga rymden, höjes därefter vinkelrätt mot sitt plan en sträcka lika med längdenheten. Då uppstår en kub, vars undre bas är vår ursprungliga kvadrat, och vars övre bas är samma kvadrat, i dess förflyttade läge. Utom dessa två kvadrater har kuben till sidor fyra nya kvadrater, som uppstått som orter för baskvadratens fyra sidor vid parallellförskjutningen av denna. På samma sätt fortsätter man nu i den fjärde dimensionen. Den vanliga kub vi nyss ha konstruerat, förskjutes nu en vägsträcka lika med längdenheten i den fjärde dimensionens riktning, som är vinkelrät mot vår egen rymd. Då uppstår en kropp, som har den ursprungliga kuben till undre bas och till övre bas samma kub, efter det den förskjutits en väg lika med längdenheten. Utom av dessa två kuber begränsas kroppen av sex andra kuber, som svara mot parallellförskjutningar i den fjärde dimensionens riktning av den ursprungliga kubens sex sidokvadrater. Den fyrdimensionella kuben begränsas av 8 vanliga kuber, antalet hörnpunkter är 16, och av dessa höra 8 till den undre baskuben, medan de övriga 8 äro hörnpunkter i den övre baskuben.

Den bästa bilden av den fyrdimensionella kubens byggnad få vi, om vi betrakta dess projektioner i den tredimensionella rymden. I fig. 6 se vi bredvid varandra projektioner av de tredimensionella och fyrdimensionella kuberna. Det är här fråga om perspektivbilder, som uppkomma

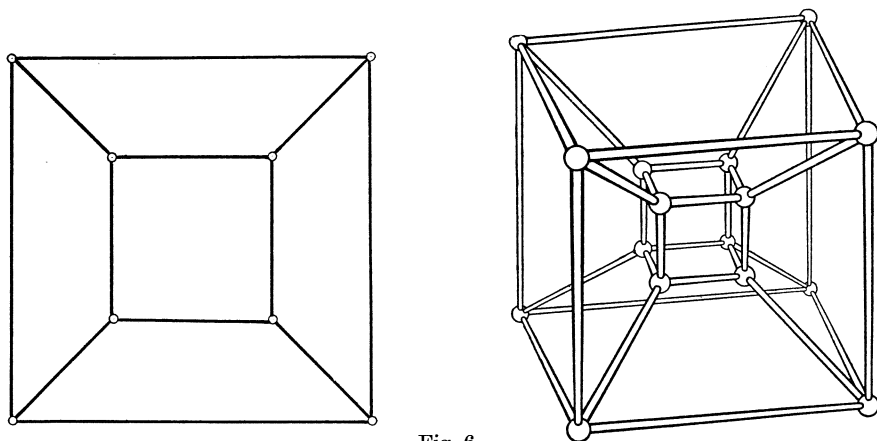


Fig. 6

som projektioner av den förstnämnda kuben i ett tvådimensionellt plan resp. i vår tredimensionella rymd, från punkter som ligger nära utanför dem. Därför är i den vänstra figuren bilden av kubens främsta kvadrat stor. Projektionen är igen dubbelt täckt. Den stora yttersta kvadraten sönderfaller nämligen i fem delar, av vilka var och en representerar en av kubens fem övriga sidokvadrater, sedan den främsta lämnats ur räkningen. Emedan vi ha förmågan att uppfatta tre dimensioner bereder det inte oss någon svårighet att se denna plana figur som en rymdfigur: Vi se in i kuben genom en av dess sidokvadrater. På alldeles motsvarande sätt är rymdfiguren till höger konstruerad. Den utgör en perspektivbild av den fyrdimensionella kuben. Den gränskub, som ligger närmast projektiionscentrum, projiceras på den stora, yttersta kuben. Denna är igen dubbelt täckt. Inom den finnes nämligen projektionerna av de 7 övriga gränskuberna. Den minsta, innersta kuben är projektionen av den gränskub, som är längst borta från iakttagaren, medan de sex övriga, som ha deformerats av perspektivet, förbinda de båda yttersta baskuberna.

Vilket utseende en fyrdimensionell kropps projektion får i den tredimensionella världen, beror naturligtvis på i vilken riktning kroppen projiceras, och vilken slags projektion man använder. En speciellt intressant bild av den fyrdimensionella kuben får man genom parallellprojektion. Vi tänka oss att solen i den fyrdimensionella världen belyser vår fyrdimensionella kub. Dess parallellprojektion på den tredimensionella rymden motsvarar då den skugga den fyrdimensionella kuben kastar på vår värld. Bilden till höger i fig. 7 visar den skugga, som uppstår ifall den fyrdimensionella kuben belyses så, att en av dess diagonaler är parallell med solstrålarna och dessa faller vinkelrätt mot vår tredimensionella värld.

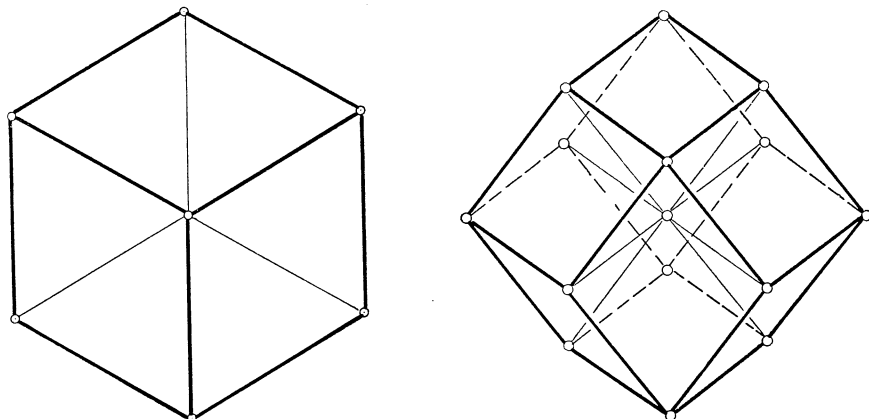


Fig. 7

Hur ser skuggan av den fyrdimensionella kuben ut i detta fall? Det är igen skäl att först granska skuggan av en vanlig tredimensionell kub på ett plan. Kuben tänkes placerad så, att en av dess diagonaler är parallell med ljusstrålarna från en oändligt avlägsen ljuskälla. Till vänster i fig. 7 ser man denna skugga eller parallellprojektion. Vid första ögonkastet förefaller figuren att vara en planfigur, nämligen en reguljär sexhörning, som på två olika sätt är delad i tre romber. Men vårt öga, som har vant sig vid djupintryck, kan utan svårighet uppfatta figuren såsom en rymdfigur. Den reguljära sexhörningen blir nämligen i rumden en kub. Den begränsas av sina sex sidokvadrater, som på grund av perspektivet i figuren se ut som romber. Av kubens 8 hörnpunkter täcka två varandra i figurens mittpunkt. Den diagonal, som förenar dessa hörnpunkter, står vinkelrätt mot bildplanet.

På motsvarande sätt har figuren till höger i fig. 7 uppstått. Där ser man en projektion av den fyrdimensionella kuben. Figuren begränsas av 12 kongruenta romber (deras form återges i fig. 8; cosinus för rombets mindre vinkel är $\frac{1}{3}$). Figuren har 14 hörnpunkter. Dessa äro bilder av den fyrdimensionella kubens hörnpunkter. Bilderna av de två sista hörnpunkterna sammanfalla i figurens mittpunkt, på samma sätt som i planfiguren till vänster. Denna tredimensionella kropp, som kallas *rombdodekaeder*, kan sammansättas av fyra kongruenta »sneda» kuber och detta

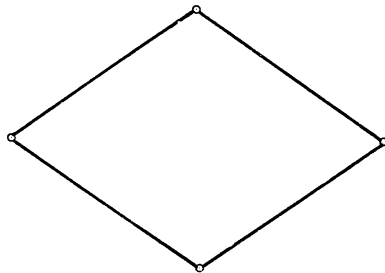


Fig. 8

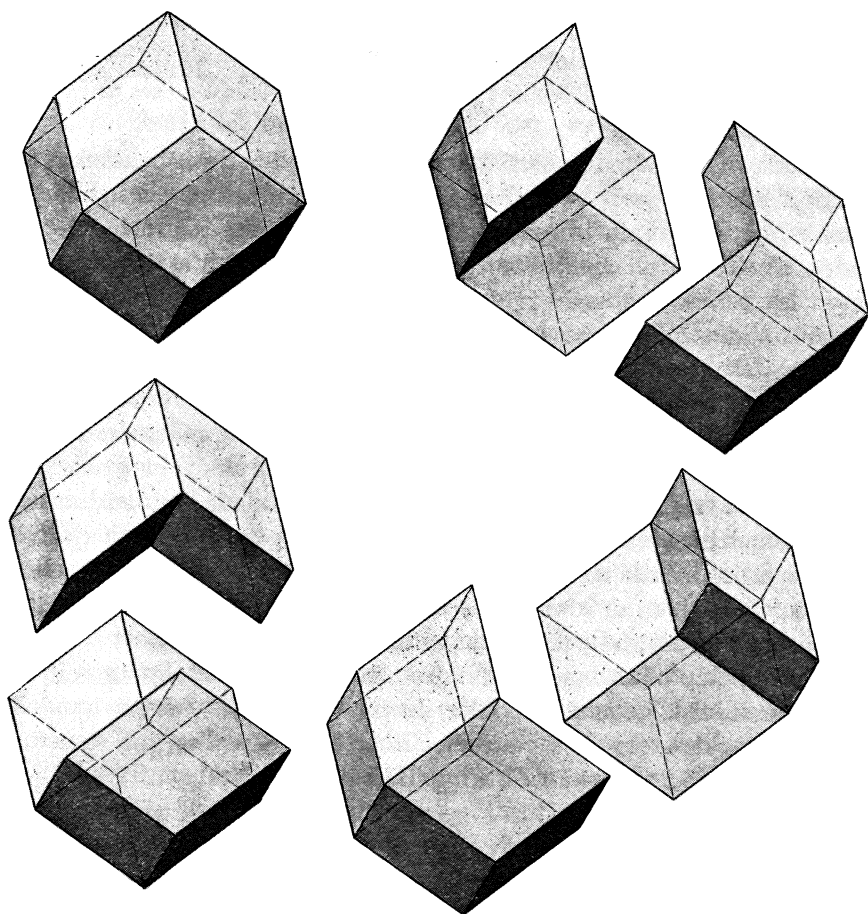


Fig. 9

kan ske på två olika sätt. I vardera fallet skall man på lämpligt sätt välja fyra av de 8 sidokanter, som stöta ihop i figurens centrum, till sidokanter i snedkuberna. Vi få alltså två uppdelningar, som exakt motsvara uppdelningen av sexhörningen i tre romber. Fig. 9 visar ytterligare hur rombdodekaedern utgående från en viss uppdelning i snedkuber kan spjälkas på tre olika sätt i två par av snedkuber. I figurerna ser man gränsyterna mellan rombdodekaederns fyra snedkuber. Snedkuberna äro bilder av den fyrdimensionella kubens gränskuber, och de täcka tillsammans rombdodekaedern dubbelt. Deras antal är alltså i själva verket 8. — Läsaren är kanske intresserad av att veta att detta slags kroppar, rombdodekaedrar, förekomma i naturen i form av granatkristaller. Man kan

alltså säga att granatkristallen är skuggan av en fyrdimensionell kub på vår tredimensionella värld.

I det föregående ha vi, för att kunna ge en viss åskådlighet åt beskrivningen av den fyrdimensionella världen, varit tvungna att ty oss till särskilt enkla figurer. Med analytiska metoder kan den dock behärskas fullständigt, såsom vi sett i det föregående. Ur framställningen har läsaren kanske fått den uppfattningen, att den matematiska teorin för det fyrdimensionella endast är ett slags tankelek, utan någon större principiell betydelse. Så är emellertid inte fallet. Det som den matematiska forskningen uppnått på detta område bör tagas på fullaste allvar. Redan det faktum, att människans psyke med tankens kraft kan befria sig från de trånga gränser vår »tillfälliga» fysiska organisation ställer för oss, är ägnat att väcka undran hos envar som har förmågan att uppfatta vad som är betydelsefullt. Men dessa resultat ha inte endast abstrakt värde. Riemann, ett av mänsklighetens största genier, utvecklade den flerdimensionella geometrin mycket längre än vad vi i det föregående ha redogjort för. Han begränsade inte sina undersökningar till endast n -dimensionell euklidisk geometri, utan utvecklade den allmänna s. k. Riemann'ska geometrin, som i en godtyckligt mångdimensionell rymd innehåller fullständig kunskap både om den euklidiska och om mycket allmänna former av icke-euklidisk geometri. Under de första åren av vårt århundrade företog vår tids stora matematiker Hilbert en generalisering, som förde betydligt längre i en annan riktning. Han införde nämligen rymder, vars dimensionstal är oändligt stort.

Dessa båda allmänna teorier, Riemanns allmänna geometri och teorin för Hilberts betydligt mera generella rymder, har haft en enorm betydelse för matematikens vidare utveckling. De ha, långt utanför den »rena» matematikens område, båda haft en avgörande andel i skapandet av den fysikaliska världsbild, som representeras av två av den exakta forskningens största skapelser i modern tid, *relativitetsteorin* och *atomfysiken*, kvantteorin.

Redan i början av denna artikel antyddes, att relativitetsteorin framställer det fysikaliska skeendet medels en fyrdimensionell geometri. I denna »händelse»-värld utgöras punkterna inte av de vanliga punkterna i vår rymd, utan av fysikaliska *händelser*, eller med andra ord av det, som sker »här och nu». En sådan händelse karakteriseras av fyra tal, nämligen tre koordinater för orten och en fjärde koordinat för tiden. I denna mening är »händelse»-världen fyrdimensionell. Detta konstaterande är i och för sig inte ägnat att förvåna. Men det intressanta är, att den fysikaliska »händelse»-världen kan uppfattas som en fyrdimensionell

geometri, emedan inom denna fyrdimensionella mängd av händelser de tidigare beskrivna metriska grundlagarna gälla. För att detta skall vara riktigt, bör man till koordinater välja tre ortskoordinater och till fjärde koordinat tiden, eller noggrannare sagt, tiden multiplicerat med imaginära enheten $i = \sqrt{-1}$. Allt detta förutsätter dessutom, att tiden inte uppfattas som en absolut storhet utan »relativt», så som Einstein gjort.

Ingen som känner till saken kan undgå att känna djup undran över att det *fysikaliska* skeendet på detta sätt kan *geometriseras*. Man bör nämligen observera, att de avsedda geometriska momenten inte har »påtvungits» fysiken: denna geometriska struktur har funnits där på förhand, så att säga »predestinerad». Vissa fysikaliska lagar äro till sin natur en gång för alla sådana, att så fort man gör de små förändringar som övergång från absolut till relativ tid förutsätter, så uppträder den geometriska strukturen omedelbart i den fysikaliska »händelse»-världen. I denna kan man då definiera de metriska grundlagarna: för det första, avståndet mellan två händelser medels ett pytagoreiskt uttryck, som påminner om det vi ovan använde, och för det andra, vinkeln mellan två »händelse»-linjer medels en formel av ovannämnd typ. Det var i själva verket ganska lätt för Einstein att, sedan Minkowski och han hade beskrivit den speciella relativitetsteorin såsom ett slags fyrdimensionell euklidisk geometri, övergå därifrån till den allmänna relativitetsteorin, Einsteins gravitationsteori. Därvid kunde han utan vidare begagna sig av det, som Riemann mer än 50 år tidigare hade skapat, när han byggde upp sin allmänna n -dimensionella differentialgeometri.

Kvantfysiken, och speciellt det sätt att framställa denna storartade teori, som man känner under namnet vågmekanik, bygger väsentligt på teorin för Hilberts rymd. När Hilbert på sin tid skapade denna teori hade han självfallet inte en tanke på några fysikaliska tillämpningar. Emedan dessa begrepp äro rätt svårfattliga, är det i detta sammanhang inte möjligt att ens antyda hur en oändligt-dimensionell geometri kan ha en motsvarighet i atomernas värld. Envar, som gjort bekantskap med litteraturen på detta område, har observerat, att i den vågmekanik de Broglie och Schrödinger skapade, spelar den s. k. *teorin för egenvärden* en grundläggande roll. Enligt den moderna atomteorin bilda elektronerna i atomen endast i vissa jämviktslägen ett stabilt system. När en elektron övergår från ett jämviktsläge till ett annat inträffar en energistrålning, som till sitt belopp är en jämn multipel av Plancks verkningskvantum. Denna strålning återspeglas i spektrallinjernas läge i atomens spektrum. I den matematiska avbildningen av dessa relationer motsvaras beräkningen av spektret av det matematiska problemet att bestämma egenvärdena för Schrödingers differentialekvation. Och teorin för egenvärdena i sin tur

behandlas med tillhjälp av teorin för Hilberts rymd. Egenvärdenas fördelning avspeglas i bestämmandet av »ortogonala« koordinatsystem i vissa Hilberts rymder och sådana ortogonala avbildningar av dessa rymder på sig själva, att vinklarna mellan de oändligt många koordinataxlarna förbli räta.

Dessa korta hänvisningar till tillämpningar av högre dimensionell geometri må räcka till för att övertyga läsaren om, att det här faktiskt är fråga om djuptliggande begrepp. Lekmannen frågar kanske, om det är nödvändigt att beskriva dessa förhållanden medels ett svårbegripligt och abstrakt matematiskt symbolspråk, som just genom dessa egenskaper är motbjudande för de flesta. Svaret blir att det är oundgängligt: talens värld bildar det enda naturliga materialet, för att avbilda de invecklade relationer, som styra det fysikaliska skeendet. Detta beror på att talen ha tvenne egenskaper, som ge dem en särställning i förhållande till andra av människorna använda avbildningsmaterial. För det första besitter talens värld en enorm bildbarhet: talen själva ställa nämligen inga restriktioner på de konstruktioner man vill utföra med dem. Utom denna *frihet* har talbegreppet en annan egenskap, som på sätt och vis är av motsatt natur, nämligen en absolut *noggrannhet*. Tack vare dessa två egenskaper, sin stora smidighet och sin absoluta exakthet, framstå talen som det idealiska hjälpmedlet att uttrycka de invecklade och fint differentierade relationer, som styra de fenomen, som äro tillgängliga för exakta metoder.

Avbildningar av den konkreta världen, som omedelbart kan iakttas och uppfattas, i mer och mer abstrakta komplex av talbegrepp, ger, sedan man hunnit till ett tillräckligt högt stadium, regelbundet lön för mödan. De allmänna idéer som låta sig uttryckas endast på detta abstrakta högre plan, projicieras så att säga tillbaka på utgångspunkten, den åskådliga, konkreta världen. De kasta sitt ljus inte endast över detta begränsade utgångsområde, utan de belysa ofta på ett överraskande sätt även en del andra konkreta fenomen. Sambandet mellan dessa och utgångsområdet hade kanske varit dömt att förbli förborgat, om den mänskliga tanken icke djärvts höja sig från sin bundenhet vid det konkreta till idéernas fria värld. Galilei ville väl betona just denna djupt symboliska innebörd hos de matematiska teorierna när han yttrade sina berömda ord: naturens bok är skriven i matematisk skrift.

ELEMENTER AF VON NEUMANN'S SPILTEORI

ERLING FØLNER

Foredrag holdt i marts 1952 i Foreningen af Matematiklærere ved
Gymnasieskoler og Seminarier i Danmark

For de rene hasardspil som terningspil og lignende har man som bekendt matematiske teorier. Det var jo netop spil af denne type, som den matematiske sandsynlighedsregning har at takke for sin opstaaen. Men der findes ogsaa en mere kompliceret type hasardspil, det bedst kendte eksempel er pokerspillet, hvor udfaldet ikke udelukkende er bestemt af tilfældigheder, men hvor ogsaa spillernes dygtighed, evne til at gætte modpartens taktik, til at skjule deres egen, o. l. har indflydelse paa spillets udfald. Man kunde maaske være fristet til at tro, at for saadanne spil vilde det være haabløst at søge en matematisk behandling. Vi skal nu ved en simplere, men fundamental type af saadanne hasardspil vise, hvorledes det alligevel er lykkedes von Neumann at give en matematisk teori [1]. Til slut skal vi angive en simplificeret type af pokerspil, som von Neumann paa grundlag heraf har været i stand til at behandle.

$\begin{array}{c c} & \text{II} \\ \text{I} & \end{array}$	1	2	...	j	...	n
1	$K(1, 1)$	$K(1, 2)$	...	$K(1, j)$	...	$K(1, n)$
2	$K(2, 1)$	$K(2, 2)$	...	$K(2, j)$	...	$K(2, n)$
...						
i	$K(i, 1)$	$K(i, 2)$	...	$K(i, j)$	...	$K(i, n)$
...						
m	$K(m, 1)$	$K(m, 2)$	...	$K(m, j)$	...	$K(m, n)$

Vi betragter et spil med to deltagere **I** og **II**. Spillet bestaar i, at **I** vælger et vilkaarligt af tallene 1, 2, ..., m og **II** vælger et vilkaarligt af tallene 1, 2, ..., n . Den ene spiller ved ikke, hvad den anden vælger, men de kender begge to paa forhaand ovenstaaende tavle, som er at forstaa saaledes, at hvis spilleren **I** har valgt i , og spilleren **II** har valgt j , saa vinder

spiller I beløbet $K(i, j)$ fra spiller II. Her er der naturligvis tale om fortegnsregning, K 'erne kan baade være positive og negative, og en negativ gevinst skal naturligvis betyde et tilsvarende tab. (Ellers vilde det jo ogsaa se trist ud for spiller II). Vi kan sige, at tavlen er spiller I's gevinst-tavle. Spiller II's gevinsttavle faas ved at skifte fortegn paa alle $K(i, j)$.

Hvilke overvejelser kan I nu anstille paa grundlag af den forelagte gevinsttavle, før han vælger sit tal i ? Han har ikke nogen indflydelse paa, hvilket tal II vælger, men I kan i hvert fald slutte, at hvis han (I) vælger i , vil hans gevinst w , lige meget hvad II gør, være

$$\geq \varphi(i) = \min_j K(i, j),$$

d. v. s. det mindste af tallene i tavlens i 'te horisontale række. Der er derfor en vis samling i 'er, som er særlig fordelagtige for ham, nemlig de i 'er, for hvilke $\varphi(i)$ er størst mulig. Vi sætter

$$v_1 = \max_i \varphi(i) = \max_i \min_j K(i, j),$$

d. v. s. den største af minimumsværdierne i de forskellige horisontale rækker. Den omtalte mængde af i 'er er da mængden

$$A = [i \mid \varphi(i) = v_1],$$

d. v. s. mængden af de i , som har $\varphi(i) = v_1$.

Vi ser, at hvis I vælger sit i fra mængden A , vil hans gevinst w , lige meget hvad II gør, være $\geq v_1$, altsaa

$$(1) \quad w \geq v_1,$$

medens han, hvis han vælger sit i uden for A , og spiller II vælger sit j passende, vil faa en gevinst $< v_1$.

Ganske analoge betragtninger kan spiller II anstille. Idet hans gevinst-tavle faas af tavlen ovenfor ved at skifte fortegn paa $K(i, j)$, ses det, at han skal betragte funktionen

$$\psi(j) = \max_i K(i, j),$$

størrelsen

$$v_2 = \min_j \psi(j) = \min_j \max_i K(i, j)$$

og mængden

$$B = [j \mid \psi(j) = v_2].$$

Resultatet af II's betragtninger bliver, at hvis han vælger sit j fra mængden B , vil hans gevinst $-w$, lige meget hvad I gør, være $\geq -v_2$, altsaa

$$(2) \quad -w \geq -v_2,$$

medens han, hvis han vælger sit j uden for B , og spiller I vælger sit i passende, vil faa en gevinst $< -v_2$.

Af (1) og (2) sluttet, at hvis baade I og II spiller »fornuftigt« i den nævnte forstand, vil

$$(3) \quad v_1 \leq w \leq v_2.$$

Der er nu et *vigtigt specialtilfælde*, i hvilket disse simple betragtninger allerede kan siges at være afsluttende, nemlig det tilfælde, hvor $v_1 = v_2$, og (3) derfor bestemmer w entydigt. Lad os f. eks. tænke os, at vi betragter et spil med $v_1 = v_2 = 2$. Hvis I spiller fornuftigt i ovennævnte forstand, vil han hver gang, lige meget hvad II gør, vinde mindst 2. Saafremt I spiller fornuftigt, kan II altsaa ikke undgaa at tabe mindst 2 hver gang. Paa den anden side vil II kunne indskrænke sit tab til 2 ved at spille fornuftigt i ovennævnte forstand. Retfærdigt kan et saadant spil naturligvis kun kaldes, hvis den fælles værdi af v 'erne er 0. Hvis begge da spiller fornuftigt i ovennævnte forstand, vil gevinsten hele tiden være 0.

Eksempel.

I \ II						
	1	2	3	4	5	
1	-3	2	-1	-3	-1	$v_1 = v_2 = 0$ $A = \{2, 4\}$ $B = \{3, 5\}.$
2	1	1	0	0	0	
3	-3	-2	-1	-4	-1	
4	0	1	0	2	0	
5	-5	6	-1	5	0	

Vi gaar derefter over til at behandle det mere interessante tilfælde, hvor $v_1 < v_2$. Som et eksempel tænker vi os et øjeblik, at $v_1 = -2$ og $v_2 = 2$. De tidligere simple betragtninger er gyldige, der er en vis fornuft for I i at vælge i fra A og en vis fornuft for II i at vælge j fra B , men de giver ingen afsluttet teori for spillet, thi spiller begge »fornuftigt«, er det eneste, vi kan sige om I's gevinst w , at den ifølge (3) ligger mellem -2 og 2 , og bl. a. er fortegnet for w altsaa uafgjort.

For at opstille en teori for det almindelige tilfælde $v_1 \leq v_2$ maa vi betragte spillet fra en statistisk synsvinkel. Som spillet var defineret, bestod det i, at I valgte sig et vilkaarligt tal i blandt tallene $1, 2, \dots, m$, og II valgte sig et vilkaarligt tal j blandt tallene $1, 2, \dots, n$, uden at de kendte hinandens valg, men begge med kendskab til gevinsttavlen. Lad os betragte to snit gennem I og II's hoveder for at se, hvorledes vi kan fortolke den proces, at I og II vælger et tal som nævnt.

Det ligner to roulette (fig. 1). Paa den første er der sandsynligheden $\xi_i \geq 0$ ($\sum \xi_i = 1$) for, at i kommer ud, paa den anden er der sandsynlig-

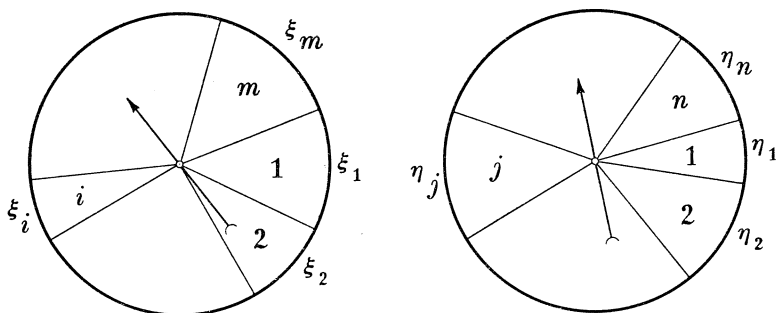


Fig. 1.

heden $\eta_j \geq 0$ ($\sum \eta_j = 1$) for, at j kommer ud. Vi vil da se saaledes paa det: **I** vælger sig en sandsynlighedsvektor $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, $\xi_i \geq 0$, $\sum \xi_i = 1$. **II** vælger sig en sandsynlighedsvektor $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, $\eta_j \geq 0$, $\sum \eta_j = 1$. Der er da for **I** en *forventet* gevinst (middelværdi for gevinsten)

$$W = \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i,j} K(i, j) \xi_i \eta_j,$$

idet sandsynligheden for, at spiller **I**'s »hjerneroulet« kommer ud paa i og samtidig spiller **II**'s »hjerneroulet« kommer ud paa j , er $\xi_i \eta_j$, og i det tilfælde er gevinsten jo $K(i, j)$.

For spillet betragtet paa denne maade kan vi lave en forventet gevinsttavle (for **I**) ganske svarende til den oprindelige gevinsttavle, nemlig

	II	$\vec{\eta}$
I	$\vec{\xi}$	$\mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$

men her er der uendelig mange indgangsværdier $\vec{\xi}$ for **I** og uendelig mange indgangsværdier $\vec{\eta}$ for **II**.

For dette spil kan vi anstille de analoge simple betragtninger til dem, vi indledte med. Spiller **I** skal altsaa betragte funktionen

$$\Phi(\vec{\xi}) = \min_{\vec{\eta}} \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \quad ^1$$

størrelsen

$$V_1 = \max_{\vec{\xi}} \Phi(\vec{\xi}) = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

¹ Her og i det umiddelbart følgende er grunden til, at de omtalte (absolutte) maxima og minima eksisterer, at hvert af dem, som man let viser, tages af en kontinuert funktion paa en lukket begrænset mængde i et euklidisk rum.

og mængden

$$\mathbf{A} = [\vec{\xi} \mid \Phi(\vec{\xi}) = V_1] .$$

Hvis **I** vælger sin $\vec{\xi}$ -vektor fra **A**, vil hans forventede gevinst W , lige meget hvilken $\vec{\eta}$ -vektor **II** vælger, altid være $\geq V_1$, altsaa

$$(1') \quad W \geq V_1 ,$$

og for et $\vec{\xi}$ uden for **A** risikerer han en mindre forventet gevinst end V_1 .

Spiller **II** skal analogt betragte funktionen

$$\Psi(\vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) ,$$

størrelsen

$$V_2 = \min_{\vec{\eta}} \Psi(\vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

og mængden

$$\mathbf{B} = [\vec{\eta} \mid \Psi(\vec{\eta}) = V_2] .$$

Hvis **II** vælger sin $\vec{\eta}$ -vektor fra **B**, vil hans forventede gevinst $-W$, lige meget hvilken $\vec{\xi}$ -vektor **I** vælger, altid være $\geq -V_2$, altsaa

$$(2') \quad -W \geq -V_2 ,$$

og for et $\vec{\eta}$ uden for **B** risikerer han en mindre forventet gevinst end $-V_2$.

Af (1') og (2') sluttes, at hvis baade (1) og (2) spiller fornuftigt i den nævnte forstand, vil

$$(3') \quad V_1 \leq W \leq V_2 .$$

Det er let at vise, at $v_1 \leq V_1$ og at $V_2 \leq v_2$, men lad os forbigaa det lille bevis herfor og straks gaa over til at bevise den overraskende

Hovedsætning. *Der gælder altid $V_1 = V_2$, [2].*

Paa forhaand ved vi ifølge (3'), at $V_1 \leq V_2$.

Efter hvad vi tidligere har sagt for specialtilfældet $v_1 = v_2$, følger af hovedsætningen, at de forangaaende betragtninger (1'), (2') giver en afrundet teori for spillet. Efter beviset for hovedsætningen skal vi belyse dette nærmere ved et gennemregnet eksempel.

Bevis for hovedsætning. Vi fører beviset i tilfældet $m = n = 2$, men det gaar analogt for vilkaarlige m og n . Gevinsttavlen har i det nævnte tilfælde formen

I \ II	1	2
1	K_{11}	K_{12}
2	K_{21}	K_{22}

I en x_1x_2 -plan afsættes »søjlepunkterne« (K_{11}, K_{21}) og (K_{12}, K_{22}) samt de to grundpunkter $(1, 0)$ og $(0, 1)$. Der er nu to muligheder (fig. 2). Enten (tilfælde 1°) ligger nulpunktet i det indre eller paa randen af den konvekse polygon, som udspændes af de fire punkter (firkant, trekant eller tokant), eller ogsaa (tilfælde 2°) ligger nulpunktet uden for denne polygon.

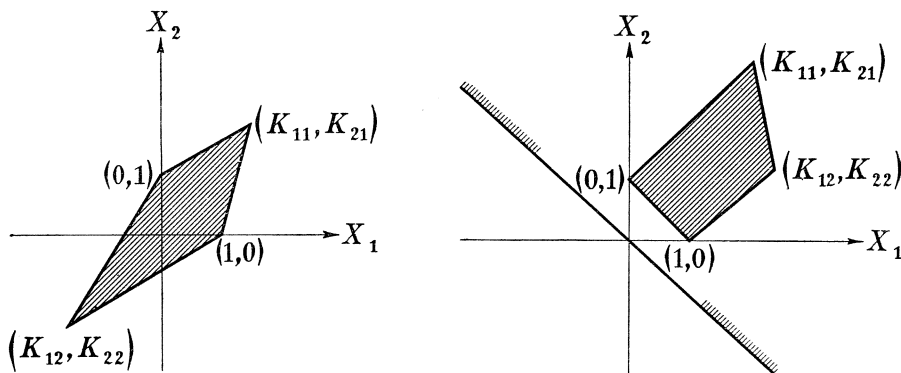


Fig. 2.

1°. I dette tilfælde kan man forsyne de fire punkter med ikke-negative masser t_1, t_2, s_1, s_2 med summen 1, saaledes at tyngdepunktet for de fire masser ligger i $(0, 0)$. Vi har da

$$(0, 0) = t_1(K_{11}, K_{21}) + t_2(K_{12}, K_{22}) + s_1(1, 0) + s_2(0, 1),$$

altsaa

$$K_{11}t_1 + K_{12}t_2 + s_1 = 0, \quad K_{21}t_1 + K_{22}t_2 + s_2 = 0.$$

Her kan t_1 og t_2 ikke begge være 0, da i saa fald ogsaa s_1 og s_2 maatte være 0, hvilket er umuligt, da massernes sum var lig med 1. Vi kan da sætte

$$\eta_1 = \frac{t_1}{t_1 + t_2}, \quad \eta_2 = \frac{t_2}{t_1 + t_2} \text{ med } \eta_1 \geq 0, \quad \eta_2 \geq 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 1$$

og faar

$$K_{11}\eta_1 + K_{12}\eta_2 \leq 0, \quad K_{21}\eta_1 + K_{22}\eta_2 \leq 0.$$

Men heraf følger for dette η_1, η_2

$$\max_{\xi_1, \xi_2} [(K_{11}\eta_1 + K_{12}\eta_2)\xi_1 + (K_{21}\eta_1 + K_{22}\eta_2)\xi_2] \leq 0,$$

men saa meget mere er da

$$V_2 = \min_{\eta} \max_{\xi} [(K_{11}\eta_1 + K_{12}\eta_2)\xi_1 + (K_{21}\eta_1 + K_{22}\eta_2)\xi_2] \leq 0.$$

Vi har altsaa vist, at i tilfældet 1° er $V_2 \leq 0$.

2°. I dette tilfælde findes en halvplan $a_1x_1 + a_2x_2 > 0$ med begrænsningslinje gennem $(0, 0)$, som helt indeholder polygonen. Da $(1, 0)$ og $(0, 1)$ ligger i halvplanen, er $a_1 > 0$ og $a_2 > 0$. For de to søjlepunkters vedkommende faas

Vi sætter $a_1K_{11} + a_2K_{21} > 0, \quad a_1K_{12} + a_2K_{22} > 0.$

$$\xi_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad \xi_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \text{ med } \xi_1 > 0, \quad \xi_2 > 0, \quad \xi_1 + \xi_2 = 1$$

og faar

$$K_{11}\xi_1 + K_{21}\xi_2 > 0, \quad K_{12}\xi_1 + K_{22}\xi_2 > 0.$$

Men heraf følger for dette ξ_1, ξ_2

$$\min_{\eta} [(K_{11}\xi_1 + K_{21}\xi_2)\eta_1 + (K_{12}\xi_1 + K_{22}\xi_2)\eta_2] \geq 0 \text{ (endda } > 0),$$

men saa meget mere er da

$$V_1 = \max_{\xi} \min_{\eta} [(K_{11}\xi_1 + K_{21}\xi_2)\eta_1 + (K_{12}\xi_1 + K_{22}\xi_2)\eta_2] \geq 0.$$

Vi har altsaa vist, at i tilfældet 2° er $V_1 \geq 0$.

Af disse to resultater følger, at det er umuligt, at $V_1 < 0 < V_2$.

Hvis vi her kunde erstatte tallet 0 med et vilkaarligt tal ω , vilde hovedsætningen naturligvis være vist. Dette opnaas nu meget elegant ved i stedet for det oprindelige spil at betragte spillet med gevinsttavlen

I \ II	1	2
1	$K_{11} - \omega$	$K_{12} - \omega$
2	$K_{21} - \omega$	$K_{22} - \omega$

hvor vi har subtraheret ω fra alle K 'erne. Udtrykket $\mathbf{K}$ for dette spil er

$$\mathbf{K}_1(\overset{\rightarrow}{\xi}, \overset{\rightarrow}{\eta}) = \sum_{i,j} (K_{ij} - \omega) \xi_i \eta_j = \sum_{i,j} K_{ij} \xi_i \eta_j - \omega = \mathbf{K}(\overset{\rightarrow}{\xi}, \overset{\rightarrow}{\eta}) - \omega,$$

altsaa det oprindelige $\mathbf{K}$ minus ω . Det analoge gælder da V_1 og V_2 for dette spil. Anvendes derfor resultatet ovenfor paa dette spil, faas, at det er umuligt, at $V_1 - \omega < 0 < V_2 - \omega$, d. v. s. det er umuligt, at $V_1 < \omega < V_2$. Da ω her er et vilkårligt tal, er altsaa virkelig $V_1 = V_2$, for paa forhaand vidste vi jo, at $V_1 \leq V_2$. Hermed er hovedsætningen bevist.

Eksempel. (Beregnet for praktiske anvendelser!)

I \ II	1	2	3
1	120	-40	-20
2	-60	20	11
3	20	-9	-1

Vi bemærker først, at $v_1 = -9$, $v_2 = 11$, $A = \{3\}$, $B = \{3\}$. Lad os derefter gaa over til at bestemme størrelsen $V = V_1 = V_2$ og mængderne **A** og **B**.

Vi søger samtlige $\vec{\xi}$ 'er, der tilfredsstiller uligheden

$$(4) \quad \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = (120\xi_1 - 60\xi_2 + 20\xi_3)\eta_1 + (-40\xi_1 + 20\xi_2 - 9\xi_3)\eta_2 + (-20\xi_1 + 11\xi_2 - \xi_3)\eta_3 \geq c \text{ for alle } \vec{\eta},$$

idet vi samtidig ønsker, at c 'et paa højre side af uligheden er det største tal, for hvilket systemet har mindst en løsning $\vec{\xi}$. Idet

$$V = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}),$$

er dette maksimale c netop vort V . Idet endvidere mængden **A** bestaar af de $\vec{\xi}$, for hvilke $\min_{\vec{\eta}} \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ er størst mulig, ses det, at **A** netop udgøres af samtlige af de omtalte $\vec{\xi}$ 'er.

Idet summen af η 'erne er 1, kan (4) skrives paa formen

$$(5) \quad (120\xi_1 - 60\xi_2 + 20\xi_3 - c)\eta_1 + (-40\xi_1 + 20\xi_2 - 9\xi_3 - c)\eta_2 + (-20\xi_1 + 11\xi_2 - \xi_3 - c)\eta_3 \geq 0 \text{ for alle } \vec{\eta}.$$

Dette krav er ensbetydende med systemet af uligheder

$$\begin{aligned} (6) \quad & 120\xi_1 - 60\xi_2 + 20\xi_3 - c \geq 0 \\ (7) \quad & -40\xi_1 + 20\xi_2 - 9\xi_3 - c \geq 0 \\ (8) \quad & -20\xi_1 + 11\xi_2 - \xi_3 - c \geq 0, \end{aligned}$$

thi (6), (7), (8) faas af (5) ved successivt at indsætte (de lovlige!) $\vec{\eta}$ -vektorer $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, og (5) kan faas af systemet (6), (7), (8) ved multiplikation med η_1 , η_2 , η_3 (≥ 0 !) og addition. Vi skriver nu (6) og (7) som

$$(9) \quad -27\xi_3 - 3c \geq 120\xi_1 - 60\xi_2 \geq -20\xi_3 + c,$$

og ved at sammenholde yderledene heri faas

$$(10) \quad 4c \leq -7\xi_3.$$

Da $\xi_3 \geq 0$, maa i hvert fald $c \leq 0$. Vi prøver nu, om det største af disse c , altsaa $c = 0$ kan benyttes. Af (10) faas da $\xi_3 = 0$ og af (9) $\xi_2 = 2\xi_1$, altsaa $\xi_1 = \frac{1}{3}$, $\xi_2 = \frac{2}{3}$, $\xi_3 = 0$, og dette stemmer virkelig ogsaa i (8), thi $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} > 0$ (endda med effektivt ulighedstegn, medens (6) og (7) var opfyldt med lighedstegn).

Hermed er vist, at $V = 0$, altsaa at spillet er retfærdigt, og at vektoren $\vec{\xi} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ er den eneste vektor i **A**. Endvidere ser vi af samme udtryk for $\mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, som vi benyttede i (4), at

$$W = \mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{2}{3}\eta_3 \text{ for } \vec{\xi} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0).$$

Dette er **I**'s forventede gevinst, hvis han spiller fornuftigt, d. v. s. vælger tallet 1 med sandsynligheden $\frac{1}{3}$, tallet 2 med sandsynligheden $\frac{2}{3}$ og tallet 3 med sandsynligheden 0. Han kan f. eks. indrette en lille privat roulette til det formaal. Og denne forventede gevinst vil være positiv, hvis blot **II** vælger tallet 3 med positiv sandsynlighed η_3 .

Paa ganske analog maade beregner man, at **B** bestaar af den ene vektor $\vec{\eta} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$, og at

$$-W = -\mathbf{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{7}{4}\xi_3 \text{ for } \vec{\eta} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0).$$

Dette er **II**'s forventede gevinst, hvis han spiller fornuftigt, d. v. s. vælger tallet 1 med sandsynligheden $\frac{1}{4}$, tallet 2 med sandsynligheden $\frac{3}{4}$ og tallet 3 med sandsynligheden 0. Han kan f. eks. indrette en lille privat roulette til dette formaal. Og den forventede gevinst vil være positiv, hvis blot **I** vælger tallet 3 med positiv sandsynlighed ξ_3 .

Ved et umiddelbart blik paa skemaet er det aldeles ikke oplagt, at **I** og **II** skal vælge numrene 3 med sandsynligheden 0. Ved at vælge 3 har **I** chancen for at vinde 20, selvom han ganske vist ogsaa har muligheden for at tabe 9 og 1. Ved at vælge 3 har **II** chancen for at vinde 20 eller 1 og den ene tabsmulighed 11. Bemærk iøvrigt, at de elementære mængder A og B begge er $\{3\}$, saa det er altsaa kun en fordel, hvis modstanderen kender den elementære del af spillets teori (men naturligvis helst ikke mere). Da spillet er retfærdigt, kan man lade modstanderen vælge, om han helst vil være **I** eller **II**.

Til sidst skal vi kort omtale, hvorledes det er lykkedes von Neumann at behandle et (ganske vist temmelig simplificeret) pokerspil ved hjælp af den nævnte teori.

Det simplificerede pokerspil spilles af to personer **I** og **II**, som hver faar tildelt 5 kort fra hvert sit sæt spillekort. Der er to meldinger, høj og lav, svarende til et stort beløb a og et lille beløb b ($a > b > 0$). Spillerne melder *uafhængigt af hinanden* efter at have set deres egne kort (f. eks. kan man tænke sig, at de hver noterer deres melding paa en lille seddel). *Derefter* sammenlignes meldingerne. Hvis begge har meldt højt, sammenlignes hænderne, og den, der har den stærkeste haand (efter sædvanlige pokerregler), faar udbetalt beløbet a af den anden; hvis hænderne er lige stærke, er gevinsten 0. Hvis begge har meldt lavt, sammenlignes hænderne, og

den, der har den stærkeste haand, faar udbetalt beløbet b af den anden; hvis hænderne er lige stærke, er gevinsten 0. Endelig, hvis den ene har meldt højt, og den anden har meldt lavt, har den, der har meldt lavt, muligheden for enten at »forhøje sin melding« eller for at »passe«. I første tilfælde gaas derefter frem som ved to høje meldinger; i sidste tilfælde sammenlignes kortene ikke, og den, der passer, maa betale det lille beløb b til den anden.

Vi kan sige, at der er tre meldinger $i = 1, 2, 3$: Melding 1 bestaaende i høj melding, melding 2 bestaaende i lav melding, men med den skjulte hensigt at forhøje, hvis det bliver nødvendigt, og melding 3 bestaaende i lav melding og med den skjulte hensigt at passe, hvis det kommer paa tale.

For at faa pokerspillet til at blive et spil af den ovenfor behandlede type »opfatter« von Neumann det paa følgende noget teoretiske maade. Han forestiller sig, at spillerne, før de faar tildelt deres kort, planlægger, hvorledes de vil melde paa enhver af de mulige hænder. Vi nummererer samtlige mulige hænder efter voksende styrke med numrene $1, 2, \dots, S$. Vi kan da sige, at I vælger sig en strategi $(i_1, i_2, \dots, i_S)$, d. v. s. han vil melde i_1 paa haand nr. 1, han vil melde i_2 paa haand nr. 2 o. s. v., hvor hvert af i 'erne naturligvis betegner en af meldingerne 1, 2 eller 3. Ganske analogt kan vi sige, at II vælger sig en strategi $(j_1, j_2, \dots, j_S)$, d. v. s. han vil melde j_1 paa haand nr. 1, han vil melde j_2 paa haand nr. 2 o. s. v., hvor hvert af j 'erne naturligvis betegner en af meldingerne 1, 2 eller 3. Hver af spillerne har aabenbart 3^S forskellige strategier at vælge imellem. Hørende til disse valg af strategier svarer en *forventet* gevinst for I, som vi let kan angive et udtryk for.

Vi definerer funktionerne $L_+(i, j)$, $L_0(i, j)$, $L_-(i, j)$ ved skemaerne

$i \backslash j$	1	2	3
1	a	a	b
2	a	b	b
3	$-b$	b	b

$L_+(i, j)$

$i \backslash j$	1	2	3
1	0	0	b
2	0	0	0
3	$-b$	0	0

$L_0(i, j)$

$i \backslash j$	1	2	3
1	$-a$	$-a$	b
2	$-a$	$-b$	$-b$
3	$-b$	$-b$	$-b$

$L_-(i, j)$

$L_+(i, j)$, $L_0(i, j)$, $L_-(i, j)$ angiver, som man let gaar efter, I's gevinst, naar I har meldt i og II har meldt j , eftersom henholdsvis I's haand er stærkest, de to hænder er lige stærke, eller I's haand er svagest. Den forventede gevinst for I under det ovenfor omtalte valg af strategier bliver da

$$K(i_1, i_2, \dots, i_S | j_1, j_2, \dots, j_S) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2} L_{\text{sgn}(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2}),$$

hvor $\text{sgn}(s_1 - s_2)$ betegner $+$, 0 eller $-$, eftersom $s_1 > s_2$, $s_1 = s_2$ eller $s_1 < s_2$. Thi sandsynligheden for, at **I** faar haanden s_1 og samtidig **II** haanden s_2 , er $\frac{1}{S^2}$, og hvis $s_1 > s_2$, bliver **I**'s gevinst jo i saa fald $L_+(i_{s_1}, j_{s_2})$,

hvis $s_1 = s_2$, bliver den $L_0(i_{s_1}, j_{s_2})$, og hvis $s_1 < s_2$, bliver den $L_-(i_{s_1}, j_{s_2})$.

Opfattet paa denne maade bliver pokerspillet af den udførligt behandlede type med $m = n = 3^S$.

Med disse antydninger vil vi lade os nøje, men blot til sidst angive, hvad en nærmere beregning (delvis med tilnærmelse) giver som fornuftigt spil. At $V = 0$, altsaa at spillet er retfærdigt, følger straks paa grund af den fuldstændige symmetri mellem **I** og **II**. I stedet for den gamle styrkeskala for hænderne $1, 2, 3, \dots, S-1, S$ bruges en ny skala

$$z = 0, \frac{1}{S-1}, \frac{2}{S-1}, \dots, \frac{S-2}{S-1}, 1.$$

Hvis man faar en haand, hvis styrke z er $> \frac{a-b}{a}$, skal man altid melde 1.

Hvis man faar en haand, hvis styrke z er $< \frac{a-b}{a}$, skal man melde 1 med

sandsynligheden $\frac{b}{a+b}$ og 3 med sandsynligheden $\frac{a}{a+b}$ (se fig. 3).

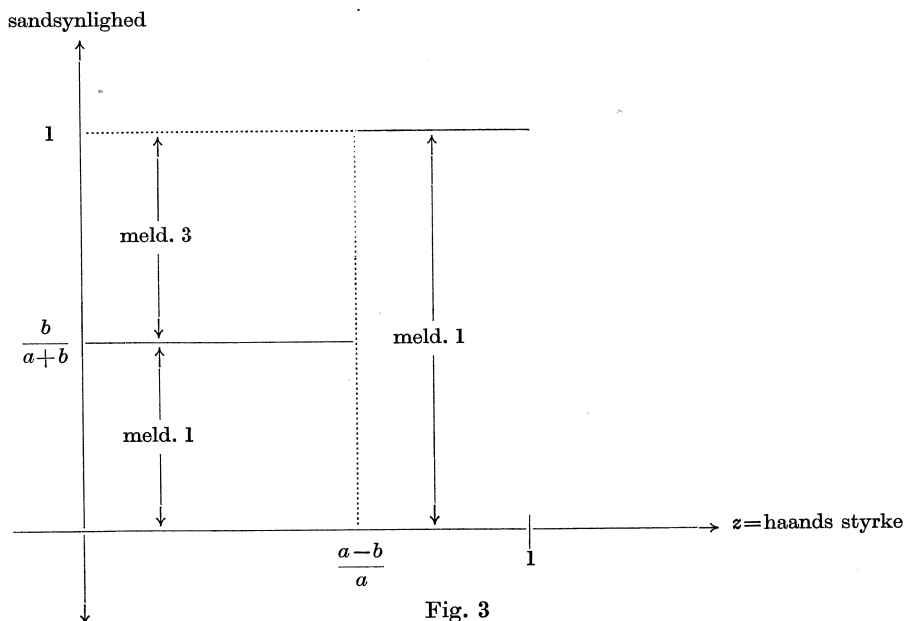


Fig. 3

Man vil blive straffet for det, hvis den anden spiller fornuftigt som nævnt, og man selv giver sig til at melde 2 med positiv sandsynlighed for nogle af hænderne eller melde 3 med positiv sandsynlighed for hænder,

hvis styrke er $> \frac{a-b}{a}$.

Kvantitativt forstaar man godt de to grænser $\frac{a-b}{a}$ og $\frac{b}{a+b}$. Hvis a er meget stor i forhold til b , kommer $\frac{a-b}{a}$ nær op til 1, d. v. s. hænderne skal være meget stærke, før man udelukkende melder 1 paa dem. Endvidere vil $\frac{b}{a+b}$ blive meget lille, svarende til at »bluffmeldingerne« (melding 1 paa haand med lav styrke) sker med meget lille sandsynlighed.

REFERENCER:

- [1] JOHN VON NEUMANN and OSKAR MORGENSTERN: *Theory of games and economic behaviour*. Second edition. Princeton University Press, Princeton 1947.
- [2] Det første bevis for hovedsætningen blev givet af VON NEUMANN: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. Math. Ann., 100 (1928), p. 295–320. Det første elementære bevis blev givet af J. VILLE i E. BOREL: *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, vol. IV, 2, *Applications aux Jeux de Hasard*, Paris 1938, GAUTHIER-VILLARS, Note de J. VILLE: *Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs*, p. 105–113. Det foreliggende bevis stammer fra [1].

LITTERATUR

Albert Einstein: *The Meaning of Relativity*. 4th Edition. Princeton, N. J., Princeton University Press, 1953. 3+169 pp. \$ 3.50.

Space and Time in Pre-Relativity Physics 1-23 * The Theory of Special Relativity 24-54 * The General Theory of Relativity 55-78 * The General Theory of Relativity (Continued) 79-108 * Appendix for the Second Edition 109-132 * Appendix II. Generalization of Gravitation Theory 133-165 * Index.

Oystein Ore: *Cardano, The Gambling Scholar*. Princeton, N. J., Princeton University Press, 1953. 14+249 pp. \$ 4.00.

The stormy life of Cardano 3-24 * Cardano's enigmatic character 25-52 * The battles of the scholars 53-107 * Cardano, the gambler 108-142 * The science of gambling 143-177 * Bibliography 178-180 * Liber de ludo aleae, the Book on Games of Chance, by Gerolamo Cardano, translated by Sidney Henry Gould 181-242 * Index 243.

W. Lietzmann: *Riesen und Zwerge im Zahlenreich*, fünfte Aufl. Stuttgart, B. G. Teubner, 1953. 60 S. DM 2.40. (kart.).

Vom Zählen 5-9 * Zahlssysteme 10-13 * Veranschaulichung grosser Zahlen durch Weg und Zeit, durch Fläche und Körper 14-20 * Etwas vom Rechnen mit grossen Zahlen 20-24 * Die grösste Zahl, die mit drei Ziffern geschrieben werden kann 24-30 * Von Primzahlen, vollkommenen Zahlen und Teilerprotzen 31-40 * Noch einige Beispiele von Zahlenriesen 40-47 * Zahlenzwerge 47-58 * Auch im Lande der Riesen und der Zwerge wird mit gewöhnlichen Zahlen gerechnet 58-59 * Namenverzeichnis 60.

W. Breidenbach: *Das delische Problem (Die Verdoppelung des Würfels)*, dritte Aufl. Stuttgart, B. G. Teubner, 1953. 59 S. DM 2.40 (kart.).

Das Problem 5-14 * Exakte Lösungen durch Einschiebungen 15-19 * Exakte Lösungen durch Kegelschnitte 19-24 * Exakte Lösungen durch höhere Kurven 24-32 * Näherungslösungen mit Zirkel und Lineal 32-35 * Der Unmöglichkeitsbeweis 35-57 * Namen- und Sachverzeichnis 58-59.

A. Rohrberg: *Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes*, elfte Aufl. Stuttgart, B. G. Teubner, 1953. 64 S. DM 2.50 (kart.).

Anfertigung eines Rechenstabes 5-8 * Beschreibung eines Rechenstabes 8-9 * Beziehungen der Teilungen des Rechenstabes zueinander 9-23 * Die Multiplikation 23-33 * Die Division 34-39 * Vereinigte Multiplikation und Division 39-48 * Die trigonometrischen Teilungen 49-53 * Die nicht-logarithmische Teilung 53-54 *

Die logarithmische Teilung der Logarithmen 54–57 * Rechenstäbe mit grösserer Genauigkeit 57–58 * Kurze Geschichte des Rechenstabes 59–60 * Die wichtigsten Handgriffe des Stabrechnens 61–63 * Die wichtigsten Arten der Rechenstäbe 63–64.

Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. 227 pp. sh. 37/6.

The Real and Complex Number Systems 1–17 * Elements of Set Theory 18–35 * Numerical Sequences and Series 36–63 * Continuity 64–76 * Differentiation 77–86 * The Riemann-Stieltjes Integral 87–114 * Sequences and Series of Functions 115–139 * Further Topics in the Theory of Series 140–164 * Functions of Several Variables 165–189 * The Lebesgue Theory 190–220 * Bibliography 221 * List of Symbols 222 * Index 223–227.

(P. Wijdenes): *Noordhoff's Wiskundige Tafels in 5 Decimalen*. 2. Aufl. Groningen, P. Noordhoff, 1953. 8+268 S. fl. 8.75.

Die gemeinen Logarithmen 1–24 * Log. der trigonometrischen Funktionen 25–80 * Umwandlungen 81–88 * Trigonometrische Funktionen 89–201 * Beitafern (Natürliche Logarithmen; Natürliche Logarithmen von Primzahlen; Exp. Funktionen; Hyp. Funktionen; Primzahlen; Potenzen, Wurzeln und Reziproken; Höhere Funktionen; Konstanten) 202–268.

F. Fitting: *Mathematische Mussestunden*. Elfte Aufl. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1953. 271 S. DM 7.20.

Erraten gedachter Zahlen 13–20 * Vorauswissen erhaltener Resultate 21–22 * Merkwürdige Zifferfolgen 23–31 * Über sehr grosse Zahlen 32–45 * Erraten der Augensumme verdeckt liegender Karten 46–49 * Umfüllungsaufgaben 50–58 * Neunerprobe und Neunerkunststück 59–62 * Würfelkunststücke 63–65 * Dominoketten 66–70 * Darstellung aller Zahlen als Summen von Potenzen von Zwei 71–75 * Das Bachetsche Gewichtsproblem 76–78 * Erraten von Besitzern verschiedener Sachen 79–81 * Spiel von zwei Personen, die abwechselnd addieren 83–84 * Vollkommene Zahlen 85–89 * Pythagoreische und heronische Zahlen 90–98 * Erschwerte Teilung 99–105 * Trugschlüsse 106–113 * Das Problem der 15 Christen und der 15 Türken 117–129 * Magische Quadrate 130–169 * Boss-Puzzle oder Fünfezhnerspiel 170–190 * Ewiger Kalender für Wochentage und Osterdaten 191–195 * Ewiger Kalender für Neumond und Vollmond 196–200 * Eulersche Wanderungen 201–208 * Hamiltonsche Rundreisen 209–222 * Rösselsprünge 223–255 * Das Sternsechseck 256–266 * Das Spiel der 30 bunten Würfeln des Majors Mac Mahon 267–271.

Squaring the Circle and other Monographs. Chelsea Publishing Co., 1953. 57+143+110+51 pp. \$ 3.25.

1. E. W. Hobson: *Squaring the Circle, a History of the Problem*. General account of the Problem 1–12 * The first Period 13–35 * The Second Period 36–42 * The Third Period 43–57.

2. Hilda P. Hudson: *Ruler and Compasses*. Introduction 1–7 * Possible Constructions 8–34 * Ruler Constructions 35–58 * Ruler and Compass Constructions

59-77 * Standard Methods 78-100 * Comparison of Methods 101-117 * One Fixed Circle 118-130 * Compasses only 131-143.

3. A. N. Singh: *The Theory and Construction of Non-differentiable Functions*. Functions defined by Series 1-23 * Functions defined geometrically 24-48 * Functions defined arithmetically 49-74 * Properties of Non-differentiable Functions 75-97 * Bibliography 99-110.

4. A. B. Kempe: *How to draw a Straight Line; a Lecture on Linkages*. 1-45 * Notes 47-51.

L. Brun et L. Treuillet: *Exercices de géométrie dans l'espace*. Librairie Vuibert, Paris, 1953. 234 pages.

Droites et plans 7-12 * Parallélisme 13-23 * Droites et plans perpendiculaires 24-37 * Dièdres 38-44 * Plans perpendiculaires 45-51 * Projections 52-60 * Trièdres 61-67 * Prismes et parallélépipèdes 68-79 * Tétraèdres et pyramides 80-99 * Aire et volume des polyèdres 100-112 * Cylindres et cônes 113-126 * Sphère 127-147 * Lieux géométriques 148-170 * Constructions géométriques 171-182 * Quelques positions remarquables des points et des droites dans l'espace 183-191 * Translation, rotation, symétrie 192-199 * Homothétie 200-208 * Des figures en Géométrie dans l'espace 209-216 * Problèmes de révision 217-234.

E. R. Stabler: *An Introduction to Mathematical Thought*. Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge (Mass.), 1953. 4+268 pp. \$ 4.50.

Part I: Mathematical Thought in Relation to Logic and Science. — The Nature of Mathematical Knowledge 1-25 * The Origin and Influence of Logical Systems 26-42 * Essentials of Logical Reasoning 43-101 * Scientific Method and Scientific Knowledge 102-119.

Part II: Some Significant Postulational Systems, Concepts, and Methods. — Elementary Algebra as a Logical System 123-138 * An Abstract Geometric System 139-145 * Postulational Concepts and Methods, Fields 146-174 * Groups, Rings, Boolean Algebras 175-210 * Relations, Order Systems, Lattices 211-228 * Survey of Mathematical Foundations 229-255 * Bibliography 256-261 * Index 262-268.

George B. Thomas: *Calculus and Analytic Geometry*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge (Mass.), 1953. 7+731 pp. \$ 8.50.

The Rate of Change of a Function 1-39 * Derivatives of Algebraic Functions 40-78 * Applications of Derivation 79-113 * Integration 114-185 * Applications of Integration to Physics 186-214 * Plane Analytic Geometry 215-254 * Polar Coordinates 255-275 * Transcendental Functions 276-311 * Hyperbolic Functions 312-332 * Methods of Integration 333-381 * Vectors and Parametric Equations 382-413 * Determinants and Linear Equations 414-441 * Solid Geometry and Vectors 442-480 * Partial Differentiation 481-532 * Multiple Integrals 533-553 * Infinite Series 554-617 * Complex Numbers and Functions 618-647 * Differential Equations 648-671 * Answers to Problems, Appendix, Formulas from Elementary Mathematics, Index 672-731.

Ross A. Bardell and Abraham Spitzbart: *College Algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge (Mass.), 1953. 5+197 pp. \$ 3.50.

Number Systems and Fundamental Operations 1–14 * Special Products and Factoring 15–21 * Fractions 22–29 * Exponents and Radicals 30–40 * Review Exercises 41–42 * Functions and Graphical Representation 43–53 * Linear and Quadratic Functions 54–74 * Polynomials of higher degree 75–89 * Review Exercises 90–92 * Systems of Equations 93–104 * Determinants 105–116 * Mathematical Induction and the Binomial Formula 117–126 * Exponential and Logarithmic Functions 127–142 * Progressions 143–153 * Permutations, Combinations and Probability 154–169 * Review Exercises 170–174 * Tables, Answers to Exercises, Index 175–197.

Josef Lense: *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik*. Dritte, verbesserte Auflage. Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1953. 216 S. DM 26.00.

Einleitung 11–13 * Asymptotische Reihen 14–30 * Gammafunktion 31–49 * Orthogonalfunktionen 50–62 * Besselsche Funktionen 63–125 * Kugelfunktionen 126–181 * Lamésche Funktionen 182–213 * Namen- und Sachverzeichnis 214–216.

Gerhard Kowalewski: *Einführung in die analytische Geometrie*. Vierte, verbesserte Auflage. Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1953. 364 S. DM 26.00.

Vorbereitende Betrachtungen über Strecken und Winkel 1–16 * Punktkoordinaten 17–33 * Geometrie auf der Geraden 34–57 * Die Punkte auf Geraden der Ebene 58–110 * Kurven in der Ebene 111–143 * Kurven zweiter Ordnung und Kurven zweiter Klasse vom projektiven Standpunkt 144–217 * Klassifikation der Kurven zweiter Ordnung nach der Affinität und nach der Kongruenz 218–266 * Einiges über Kreise 267–292 * Punkte, Ebenen und Gerade des Raumes 293–352 * Flächen zweiter Ordnung und Flächen zweiter Klasse 353–361 * Sachregister 362–364.

E. M. Corson: *Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations (Relation Structure)*. London and Glasgow, Blackie & Son Limited, 1953. 12+221 pp. sh. 55/-.

Part I. Mathematical Introduction: Tensor Analysis 3–13 * Spinor Analysis 14–62.

Part II. Physical Principles: General Field Theory 65–91 * Relativistic Wave-Equations, Field Aspect 92–139 * Relativistic Wave-Equations, Matrix-Algebra Aspect 140–205 * Bibliography 207–218 * Index 219–221.

H. von Sanden: *Praktische Mathematik*. Dritte, erweiterte und umgearbeitete Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 44). Leipzig, B. G. Teubner, 1953. 128 S. DM 3.20.

Zeichnerische Behandlung von Funktionen 5–26 * Der Satz von Taylor. Näherungsformeln 26–46 * Integration, Differentiation und Interpolation 46–69 * Statistik 69–84 * Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate 84–120 * Harmonische Analyse und Synthese durch trigonometrische Interpolation 120–127.

Karl Menger: *Calculus, A Modern Approach*. Second, enlarged Edition. Chicago, Illinois Institute of Technology, 1953. 23+303 pp.

The two basic problems of calculus and their solutions 1-16 * Graphical solutions of the two basic problems 17-34 * Numerical solutions of the two basic problems 35-52 * The idea and the use of functions 53-90 * On limits 91-113 * The basic concepts of calculus 114-128 * Applications to physical science 129-153 * Pure functions connecting variables 153-190 * The calculus of derivatives 191-214 * The calculus of antiderivatives 215-241 * The mean value theorem and its consequences 242-261 * Two place functions of two variables 262-299 * Appendix. On n -place-functions 300-301.

Joseph Pérès: *Mécanique Générale*. Paris, Masson et C^{ie}, 1953. 4+407 pp. Broché 2.110 fr. Cartonné toile 2.545 fr.

Les principes de la mécanique classique 1-31 * La mécanique des solides parfaits 32-76 * La notion de travail. La méthode du travail virtuel. Le théorème de la force vive 77-106 * Étude d'une équation différentielle fondamentale en dynamique 107-122 * Compléments de mécanique du point matériel 123-157 * Questions classiques de mécanique du solide 158-191 * Équations de Lagrange. Équations d'Appell 192-226 * Principes variationnels en mécanique. Équations canoniques 227-249 * Mouvements dépendant d'un système différentiel linéaire et à coefficients constants 250-277 * Chocs et percussions. Compléments sur les liaisons unilatérales 278-328 * La mécanique des corps continus; fils parfaitement flexibles; tiges élastiques 329-398.

Friedrich Böhm: *Versicherungsmathematik II*, zweite, vermehrte und verbesserte Aufl. Samml. Göschen Bd. 917/917a. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1953. 205 S. DM 4.80.

Verzinsung eines Kapitals und die Zeitrente 15-30 * Die Sterblichkeit und die Lebenserwartung 30-48 * Die Erlebensfallversicherung und die Leibrente 48-67 * Die Todesfallversicherung 68-87 * Leibrenten und Todesfallversicherungen mit veränderlichem Betrag 87-98 * Die Berechnung der Prämien und der prämienreserven 98-112 * Die Prämienrückgewähr 112-119 * Die Versicherung verbundener Leben 119-136 * Die Aktiventafel und die Invalidensterbetafel 137-146 * Die Berechnung der Barwerte und Anwartschaften in der Sozialversicherung 147-177 * Die Beitragsberechnung in der Sozialversicherung 178-186 * Tabellen 187-205.

Fr. Fabricius-Bjerre: *Lærebog i Geometri, I, Analytisk Geometri*, anden udgave. Jul. Gjellerups Forlag, København, 1953. 169 s. Kr. 24.00.

Vektorregning 1-26 * Ret linje og plan 27-57 * Lineære afbildninger 58-81 * Keglesnit 82-106 * Keglesnitsflader 107-144 * Tillæg om det n -dimensionale rum 145-151 * Opgaver 152-167 * Alfabetisk register 168-169.

Fr. Fabricius-Bjerre: *Afbildningslære for maskin-, bygnings- og elektroteknikere*. Jul. Gjellerups Forlag, København, 1953. 87 s. Kr. 11.50.

Enkelt projektion, kurver og flader 1-26 * Dobbelt retvinklet afbildning 27-50 * Aksonometrisk afbildning 51-68 * Perspektivisk afbildning 69-80 * Opgaver 81-85 * Alfabetisk register 86-87.

KRONIKK

MATHEMATICA SCANDINAVICA.

Dette nye vitenskapelige tidsskrift, som utgis av de matematiske foreninger i Danmark, Finland, Ísland, Norge og Sverige, er i sommer utkommet med sitt første hefte. Det består av hele 192+12 sider og er blitt som en hel bok.

Heftet inneholder først og fremst sytten originalavhandlinger om emner fra de forskjellige områder av matematikken:

Tallteori:

L. Carlitz: A theorem of Stickelberger.

Ernst S. Selmer: Sufficient congruence conditions for the existence of rational points on certain cubic surfaces.

Marcel Riesz: Sur le lemme de Zolotareff et sur la loi de réciprocité des restes quadratiques.

Abstrakt algebra:

Karl Egil Aubert: On the ideal theory of commutative semi-groups.

Helge Tvermoes: Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs.

Reell og kompleks funksjonsteori:

Thøger Bang: The theory of metric spaces applied to infinitely differentiable functions.

Arne Beurling: A theorem on functions defined on a semi-group.

Gunnar af Hållström: Kapazitätsbeziehungen bei konformer Abbildung von Einschnittgebieten.

Olli Lehto: A majorant principle in the theory of functions.

Hans Rådström: On the iteration of analytic functions.

Hans Tornehave: On analytic functions of several variables. A theorem on analytic continuation.

K. I. Virtanen: Eine Bemerkung über die Anwendung hyperbolischer Massbestimmungen in der Wertverteilungslehre der meromorphen Funktionen.

Funksjonalanalyse:

Arne Beurling and Henry Helson: Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers.

Rolf Nevanlinna: Bemerkung zur Funktionalanalyse.

Differensialligninger:

Lennart Carleson: On infinite differential equations with constant coefficients. I.

Lars Gårding: Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations.

Matematisk statistikk:

David Fog: Contingency tables and approximate χ^2 -distributions.

Ennvidere finner man en oppgaveavdeling med tre problemer, hvorav de to visstnok er uløste, samt en anmeldelse av S. C. Kleene's bok »Introduction to metamathematics». Deretter følger fortegnelser over matematikere som er knyttet til vitenskapelige institusjoner i Norden, og over styrene for de utgivende foreninger. Og heftet avsluttes med opplysninger om den kommende matematikerkongress i Amsterdam (2.-9. sept. 1954), referat fra et møte i den internasjonale matematiske union, foreningsnytt med mere.

I et tillegg, som ikke hører med til selve heftet, finner man en liste over bøker som er kommet inn til redaksjonen, og autoreferater fra artikelforfatterne i heftet.

Tidsskriftet koster da. kr. 40.— pr. år (halv pris for medlemmer i de utgivende foreninger og for studerende ved universiteter og høyskoler i inntil fire år) og kan bestilles ved henvendelse til Matematisk Institut, Blegdamsvej 15, København Ø.

OPPGAVEKONKURRANSENE FOR GYMNASELEVER 1953.

I den danske konkurrence (arrangeret af Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier i Danmark) blev 1. præmie (kr. 100) uddelt til *Leif Kristensen*, III G mn., Nykøbing Mors kommunale Gymnasium, og 2. præmie (kr. 50) til *Ole Enkegaard*, III G mn., Rungsted Statsskole. Opgaverne stod i Matematisk Tidsskrift A for 1952, hefte 4.

I den norske konkurransen (arrangert av Norsk Matematisk Forening) ble Kronprins Olavs premie (kr. 100) og diplom gitt til *Eysteinn Junker Nilssen*, 5 Ra, Kristiansand Katedralskole, og diplomer ble tildelt *Olav Laudal*, 4 R, Mandal k.h. almenskole, og *Leif-Norman Petterson*, 5 Rb, Ullern skole. Oppgavene sto i Norsk Matematisk Tidsskrift for 1952, hefte 2.

UTNEVNELSER.

Professor, dr. phil. *Richard Petersen* er udnævnt til professor i anvendt matematik ved Danmarks tekniske Højskole fra 1. februar 1954 at regne.

Lektor *F. E. Rossing*, Tønder, er udnævnt til rektor ved De forenede Kirkeskoler (Sangskolen) i København.

Inspektør *Kay Piene* ved Det pedagogiske seminar i Oslo er utnevnt til rektor samme sted.

Universitetslektor *John O. Stubban*, Oslo, er utnevnt til dosent i matematikk ved Universitetet i Bergen.

OPPGAVER

Fristen for innsendelse av løsninger av oppgaver merket med stjerne er 1. januar 1954.

8. I likningen $u^n = x^n + y^n + z^n$ äro u, x, y, z , och n positiva, hela tal och dessutom u jämnt samt $n > 1$. Talen x, y och z förutsättas relativt primiska. Bevisa att de tre talen äro alla olika stora.

A. V. Peljo.

9. Bevisa, att i ovannämnda likning, där u alltså förutsättas jämnt, exponenten n måste vara ett udda tal.

A. V. Peljo.

10. Angiv en växande följd $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ av hela tal under följande villkor:

1) $a_1 = 1$,

2) om $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, så kan varje helt positivt tal $b \leq s_n$ på ett och endast ett sätt skrivas i formen

$$b = \pm a_{i_1} \pm a_{i_2} \pm \dots \pm a_{i_r}$$

där

$$i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n.$$

Inkeri Simola.

11. Gitt en cirkel og to på hverandre loddrette sekant som skjærer hverandre i et punkt P . Når sekantene dreier seg om P slik at de stadig danner en rett vinkel med hverandre, vil kvadratsummen av de korder som sirkelen utskjærer, være konstant. Vis dette.

A. S. Benestad.

*12. Bestem ved konstruktion centret og toppunkterne for en ligesidet hyperbel, som går igennem et givet punkt, har en given asymptoteretning og rører to givne rette linier.

Sigurkarl Stefánsson.

*13. Ved de følgende tre forskellige opgaver betegner $\varphi(x)$ en for $0 < x < \infty$ defineret funktion, som ikke antager nogen negativ værdi. Kontinuitet af $\varphi(x)$ forudsættes kun ved den sidste opgave og da kun i et punkt x_0 .

a. Med $l(x)$ betegnes halvlinien gennem origo og punktet $(x, \varphi(x))$. Når x voksende gennemløber de positive reelle tal, vil $l(x)$ gennemløbe en række stillinger. Hvilken geometrisk betydning vedrørende dette gennemløb har det, at uligheden

$$\varphi(x_1 x_2) \geq x_2 \varphi(x_1)$$

er opfyldt for alle positive værdier af x_1 og alle værdier af $x_2 > 1$?

b. For hvilke funktioner $\varphi(x)$ gælder uligheden

$$\varphi(x_1 x_2) \geq x_2 \varphi(x_1)$$

for alle positive værdier af x_1 og x_2 ?

c. Vis, at hvis ulighederne

$$\varphi(mx) \geq m\varphi(x), \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

er opfyldt for alle positive x , og hvis $\varphi(x)$ er kontinuert for $x = x_0$, hvor x_0 er et vilkårligt givet (men fast) positivt tal, vil

$$\varphi(x) \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0.$$

Svend Bundgaard.

LØSNINGER

Oppgave 2.

Oppløsning i delbrøker gir

$$\frac{1}{(n+p_1)(n+p_2) \dots (n+p_r)} = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{n+p_k},$$

der

$$A_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(p_k - p_1) \dots (p_k - p_{k-1})(p_{k+1} - p_k) \dots (p_r - p_k)}.$$

Følgelig er

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+p_1)(n+p_2) \dots (n+p_r)} &= \sum_{k=1}^r \sum_{n=1}^N \frac{A_k}{n(n+p_k)} = \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{p_k} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p_k} \right) = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{p_k} (s_N - s_{N+p_k} + s_{p_k}), \end{aligned}$$

og da

$$0 < s_{N+p_k} - s_N \leq \frac{p_k}{N+1},$$

følger herav igjen ved å la $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p_1)(n+p_2) \dots (n+p_r)} = \sum_{k=1}^r \frac{A_k s_{p_k}}{p_k}$$

hvilket er likheten i oppgaven.

Johannes Kvamsdal.

Riktig løsning er også innsendt av N. E. Andersen, Per Asisoff, Erling Böhn, Odd G. Eriksen, P. Janko, Kjell Kolden, A. Lödemel og Henrik Meyer.

EKSAMENSOPPGAVER

NMT vil en gang årlig gjengi ett sett oppgaver til studenteksamen (artium) på reallinjen fra hvert av de fem nordiske land.

Danmark: Studentereksamen maj-juni 1953.

Matematik I.

1. Bevis formlen

$$2 \cdot a + 4 \cdot (a+1) + 6 \cdot (a+2) + \dots + 2n \cdot (a+n-1) = \frac{n(n+1)(3a+2n-2)}{3},$$

idet a er et givet tal og n et vilkårligt positivt helt tal.

Find dernæst summen

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \dots + n \cdot 2n.$$

2. A og B er to punkter på parabeln $y^2 = px$, beliggende på hver sin side af parablens akse; A 's afstand fra parablens akse er numerisk dobbelt så stor som B 's afstand fra denne akse. Skæringspunktet mellem tangenterne i A og B kaldes C . Linien gennem C og midtpunktet af AB skærer linien, der går gennem A vinkelret på BC , i punktet P .

Find ligningen for det geometriske sted for P , når A gennemløber parabeln.

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

3. I trekant ABC er M midtpunktet af siden AB , N midtpunktet af siden BC og P det punkt på siden AC , der er således beliggende, at $\frac{AP}{PC} = \frac{1}{2}$.

Idet $AB = 7,652$, $AC = 5,670$ og $MP = 2,418$, skal man beregne vinklerne og de ubekendte sider i trekant MNP .

Matematik II.

1. Løs ligningen

$$x^2 + (2-3i)x - (17+7i) = 0.$$

Idet de fundne rødder kaldes α og β , skal man danne den andengrads-ligning $x^2 + Ax + B = 0$, hvis rødder er $\alpha^2 + 3$ og $\beta^2 + 3$.

Såvel α og β som A og B skal angives på formen $a+ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{x^3}{4(x-1)}.$$

Find dernæst arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven, linien $x = 3$ og tangenten til kurven i det punkt, hvis abscisse er $\frac{3}{2}$.

3. I kassen $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, hvor $AA_1 \neq BB_1 \neq CC_1 \neq DD_1$, er kanten $AB =$ kanten $BC = 4$, og kanten $BB_1 = 2$. Midtpunkterne af kanterne AB og BC kaldes henholdsvis M og N .

Find rumfanget og overfladen af tetraedret B_1DMN .

Find endvidere tetraedrets toplansvinkler langs kanterne MN og B_1D .

Finland: Studentexamen 1953. Längre kursen.

1. Under tiden 1923–53 växte antalet abiturienter med 211,5%. År 1923 voro 65,4% av abiturienterna gossar, år 1953 47,7%. Med hur många % har flickornas antal ökats?

2. För vilka värden på x konvergerar den oändliga geometriska serien $2 - \log x + \dots$ (Briggska logaritmer)? Beräkna seriens summa, då $x = \sqrt[3]{100}$.

3. Visa, att rötterna till ekvationen $(ab-c^2)x^2-(a+b)x+1=0$ alltid äro reella, vilka reella värden a , b och c än må ha. Angiv villkoret för att rötterna skola vara lika. Under vilket villkor äro rötterna

1) positiva, 2) negativa, 3) av motsatta tecken?

4. Härled ekvationen för den tangent till parabeln

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1,$$

som är parallell med linjen $x-2y+1=0$. Rita figur.

5. Härled formeln för volymen av ett sfäriskt segment (större än halvsfären).

6. En punkt P på diametern AB i en cirkel sammanbindes med ändpunkterna C och D av en med AB parallell korda. Visa, att

$$PA^2 + PB^2 = PC^2 + PD^2.$$

7. I en likbent triangel är basen = 10 cm och benen = 13 cm. Beräkna avståndet mellan den omskrivna och den inskrivna cirkelns medelpunkter.

8. Visa, att om i tetraedern $ABCD$ kanterna AB och CD äro vinkelräta mot varandra (genom den ena kan läggas ett normalplan mot den andra), så ligga tetraederns från A och från B dragna höjdlinjer i samma plan.

9. Två cirklar med radierna 5 cm och 3 cm skära varandra så, att den vinkel, som deras tangenter i den ena skärningspunkten bilda sinsemellan och som vetter mot centralen, är = $110^\circ 48' 24''$. Beräkna centralens längd med 4 decimalers noggrannhet.

10. Visa, att $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{2} \sin^2 2x$ är mindre eller = 1 för alla värden på x .

Island: Menntaskólinn i Reykjavík. Studentereksamen 1953.

I.

1. a) I en plan er der givet to punkter, A og B , og en ret linie l , som ikke er parallel med AB . Konstruer brændpunkt og toppunkt for en parabel, som har sin akse parallel med l , går igennem punkterne A og B og har sit brændpunkt på linien AB .

b) Find parablens ligning, når l er x -aksen og punkterne A og B har koordinaterne $A(3, 6)$ og $B(-\frac{3}{4}, 1)$.

2. Ligningen

$$4x^3 + (3 - 12i)x^2 - (12 + 5i)x - 9 + 3i = 0$$

har en reel rod. Find alle ligningens rødder.

3. Løs fuldstændigt ligningen

$$4 \sin^2 x + 5 \sin 2x + 3 \cos 2x + 3 = 0.$$

II.

1. Bevis ved partiel integration formelen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx.$$

Beregn derefter $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$.

2. Et regulært tetraeder $O-ABC$ har kantlængden 3. På kanten OA ligger punktet A_1 , og på kanten OB punktet B_1 , således at $OA_1 = OB_1 = 2$. Bestem på kanten OC et punkt C_1 , således beliggende, at volumen af tetraedret $O-A_1B_1C_1$ bliver $\frac{1}{4}$ af det givne tetraeders volumen. Find derefter punktet O 's afstand fra planen $A_1B_1C_1$.

3. De indre overflader af to kongruente glas er rette cirkulære kegler med en topvinkel på 90° , og hvert for sig af glassene har volumenet V . I glassene hældes der en vædske med det samlede volumen U , hvor $V < U < 2V$.

Hvor stort bliver vædskens volumen i hvert af de to glas, når den del af glassenes indersider, som vædsken dækker, har det størst mulige samlede areal, eller det mindst mulige samlede areal?

Norge: Examen artium 1953.

I. I en trekantet pyramide $ABCT$ med grunnflate ABC er grunnflatesidene AB og AC og sidekantene CT og BT alle like store og lik $2a$. Den tredje grunnflatesiden er lik a . Sideflaten BCT står vinkelrett på grunnflaten ABC . Hvor stor er bøyningsvinkelen mellom sidekanten AT og grunnflaten? Finn overflaten av pyramiden.

Sett så av et linjestykke x fra B langs BA og BT og fra C langs CT og CA . Kall de fire nye endepunktene av linjestykkene x for henholdsvis D , E , F og G . Vis at disse punktene ligger i samme plan og er hjørner i et rektangel, og at flateinnholdet av dette er

$$\frac{\sqrt{30}}{8} (2ax - x^2).$$

Finn den største verdien som flateinnholdet av dette rektangelet kan ha, og den tilsvarende verdi av x .

For denne verdien av x skal du så finne volumet av det prismet som blir innskrevet i pyramiden, når du gjennom sidene DE og FG i rektangelet legger plan vinkelrett på BC .

II. 1) Det eksakte (nøyaktige) uttrykket for $\cos 72^\circ$ er $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Finn eksakte uttrykk i redusert form for $\sin 72^\circ$, $\cos 36^\circ$ og $\sin 36^\circ$.

2) I en sirkel med sentrum O og radius a er innskrevet en firkant $ABCD$, der diagonalen AC er en diameter, siden AD danner vinkelen v med AC , og diagonalen BD er lik siden BC . Diagonalene skjærer hverandre i E .

Vis at $\angle ADE$ er lik $\angle EDO$.

Finn AE og EO uttrykt ved a og v . Bestem vinkel v slik at EO er mellomproporsjonalen (mellomproporsjonalledet) mellom AE og AO .

Vis at AB og AD for denne verdi av v er sider i kjente regulære mangekanter, innskrevet i sirkelen, og skriv opp AB og AD uttrykt ved a . Finn til slutt BC og CD uttrykt ved a , og vis at de også kan uttrykkes ved størrelser i regulære mangekanter.

III. En vilkårlig rett linje l gjennom punktet $S(a, 0)$ på den positive x -aksen skjærer den rette linjen $y = x$ i A og den rette linjen $y = -x$ i B . I A trekker vi en normal på $y = x$, og i B trekker vi en normal på $y = -x$. Vis at det geometriske sted for skjæringspunktet mellom disse normalene, når linjen l dreier seg om S , får ligningen

$$x^2 - 2ax - y^2 = 0.$$

Vis at denne ligningen framstiller en hyperbel, og bestem dens sentrum, akselengder og asymptoter.

Hyperbelen skjæres av sirkelen $(x-a)^2 + y^2 = r^2$. Finn koordinatene til skjæringspunktene. Hva er betingelsen for at vi skal få skjæring?

Tegn figur på millimeterarket når $r = a\sqrt{2}$. Velg $a = 3$ og bruk 1 cm som enhet.

Vis til slutt at når sirkelen skjærer hyperbelen, vil tangentene til de to kurver i skjæringspunktene på samme hyperbelgren alltid danne en rombe.

Sverige: Uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

Obs. Införda beteckningar böra förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Resonemang, lösning av ekvationer och genomförande av uträkningar böra icke vara så knapphändiga, att de bli svåra att följa. Geometriska uppgifter böra åtföljas av figurer, ritade med blyerts med hjälp av passare och linjal.

1. I en aritmetisk serie är summan av de 22 första termerna 8,8 och summan av de 36 första termerna 12. Hur många termer, från början räknat, skola medtagas, för att deras summa skall bli så stor som möjligt?

2. Två klotsegment ha samma volym. Deras höjder förhålla sig som 1:4 och deras buktiga ytor, tagna i samma ordning, som 3:1. Bestäm förhållandet mellan segmentens plana ytor.

3. Lös ekvationen $\cos 5x = \cos^5 x$.

4. Kurvan $3y = ax^4 + bx^3 - a^2$ har en minimipunkt i punkten $(1; -\frac{1}{3})$. Bestäm konstanterna a och b samt upprita kurvan.

5. Två av en triangels hörn ligga i punkterna (3; 6) och (8; 6). De delar av koordinataxlarna, som falla inom triangeln, ha båda en längd av tre längdenheter. Beräkna koordinaterna för det tredje hörnet.

6. I triangeln ABC är den inskrivna cirkelns radie $\frac{1}{6}$ av triangelns omkrets och $\frac{1}{4}$ av höjden mot sidan AB . Beräkna vinkeln C .

7. En regelbunden tresidig pyramid är omskriven kring en sfär med radien 2 cm och inskriven i en sfär med radien 7 cm. Beräkna radien i den sfär, som tangerar basytan och sidoytornas förlängningar (en av de s. k. vidskrivna sfärerna).

8. I en rät cirkulär kon är basradien 1 cm och höjden h cm, där h är en konstant. I konen inskrives en rät cirkulär cylinder med axeln utefter konens höjd. Cylinderns basradie är x cm och dess totala begränsningsyta y cm². Bestäm y som funktion av x . Undersök därefter för olika värden på h , hur den nämnda ytan varierar, då x genomlöper de värden, som x

kan anta, och åskådliggör detta i ett och samma koordinatsystem. Bestäm särskilt eventuella maximi- och minimipunkter och de h -värden, för vilka dylika kunna förekomma. Beskriv slutligen med ledning av undersökningen och kurvorna, hur den ifrågavarande ytan varierar för olika värden på h .

Specialkurs.

1. Visa, att de tangenter till ellipsen $2x^2 + 6y^2 = 3$, som gå genom punkten $(1; 1)$, äro vinkelräta mot varandra.

2. Visa, att funktionen $y = ax + bx\sqrt{1-x^2}$, där a och b äro konstanter, satisfierar ekvationen

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = ax^3.$$

3. Sök och konstruera orten för medelpunkten i en cirkel, som tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = 64$ innantill och går genom punkten $(4; 0)$.

4. Hur nära styrlinjen till en parabel kan skärningspunkten mellan två inbördes vinkelräta normaler till parabeln komma?

5. B och B' äro ändpunkterna av en hyperbels konjugataxel. En rät linje genom B skär hyperbeln i två punkter, P och Q . Visa, att konjugataxeln är bisektris till vinkeln $PB'Q$ eller till dess sidovinkel.

6. I en cirkel med radien r äro OA och OB två från medelpunkten O utgående strålar, som med varandra bilda vinkeln $2v$, där $v < 90^\circ$. En korda CD i cirkeln är sida i rektangeln $CDEF$, vars hörn E och F ligga på var sin av strålarna OA och OB . För två lägen av kordan CD antar ytan av rektangeln ett maximivärde. Visa, att produkten av dessa maximivärden är $= r^4$, oberoende av vinkeln v .

7. Diskutera utseendet av kurvan

$$y = \frac{2x+a}{x^2-4}$$

för olika värden på a . Undersök därvid skärningspunkter med koordinataxlarna, maximi- och minimipunkter samt asymptoter. Undersök även, hur kurvan närmar sig till asymptoterna. Upprita slutligen i deras huvuddrag — i olika koordinatsystem — exempel på de olika typer av kurvor, som kunna förekomma.

SUMMARY IN ENGLISH

NIELS HENRIK ABEL. FR. LANGE-NIELSEN.

The first part is a short survey on the life of Abel. It is pointed out that most of his biographers in their (otherwise greatly exaggerated) treatment of his economic difficulties have paid too little attention to his family problems. As a matter of fact he received rather good help from official as well as from private sources, and he did not die in the deepest poverty; it was as a guest at one of the richest estates in Norway that he was attacked by acute phthisis, and every care was taken of him for months until he died in 1829 at the age of twenty-six.

In the second part the importance of Abel's algebraic works and of his integral equation is dealt with.

The third and fourth parts present his occupation with the following three problems:

1. To determine all functions whose integrals can be expressed by elementary functions.
2. To find relations between definite integrals of the same form, but with different limits («addition theorems»).
3. To invert a function defined by a definite integral.

Abel, to a higher degree than any earlier mathematicians, recognized the important relations which exist between these three problems.

The third part also deals with the events about his great »Paris treatise«. And the fourth part contains a discussion on the competition and rivalry between Abel and Jacobi, claiming that the discovery of the elliptic functions and their most important properties was primarily due to Abel, and that the old tradition of the equal rights of two independent discoverers is not maintainable. Jacobi is to blame (at least) for the quite unsatisfactory way in which he quotes—or fails to quote—Abel's works, for instance in »Fundamenta nova«.

The fifth and last part of the article deals with Abel's important contributions to the theory of infinite series. Here also an essay is made to present »Abel in a nutshell«, quoting first (in French) a program declaration of Abel, and exemplifying afterwards his way of setting and solving problems by giving his proof for the non-existence of a »general deciding function« for the convergence of infinite series.

THE MANUSCRIPT OF ABEL'S PARIS TREATISE FOUND.
VIGGO BRUN.

The treatise »Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes«, which was presented by Abel to

the Académie des sciences in Paris Oct. 30. 1826, was printed in *Savants étrangers* in 1841. G. Libri, who superintended the printing, claimed that the manuscript was lost before he had read the proofsheets, and it has been missed until last year when it was found by the author of this article in Biblioteca Moreniana in Florence. He had been lead to this library by the treatise »Sulla mancata pubblicazione, nel 1826, della celebre memoria di Abel« by Giacomo Candido (1942) where »a copy made by Libri« was mentioned; it was this »copy« that turned out to be the original manuscript.

THE FOUR-DIMENSIONAL SPACE. ROLF NEVANLINNA.

The hypothetical beings of a two-dimensional world (plane) might well be supposed to invent an abstract three-dimensional space, if they had first developed an analytic geometry in rectangular coordinates in their own plane; they would merely have to consider number triples instead of number pairs, and to generalize the coordinate formulae for distances and angles in an appropriate way. The same principle enables *ourselves* to construct an abstract space with *four* (or more) dimensions.

A kind of intuitive images of four-dimensional »bodies« may be obtained by considering their »projections« into three-dimensional space. That is completely analogous to the use of plane pictures of three-dimensional bodies. This method is exemplified by studying the three-dimensional »projections« of some of the six regular polytopes in four-dimensional space.

Some suggestions on curvilinear riemannian spaces and infinite-dimensional Hilbert spaces are added, and their applications in the theory of relativity and in quantum mechanics are shortly indicated.

THE ELEMENTS OF J. v. NEUMANN'S THEORY OF GAMES. ERLING FØLNER.

After a short introduction the main theorem of J. v. Neumann is proved and illustrated by a numerical example, that has been chosen so as to demonstrate the importance of knowing not only the elementary part of the theory of games, but also the main theorem.

Finally the simplified poker play of J. v. Neumann is presented and discussed.