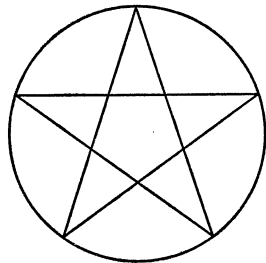


**NORDISK MATEMATISK
TIDSKRIFT**

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 1



OSLO 1953

UTGIVERE:

Dansk matematisk forening.

Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier i Danmark.

Suomen matemaattinen yhdistys – Finlands matematiska förening.

Suomen matematiikan ja fysiikan opettajien liitto – Finlands matematik- och fysiklärarförbund.

Íslenska stærðfræðafélagið.

Norsk matematisk forening.

Norsk lektorlags matematikkseksjon.

Svenska matematikersamfundet.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm.

REDAKSJON:

David Fog, Carl-Erik Fröberg, Regnar Norgil,

E. J. Nyström, Karl Persson, Kay Piene, Hans Rådström,

Inkeri Simola, Sigurkarl Stefánsson, R. Tambs Lyche.

Sekretær: I. Johansson.

ADRESSE:

Matematisk Institutt, Blindern, Oslo.

I 1953 kommer to nye matematiske tidsskrifter i gang ved samarbeid mellom interesserte kretser i Danmark, Finland, Island, Norge og Sverige. *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, som her presenterer sitt første hefte, er av elementær karakter og vender seg til alle som interesserer seg for matematikk i disse landene. *Mathematica Scandinavica* blir derimot en mer vitenskapelig publikasjon, beregnet ikke bare på nordiske matematikere, men på en internasjonal lesekrets.

Det nordiske samarbeid på matematikkens område har gamle røtter, og det har stadig utviklet seg videre; gjennom tidsskriftet *Acta Mathematica* (opprettet 1882) har nordiske matematikere, sammen med kolleger fra hele verden, ytt verdifulle bidrag til vitenskapens utvikling, og de regelmessig tilbakevendende *skandinaviske matematikerkongresser* (siden 1909) har i høy grad fremmet fellesskapet på forskningsnivået. Av nyere dato er derimot *kongressene for matematikk-, fysikk- og kjemilærere* (fra 1951), som er uttrykk for samarbeid på de mer elementære områder, samt den internordiske *utveksling av universitetslærere*.

I og for seg hadde riktignok elementærmatematikken — iberegnet de matematiske undervisningsproblemer — etter hånden fått meget rike publikasjonsmuligheter i Norden. Den har funnet plass i det danske *Matematisk Tidsskrift* (opprettet 1859, fra 1890 delt i en elementær serie A og en videregående serie B), i det svenske *Elementa* (opprettet 1917 under navnet *Tidsskrift för elementär Matematik, Fysik och Kemi*), i *Norsk Matematisk Tidsskrift* (fra 1919) og i to finske tidsskrifter, *Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja* (fra 1936) og *Arkhimedes* (fra 1949). Men ingen av disse publikasjonene har tilstrebet å bli fellesnordiske, og selv om de har vært kjent og verdsatt også utenfor hjemlandene, er det til dem deres virksomhet og betydning fortrinsvis har vært knyttet. Et samlende organ for elementærmatematikk i Norden har ikke eksistert.

Av de nevnte nasjonale publikasjoner har den danske og den norske, som ikke hadde andre fag enn matematikken å ivareta, formelt avsluttet sin virksomhet ved nyttår. Men de kommer til å leve videre som integrerende bestanddeler av de to nye tidsskriftene.

Foreningene for matematikk og matematikkundervisning i Norden, som står som utgivere av *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, har bestemt at

hovedspråkene i tidsskriftet skal være dansk, norsk og svensk, de språk som binder Norden sammen, og som kan leses i alle våre fem land. Bare unntaksvis vil engelsk, fransk eller tysk bli brukt.

Redaksjonen vil ta sikte på at innholdet skal kunne forståes uten særlig innsikt på spesielle og høyereliggende områder. Alt skal kunne oppfattes av lesere som har kunnskaper som svarer til et par års universitetsstudium i matematikk, og en betydelig del skal være tilgjengelig for lesere med vesentlig mindre forutsetninger.

I artikler skrevet av sakkyndige innenfor matematikkens forskjellige grener, vil tidsskriftet orientere om fremskritt av eldre og nyere dato og fremstille klassiske emner i lys av matematikkens senere utvikling. Det vil også bringe artikler som direkte berører skoleundervisningen, samt innlegg av matematisk-didaktisk natur. Diskusjoner om slike spørsmål vil finne et naturlig forum her, og det åpner seg muligheter for fruktbare meningsutvekslinger og påvirkninger ut over landegrensene. Gjennom prisoppgaver vil gymnasieelever fra hele Norden få mulighet for å prøve sine krefter, og dessuten vil tidsskriftet bringe andre oppgaver av varierende art og vanskegrad, som dels kan stimulere leserne til selvvirksomhet, dels brukes som øvingsmateriale i undervisningen. Endelig vil det inneholde meldinger om ny matematisk litteratur, også om publikasjoner som kommer ut utenfor Norden.

Det er redaksjonens håp at tidsskriftet vil bidra til å knytte forskning og undervisning sammen, til å skape faglige og personlige kontakter innenfor kretsen av matematikk-interesserte og til å motvirke isolering og stagnasjon.

Redaksjonen tar fatt på sitt arbeid i tillit til at man fra alle sider vil ta godt imot det nye tidsskriftet. Den mottar med takknemlighet artikler, også fra mindre erfarne skribenter, og den vil med glede hjelpe forfatterne med råd og bistand, faglig så vel som språklig, slik at bidragene kan bli så lødige og lettfattelige som mulig. Den oppfordrer leserne til å sende inn oppgaver og oppgaveløsninger, samt forslag til emner som de ønsker behandlet. Den henstiller til alle interesserte å abonnere på tidsskriftet og bidra til at også andre, så vel institusjoner som personer, tegner abonnement. Og sist, men ikke minst, ber den leserne avse tid til å leve seg inn i det som tidsskriftet bringer. Bare ved en slik aktiv medvirkning fra mange sider vil redaksjonen og leserne komme i den rette kontakt med hverandre, og bare på den måten vil Nordisk Matematisk Tidsskrift kunne virke etter sin hensikt og bli et betydningsfullt bindeledd mellom matematikkens dyrkere i de nordiske land, slik som redaksjonen ønsker og håper.



NILS ERIK FREMBERG IN MEMORIAM

ÅKE PLEIJEL

Den 16 september 1952 avled denna tidskrifts första svenska redaktör, laboratorn i matematik vid Lunds universitet Nils Erik Fremberg.

Det är svårt att fatta, att Nils Erik Fremberg, denna sällsynt levande människa, inte mer finns ibland oss. En personlighet som hans kan näppeligen tänkas annat än som tillstädes i nuet.

Han var en undantagsmänniska, en livskonstnär av sällsynt valör. Ingen, som kom i kontakt med honom, kunde undgå att ryckas med av hans sprudlande livsglädje och ljusa syn på tingen. Med sin spontana värme, avväpnande öppenhet och friska impulsivitet blev han en medelpunkt i var krets.

Nils Erik Fremberg föddes i Sölvesborg den 27 juli 1908 som son till skeppsredaren och vice konsuln Nils Martin Waldemar Fremberg och dennes maka Syster Elisabet Jeppsson. Efter faderns frånfälle avslutade han sin skolgång i Malmö där han blev student våren 1926. Så följade studier under knappa yttre villkor vid Lunds universitet, varefter han började sin bana som lärare, först vid Lunds privata elementarskola

och från 1939 som biträdande lärare i matematik vid universitetet. Hans rika personliga gåvor i förening med hans levande intresse för ungdomen och stora kärlek till det ämne han ägnade sig åt, gjorde honom till den borne läraren. Själv pojkaktigt ivrig och därtill slösande hjälpsam blev han en inspirerande vägledare för de skaror av ungdomar, som under årens lopp studerade vid den institution där han verkade. Redan under första året som universitetslärare författade han det kompendium i matematisk analys, som, präglad av hans friska grepp på ämnet, snabbt vann uppskattning bland studenterna även vid andra universitet och högskolor. För den grundläggande matematikundervisningen i Lund var hans insatser av oskattbart värde, och i mångt och mycket fick hans verksamhet också inflytande i vidare kretsar. Hans framstående läraregenskaper och fruktbärande undervisningsarbete medförde, att han genom riksdagens beslut 1949 blev laborator i matematik på personlig tjänst, en befattning, som han innehade allt framgent. Under sina sista år var han också censor i studentexamen.

Nils Erik Frembergs liv försvårades i hög grad av ohälsa, orsakad av ett illa läkt benbrott under pojkåren. Han genomgick fram till 1947 ett trettiotal operationer, varav flera livshotande. En okuvlig optimism bar honom dock igenom hans många och långa sjukdomstillstånd. Ett fast stöd i dessa prövningar hade han i sin maka Aina, som han var förenad med sedan 1936.

Laboratorsutnämningen 1949 betydde en bättre utgångspunkt för Nils Erik Frembergs fortsatta verksamhet och en tryggare situation för hans hustru och deras båda pojkar. Samtidigt tycktes också hans gamla lidande till sist vara slutgiltigt botat, och ljusare framtidsperspektiv syntes öppna sig för honom. Hans bortgång genom en ny oväntad sjukdom ter sig härigenom dubbelt tragisk.

Vid sidan av sin inspirerande lärargärning samlade sig Nils Erik Fremberg mellan sjukdomsperioderna till vetenskapligt arbete av hög kvalitet, vars omfattning dock självfallet blev lidande av de återkommande avbrotten och den psykiska press dessa innebar. I ett opublicerat seminarieföredrag påvisade han 1939 ett väsentligt fel i Volterras behandling av ett »problème mixte» för den cylindriska vågekvationen vid ett polyedriskt begränsat område. Viktigast av hans publicerade vetenskapliga arbeten är doktorsavhandlingen »A Study of Generalized Hyperbolic Potentials», som ventilerades 1946. I denna lämnas ett värdefullt bidrag till den av M. Riesz utformade teorien för lineära hyperboliska differentialekvationer.

Genom sin lätthet till kontakt med andra och genom sin positiva inställning kom Nils Erik Fremberg att spela en betydelsefull roll i det ma-

tematiska föreningsliv, som under åren efter kriget intensifierades och tog fastare former, både då det gällde interskandinaviskt samarbete och utbyte mellan matematikerna i Sverige. Han bidrog bl. a. verksamt till att samla svenska skol- och universitetsmatematiker till att delta i utgivandet av denna tidskrift. Han var självskriven som svensk redaktör i tidskriften och som sådan representerade han både Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund och Svenska matematikersamfundet.

Nils Erik Frembergs personliga svårigheter förmådde aldrig bryta hans livsmod. Han gick bort med tankarna riktade mot framtiden. Saknaden efter honom känns tung, inte bara bland hans närmaste, utan också i vida kretsar av vänner, kolleger och lärjungar.

A GENERALIZATION OF THE FORMULA OF SIMPSON FOR NON-EQUIDISTANT ORDINATES

VIGGO BRUN

The formula of Simpson, first formulated by James Gregory in 1668, is well known. The area beneath a curve from (p, y_0) through $(p+a, y_1)$ to $(p+2a, y_2)$ is calculated approximately by aid of the formula

$$F \approx \frac{a}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

which is developed by replacing the given curve by a parabola with axis in the y -direction passing through the three points.

If this parabola method is used in the case where the three ordinates are non-equidistant, we obtain the formula

$$F \approx \frac{2a^2+ab-b^2}{6a} y_0 + \frac{(a+b)^3}{6ab} y_1 + \frac{-a^2+ab+2b^2}{6b} y_2.$$

Here a is the distance between the ordinates y_0 and y_1 (fig. 1), and b the distance between y_1 and y_2 . This formula is, however, on account of the denominators, almost unworkable unless a and b are equal.

In 1925 I showed [1] how the formula of Simpson can be deduced, without using a parabola and without using integral calculus. This method, which should have been more familiar to Archimedes than to Gregory and Simpson, can also be adapted to the case

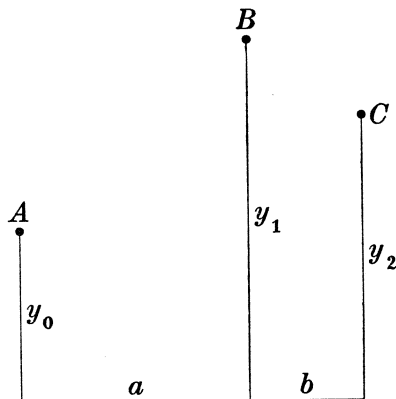


Fig. 1

where the three ordinates y_0 , y_1 and y_2 are non-equidistant, and we shall show that it leads to the strikingly simple formula

$$(1) \quad F \approx \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{a-b}{3} (y_0 - y_2),$$

where a and b have the same meaning as in the preceeding formula (see fig. 1). It is remarkable that calculations by aid of this formula do not use division by any other numbers than 6 and 3. This is particularly advantageous when the ordinates y_i and the intervals a and b are integers.

We deduce the formula (1) in the following way.

Through the points A , B and C with the coordinates (p, y_0) , $(p+a, y_1)$ and $(p+a+b, y_2)$ respectively we shall try to choose some convenient curve as a substitute for the correct (known or unknown) curve through the same points. We have great freedom in choosing the curve, but we will require that the area beneath the curve is easy to calculate. Likewise it will be natural to require that the tangent to the curve shall change continually in the given interval.

As a first primitive "curve" through A , B and C we choose the broken line AA_1BC_1C , where A_1C_1 is parallel to AC (fig. 2). Our first request

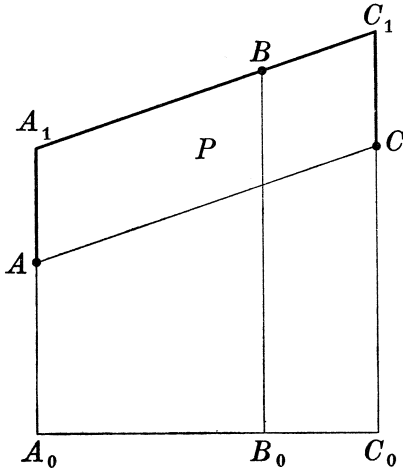


Fig. 2

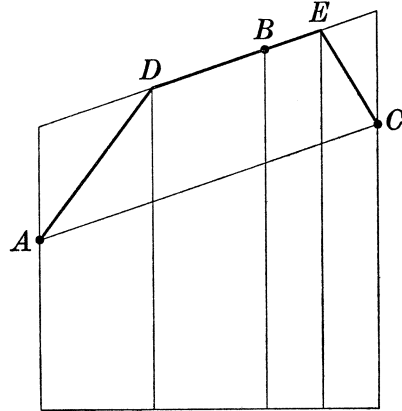


Fig. 3

will here be complied with, but not the second one. In order to make the "curve" less edged we shall remove the corners A_1 and C_1 . A simple way of doing this is to bisect BC_1 by the point E (fig. 3) and draw the line EC . Removing the corner A_1 in the same way, we obtain the "curve" $ADBEC$. The method resembles the removing of corners from a wooden board by aid of a joiners plane. The area of the two corner triangles removed totals $\frac{1}{4}$ of the area P of the parallelogram AA_1C_1C . Continuing in accordance with the same idea we remove the new corners D and E (fig. 4). The area removed is $\frac{1}{4}$ of the area of the two corners previously removed, when we use bisection in tracing the new parallels on each side

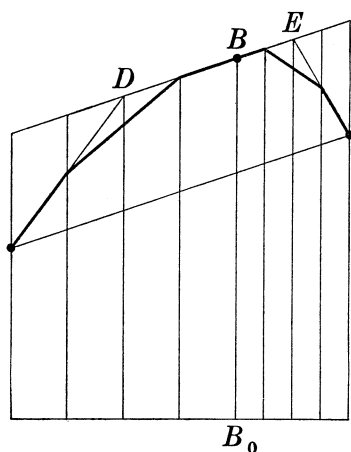


Fig. 4

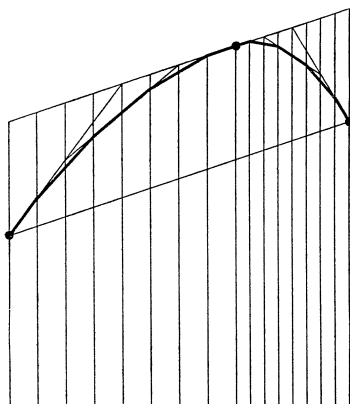


Fig. 5

of BB_0 . The third step is to remove four corners (fig. 5), each of them being $\frac{1}{8}$ of one of the corners removed in the second step. Accordingly this third reduction will be $\frac{1}{4}$ of the second one, just as the second one was $\frac{1}{4}$ of the first one.

At each step the number of corners removed will be doubled, and each triangle will be $\frac{1}{8}$ of the triangles removed in the previous step on the same side of BB_0 (fig. 6). Hence every new reduction will be $\frac{1}{4}$ of the former one.

In the limit we obtain two boundary curves AB and BC (fig. 7). Together with AC they enclose the area

$$Q = P - \frac{1}{4}P - \frac{1}{4^2}P - \frac{1}{4^3}P - \dots = \frac{2}{3}P,$$

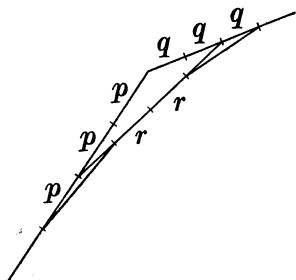


Fig. 6

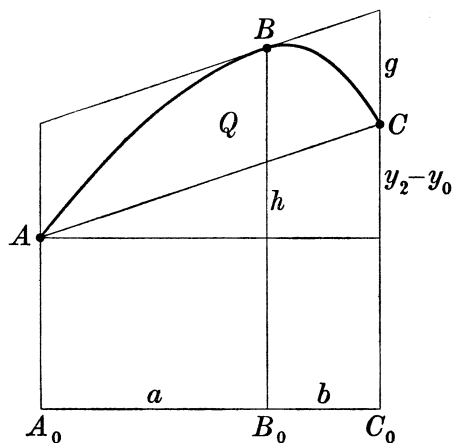


Fig. 7

where P is the area of the parallelogram AA_1C_1C . It is obvious that

$$P = g(a+b),$$

where g can be determined by the two relations

$$g+h+y_0 = y_1, \quad \frac{y_2-y_0}{h} = \frac{a+b}{a}.$$

Adding to Q the area of the trapezium A_0ACC_0 we obtain the area bounded by $A_0ABCC_0A_0$ (fig. 7). Some calculations will show that it is equal to the right member of the approximation formula (1), which is accordingly proved.

It is not difficult to see that our method is inspired by one of the methods used by Archimedes in determining the area of a segment of a parabola [2]. The two curves AB and BC (fig. 7) will be parabolas, both touching the line A_1C_1 (fig. 2). We have used *two* parabolas, where Simpson would have used only *one*.

As an example of our approximation formula (1) let us consider (fig. 8)

$$\int_1^4 \frac{4}{x} dx \approx \frac{1+2}{6} (4+4 \cdot 2+1) + \frac{1}{3} (1-4) = \frac{11}{2}.$$

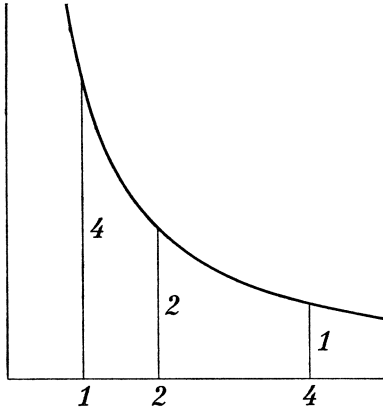


Fig. 8

Hence

$$4 \ln 4 \approx \frac{11}{2} \text{ or } \ln 2 \approx \frac{11}{16} = 0.6875$$

while in reality $\ln 2$ is equal to 0.6931.

If the area had been calculated by the trapezoid formula, using the same three ordinates, the error should have turned out to be ten times as large.

In order to study the degree of approximation attained in our formula (1) we express the error by aid of the remainder term in the formula of Taylor.

Hereby it seems to be most convenient to use a and $c = a+b$ as variables. If the error is called $\varphi(a, c)$, we have

$$\int_0^{a+b} f(x) dx = \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{a-b}{3} (y_0 - y_2) - \varphi(a, c),$$

and accordingly

$$\varphi(a, c) = \frac{c}{6} (f(0) + 4f(a) + f(c)) + \frac{2a-c}{3} (f(0) - f(c)) - \int_0^c f(x) dx.$$

The determination of $\varphi(0, 0)$, $\varphi'_a(0, 0)$, $\varphi'_c(0, 0)$ etc. is not difficult, and so by the formula of Taylor for two variables we obtain

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_0^{a+b} f(x) dx &= \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{a-b}{3} (y_0 - y_2) \\ &\quad - \frac{a+b}{6} \left\{ (4 \cdot 3a^2 - 4 \cdot 3ac + 3c^2) \frac{f''(0)}{3!} \right. \\ &\quad \left. + (4 \cdot 4a^3 - 4 \cdot 4ac^2 + 6c^3) \frac{f'''(0)}{4!} \right. \\ &\quad \left. + \dots \dots \dots \right. \\ &\quad \left. + (4 \cdot na^{n-1} - 4nac^{n-2} + (3n-6)c^{n-1}) \frac{f^{(n-1)}(0)}{n!} \right. \\ &\quad \left. + [4\theta a^{n+1} f^{(n+1)}(\theta a) + (4n+4)a^n f^{(n)}(\theta a) - (4n+4)ac^{n-1} f^{(n)}(\theta c) \right. \\ &\quad \left. + (3n-6)c^n f^{(n)}(\theta c) + (3c-4a)\theta f^{(n+1)}(\theta c)c^n] \frac{1}{(n+1)!} \right\} \end{aligned}$$

with $c = a+b$ and $0 < \theta < 1$.

We give some examples:

Ex. 1. $f(x) = x^2$

Formula (2) gives

$$\int_0^{a+b} x^2 dx = \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{a-b}{3} (y_0 - y_2) - \frac{a+b}{6} (a-b)^2.$$

In this case our formula (1) will be exact only when $a = b$ and the formula will then be reduced to that of Simpson.

Ex. 2. $f(x) = x^3$

Formula (2) gives

$$\begin{aligned} \int_0^{a+b} x^3 dx &= \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{a-b}{3} (y_0 - y_2) \\ &\quad - \frac{a+b}{12} (a-b)(3a^2 - 4ab - 3b^2). \end{aligned}$$

In this case our formula (1) will be exact, in the following three cases:

$$a = b ,$$

$$a = \frac{1}{3}(\sqrt{13}+2)b = 1.87 \dots b ,$$

$$a = \frac{1}{3}(\sqrt{13}-2)b = 0.54 \dots b .$$

For $a = b$ the formula then will be reduced to that of Simpson.

Ex. 3.

$$f(x) = x^4$$

Formula (2) gives

$$\begin{aligned} \int_0^{a+b} x^4 dx &= \frac{a+b}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{a-b}{3} (y_0 - y_2) \\ &\quad - \frac{a+b}{30} (20a^4 - 20ac^3 + 9c^4) . \end{aligned}$$

In this case our formula (1) will be exact for

$$a = 1.13 \dots b \text{ or } a = 2.57 \dots b ,$$

and for no other ratio between a and b . For $a = b$ we get

$$\int_0^{2a} x^4 dx = \frac{a}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{4a^5}{15} ,$$

which agrees with the formula of Simpson with remainder term.

From these examples we see that the error *may* be less by our formula (1) than by the formula of Simpson. But this advantage seems to be only small. Ordinarily it seems to be most convenient to use equidistant ordinates in case it is possible. But if the ordinates are nearly (but not exactly) equidistant the formula (1) would seem to be useful. Likewise, if in a series of observations one observation is missing it might be profitable to use formula (1) instead of calculating one of the areas as a trapezium.

REFERENCES:

- [1] VIGGO BRUN: *Simpsons formel, utledet uten anvendelse av parabelen, og uten integralregning*. Norsk Matem. Tidsskr. 1925.
- [2] *Les oeuvres complètes d'Archimède*. P. ver Eecke, 1921, p. 396—404.

EN DIDAKTISK BEMÆRKNING OM INDFØRELSEN AF DE KOMPLEKSE TAL

SVEND BUNDGAARD

1. Oprindelsen til læren om de komplekse tal er jo at finde i det 17. og 18. århundredes algebra, først og fremmest i spørgsmål vedrørende roduddragning, specielt kvadratrodsuddragning af negative tal, d. v. s. løsning af ligninger af formen

$$x^2 + \beta^2 = 0.$$

Allerede hos Euler spiller imaginære tal en betydelig rolle, men først med Cauchy, Gauss og efterfølgere har de komplekse tal fået deres nuværende plads i matematikken.

2. Det nævnte udgangspunkt præger særligt gennemgribende de lidt ældre fremstillinger til undervisningsbrug, i hvilke man hyppigt ser de komplekse tal indført som mængden af symboler

$$\alpha + \sqrt{-\beta^2},$$

hvor α og β er reelle tal, med hvilke man da så at sige uden videre opererer efter de sædvanlige regneregler for de reelle tal. Relationen

$$\sqrt{-\beta^2} = \beta \sqrt{-1}$$

fører umiddelbart til fremstillingen

$$\alpha + i\beta,$$

hvor $i = \sqrt{-1}$, således at de komplekse tal kan siges at fremkomme ved, at man supplerer de reelle tal med det nye »tal« i samt med alt, hvad der ved benyttelse af de elementære regneoperationer kan dannes af reelle tal og i . Idet $i \cdot i = i^2 = -1$, bliver summen og produktet af to komplekse tal $\alpha + i\beta$ og $\alpha' + i\beta'$ henholdsvis

og

$$\begin{aligned}(\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta') &= (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta') \\ (\alpha + i\beta)(\alpha' + i\beta') &= (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \beta\alpha').\end{aligned}$$

3. I nyere fremstillinger, således bl. a. i alle danske gymnasielærebøger, som nu er i brug, går man andre veje.

Et flertal følger i det væsentlige W. R. Hamilton og indfører de komplekse tal som mængden Ω af par (α, β) af reelle tal α og β , idet addition og multiplikation defineres ved fastsættelserne

$$(1) \quad (\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

$$(2) \quad (\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta', \alpha\beta' + \beta\alpha').$$

Det eftervises, at alle de elementære, for det reelle talområde gældende regneregler også gælder for det nye »tal«-område Ω . Før eller senere påpeges, at mængden af par af formen $(\alpha, 0)$ kan betragtes som et eksempel af de reelle tals område, og idet man »identificerer« $(\alpha, 0)$ med det reelle tal α , fremtræder Ω som en udvidelse af de reelle tals område. Det eftervises, at hvis parret $(0, 1)$ betegnes med i , er $i^2 + 1 = 0$, og

$$(\alpha, \beta) = \alpha + i\beta.$$

Endelig omtales den geometriske fremstilling af de komplekse tal, ved hvilken $\alpha + i\beta$ i et retvinklet koordinatsystem i planen afsættes som punktet (α, β) , eller, om man vil, som vektoren fra origo til dette punkt. I tilslutning hertil omtales, at summen (1) er den sædvanlige vektorsum, og man gennemgår den velkendte fremstilling ved modulus og argument, som jo beror på benyttelsen af polære koordinater; det polære koordinatsystem har x -aksen som polarakse, og dets omløbsretning er den, hvor vinklen fra x -aksen til y -aksen er $\frac{1}{2}\pi$.

Også den historisk første, af C. Wessel angivne fremgangsmåde har været udmøntet til skolebrug. Man går da i det væsentlige frem i den modsatte rækkefølge af den lige omtalte, idet de komplekse tal indføres geometrisk, nemlig som mængden af punkter i planen, eller, om man vil, som mængden af vektorer udgående fra et fast punkt O . Summen af to vektorer fastsættes til at være den sædvanlige vektorsum. Modul og argument af produktet fastsættes til at være henholdsvis produktet af modulerne og summen af argumenterne, idet et polært koordinatsystem med O som pol benyttes. Senere kommer man så gennem indførelsen af retvinklede koordinater til fremstillingen på formen $\alpha + i\beta$.

4. At den i 2 omtalte ældre fremstillingsmåde, hvor de komplekse tal indføres som mængden af symboler $\alpha + i\beta$, nu ikke længere anvendes i undervisningen, er let forståeligt. Så nærliggende og enkelt det end kan synes uden videre at indføre symbolerne $\sqrt{-\beta^2} = i\beta$ (hvor $i^2 = -1$),

som man jo i denne forbindelse først og fremmest savner, når man kun råder over de reelle tal, må man indrømme, at fremgangsmåden rummer betydelige vanskeligheder.

Helt utilfredsstillende er det naturligvis straks at opfatte $\alpha + i\beta$ som en sum af to størrelser; thi ganske vist er α et reelt tal, men $i\beta$ er jo en på forhånd ukendt ting. Som et produkt kan $i\beta$ ikke umiddelbart opfattes; thi nok er β et reelt tal, men hvad er i , når det kommer til stykket?

Fremgangsmåden lader sig imidlertid opfatte som fuldt korrekt, nemlig når man fastholder, at symbolet $\alpha + i\beta$ skal betegne en helhed, eller, om man vil, skal opfattes som et nyt objekt, og at summen og produktet (som neden for angives ved benyttelse af tegnene $\oplus$ og $\odot$) inden for mængden af de nye objekter *defineres* ved

$$(3) \quad (\alpha + i\beta) \oplus (\alpha' + i\beta') = (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta')$$

$$(4) \quad (\alpha + i\beta) \odot (\alpha' + i\beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \beta\alpha'),$$

hvorved baggrunden for (4) er »udregningen«

$$(5) \quad \begin{aligned} (\alpha + i\beta)(\alpha' + i\beta') &= \alpha\alpha' + \alpha i\beta' + i\beta\alpha' + i\beta i\beta' \\ &= \alpha\alpha' + i^2\beta\beta' + i(\alpha\beta' + \beta\alpha') \end{aligned}$$

i forbindelse med $i^2 = -1$, idet man naturligvis da må tænke sig regningen udført så at sige i kulisserne. Men man må indrømme, at ved en konsekvent gennemførelse adskiller metoden sig ikke væsentligt fra den i 3 omtalte indførelse baseret på anvendelsen af talpar. Tillige må man indrømme, at det stiller store krav til en gennemsnitslev at holde rede på den forskelligartede brug af de anvendte tegn. Således er det antagelig en vanskelighed, at i højre side af definitions ligningen (3) angiver tegnet $+$ i udtrykkene $(\alpha + \alpha')$ og $(\beta + \beta')$, at man skal danne summen af reelle tal, medens det midterste $+$ kun indgår som en bestanddel af betegnelsen for et af de nye objekter.

I ældre tid synes man ikke ved undervisningen at have trukket linierne skarpt op (man har heller ikke anvendt den teknik at bruge særlige betegnelser som $\oplus$ og $\odot$). Således er det forståeligt, at de komplekse tal ofte for eleverne — og undertiden måske også for læreren — kom til at stå som noget subtilt, omgivet af et vist skær af mystik.

5. Mystik kan mindst af alt siges at præge de i 3 omtalte fremstillingsmåder. Særlig enkel er i logisk henseende indførelsen af de komplekse tal ved hjælp af talpar, hvor det nye talområde jo opbygges ved en simpel konstruktion ud fra området af de reelle tal, ganske som — eller rettere endnu enklere end — området af de hele tal ud fra området af de natur-

lige tal 1, 2, 3, . . . , området af de rationale tal ud fra området af de hele tal og området af de reelle tal ud fra området af de rationale tal. Og jeg tror, at erfaringen fra undervisningen i bl. a. danske skoler er den, at indførelsen af de komplekse tal nu af flertallet af elever opfattes som en let forståelig og interessant del af deres matematiske uddannelse.

Men alligevel synes jeg, at fremgangsmåden kan kritiseres ud fra et didaktisk synspunkt. Definitionerne (1) og især (2) fremsættes i reglen uden fyldestgørende motivering — forud henvises oftest blot til det ønskelige i at udvide området af de reelle tal således, at ligninger som $x^4 + 5x^2 + 2 = 0$, $x^2 + 2x + 6 = 0$ eller $x^2 + 1 = 0$ får løsninger — og eleverne må således tage lærerens ord om, at definitionerne fører til et fornuftigt resultat, for gode varer, indtil de selv senere kan overbevise sig om, at det er tilfældet. Således, omend det kun er midlertidigt, at bygge på lærerautoritet bør man efter min opfattelse undgå, såfremt det på forholdsvis simpel måde er muligt. Her lader dette sig netop gøre, hvilket jeg håber må fremgå af det følgende.

Det, jeg gerne vil henlede opmærksomheden på, er, at man ved denne lejlighed ligesom ved så mange andre med saglig og pædagogisk fordel kan lade sig lede af en forudgående *analyse* af den foreliggende opgave efter det kendte skema: Man tænker sig opgaven løst, betragter en løsning — uden på forhånd at bekymre sig om eksistensen — og søger karakteristiske egenskaber ved den.

6. Først må det naturligvis bringes helt på det rene, hvad opgaven går ud på.

Under hensyntagen til de komplekse tals historiske oprindelse stiller vi os på et rent algebraisk standpunkt. Videre tager vi kun den ene ligning

$$(6) \quad x^2 + 1 = 0$$

i betragtning; andre ligninger, der ligesom denne savner løsninger inden for det reelle talområde, inddrages altså ikke i overvejelserne. Løst udtrykt skal opgaven da være den, at udvide de reelle tals område til et talområde, inden for hvilket man regner elementært, d. v. s. adderer, subtraherer, multiplicerer og dividerer, på en sådan måde, at alle de fra det reelle område velkendte regler kommer til at gælde, og inden for hvilket ligningen (6) kan løses. Hertil føjes yderligere den betingelse, at området ikke skal tages mere omfattende end nødvendigt for, at (6) kan få en løsning.

Imidlertid bør opgaven naturligvis præciseres nøjere. I 7 vil vi gøre rede for, hvad man skal forstå ved en udvidelse af de reelle tals område til et talområde, inden for hvilket man regner på en sådan måde, at de

velkendte regler gælder; vi indfører i denne forbindelse betegnelsen R -område (læs »regneområde«). I § 8 følger derpå den endelige præcisering af opgaven, hvormed der er fri bane for i det følgende nummer at foretage den omtalte analyse.

7. Lad Ω betegne en mængde af »elementer«, som omfatter de reelle tal, og inden for hvilken der foreligger en addition og en multiplikation; til to vilkårligt givne elementer a og b i Ω findes altså stedse i Ω et bestemt element, der betegnes $a+b$, og et bestemt element, der betegnes $a \cdot b$ (eller ab). Summen $a+b$ skal, når a og b specielt er reelle tal, være den sædvanlige inden for det reelle område benyttede; analogt hvad angår produktet.

Vi vil kalde Ω et R -område, såfremt de følgende regler, hvor a , b og c betegner vilkårlige elementer inden for Ω , gælder:

- 1) $a+b = b+a$.
- 2) $a+(b+c) = (a+b)+c$.
- 3) $0+a = a$.
- 4) Til ethvert element a fra Ω findes netop eet element a^* i Ω , således at $a+a^* = 0$.
- 5) $ab = ba$.
- 6) $a(bc) = (ab)c$.
- 7) $1 \cdot a = a$.
- 8) Til ethvert element $a \neq 0$ fra Ω findes netop eet element a^{-1} i Ω , således at $a \cdot a^{-1} = 1$.
- 9) $a(b+c) = ab+ac$.

Inden for et R -område gælder alle de regler, der gælder for elementær regning inden for de reelle tals område. Dette er velkendt. Her skal blot i korthed fremhæves nogle få ting, som særlig kommer til anvendelse.

Betegnes det i 4) omtalte element a^* med $-a$, er åbenbart ligningerne $a+b = 0$, $a = -b$ og $b = -a$ ensbetydende. Betegnes elementet $a+(-b)$ med $a-b$, er ligningerne $a = b$, $a-b = 0$ og $b-a = 0$ ensbetydende. Videre er stedse $b = b+0 = b+((-c)+c) = (b+(-c))+c = (b-c)+c$.

Af ligningen $b = (b-c)+c$ fås ved multiplikation med a reglen $(b-c)a = ba-ca$. Tager man her $b = c$, finder man reglen $0 \cdot a = 0$, og tager man $b = 0$, finder man reglen $(-c)a = -ca$.

— Det er et spørgsmål, om en så udførlig præcisering almindeligvis vil være frugtbar ved undervisning i skolen. Nødvendig er den næppe, idet det skulle være nok, efterhånden som betragtningerne (i § 9) skrider frem, at pege på de regler, der impliceres. På den anden side har man her en konkret anledning til på stringent måde at dyrke lidt abstrakt algebra

på et stadium — slutningen af gymnasietiden —, hvor eleverne dog har opnået en vis modenhed og træning i nøje at fastholde forudsætninger og definitioner, for dygtige elevers vedkommende antagelig i tilstrækkeligt omfang til, at de med godt udbytte kan være med til de detailovervejelser, som her og ved de følgende betragtninger er nødvendige for en helt tilbundsående gennemførelse.

8. I nøjagtig formulering lyder nu den opgave, der er på tale, således: Man skal udvide de reelle tals område til et R -område Ω med følgende egenskaber:

- I. Der findes i Ω et element i , således at $i^2 + 1 = 0$.
- II. Hvis et R -område Ω' , som er indeholdt i Ω , selv indeholder elementet i , er Ω' identisk med hele Ω . — Det er herved underforstået, at summen af to elementer i Ω' stedse er den man får, når man danner summen efter den i Ω foreliggende addition; tilsvarende, hvad angår produktet.

Det kan anføres, men skal ikke benyttes i det følgende, at hvis ligningen $x^2 + 1 = 0$ inden for et R -område har en løsning i , har den netop to løsninger inden for dette, nemlig i og $-i$. Ingen af disse indtager en særstilling frem for den anden, hvilket harmonerer med II; et R -område Ω' inden for Ω , som indeholder den ene af de to løsninger, indeholder også den anden. Ved formuleringen af II kan ordene »indeholder i « således erstattes med ordene »indeholder en løsning til ligningen $x^2 + 1 = 0$ «, uden at indholdet ændres.

Kravet II udtrykker åbenbart, at Ω ikke må være en mere omfattende udvidelse end nødvendigt for, at ligningen $x^2 + 1 = 0$ skal få en løsning.

9. Idet det er hensigten nu at gennemføre den tidligere omtalte analyse, *antages*, at Ω er et R -område med egenskaberne I og II; hvorvidt et sådant virkelig eksisterer, skal ikke i denne forbindelse bekymre os. De i Ω indeholdte reelle tal skal betegnes med græske bogstaver eller taltegn, medens elementer fra Ω , der ikke vides at være reelle tal, skal betegnes med latinske bogstaver.

Inden for Ω betragter vi nu delmængden Ω' bestående af alle elementer

$$\alpha + i\beta,$$

hvor α og β er reelle tal og i er en løsning til ligningen $x^2 + 1 = 0$, således at $i^2 = -1$. Herved er I blevet anvendt.

Ω' omfatter alle reelle tal, idet disse jo fremkommer, når $\beta = 0$ og α

gennemløber de reelle tal. Endvidere indeholder Ω' elementet i , der jo fremkommer for $\alpha = 0$ og $\beta = 1$.

Et element $\alpha + i\beta$ er 0, når $\alpha = \beta = 0$. Men også kun i dette tilfælde. Er nemlig ligningen $\alpha + i\beta = 0$ opfyldt, kan β ikke være forskellig fra 0; thi i så fald måtte i være reel. Og er $\beta = 0$, viser ligningen, at også α må være 0. Det forholder sig altså således, at $\alpha + i\beta \neq 0$, når og kun når $\alpha^2 + \beta^2$ er positiv. — Af det lige omtalte sluttet, at en ligning $\alpha + i\beta = \alpha' + i\beta'$, der jo kan skrives $(\alpha - \alpha') + i(\beta - \beta') = 0$, er opfyldt, når og kun når $\alpha = \alpha'$ og $\beta = \beta'$. Elementet $\alpha + i\beta$ og talparret (α, β) bestemmer altså hinanden entydigt.

Er nu $z = \alpha + i\beta$ og $z' = \alpha' + i\beta'$ to vilkårlige elementer fra Ω' , finder man

$$z + z' = (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta')$$

og med benyttelse af relationen $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= \alpha\alpha' + \alpha i\beta' + i\beta\alpha' + i\beta i\beta' \\ &= (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \beta\alpha'). \end{aligned}$$

Heraf fremgår, at summen og produktet af to elementer fra Ω' tilhører Ω' . (Ved en helt tilbundsgående gennemførelse bør man ved de foregående og efterfølgende udregninger i enkeltheder gøre sig klart, på hvilken måde det benyttes, at Ω er et R -område.)

Videre er det klart, at inden for Ω' gælder reglerne 1), 2), 3), 5) 6), 7) og 9), simpelthen fordi disse regler gælder inden for hele Ω . Også reglen 4) gælder; thi ligningen

$$(\alpha + i\beta) + (\xi + i\eta) = 0$$

kan jo skrives

$$(\alpha + \xi) + i(\beta + \eta) = 0$$

og er altså, som ovenfor bemærket, opfyldt, når og kun når $\xi = -\alpha$, $\eta = -\beta$. Endelig gælder reglen 8) inden for Ω' . Thi ligningen

$$(7) \quad (\alpha + i\beta)(\xi + i\eta) = 1$$

kan jo skrives

$$(\alpha\xi - \beta\eta) + i(\alpha\eta + \beta\xi) = 1$$

og er altså ensbetydende med de to reelle ligninger

$$\alpha\xi - \beta\eta = 1$$

$$\beta\xi + \alpha\eta = 0.$$

Er nu $\alpha + i\beta \neq 0$, altså $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, er disse to ligninger samtidig opfyldt, når

$$\xi = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \eta = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

og kun i dette tilfælde. Heraf fremgår, at ligningen (7) har netop een løsning, nemlig

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + i \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Det er nu godtgjort, at Ω' er et R -område. Da Ω' som allerede nævnt omfatter alle de reelle tal og elementet i , er $\Omega' = \Omega$, da II antages at være opfyldt.

Hermed er analysen gennemført. Den har afsløret, at et R -område Ω med de ønskede egenskaber I og II må bestå netop af elementerne

$$\alpha + i\beta,$$

hvor α og β er reelle, og $i^2 = -1$, og at man inden for området regner på følgende måde,

$$(8) \quad (\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta') = (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta')$$

$$(9) \quad (\alpha + i\beta)(\alpha' + i\beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \beta\alpha').$$

10. Specielt fremgår af analysen, at opgaven i det væsentlige *højest* har *een* løsning. Thi lad både Ω_1 og Ω_2 være løsning på opgaven, d. v. s. R -områder, der begge har egenskaberne I og II. Er da i_1 et element i Ω_1 , for hvilket $i_1^2 + 1 = 0$, og i_2 et element i Ω_2 , for hvilket $i_2^2 + 1 = 0$, og benyttes inden for henholdsvis Ω_1 og Ω_2 fremstillingerne

$$\alpha + i_1\beta \quad \text{og} \quad \alpha + i_2\beta,$$

regner man jo ifølge (8) og (9) inden for Ω_2 helt på samme måde som inden for Ω_1 ; erstatter man i en udregning vedrørende elementer i Ω_1 overalt i_1 med i_2 , får man en rigtig udregning vedrørende Ω_2 , og omvendt.

Når man da, f. eks. ved de i **3** omtalte metoder, har vist eksistensen af en løsning, kan man med rette tale om de komplekse tals område som en veldefineret begrebsdannelse, idet man herved forstår den entydigt bestemte løsning på den stillede opgave.

11. At analysen kan udnyttes i konstruktivt øjemed, er åbenbart. Det blev jo i **9** påpeget, at elementet $\alpha + i\beta$ er fuldstændigt bestemt ved talparret (α, β) , og dette kan altså benyttes som betegnelse for $\alpha + i\beta$. Alle talpar (α, β) , hvor α og β er reelle tal, forekommer øjensynligt på denne måde som betegnelse for elementer i Ω . Med anvendelse af denne beteg-

nelsesmåde kan (8) og (9) skrives

$$(10) \quad (\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

$$(11) \quad (\alpha, \beta)(\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta', \alpha\beta' + \beta\alpha').$$

Heraf fremgår, at hvis den stillede opgave overhovedet har en løsning, må den fremkomme, når vi tager mængden af alle par (α, β) af reelle tal α og β og definerer sum og produkt ved (10) og (11).

Hermed er da opnået en — man kan vel sige fuldstændig — motivering for den i 3 omtalte indførelse af de komplekse tal ved hjælp af talpar. — Man må være opmærksom på, at de under analysen foretagne ræsonnementer, der jo byggede på antagelsen af eksistensen af et R -område Ω med egenskaberne I og II, på ingen måde fritager for gennemførelsen af de i 3 i korthed omtalte betragtninger.

12. Afsluttende vil jeg atter gerne fremhæve, at det forfægtede klassiske analyse-konstruktion synspunkt næppe kan forekomme elever fremmedartet. Det er jo netop det, der anvendes ved løsning af enhver geometrisk konstruktionsopgave; blot er den genstand, som i vort tilfælde ønskes tilvejebragt, ikke en geometrisk figur, men et talområde, der skal have visse på forhånd angivne egenskaber.

Måske vil nogle elever finde det berigende at se en metode, de fra geometrien er overordentlig fortrolige med, i fuld anvendelse inden for et helt andet område.

EN SATS AV FÁRY MED ELEMENTÄRA TILLÄMPNINGAR

OTTO FROSTMAN

Den vinkel v som två räta linjer i ett plan bilda med varandra, är i allmänhet icke invariant gentemot ortogonal projektion. Projicieras linjerna i ett annat plan med en normalriktning $\vec{n}$, blir vinkeln mellan linjernas projektioner en viss, i allmänhet icke konstant funktion $\varphi(\vec{n})$ av $\vec{n}$. För endast några år sedan har emellertid István Fáry [1] visat, att medelvärdet av φ för alla möjliga $\vec{n}$ är lika med den ursprungliga vinkeln v . Hur medelvärdet skall beräknas kommer att förklaras nedan.

Fáry bevisar sin sats utan räkning genom att på ett synnerligen elegant sätt utnyttja den välkända och för övrigt lätt bevisbara satsen av Cauchy, att en kontinuerlig funktion $f(x)$ som uppfyller funktionalrelationen $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$, är av formen $f(x) = kx$, där k är en konstant. Redan av detta skäl förtjänar satsen att uppmärksammas i en elementär tidskrift; härtill kommer emellertid att den tillåter en hel rad intressanta tillämpningar på elementär rymdgeometri. I själva verket torde den kända satsen om vinkelsumman i ett konvext hörn lättast erhållas på denna väg.

Låt AOB vara en triangel och beteckna vinkeln vid O med v . Då är $0 \leq v \leq \pi$, där gränserna motsvara de fall då triangeln övergår i en rät linje. Låt vidare O vara medelpunkten till en sfär med radien 1 och projiciera triangeln AOB ortogonalt i ett godtyckligt tangentplan till sfären. Man erhåller en triangel $A'O'B'$, i vilken vinkeln vid O' betecknas med φ . Tangentplanet är fullständigt bestämt av tangeringspunkten S ($= O'$ i detta fall), och alltså är även vinkeln φ en viss funktion $\varphi(S)$ av S , som är väl definierad och kontinuerlig utom för det fall att tangentplanet är vinkelrätt mot OA eller OB . Vidare är $0 \leq \varphi \leq \pi$. Fáry's sats säger då, att medelvärdet av $\varphi(S)$ över sfärens yta är v , d. v. s.

$$v = \frac{1}{4\pi} \int \varphi(S) dS,$$

där dS är det sfäriska ytelementet och integrationen utsträcker sig över hela sfären.

För bevisets skull observera vi först, att vinkeln φ är oberoende av en parallellförflyttning av triangeln AOB och likaledes oberoende av längderna av triangelsidorna OA och OB . Detta innebär, att $\varphi = \varphi(S, \vec{a}, \vec{b})$ endast beror på S och på enhetsvektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ längs OA och OB . Medelvärdet av $\varphi(S, \vec{a}, \vec{b})$ över sfärens yta är då en funktion $f(\vec{a}, \vec{b})$ av dessa vektorer. Men på grund av sfärens allsidiga symmetri är $f(\vec{a}, \vec{b})$ oberoende av en godtycklig rotation av triangeln AOB , så att $f(\vec{a}, \vec{b})$ i själva verket endast beror på vinkeln v mellan vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Vi kunna följaktligen sätta

$$\frac{1}{4\pi} \int \varphi(S, \vec{a}, \vec{b}) dS = f(v).$$

Funktionen $f(v)$ är uppenbarligen kontinuerlig och $0 \leq f(v) \leq \pi$. Om v delas i två delar v_1 och v_2 genom en vektor $\vec{c}$ i samma plan som $\vec{a}$ och $\vec{b}$, så motsvaras dessa delar av två vinklar $\varphi(S, \vec{a}, \vec{c})$ och $\varphi(S, \vec{c}, \vec{b})$, och eftersom två vinklar i samma plan kunna direkt adderas och integrationen är distributiv, gäller sambandet

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= \frac{1}{4\pi} \int \varphi(S, \vec{a}, \vec{b}) dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int [\varphi(S, \vec{a}, \vec{c}) + \varphi(S, \vec{c}, \vec{b})] dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \varphi(S, \vec{a}, \vec{c}) dS + \frac{1}{4\pi} \int \varphi(S, \vec{c}, \vec{b}) dS = \\ &= f(v_1) + f(v_2). \end{aligned}$$

Funktionen $f(v)$ uppfyller alltså relationen $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$; enligt den förut nämnda satsen av Cauchy är då

$$f(v) = kv,$$

där k är en viss konstant. Denna kan lätt bestämmas, om man observerar att projektionen av en rät linje i ett godtyckligt plan är en rät linje; sättes alltså $v = \pi$, blir $\varphi(S)$ konstant $= \pi$, vilket ger

$$f(\pi) = k\pi = \frac{1}{4\pi} \int \pi dS = \pi.$$

Alltså är $k = 1$ och $f(v) = v$, v. s. b.

Den bevisade satsen kan lätt ges en något generellare tolkning, betydelsefull för användningarna. Betrakta olika från en punkt O utgående vektorer, vilka icke behöva ligga i samma plan, och beteckna vinklarna mellan dessa med $v_1, v_2, \dots$. Projicieras figuren ortogonalt i ett plan, motsvaras varje v_i av en vinkel φ_i , varvid $0 \leq v_i \leq \pi$ och $0 \leq \varphi_i \leq \pi$. På grund av integrationens distributivitet gäller då

$$\sum v_i = \sum \frac{1}{4\pi} \int \varphi_i(S) dS = \frac{1}{4\pi} \int (\sum \varphi_i(S)) dS.$$

Man kan därför på vanligt sätt addera vinklarna φ_i i projektionen; summans medelvärde är då lika med summan av de verkliga vinklarna v_i , även om dessa skulle ligga i helt olika plan.

Som första tillämpning bevisa vi triangelolikheten för tresidiga hörn: *I varje tresidigt hörn är summan av två sidovinklar större än den tredje.*

Hörnet avskäres medelst ett plan, som ej går genom spetsen O , varvid skärningsfiguren blir en triangel ABC . Hörnets sidovinklar äro $AOB = v_1$, $BOC = v_2$ och $COA = v_3$. Vid ortogonal projektion i ett godtyckligt plan övergår triangeln ABC i en triangel $A'B'C'$ och O i en punkt O' . Vinklarna v_1, v_2 och v_3 motsvaras av vinklarna φ_1, φ_2 och φ_3 i projektions-

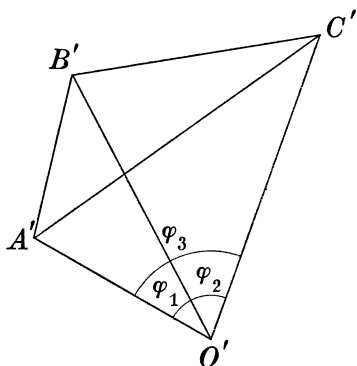


Fig. 1

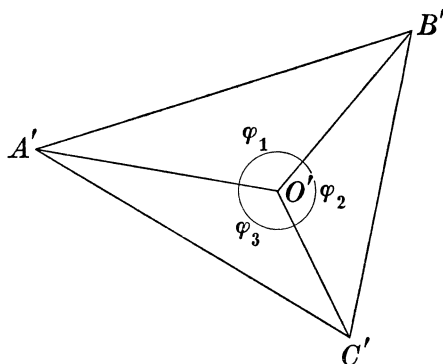


Fig. 2

planet. Två fall kunna nu inträffa (fig. 1 och 2). Ligger O' utanför triangeln $A'B'C'$ (eller som grännsfall på någon av triangelnsidorna), är alltid någon vinkel φ lika med summan av de båda andra; t. ex. $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$. Ligger däremot O' innanför triangeln $A'B'C'$, är $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$. Men $\varphi_3 < \pi$, således $\varphi_1 + \varphi_2 > \pi > \varphi_3$. Alltså gäller alltid $\varphi_1 + \varphi_2 \geq \varphi_3$, varav följer

$$v_1 + v_2 = \frac{1}{4\pi} \int (\varphi_1 + \varphi_2) dS \geq \frac{1}{4\pi} \int \varphi_3 dS = v_3.$$

Nu är emellertid $\varphi_1 + \varphi_2$ icke konstant $= \varphi_3$; exempelvis ha vi ovan visat, att olikhetstecknet gäller, om O' ligger inuti triangeln $A'B'C'$, och denna projektionsfigur erhålles säkert, om normalen från O mot projektiionsplanet (eller normalens förlängning) går genom en inre punkt av triangeln ABC . Den del av enhetssfären som motsvarar en sådan normalriktning, har ett positivt yttnehåll, vilket medför att likhetstecknet ej kan gälla. Alltså är $v_1 + v_2 > v_3$, v. s. b.

Som nästa tillämpning välja vi den välbekanta satsen om vinkelsumman i ett konvext hörn, vilken ofta härledes med hjälp av den nyss bevisade triangelolikheten.

I varje konvext hörn är summan av sidovinklarna $< 2\pi$.

Man inser lätt att hörnet kan avskäras medelst ett plan, som skär samtliga från spetsen O utgående kantlinjer. Skärningsfiguren är en konvex polygon $ABC \dots FG$. Vid ortogonal projektiion i ett godtyckligt plan övergår denna i en annan konvex polygon $A'B'C' \dots F'G'$, och bilden O' av O faller antingen innanför eller utanför sistnämnda polygon (fig. 3 och 4; gränsfallen bortse vi från). I första fallet är summan av sidovinklarnas projektiioner $= 2\pi$. I andra fallet utgå från O' två stödlinjer till polygonen $A'B'C' \dots F'G'$, vilka på grund av konvexiteten

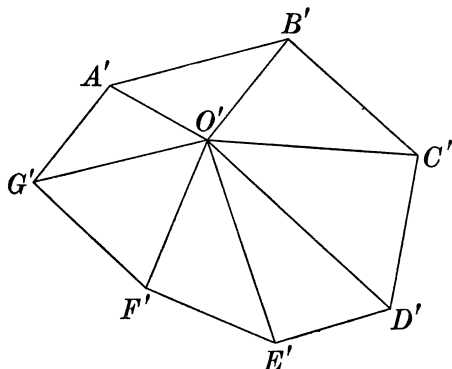


Fig. 3

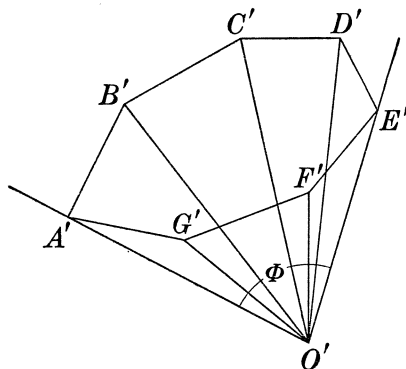


Fig. 4

bilda en vinkel $\Phi < \pi$ med varandra. Då nu varje del av denna vinkel övertäckes två gånger av sidovinklarnas projektiioner, är dessas summa $= 2\Phi < 2\pi$. Medelvärdet, vilket enligt Fáy's sats är lika med de verkliga sidovinklarnas summa, är alltså $\leq 2\pi$. På liknande sätt som vid beviset av triangelolikheten ovan visar man, att likhetstecknet är uteslutet.

Även för summan av kantvinklarna vid ett hörn kunna vissa olikheter uppställas:

Vid ett n -sidigt konvext hörn är summan av kantvinklarna $> (n-2)\pi$ och $< (n-2)\pi + \text{summan av sidovinklarna}$.

Första delen av påståendet är välbekant och kan lätt erhållas ur satsen om sidovinklarna, tillämpad på polarhörnet. Vi betrakta för enkelhets skull först ett tresidigt hörn med kantvinklarna u_1 , u_2 och u_3 . Normalerna till sidoytorna genom spetsen bilda då kantlinjer i ett nytt tresidigt hörn, vars sidovinklar äro supplementära till u_1 , u_2 och u_3 . Alltså är

$$(\pi - u_1) + (\pi - u_2) + (\pi - u_3) < 2\pi ,$$

varav fås

$$u_1 + u_2 + u_3 > \pi .$$

Ett n -sidigt konvext hörn kan emellertid uppdelas i n stycken tresidiga hörn genom n plan, bestämda av kantlinjerna och en fix linje utgående från spetsen mot det inre av hörnet. Om kantvinklarna äro u_i ($i = 1, 2, \dots, n$), fås då omedelbart ur specialfallet

$$\sum u_i + 2\pi > n\pi ,$$

d. v. s.

$$\sum u_i > (n-2)\pi .$$

Olikheten innebär som synes, att summan av kantvinklarna är större än vinkelsumman i en n -sidig, konvex polygon.

För att bevisa satsens andra olikhet göra vi följande konstruktion. På varje kantlinje väljes en punkt, enklast så att avstånden till spetsen bli lika stora. I varje sådan punkt dragas normalerna mot kanten i de båda plan som skära varandra längs ifrågavarande kant. Vinkeln mellan dessa normaler är ju enligt definition kantvinkeln. Å andra sidan råkas två normaler i samma sidoyta på bisektrisen till motsvarande sidovinkel i hörnet, och den vinkel de bilda med varandra, är supplementär till sidovinkeln. Vi få på så sätt en sluten polygonal linje med $2n$ sidor, vilka icke ligga i samma plan. Varannan vinkel är en kantvinkel u_i , och varannan vinkel är supplementär till en sidovinkel v_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Alla dessa vinklar äro $< \pi$.

Projicieras denna polygonala linje ortogonalt i ett plan, erhålles en plan polygon med $2n$ sidor. Vi beteckna de vinklar som motsvara u_i och $(\pi - v_j)$ med respektive φ_i och ψ_j . De äro alla $\leq \pi$. Alltså är

$$\sum_1^n \varphi_i + \sum_1^n \psi_j \leq (2n-2)\pi ,$$

där likhetstecknet gäller, om och endast om polygonen är konvex. Medelvärdesbildningen enligt Fáry's sats ger då omedelbart

$$\sum_1^n u_i + \sum_1^n (\pi - v_j) \leq (2n-2)\pi,$$

varav fås

$$\sum_1^n u_i \leq (n-2)\pi + \sum_1^n v_j.$$

Likhetstecknet kan icke gälla, då den plana polygonen säkert icke för alla projektioner blir konvex. Detta skulle nämligen endast kunna inträffa, om de dragna normalerna till hörnets kantlinjer själva bildade en plan polygon, vilket icke är möjligt. (Om emellertid hörnet urartar till ett prisma, äro samtliga $v_j = 0$, och likhetstecknet gäller självklart).

Vi bevisa slutligen några satser gällande för godtyckliga tetraedrar.

Låt $ABCD$ vara en tetraeder och O en inre punkt, vilken förbindes med tetraederns hörn. Sammanbindningslinjerna OA , OB , OC och OD bilda med varandra vinklarna u_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) och med tetraederns kanter vinklarna v_j ($j = 1, 2, \dots, 12$). Då är

$$\sum u_i + \sum v_j = 6\pi;$$

$$3\pi < \sum u_i < 4\pi;$$

$$2\pi < \sum v_j < 3\pi.$$

Den första relationen är självklar, då $\sum u_i + \sum v_j$ är sammanlagda vinkelsumman i sex trianglar AOB , BOC , etc. På grund av denna relation äro de båda återstående dubbla olikheterna komplementära, så att vi kunna nöja oss med att bevisa t. ex.

$$\sum u_i > 3\pi \quad \text{och} \quad \sum v_j > 2\pi.$$

Projicieras tetraedern ortogonalt i ett plan, erhålles en fyrhörning $A'B'C'D'$, vars sidor och diagonaler utgöra projektionerna av tetraederns kantlinjer. Fyrhörningen är icke nödvändigtvis konvex, men i varje fall

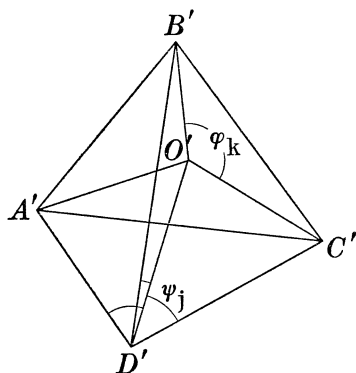


Fig. 5

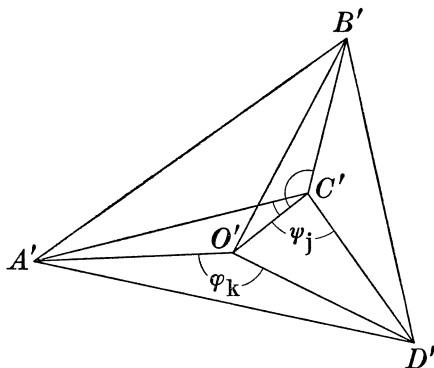


Fig. 6

är bilden O' av O en inre punkt i dess konvexa hölje (fig. 5 och 6). Vinklarna u_i projicieras i de vinklar φ_i , varunder fyrhörningens sidor och diagonaler synas från O' . Eftersom O' är en inre punkt, uppta dessa synvinklar först ett helt varv och därutöver ytterligare vinklar vars summa är $> 2\pi - \varphi_k$, där φ_k är någon av vinklarna φ_i , bestämd av läget av O' i figuren. Då $\varphi_k < \pi$, är alltså

$$\sum \varphi_i > 2\pi + (2\pi - \varphi_k) > 3\pi .$$

Vinklarna v_j projicieras i de vinklar ψ_j , som bildas vid hörnen A' , B' , C' och D' mellan sidor respektive diagonaler och syftlinjerna till O' . Summan av vinklarna ψ_j är uppenbarligen större än vinkelsumman i fyrhörningen, d. v. s.

$$\sum \psi_j > 2\pi .$$

Då nu enligt Fáry's sats medelvärdena av $\sum \varphi_i$ och $\sum \psi_j$ för alla möjliga projekteringsriktningar återge oss $\sum u_i$ och $\sum v_j$ gälla för dessa senare vinkelsummor samma olikheter som för de förra, v. s. b.

Summan av kantvinklarna i en tetraeder är $> 2\pi$ men $< 3\pi$.

Kantvinklarna kunna erhållas på följande sätt. I varje tetraeder kan en sfär som tangerar begränsningsytorna, inskrivas. Från sfärens medelpunkt O fällas normalerna OA , OB , OC och OD mot tangentplanen. Den vinkel som två normaler bilda med varandra, är supplementär till en kantvinkel.

Fotpunkterna A , B , C och D bilda hörn i en ny tetraeder, vilken innehåller medelpunkten O i sitt inre. Om nämligen O låge utanför tetraedern $ABCD$, så skulle åtminstone ett av tetraederns plan skilja O från motstående hörnpunkt. Exempelvis skulle O och D ligga på olika sidor om planet ABC . Samtliga tangeringspunkter A , B , C och D för den i den ursprungliga tetraedern inskrivna sfären skulle då ligga på ena sidan av ett med ABC parallellt diametralplan. Detta är emellertid orimligt, ty det skulle innebära att sfären icke vore inskriven utan i stället vidskrivnen. Alltså ligger O i det inre av tetraedern $ABCD$.

Man kan nu tillämpa de i föregående sats bevisade olikheterna. Om kantvinklarna betecknas med u_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), så äro vinklarna mellan OA , OB , etc. $(\pi - u_i)$, och man erhåller

$$3\pi < \sum_1^6 (\pi - u_i) < 4\pi ,$$

d. v. s.

$$3\pi < 6\pi - \sum u_i < 4\pi .$$

Alltså är

$$2\pi < \sum u_i < 3\pi; \quad \text{v. s. b.}$$

Man kan lätt konstruera exempel som visa, att gränserna icke kunna förbättras.

REFERENS:

- [1] I. FÁRY: *Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud*. Bull. Soc. Math. de France **77** (1949), p. 128—138, spec. p. 133.

GEOMETRIUNDERVISNINGEN

I REALSKOLAN

Under denna rubrik återges i detta häfte anföranden, som hölls under årsmötet i Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm den 3—5 januari i år, då den ständigt aktuella frågan hur geometrien bör undervisas i realskolan, diskuterades. Inledare var rektor P. Rubinstein, Köpenhamn, skolrådet Viljo O. Laine, Helsingfors, lektor Björn Rudberg, Hamar (Norge) samt rektor Sigurd Åstrand, Stockholm. I diskussionen deltog även rektor Einar Lunell, Skellefteå (Sverige) och undervisningsrådet C. E. Sjöstedt, Stockholm, varefter rektor Rubinstein hade ordet för en slutreplik. Även om åsikterna som alltid i en sådan här diskussion skilde sig, fanns det dock mycket gemensamt i synpunkter hos de olika ländernas representanter.

I senare häften kommer ovanstående rubrik att stå öppen för diskussionsanföranden från NMT:s läsare.

P. RUBINSTEINS inledningsanförande var följande:

När man på 40 minuter skal sige noget om matematikundervisningen i den danske realskole, kan man ikke komme ind på alle problemer desangående. Man bliver nødt til at træffe et valg, og man indser meget snart, at man ikke engang kan komme ind på alle væsentlige problemer. I det følgende skal jeg forsøge at give nogle få oversigtsmæssige oplysninger om undervisningen som baggrund for en diskussion af de problemer, som jeg selv anser for de mest centrale.

Den skoleafdeling, der her bliver tale om, er den 4-årige eksamensmellemsskole og den derefter følgende 1-årige realklasse. Eleverne træder ind i 1. mellemsskoleklasse 11 år gamle efter en 5-årig grundskole og forlader normalt realklassen 5 år efter i en alder af 16 år. Lovgivningen om undervisningen i denne skole er uhyre rummelig i den forstand, at den overlader næsten alt til de administrative bestemmelser. I lov af 24. april 1903 om højere almenskoler m. m. siges om undervisningen i praktisk regning og matematik kun, at en sådan skal finde sted. Hvilke emner denne under-

visning skal omfatte, og hvor mange timer der kan anvendes hertil, siges der først noget om i kongelig anordning af 26. maj 1904 og undervisningsministeriets bekendtgørelse af 1. juli samme år. I den kongelige anordning udtales om geometri:

Undervisningen heri skal omfatte følgende afsnit af plangeometrien i elementær fremstilling: den rette linies og planens grundegenskaber; rette liniestykkers lige- og uligestorhed og måling; vinkler, deres lige- og uligestorhed samt måling; parallelle linier; trekanter (kongruens, lige- og uligestorhed af sider og vinkler, skrålinier); firkanter (trapezet, parallelogrammer); cirklen (stilling til en ret linie, to cirklers indbyrdes stilling, vinklers afhængighed af cirkelbuer); arealer af polygoner (cirkelns længde og areal skal være bekendt, men kræves ikke udledt matematisk); sætningen om sidernes proportionalitet i ensvinklede trekanter (beviset føres kun for det tilfælde, hvor siderne er kommensurable) med nogle af de sædvanlige anvendelser til beregning af liniestykkers længde, derunder sætninger om den retvinklede trekant. . . .

I den ministerielle bekendtgørelse anser man det for rigtigt til undervisningen i geometri at anvende ialt 6 ugentlige timer, fordelt på 2., 3. og 4. mellemskoleklasse. I realklassen er geometri et valgfrit fag, der kun medtages ved få skoler. I bekendtgørelsen udtales endvidere blandt andet:

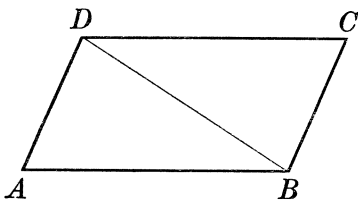
. . . efter den indledende undervisning — som ikke må gøres for vidtløftig, og som skal tjene til gennem betragtning af simple rumformer (hvor man helst må henholde sig til sædvanlige brugsgenstande, som er eleverne vel kendte fra det daglige liv) og gennem tegning at gøre børnene fortrolige med de objekter, hvormed geometrien arbejder, og at fremdrage de grundegenskaber ved disse, som det må anses for nødvendigt på dette trin udtrykkeligt at nævne — . . .

. . . Der bør fra første færd lægges megen vægt på figurtegning, også inden den egentlige konstruktionslære er påbegyndt, hvilket forøvrigt bør ske så tidligt som muligt, idet eleverne, efterhånden som de afledede egenskaber ved den rette linie og cirklen (»geometriske steder«) udfindes, straks bør øves i at anvende dem til at løse lette konstruktionsopgaver. . . .

Medens omfanget af stoffet fremgår ret tydeligt af den kongelige anordning, får man af bekendtgørelsen en lille smule at vide om stoffets tilrettelægning. Figurernes grundlæggende egenskaber, med andre ord de geometriske aksiomer, skal eleverne ledes frem til ud fra erfaringer angående genstande fra dagliglivet og figurer, som de selv tegner. Det frem-

går endvidere, at man ikke forventer samtlige aksiomer nævnt, men kun sådanne, »som det må anses for nødvendigt på dette trin udtrykkeligt at nævne«, og her er vi ved et af de centrale problemer. Hvor fuldstændigt skal man gøre aksiomsystemet? Jeg tror at kunne sige, at danske matematiklærere er enige om, at fuldstændighed i samme forstand, hvori man finder den f. eks. i Hilberts *Grundlagen der Geometrie*, ikke bør tilstræbes. Eleverne ville f. eks. ikke forstå formålet med en række eksistensaksiomer; aksiomet om, at der i planen eksisterer 3 punkter, der ikke ligger på ret linie, siger ikke eleverne noget, som de finder grund til at påberåbe sig under senere beviser. Noget lignende gælder aksiomer som følgende: Når A , B , C og D er punkter på en ret linie, hvor C ligger mellem A og B , og hvor D ligger mellem A og C , så ligger D mellem A og B . En nødvendig følge af aksiomsystemets ufuldstændighed bliver, at ikke alle beviser i lærebygningen kan gennemføres udelukkende ved deduktion, altså ikke udelukkende ved logisk tænkning. Lad mig vise ved et eksempel, hvad jeg tænker på:

Beviset for, at de modstående sider i et parallelogram er lige store, føres som regel ved en påvisning af, at de trekanter ABD og CDB , hvori parallelogrammet $ABCD$ deles af diagonalen BD , er kongruente, fordi nævnte trekanter har en side og de hosliggende vinkler lige store. At $\angle ABD = \angle CDB$, begrundes ved, at de er ensliggende vinkler (alternativinkler) ved parallelle linier. Men påstanden om, at de er ensliggende vinkler, afledes ikke logisk af det givne, den aflæser man dristigt (og som regel ubevidst) af figuren. Med andre ord: man smugler stiltiende forudsætninger ind i beviset. Hvorledes måtte dette bevis tage sig ud, hvis man skulle gennemføre en deduktion også for, at nævnte vinkler er ensliggende? Blandt andet skulle man i så fald vise, at disse vinkler ligger på hver sin side af linien BD . Dette bevis er svært. Lad os prøve at gennemføre det. Hvis $\angle ABD$ og $\angle CDB$ lå på samme side af linien BD , måtte punkterne A og C ligge på samme side af BD ; da $AB \parallel CD$, måtte nabovinklen til $\angle CDB$ være ensliggende med $\angle ABD$, hvoraf følger, at $\angle CDB = 180^\circ - \angle ABD$. På lignende måde indser man, at $\angle CBD = 180^\circ - \angle ADB$. Heraf følger, at $\angle CDB + \angle CBD = 360^\circ - (\angle ABD + \angle ADB) > 360^\circ - 180^\circ$, fordi $\angle ABD$ og $\angle ADB$ er vinkler i trekant ABD og deres sum derfor $< 180^\circ$. I trekant CBD skulle altså summen af vinklerne B og D være større end 180° ; da dette strider imod en kendt sætning, må forudsætningen være gal; vinklerne $\angle ABD$ og $\angle CDB$ ligger altså på hver sin side af BD .



Antagelig synes De ikke om dette bevis. Måske ville De hellere påberåbe Dem en sætning af følgende indhold: I en konveks firkant $ABCD$ ligger A og C på modsatte sider af linien BD . Men i så fald måtte man enten bevise denne sætning (og det ville på ingen måde blive lettere), eller også måtte man opstille den som aksiom. I dansk praksis går man ingen af disse veje, man foretrækker at smugle, og det er sikkert pædagogisk rigtigt. Men spørgsmålet bliver da: I hvor stor udstrækning skal man smugle? Jeg tror, der er enighed om, at man skal undgå at smugle i så stor udstrækning, som det er pædagogisk forsvarligt. Til trods for, at de enkelte læreres pædagogiske erfaringer ikke er ganske ens — de afhænger jo blandt andet af elevklientelet og af lærerens personlighed — vil jeg hævde, at der er ganske god enighed om det pædagogisk forsvarlige i denne henseende. Hvad man derimod ikke er slet så enig om, er, i hvor høj grad man bør afvige fra Euklid i udformning af beviserne for at undgå smugling så meget som muligt. For — som jeg skal belyse ved eksempler om lidt — er det meget vel muligt på elementær måde at omforme grundlaget således, at beviserne kan gennemføres praktisk taget uden smugling.

Ligesom man i Danmark anser det for pædagogisk nødvendigt at forbigå visse af de grundlæggende aksiomer i tavshed, finder man det i vide kredse hensigtsmæssigt at nævne flere sætninger som aksiomer, end det er nødvendigt af videnskabelige grunde. Motivet hertil er følgende: Forestil Dem en klasse, som for nylig har påbegyndt undervisningen i geometri, og som endnu aldrig har været i berøring med et matematisk bevis. Det er nu lærerens opgave at få eleverne til at forstå, hvad et sådant er. Måske vil læreren — ligesom visse ældre lærebøger — sige noget i smag med følgende: Et bevis er en tankeproces, der fører os fra en kendt sætning til en for os hidtil ukendt. Selv om denne udtalelse ikke er helt forkert, vil eleverne sikkert ikke få meget ud af den. Man kunne næsten lige så godt forsøge at lære et to års barn, hvad en stol er, ved at sige: En stol er en indretning med 4 ben, beregnet til at sidde på. Over for det lille barn bærer man sig fornuftigvis anderledes ad; ved passende lejligheder peger man på en stol og nævner samtidigt ordet »stol«. På lignende måde bør man bære sig ad, når eleverne skal stifte bekendtskab med det geometriske bevis. Man skal stille dem over for nogle beviser, der ud fra en forhåndsviden fører dem til en erkendelse, der er ny for dem. Dette princip forsynder flere — især ældre — lærebøger sig groft imod. Hvor ofte ser man ikke sætninger som »Over for en større side i en trekant ligger en større vinkel« og »Summen af to sider i en trekant er større end den tredje« blandt de først beviste i lærebøgerne til trods for, at deres indhold føles selvfølgeligt for eleverne, lige så godt, ja måske endog bedre kendt end de forudsætninger, på hvilke beviserne bygger. Samme be-

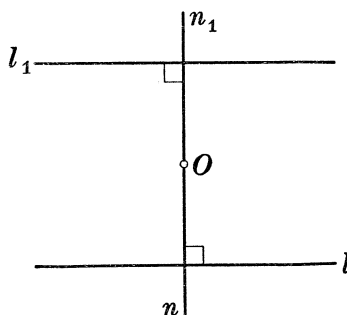
tragtning kan i mange tilfælde anføres med hensyn til de sædvanlige sætninger om trekanters kongruens, idet de vage flytningsbegreber, man som regel opererer med i beviserne, må forekomme eleverne mindre sikre end den slutning, man drager af dem. Målet, at gøre eleverne fortrolige med matematisk bevisførelse, når man ikke på denne måde; men værre er det, at man på denne måde har gode chancer for at gøre eleverne utrygge; de forstår ikke, hvorfor de skal sige det, man forlanger af dem, og denne usikkerhed kan hemme dem, når de senere skal tilegne sig beviser, der virkelig fører dem frem til ny erkendelse. For de »selvfølgelige« sætningers vedkommende bør der således kun være to muligheder: Enten må de placeres så langt henne i systemet, at eleverne allerede er fortrolige med bevisførelsens princip, når man kommer til dem, eller også må de placeres i spidsen af systemet som ubeviste aksiomer, godtgjort ved erfaring med virkelige figurer. Hvilke »selvfølgelige« sætninger der således kommer til at fremtræde som aksiomer, og hvilke man vil finde bevist længere fremme, afhænger af systemets opbygning. I alle tilfælde kan man dog være sikker på, at det aksiomatiske grundlag af ovennævnte pædagogiske grunde bør være større, end det er nødvendigt af videnskabelige grunde. Heri ser jeg ingen ulykke; den økonomi, det er naturligt for videnskaben at udvise ved opstillingen af de ubeviste forudsætninger, er ingen naturlig opgave for børneskolen. Og i alle tilfælde finder jeg det mere ærligt at nævne sådanne ubeviste forudsætninger end at forbigå dem i tavshed, når det ikke ligefrem drejer sig om sætninger, der ligger dybt forankrede i dagligsproget, f. eks. Euklids størrelsesrelationer og den tidligere nævnte sætning angående relationen »mellem«.

Ved at udvide de klassiske aksiomsystemer som skildret ovenfor har man forladt Euklids grundlag. Det vil da også være naturligt at afvige fra hans læregang. Har man f. eks. blandt aksiomerne optaget sætningen »En kordes indre punkter ligger inden for cirklen«, vil det være en letelse at bevise den sædvanlige sætning om skrålinier ved hjælp af denne i stedet for som Euklid at støtte beviset på en sammenligning mellem to trekantsvinkler og deres modstående sider.

Der kan dog også nævnes andre grunde for at afvige fra Euklids læregang. I det foregående nævnte jeg det sædvanlige bevis for, at de modstående sider i et parallelogram er lige store. I skolen plejer man, som vi så, stiltiende at indsmugle visse forudsætninger. Ligeledes så vi, at beviset blev altfor vanskeligt til skolebrug, hvis det skulle gøres fuldstændigt. Jeg vil hævde, at vanskeligheder af denne art er en følge af, at man fører beviset ved hjælp af kongruenssætninger i stedet for at benytte sætninger om flytninger af vilkårlige figurer. Det forekommer mig selvfølgelig, at en udstrakt anvendelse af kongruente trekanter må føre til vanskelig-

heder. Påstanden om to trekanters kongruens er ensbetydende med flytning af en trekant; derfor betyder anvendelsen af kongruente trekanter, at man indskrænker sig til ikke at flytte andre figurer end trekanter. Når man som i det nævnte eksempel har at gøre med en firkant, må man altså før flytningen skære den itu til to trekanter, som bagefter skal føjes sammen igen, og vel at mærke føjes sammen på den rigtige måde. Herved bliver der brug for punkternes ordning i planen. Netop det ordningsmæssige, i det anførte eksempel A 's og C 's beliggenhed i forhold til linien BD , hører til de vanskeligste dele af elementæregometrien, og det er også først og fremmest på disse områder, man sædvanligvis indsmugler stilltende forudsætninger. Det er min overbevisning, at man ved stadig bearbejdning af elementargeometrien, ved ændringer såvel i aksiomsystemet som i lærebygningen, kan nå frem til en form, som i alt væsentligt overflødiggør smugling, uden at gøre stoffet sværere, end det er nu. Specielt mener jeg, at man kan opnå meget i denne henseende ved næsten helt at erstatte kongruenssætningerne med sætninger om flytninger. Hvad jeg her tænker på, kan jeg lettest vise ved et eksempel:

De vigtigste flytninger, jeg plejer at operere med, er spejling i en ret linie, parallelforskydning og drejning om et punkt O , specielt en halv omdrejning om O , hvorved enhver halvlinie, der udgår fra O , føres over i sin forlængelse. Om sidstnævnte flytning beviser man let, at den fører enhver ret linie l over i en hermed parallel (eventuelt sammenfaldende) linie l_1 . En halvlinie n ud fra O vinkelret på l føres nemlig over i sin for-



længelse n_1 samtidigt med, at l føres over i l_1 ; l og l_1 har således en fælles normal, bestående af n og n_1 , og er altså parallelle. Vi vender nu tilbage til sætningen om de modstående sider i et parallelogram $ABCD$. Lad O være midtpunktet af BD . En halv omdrejning om O fører da B over i D og D over i B . Linien AB føres over i en linie gennem D , parallel med AB , altså over i linien CD . På samme måde ser man, at linien AD føres over i linien CB ; skærings-

punktet A mellem AB og AD føres som følge heraf over i skæringspunktet C mellem CD og CB , hvorefter ses, at liniestykkerne AB og AD føres over i liniestykkerne henholdsvis CD og CB , d. v. s. at de modstående sider er lige store.

Man bemærker, at dette bevis er gennemført uden anvendelse af noget ordningsmæssigt, figuren er jo flyttet i sin helhed, uden først at være skåret itu. Jeg kan ikke lade være med at nævne et biprodukt af det an-

førte bevis: Da A føres over i C , må liniestykket OA føres over i liniestykket OC . Da endvidere flytningen er en halv omdrejning, ligger OA og OC i hinandens forlængelser; O er altså midtpunkt også for diagonalen AC , d. v. s. diagonalerne halverer hinanden. Denne sætning plejer man at godtgøre ved at påvise kongruensen af to trekanter, der har en fælles vinkelspids i diagonalernes skæringspunkt. Her glemmer man gerne at vise, at diagonalerne overhovedet har et skæringspunkt, og et sådant bevis er også vanskeligt at give i den elementære undervisning. Dette får man dog gratis ved at anvende flytninger.

I spørgsmålet kongruenssætninger kontra flytninger står de danske lærere delt i to lejre; men der er stadig bevægelse fra kongruens- til flytningslejren. Alle danske lærere er vist enige om, at den euklidiske læregang må fraviges i meget væsentlig grad af pædagogiske grunde, men at dette ikke må mindske kravet om stringens. Stringens er jo ikke ensbetydende med, at man reducerer antallet af aksiomer til det mindst mulige, men betyder, at man ikke stiltiende smugler anskuelige elementer ind i beviserne. Beviserne skal nok være anskuelige, men skal ikke bygge på unævnte anskuelige elementer.

Jeg kan altså resumere mine anskuelser således:

Når eleverne gennem tegneøvelser er blevet fortrolige med de geometriske grundbegreber og grundsætninger, skal den deduktive metode i begyndelsen anvendes på sætninger, hvis indhold forekommer børnene nyt. Derfor er det nødvendigt at optage flere sætninger som aksiomer end nødvendigt af videnskabelige grunde. Dette medfører naturligt en læregang, der afviger betydeligt fra Euklids, og det er muligt, ikke mindst ved anvendelse af flytninger, i vid udstrækning at undgå smugling, med andre ord at gøre undervisningen mere stringent, og det endda samtidigt med, at ræsonnementerne bliver klarere og naturligere og taler mere til børnenes fantasi.

VILJO O. LAINES inledningsanförande var följande:

I detta nu finnes icke någon i kraft varande lag, som skulle fixera grundtyperna för statens läroverk i Finland. Skolorna bygger fortvarande på den av 1872-års skolordning lagda och sedermera utformade grunden. Läroplanerna och lärokurserna har dock under dessa 80 år genomgått betydande förändringar. I geometrin gäller de av undervisningsministeriet år 1941 fastställda kurserna, som kompletterats av skolstyrelsen utfärdade metodiska anvisningar från samma år. Fastän det efter år 1941 i Finland utkommit tre nya läroböcker i geometri — Prof. Väisäläs år 1948, Prof. Kivikoski-Dr. Nykänen samma år och Lektor Makkonen-Prof. Pimiä år 1949 —, i vilka alla man försökt reformera geometriundervisningen

i samma riktning, nämligen så, att den bevisande geometrin kommer senare och att i början av kursen sådant inte alls bevisas, som kan anses vara självklart för eleverna, är dock de fastställda kurserna och metodiska anvisningarna fortsättningsvis i kraft, och jag anser det vara på sin plats, att i korthet referera dessa.

Om matematikundervisningens mål säges där bl. a. följande: »Matematikundervisningen har till uppgift att utveckla eleverna till logiskt tänkande samt planmässigt och målmedvetet handlande. Därjämte vänjas eleverna vid begreppens exakta framställningssätt, så och vid ett objektivt bedömande av uppgifter, resultat och på frågan verkande omständigheter. Matematikundervisningen avser även att utveckla elevernas förmåga att kvantitativt behandla föremål och företeelser i den oss omgivande naturen och i det mänskliga livet, att skola det funktionala tänkandet och rymdåskådningen hos eleverna ävensom att för dem klargöra matematikens betydelse för tekniken, för det ekonomiska livet och för landets försvar«.

Mellanskolan i Finland, som motsvarar realskolan i Sverige är i regel femklassig. Flickskolorna är dock sexklassiga och dessutom har vi ännu några treklassiga mellanskolor och fyraklassiga flickskolor, som byggar på lärokursen i folkskolans sjätte klass. I femklasiga mellanskolan vidtar geometriundervisningen i tredje klassen, där man genomgår en inledningskurs, varigenom eleverna göras förtrogna med geometrins grundbegrepp, och som avser att komplettera de kunskaper eleverna inhämtat vid undervisningen i aritmetik. Man behandlar där egenskaper hos vinklar, trianglar och cirkeln. I fjärde klassen fortsätter man med behandlingen av egenskaper hos figurer, begränsade av räta linjer, likaså behandlingen av cirkeln. Dessutom hör till kursen enkla konstruktionsuppgifter. I femte klassen fortsätter man med konstruktionsuppgifterna och behandlar cirkelns egenskaper utförligare. Av konstruktionsuppgifterna bör tre renskrivas. Triangelarnas likformighetslära behandlas i allmänna drag. Till femte klassens kurs hör ännu trigonometriska funktionerna för spetsiga vinklar och dessa funktioners användning, Pythagoras' sats samt en kompletterande behandling av ytor och volymer.

I de metodiska anvisningarna bestämmes närmare, vad dessa kurser bör innehålla. Där heter det bl. a.: »Vid geometriundervisningen är det skäl, att förrän man skrider till den bevisande geometrin, genomgå en förberedande kurs. Avsikten med denna är att giva eleverna en på åskådning baserad föreställning om de geometriska grundbegreppen och i viss mån vänja dem vid användning av enkla hjälpmedel (linjal, vinkelhake, gradskiva, passare) vid ritningar i häftena och på klasstavlan. Avsikten är härvid ingalunda att bibringa eleverna en ytlig kännedom om nästan hela det material, i vilket de sedermera — ofta först efter års förlopp —

genom läsning av den systematiska kursen fördjupa sig. Den förberedande kursen avser endast att göra förståendet av den systematiska geometrin lättare. Också i den systematiska kursen bör undervisningen vara åskådlig och praktisk, och avseende bör icke enbart fästas vid vetenskaplig exakthet. Förrän man skrider till det egentliga beviset av ett teorem, är det ofta nyttigt att praktiskt övertyga sig om dess giltighet. Vid lösning av geometriska och trigonometriska räkneuppgifter bör resultaten kontrolleras medels ritning och mätning. Om beviset för ett teorem grundar sig på någon rörelse, kan föreställningen därav till en början bereda eleverna svårigheter. I sådana fall bör man åtminstone på lägre stadium använda rörliga modeller.

De i geometrin använda storheterna och uttrycken, vilkas innebörd icke på basen av den förberedande undervisningen eller allmänt språkbruk kan förutsättas vara bekant för eleverna, bör definieras. Man bör iaktta, att eleverna först uppfatta innebörden av de givna definitionerna och sedermera vid användningen av sagda benämningar och uttryckssätt verkligen vänjas vid att giva dem de definitionsmässiga betydelseerna.

Också i geometrin kan funktionsbegreppet verksamt klargöras i sammanhang med de fall, då figuren eller någon av dess delar kan tänkas föränderlig. Det är obehövt att trygga sig till konstlade uppgifter, emedan geometrin även annars erbjuder tillräckligt med material. I synnerhet trigonometrin befordrar ovan nämnda mål, emedan ett av trigonometriundervisningens viktigaste syften just är att giva eleverna en klar uppfattning om definitionerna av de trigonometriska funktionerna, variationerna av dessa funktioner och sammanhanget mellan dem. I mellanskolan kommer endast utredning av begreppen sinus, cosinus, tangenten och cotangenten (för spetsiga vinklar) i fråga.

En särskild ställning tillkommer de geometriska konstruktionsuppgifterna, vilka — behandlade på riktigt sätt — ha stort värde för undervisningen, emedan de vänjer eleverna vid ett metodiskt förfaringssätt. Därvid är det dock nödvändigt, att för eleverna framställa de viktigaste metoderna för lösning av geometriska konstruktionsuppgifter, och att vid behandlingen av enskilda uppgifter avseende fästes vid härledningen av lösningen. Märkas bör dock, att färdigheten i lösning av konstruktionsuppgifter icke på något sätt kan betraktas som ett självständigt mål i geometriundervisningen, samt att det är skäl att begränsa behandlingen till relativt enkla uppgifter. I mellanskolans sista klass bör eleverna utföra tre konstruktionsuppgifter på ritpapper, helst med användning av tusch. Det är skäl att välja uppgifterna så, att elevernas förmåga att rita noggrant kan prövas med tillhjälp av sagda ritningar.

Dessa kursbestämmelser och metodiska anvisningar är således rätt mångordiga, men trots det obestämda. Detta förhållande har emellertid

den goda sidan, att den ger läraren relativt fria händer i valet av ämnet och i dess undervisande. Då emellertid de tidigare nämnda nyare läroböckerna småningom kommer i allmännare användning, behöver man icke anse att geometriundervisningen i Finland mera står på någon särskilt föråldrad nivå.

Man har trots allt varit mycket verksam i Finland med att söka reformera lärdomskolan. Knappast i något land har så många kommittéer tillsatts för att få en lösning till stånd i denna fråga. Men när en kommitté fått sitt betänkande färdigt, har detsamma tyvärr icke lett till några som helst åtgärder, utan har man omedelbart sett sig föränlåten att tillsätta en ny kommitté. Den kommitté, som för närvarande behandlar frågan om en reform av läroverkens inre organisation tillsattes år 1950 under undervisningsminister R. H. Oittinens ordförandeskap. Denna kommittés arbete pågår som bäst, men enligt vad mig är bekant, skall enligt dess förslag undervisningen i geometri i mellanskolan bli mera praktiskt betonat samt anknyta sig ännu intimare till undervisningen i aritmetik.

BJÖRN RUDBERGS inledningsanförande var följande:

Den nugjeldende skoleordning i Norge blev vedtatt i 1935 og satt ut i livet i 1939, men p. g. a. krigen og dens ettervirkninger tok det mange år før den kunne praktiseres helt effektivt, og den går fremdeles under navn av »den nye skoleordningen«. Etter denne er de fleste norske realskoler 3 årige. Matematikk leses de to første årene, 5 timer ukentlig i hver klasse, — det 3. året leses samfunnsregning — og disse 5 ukentlige timer skal deles mellom praktisk regning, algebra og geometri. Konsentrasjonslesning er vanlig, men gjennomsnittlig kan en regne med at geometrien får 2 timer pr. uke i de to årene.

Realskolen bygger på avsluttet 7 årig folkeskole, og overtar elevene når de er i 14 års alderen. I folkeskolen leses ikke geometri i noen form, og det naturlige skulle da være i realskolen å begynne med geometriske forøvinger. Tiden tillater imidlertid ikke dette, og elevenes alder tatt i betraktning, skulle det heller ikke være påtrengende nødvendig. Etter en bred orientering i de geometriske grunnbegreper, tar en med en gang fatt på det systematiske kurs, og innfører konstruksjoner etterhvert som de kan begrunnes teoretisk.

Den siste utgave av de norske undervisningsplaner kom i 1950, og sier om geometriundervisningen i realskolen bl. a.:

»Undervisningen i geometri i realskolen skal ha karakteren av et systematisk kurs med bevisføring, selvsagt uten gjennomført aksiomatisk oppbygging. Når elevene begynner på realskolen, har de, både i og utenfor skolen, etter hvert fått visse geometriske forestillinger som det ikke vil lønne seg, og heller ikke er mulig, å ignorere. Når det gjelder de enkleste

geometriske kjennsgjæringer, bør en derfor ikke med altfor pinlig omhu søke å redusere til et absolutt minimum tallet på de ting en godtar uten bevis, altså som aksiomer; men en bør i noen grad bygge på elevenes intuisjon. På et begynnertrin er dette sikkert psykologisk riktig, og det behøver heller ikke å skade den alminnelige matematiske skolering som det er meningen at det geometriske kurs med sin bevisføring i det hele skal gi....

... Geometrisk dyktighet henger nøye sammen med evnen til å »se«. For den begynnende undervisning gir derfor intuisjonen det naturlige utgangspunkt; de geometriske slutninger tjener til å stadfeste, kontrollere og korrigere det som er sett umiddelbart, og videre til å utfylle det. Og etterhånden som de geometriske kunnskaper vokser, vil også intuisjonen selv bli skarpere og favne over store områder. Geometriundervisningen har nettopp en vesentlig oppgave i utviklingen av en slik geometrisk forestillingsevne og fantasi, i oppøvingen av det geometriske »blikk«. Både i undervisningen og i læreboka må det legges spesiell vekt på denne oppgave. En tidsmessig undervisning kan heller ikke forsømme å gjøre elevene kjent med geometriske metoder som parallellforskyvning, dreining om et punkt og omvending om en akse, i det hele med begrepet symmetri.«

Lærestoffet er det sedvanlige i elementargeometrien. Undervisningsplanene gir detaljert oversikt over det som skal tas med, dog uten å påby noen bestemt rekkefølge. Det har ingen hensikt å gjengi oversikten her, et enkelt avsnitt vil antyde hvor langt man går:

»Det geometriske pensum kan ikke opprettholdes i samme størrelse som i (den tidligere) middelskolen. Av de setninger som handler om vinkler ved sirkelen, tar en bare med setningen om periferivinkler over en halv periferi. Av likedannethetslæren tar en bare med definisjonen og setningen om sidene i ensvinklede trekanter og forholdet mellom deres omkretser og flateinnhold, derimot ikke setningen om mellomproporsjonaler i den rettvinklede trekant. Den pytagoreiske setning bevises rent geometrisk. Avsnittet om sirkelberegningen tas ikke med i geometrien, idet en får nøye seg med det som er lært i den praktiske regning; beregning av flateinnhold av sirkelsegmenter blir derfor ikke med i realskolens pensum.«

Om lærebøkene sier altså undervisningsplanene at de skal oppøve den geometriske forestillingsevne og fantasi. I innstilling II fra plankomiteen for den nye skoleordning kreves det videre at de skal bygges opp genetisk, ikke først og fremst dogmatisk. Det heter her også at de bevisene ikke gjennomgående bør baseres på setningene om trekanters kongruens, men i stor utstrekning føres ved å påvise en flytning som bringer en figur til å dekke en annen, dreining om et punkt, omvending om en akse, parallellforskyvning.

Det er i Norge i bruk 4 lærebøker, som imidlertid ikke alle går like langt i den retning undervisningsplanene angir. De er, bøkene nevnt etter forfatteren: 1. A. Alexander, en omarbeidet eldre lærebok og den mest konservative av de fire. 2. Alfsen & Alfsen, også en omarbeidet eldre bok, men skrevet av den mann som i første rekke har utarbeidet retningslinjene for skolematematikken i Norge idag. 3. Søgaard & Tambs-Lyche. 4. Ingebrigtsen & Piene.

De to siste er skrevet spesielt for den nye skoleordning, og for en som er vant til den tradisjonelle behandling med sats og bevis bygget ovenpå sats og bevis i kort og konsis fremstilling etter et fast oppbygget skjema, vil disse lærebøker virke noe forvirrende, muligens også irriterende, typiske som de er for de elevaktivitetsmetoder skoleordningen forutsetter praktisert. I stor utstrekning er beviser og resonnementer bare antydnet, undertiden helt utelatt, idet den fullstendige utarbeidelse overlates til eleven. I henhold til undervisningsplanene er forskjellige bevismetoder i bruk, og det er heller ingen konsekvent formalbehandling av bevisene. Dels innledes fremdeles behandlingen av en sats ved at den fremsettes som påstand, dels kommer satsen til slutt som konklusjon på en forutgående undersøkelse. Det en kunne kalle eksperimentatgeometri finner en i nevneværdig grad bare i en av de fire bøker, Søgaard & Tambs-Lyche. I forbindelse med kravet om oppøving i geometrisk forestillingsevne og fantasi søker man her i stor utstrekning, ved figurbetraktninger og målinger, å lede eleven frem til satsen før den systematiske behandling tar til og gir den endelige begrunnelse.

De nye arbeidsmetoder er meget tidsrøvende, og undervisningen er nok ikke alltid så moderne som skoleordningen forutsetter. Med det snaua timetall faget har, må en i timene vesentlig konsentrere seg om de systematiske begrunnelser og om løsning av oppgaver, og forhåndsgjennomgåelse blir det i almindelighet tid til bare i begynnelsen av kurset, og ellers når det er prinsippielt nye ting som skal behandles. Om denne gjennomgåelsen forutsettes at den ikke er doserende, men har karakteren av en undersøkelse hele klassen tar del i. Den skal ikke ha til hensikt å rydde vanskeligheter til side, men skal lære elevene å angripe vanskelighetene på en rasjonell måte.

Om oppgaveregningen heter det at en skal regne få men utvalte oppgaver, spesielt advares mot all oppgaveregning som bare har til hensikt å sette elevene i stand til å greie en eksamensprøve. På dette punkt er det nok ofte en uoverensstemmelse mellom teori og praksis. Eksamensforberedelsen har forøvrig også en annen virkning. Ved de eksamensberettede skoler vil neppe en elev av hundre komme opp til eksamen i matematikk muntlig, og da alle må gjennom en skriftlig prøve, er det ikke mer enn menneskelig at de deler av stoffet som erfaringsmessig ikke kommer

til nytte ved denne, blir noe neglisjert. Den muntlige eksamen kommer praktisk talt bare til å gjelde privatister, og om eksaminasjonen her sier undervisningsplanene: »Som eksamensspørsmål bør det ikke settes opp løsrevne isolerte setninger, som det kreves bevis for, men eksaminanden bør stilles overfor et sammenhengende matematisk emne, som gir høve til å prøve hans virkelige forståelse og det herredømme over stoffet han har nådd fram til«.

Den skriftlige eksamensprøve i matematikk strekker seg over 5 timer. Det blir gitt 4 oppgaver, som alle skal løses, og en av disse er alltid en geometrioppgave. Denne består av en konstruksjon med beskrivelse, vanligvis av en polygon, en del beregninger og ofte et enkelt bevis i tilknytning til figuren. Undertiden søker man å gi oppgaven et praktisk tilsnitt, f. eks. ved å oppgi størrelse og form på en byggetomt, og så kreve den konstruert i en bestemt målestokk. Det vil kanskje forundre noen at konstruksjonen i oppgaveteksten uttrykkelig forlanges utført med passer og linjal alene. Dette betyr ikke at det er lagt et nytt innhold i begrepet konstruksjon, men henger sammen med en passuss i undervisningsplanene — »... bør nevnes at det ikke er mulig å gi noen begrunnelse for å innskrenke bruken av konstruksjonsredskaper til passer og linjal alene; elevene bør få lære å bruke så nyttige redskaper som tegnetrekant og transportør«, — som av enkelte er blitt misforstått. Det er imidlertid Undervisningsrådets mening at en skal skjelne mellom konstruksjon i vanlig forstand, og tegning, hvor andre redskaper enn passer og linjal kan brukes. Et par av lærebøkene, men ikke alle, gjør også rede for denne distinksjon. Noen større bruk av tegnetrekant og transportør blir det forøvrig ikke gjort i undervisningen, redskapene gjennomgås, og dermed blir det.

Det later til at geometrioppgaven er den av eksamensoppgavene elevene greier best. Konstruksjonen er i de fleste tilfelle korrekt utført, bevisene kan det være så som så med, men av beregningene pleier i alle fall en del å være riktige. Jevnt over tilegner elevene seg de sentrale deler av geometrien, sjelden eller aldri finner en blanke eller meningsløse besvarelser, noe som rett som det er finner sted ved oppgavene i algebra og praktisk regning.

I årene etter krigen har den offentlige diskusjon om skolematematikken i Norge så å si utelukkende dreiet seg om gymnasiets matematikk, hvilket tyder på at forholdene i realskolen stort sett blir akseptert. Mann og mann i mellom blir imidlertid både det ene og annet kritisert, men kritikken er vesentlig rettet mot algebraen, som i den nye skoleordning har fått en meget løs oppbygging, ikke mot geometrien, som, alle ytre forandringer til tross, fremdeles fremtrer som et fast oppbygget matematisk system. En del innvendinger har vært gjort mot bevismetodene, idet det har falt enkelte tungt å skulle forlate de solide kongruensbevis til fordel

for de mer luftige flytningsbevis. Imidlertid: kongruensbevisene er i lengden stereotype, og de representerer et statisk syn, som den nye skoleordningen vil bort fra i matematikken overhode. En kan bare henvise til den sterke vekt det i skolen blir lagt på behandlingen av funksjoner.

En skal være forsiktig med å stille strenge fagmatematiske krav til real-skolematematikken, et synspunkt som vil gjøre seg mer gjeldende jo sterkere søknungen til realskolen blir. I Norge er denne søkning allerede nu så stor, at skolen er blitt betegnet som en utvidet folkeskole, og vil en under slike forhold ta sterkere fagmatematiske enn pedagogiske hensyn, kan det føre til en ulykke for faget. De norske undervisningsplaner har, som det fremgår av tidligere siterte avsnitt, tatt konsekvensen av dette, og slik som realskolens geometri er lagt an i Norge i dag, tilfredsstiller den gjennomsnittselevens sunne fornuft, samtidig som den, innen sitt område, har beholdt det som er det vesentlige ved et matematisk system. De elever som skal arbeide videre med geometri, behøver ikke å omlegge sine forestillinger, men bare utvide dem.

S. ÅSTRANDS inledningsanförande var följande:

Geometriundervisningen i vårt land har under 1900-talet utvecklat sig efter två linjer. Å ena sidan har man försökt att i görligaste mån bibehålla den euklidiska systematiken samtidigt som man försökt att i detaljerna ordna till och framställa den euklidiska tankegången så, att den skulle bli tillgänglig för ungdomen. Uppgiften har naturligtvis försvårats avsevärt av att den tid, som stått till buds för geometriundervisning i egentlig bemärkelse, blivit allt kortare och kortare. På denna linje har alla de olika euklidesutgivarna rört sig från Lindman, vars böcker mångenstädes användes långt in på detta århundrade, över Vinell till Sjöstedt.

Å andra sidan har man försökt att ge de geometriska kunskaperna i annan form och på annat sätt än det hävdvunna. Bland de första, som försökt detta, var Asperén, vars metodik utvecklats vidare av Olson. Teorin om mittpunktsnormalen t. ex. har här kommit att spela en rätt stor roll. Hedström lade särskilt vikt vid den inledande empiriska behandlingen av satserna. Även Nyhlén börjar med det empiriska men lägger särskild vikt på att klart hålla isär empiriskt och teoretiskt.

Diskussionen om geometriundervisningens mål och medel har kanske ej varit så livlig under senare år, men det finns anledning att tro, att den snart skall blossa upp igen. Vare sig enhetsskolan i stort kommer att förverkligas eller inte, måste vi ta ställning till de problem, som ett eventuellt förverkligande av denna skola kommer att ställa. Och geometriundervisningen i enhetsskolan hör nu inte till de saker, som är lätta att ordna. Det första man har att göra, tycks mig vara att försöka ange vilken behållning man vill, att geometriundervisningen skall ge. Åsikterna går

naturligtvis vitt isär, men jag skall försöka ange några punkter, som syns mig väsentliga.

1. En viss förmåga att behärska geometrisk terminologi är nödvändig. Vem som helst måste veta, vad som menas med en cirkel, en kvadrat, parallella linjer o. s. v. Att veta vad π är för något hör väl också till det oundgängliga minimum.

2. Man behöver kunna mäta beräkna enkla ytor och rymder. Kuber, kvadrater, trianglar, cirklar, klot m. m. förekommer rätt ofta i gemene mans dagliga erfarenhet.

3. Att förstå och kunna använda — kanske också att själv göra upp — arbetsritningar och kartor är likaledes en för flertalet människor nästan hart när oundgänglig kunskap. Förminskade eller förstörade bilder möter man över allt, och var och en måste veta vad begreppet skala — väl oftast i betydelsen längdskala — innebär.

4. En introduktion i den geometriska teorien är också önskvärd. All erfarenhet pekar mot att en rätt stor del av 14,15-åringarna är kapabla att tillägna sig — inte bara lära sig utantill — ett icke alltför komplicerat bevis. I varje fall syns förmågan att förstå bevis vara ett krav, som måste ställas på alla, som skall fortsätta att läsa matematik.

Härnäst kommer frågan: varifrån kan man få hjälp att föra diskussionen framåt. Jag tror, att vi först och främst skall vända oss till våra nordiska grannländer, och den tron grundar sig inte bara på det vi hört idag av representanterna för dessa länder. Särskilt tror jag, att en närmare bekantskap med den Hjelmlevska geometrien och dess utnyttjande i det praktiska undervisningsarbetet skulle vara av stor betydelse för oss här i landet.

Men jag tror, att vi vid läroverken ha åtskilligt att lära på närmare håll. I folkskolorna landet runt har man haft att brottas med några av de problem, som antagligen snart skall bli aktuella även för de nuvarande läroverkslärarna, särskilt med de problem som sammanhänger med arbetet med ett icke eller endast obetydligt differentierat elevmaterial. Spänningen mellan det man *skall* och *vill* lära sina elever och det man *kan* lära dem kommer säkert att ökas, och folkskollärarnas erfarenheter på denna punkt torde kunna vara till nytta för oss.

Slutligen skall jag använda tillfället att tillfoga några spridda reflektioner över ett par av geometriundervisningens problem.

Att rita, mäta och beräkna räknas ofta i Sverige som en inledning till geometrien och icke som en del av geometrien. Kunskaperna på dessa håll inhämtas ju till stor del under de matematiska laborationerna i 2⁵ resp. 1⁴. Hur pass svagt sammanhanget mellan denna inledning och de följande geometristudierna ibland anses vara, illustreras av det faktum att, i varje fall vissa skolor, som samlat geometriundervisningen i klass

4⁵, icke erhållit tillåtelse att flytta de matematiska laborationerna till klass 3⁵ utan måste ha dem kvar i klass 2⁵. Det förefaller mig emellertid vara viktigt, att utvecklandet av förmågen att rita, att mäta och beräkna erkännas som en väsentlig del av geometrikursen.

Inriktningen mot den systematiska geometrien anses allmänt lämpligen böra gå till på det viset, att man försöker lägga upp undervisningen, så att det för eleverna uppstår ett behov av ett bevis. Beviset skall icke tvingas på dem, de skall försöka att göra det själva, eller de skall be om det. Det allra sista når man väl sällan, men så långt kan man väl alltid komma, att beviset icke känns enbart som en börda. Förmågan att förstå ett bevis kommer nu emellertid icke endast som frukten av en god undervisning, den är i hög grad en produkt av en personlig mognadsprocess. Man kan inte få hur unga elever som helst att fatta ett bevis; men har de åldern inne, torde det stora flertalet kunna tillgodogöra sig ett sådant. Kanske skulle man våga påstå, att de, som inte under realskoleåren börjar nå den mognaden, icke har på ett realgymnasium att göra.

Att vilja motivera studiet av den systematiska geometrien med påstående att detta studium ger en sorts allmän intellektuell träning torde vara rätt vanskelig efter de undersökningar, som gjorts över den s. k. medövningens problem under de senare årtiondena. Att geometriträningen inte bara är en god sak utan också är nödvändig för de blivande matematikerna är visserligen sant, men detta motiverar ju icke, att de, som skall ägna sig åt studier av annan art eller icke alls skall studera, behöver drivas in på systematisk geometri. Det är väl inte många som vill påstå, att de lärare, som undervisar i geometri, visar större tankeskärpa än de andra, när det gäller skolpolitiska frågor eller disciplinproblem och andra allmän-mänskliga förhållanden, som debatteras i våra kollegier.

Geometri-studiet är icke något självändamål. Liksom allt annat studium är det till för att reda upp och ordna någon del av alla de intryck, som strömmar över oss och att bringa dessa våra erfarenheter på en sådan form, att vi kan använda dem. Det är därför geometriundervisningen bör läggas upp empiriskt. Det gäller då också att anknyta till den erfarenhet av geometriska begrepp som eleverna får ur det dagliga livets upplevelser och kanske också i skolundervisningen i andra ämnen. En sak, som de jämt och ständigt stöter på, är kartor och avbildningar i skala, förstörade och förminskade bilder, arbetsritningar m. m. På geometriskt språk betyder detta, att likformighet är ett begrepp, som de mycket tidigt använder mer eller mindre instinktivt, och att det alltså är en av de första uppgifterna för en empiriskt orienterad geometri att ta sig an och utreda just de hithörande förhållandena. I vilken ordning man skall ta upp de geometriska begreppen är en pedagogisk fråga, icke en systematisk. En sträng systematik är ju dessutom en orimlighet i real-

skolan. Och att frågan är pedagogisk betyder, att man i första hand ser till, vad som finns inom barnens egen erfarenhetsvärld, och vilka möjligheter de ha att tillgodgöra sig resonemangen härom. Jag kan alltså inte förstå annat än att likformighetsläran i den traditionella svenska geometriundervisningen är felplacerad. Den bör tas upp långt före realskolans avslutningsklass!

E. LUNELL anförde följande:

De föregående talarna, särskilt den första inledaren, har starkt betonat, att man ska bygga realskolans geometri på åskådningen. Jag har ingen som helst invändning mot detta, men vill ända genom ett exempel, som kanske känns igen av många, visa bristerna i åskådningen, brister, som jag anser, att eleverna i realskolans avslutningsklass bör bli uppmärksamgjorda på. Då man talar om kvadratroten, måste man ju visa, att roten ur ett tal, som inte är en jämn kvadrat, är ett irrationellt tal. Som ett exempel kan man nämna, att $\sqrt{2}$ icke kan vara ett *avslutat* decimalbråk, hur många decimaler man än tar med. Men vad betyder detta åskådligt? Om en kvadratdecimeter $ABCD$ är given, kan vi fälla ner diagonalen AC på den förlängda sidan AD (L). Vi gradera vidare L med nollpunkt i A , först i dm, sedan i cm, i mm etc. Vi kan fingradera L så, att skalpunkterna ligger *hur tätt som helst*. Men eftersom AC är $\sqrt{2}$ dm, kan cirkellinjen med A till medelpunkt och AC till radie aldrig träffa någon av dessa skalpunkter. Att en cirkel på detta sätt, när den går över en rät linje, kan smita emellan hur tätt som helst liggande punkter på linjen, är otvivelaktigt mycket svårt, för att inte säga omöjligt, för den omedelbara åskådningen att fatta.

Jag har funnit, att eleverna är roade av detta exempel på att den matematiska analysen kan vara ett skarpare tankeinstrument än åskådningen, men menar inte att man ska fördjupa sig i saken. Och man kan ju efteråt trösta eleverna med att de geometriska satser, som de med möda ha lärt sig, alldeles säkert är riktiga.

Jag vill också säga något om likformighetsbegreppet, som rektor Åstrand menade, att man borde ta tidigare än nu i skolan, därför att eleverna så tidigt börja syssla med kartor, avbildningar och dylikt som bygger på likformighet. Men jag vill gentemot detta invända, att likformighetsbegreppet säkert är en mycket, mycket tidig geometrisk föreställning hos oss. Redan ett dibarn känner igen sin mor, och eftersom bilden på näthinna är olika stor, då mamman är på olika avstånd från barnet, måste detta ha någon sorts intuitiv likformighetsuppfattning. Barn uppfatta ju också mycket tidigt bilder. Likformighetsbegreppet är något som vi växer upp med, lika mycket som med det talade ordet. Men man kan

inte använda det argumentet att man *därför* ska sätta in den geometriskt preciserade likformighetsläran särskilt tidigt. Den kommer precis lagom, där den nu gör det i de traditionella läroböckerna.

C. E. SJÖSTEDT anförde följande:

Det synes mig vara av vikt att konstatera, att matematiklärarna i de nordiska länderna tydligen äro eniga om det mesta i fråga om den grundläggande geometriundervisningen. Viktigt är, att man genomgående anser den förberedande (empiriska) geometriundervisningen vara oundgängligen nödvändig och att man är ense om att man inte kan begära logiskt oantastliga bevis på realskolestadiet. Divergensen i uppfattningen rör vilken omfattning den empiriska geometriundervisningen skall ha och vilka krav på logisk bevisföring man kan ställa. I dessa bägge avseenden finns nog nästan lika många ståndpunkter som lärare. Men det gäller en gradskillnad, inte en artskillnad.

I fråga om den empiriska geometriundervisningen tror jag det är nödvändigt att lägga större vikt vid den än vad många lärare gör. Beträffande de logiska svårigheter, som rektor Rubinstein framhävde i fråga om sambandet mellan empirisk og deduktiv geometri, så tror jag de lätt kunna överdrivas. Enligt min mening är det i själva verket samma objekt för de båda slagen av undervisning. Det är endast metoderna som skilja dem åt.

Vad lektor Rudberg nämnde om de nyare norska läroböckerna, som jag tyvärr ännu inte haft tillfälle ta del av, så har jag alldeles samma uppfattning om själva undervisningsmetoden. Men jag är inte övertygad om att läroboken lämpligen skall lägga upp framställningen på detta sätt. Jag tror det är bättre, att läraren svarar för den saken — men det är viktigt att han gör det! — medan läroboken endast ger en sammanfattning av den logiska tankebyggnaden.

Beträffande begreppen likformighet och kongruens ansluter jag mig helt till vad rektor Lunell anförde. Även om möjligen likformighet psykologiskt sett skulle vara mera grundläggande än kongruens, så är därmed inte sagt, att det logiskt sett förhåller sig så. Det riktiga är nog, att det förra behandlas efter det senare.

Till sist kan jag inte underlåta att nämna, att skolkommissionens tanke på en 8-årig odifferentierad skola av allt att döma håller på att övergivas i den försöksverksamhet, som prövar just skolkommissionens förslag. Om man får ett 3-årigt differentierat högstadium (klasserna 7—9), så är mycket vunnet för geometriundervisningen. Jag tror personligen, att man då skall kunna fasthålla vid i det hela samma kunskapsnivå i geometri i den blivande enhetsskolan på den teoretiska linjen (7 g, 8 g, 9 g) som i den nuvarande realskolan.

OM KOORDINATER I DE DANSKE KORT

HENRY JENSEN

Foredrag holdt i København 22. oktober 1952 i

Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier

Enhver koordinatbestemmelse i større stil bygger på en triangulation foretaget på jordens overflade. Som eksempel viser fig. 1 den triangulation, der danner grundlaget for de danske kort. Men for at forstå dens anvendelse må vi gøre os klart, at vi opererer med tre forskellige flader, nemlig *den fysiske jordoverflade*, den flade vi direkte står på, når vi måler, dernæst *Geoiden*, den matematiske jordoverflade, som er en ækvipotentiaflade i Jordens tyngdefelt, og hvis normalaltså falder sammen med lodlinjen, og endelig, da Geoidens form er uhyre kompliceret, med en approksimation til den, en *omdrejningsellipsoide*. Ellipsoiden er således en ganske regelmæssig flade, bekvem til regnebrug. Geoiden er »bulet«, men bulerne er »bløde« — fladen er overalt differentiabel med kontinuerte differentialkvotienter af første orden.

Dens afvigelser fra ellipsoiden kan i normalens retning løbe op til et lille hundrede meter. Endelig er den fysiske jordoverflade helt uregelmæssig med højdeafvigelser fra de andre på indtil en halv snes kilometer.

Man kan reducere målinger foretaget på den fysiske jordoverflade til

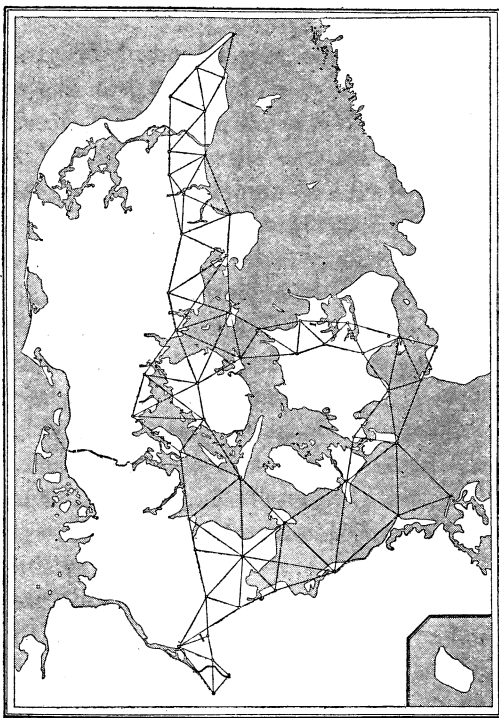


Fig. 1

det, de ville have givet, hvis de var blevet foretaget på ellipsoiden. Ellipsoidens form og størrelse beror imidlertid inden for visse grænser på en vedtægt, men man kan vise, at de til ellipsoiden reducerede trekantsider og vinkler ikke mærkbart er afhængige af, hvilken ellipsoide man har benyttet sig af. Dette hænger sammen med, at ellipsoidens elementer ved sideberegningen kun kommer til anvendelse ved beregningen af trekant-excesserne. Og da disse altid er mindre end $10''$, vil de — selv om man regner med 3 decimaler i buesekundet — kun have 4 betydende cifre, med andre ord kun meget groft være afhængige af ellipsoiden.

Ved astronomiske målinger i eet af nettets punkter kan vi anbringe dette punkt rigtigt på ellipsoiden, og vi kan nu ud fra dette punkt ved hjælp af de sider og vinkler, som de geodætiske målinger har givet os, beregne geografiske koordinater til alle andre punkter i nettet. Men disse geografiske koordinater er naturligvis stærkt afhængige af, hvilken ellipsoide nettet er nedlagt på.

Vi kan samle ovenstående betragtninger i følgende vigtige sætning: *Det kortbillede, der opstår på grundlag af triangulationen, er i det store og hele uafhængigt af ellipsoidevalget, hvorimod placeringen af de geografiske netlinier i kortet er stærkt afhængig af, hvilken ellipsoide der benyttes.* For eksempel vil i Danmark en overgang fra den danske ellipsoide (ækvator-radius $a = 6377104$ m, fladtrykningen $\alpha = 1:300$) til den internationale ($a = 6378388$ m, $\alpha = 1:297$) bevirke en indbyrdes forskydning af netlinierne på op til et hundrede meter.

Vor opgave bliver nu at afbilde et stykke af ellipsoiden på en plan. I praksis må man i høj grad tage hensyn til ellipticiteten, men for at illustrere fremgangsmåden, vil vi her kun behandle den simplere opgave at afbilde en kugle på en plan. Hvad vi herved får frem i vore formler, vil være hovedleddene i de nøjagtigere elliptiske formler.

De fleste topografiske projektioner er konforme (vinkeltro), og vi vil i det følgende gennemgå den konforme projektion, der ligger til grund for alle danske kort: den konforme koniske projektion.

På fig. 2 ses jordkuglen med centrum O , nordpol N og radius R . Man tænker sig lagt en kegle tangerende Jorden langs en breddecirkel. Lad keglens toppunkt være T og tangeringsparallelens poldistance p_0 . (Af hensyn til den følgende integration er det mere bekvemt at bruge poldistancen end bredden som koordinat). Principet i afbildningen er nu det, at man først afbilder kuglen konformt på keglen og dernæst udfolder keglen i planen. Ved den første afbildning lader man kuglens meridianer afbildes i de tilsvarende keglefrembringere, tangeringsparallelens i sig selv og de øvrige paralleller i parallelcirkler på keglen i en sådan afstand fra T , at konformiteten fremkommer.

På fig. 3 ses keglens udfoldning i planen. En midtemeridian i det kortlagte område vælges som Y -akse, en derpå vinkelret linie som X -akse. I alle danske kort er tangeringsparallellellens 56° , og midtemeridianen har længden $2^\circ 12'$ Vest for Rundetaarn. Systemets X -akse er den linie, der i

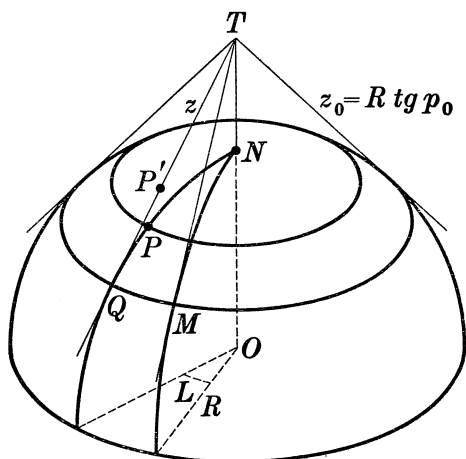


Fig. 2

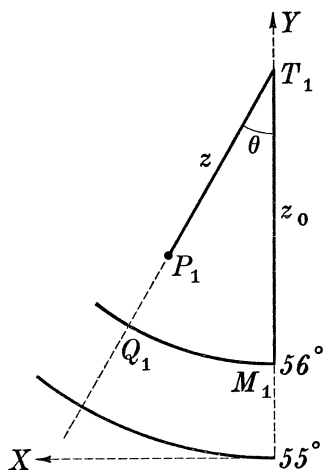


Fig. 3

kortet tangerer breddecirklen 55° . Y -aksen er positiv mod Nord, X -aksen positiv mod Vest. Kortrammerne er alle parallelle med akserne.

Lad nu TM være midtefrembringeren. Og lad os betragte et punkt P med poldistancen p og længden L regnet fra midtemeridianen. Lad P 's billede på keglens være P' og i planen P_1 . Vi vil først finde P_1 's polære koordinater i et system med T_1 som pol og T_1M_1 som akse. Radierne fra T_1 (eller frembringerne regnet fra T) vil vi betegne med z , specielt er åbenbart $z_0 = R \operatorname{tg} p_0$, hvor vi ved indeks 0 betegner størrelser med relation til tangeringsparallellellens. Meridianen NPQ afbildes først i frembringeren TQ , dernæst i planen i linien T_1Q_1 . Buestykket MQ afbildes i $M_1Q_1 = MQ$. Altså findes vinklen θ af relationen

$$R \sin p_0 L = \theta z_0 = \theta R \operatorname{tg} p_0,$$

hvoraf

$$\theta = L \cos p_0.$$

Her skal θ og L regnes i samme enheder, f. eks. buesekunder. L er længden regnet fra midtemeridianen $2^\circ 12'$ Vest for Rundetaarn eller $10^\circ 22' 40''$ E. Grw.

For at bestemme z må vi benytte os af afbildningens konformitet. Denne kan vi sikre ved at kræve, at målestoksforholdet ved overgangen

fra kuglen til keglen skal være det samme i meridianens og i parallellens retning. I parallellens retning er målestoksforholdet forholdet mellem periferien af cirklen gennem P' på keglen og cirklen gennem P på kuglen, altså

$$m = \frac{z \cos p_0}{R \sin p}.$$

I meridianens retning får vi

$$m = \frac{dz}{R dp}.$$

Ved at identificere disse to udtryk får vi

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= \cos p_0 \frac{dp}{\sin p} = \cos p_0 \frac{d \frac{p}{2}}{\sin \frac{p}{2} \cos \frac{p}{2}} \\ &= \cos p_0 \frac{d \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cos^2 \frac{p}{2}} = \cos p_0 \frac{d \operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Ved integration får vi

$$\ln z = \cos p_0 \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{p}{2} + \ln c$$

eller

$$z = c \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{p}{2} \right)^{\cos p_0}.$$

Til $p = p_0$ skal svare $z = z_0$. Dette bestemmer integrationskonstanten c . Vi får da til sidst

$$z = z_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}} \right)^{\cos p_0}.$$

De to understregede formler giver P_1 's polære koordinater. De retvinklede bliver da

$$x = z \sin \theta$$

$$y = z_{55} - z \cos \theta.$$

I disse formler er p_0 en konstant — for de danske kort 34° . Beregning efter formlen for z er naturligvis ubehagelig, men z findes tabuleret som funktion af bredden. Som eksempel hidsættes et tilfældigt udsnit af denne tabel, beregnet under hensyntagen til de ovenfor udeladte elliptiske led.

φ	z i meter
$57^{\circ}08'$	4185 096,642
$09'$	4183 240,535
$10'$	4181 384,412
$11'$	4179 528,273

Ved hjælp af den nævnte tabel går beregningen hurtigt og nemt. Men da der er tale om en konform afbildning mellem to ortogonalsystemer, kan afbildningen naturligvis også fremstilles ved en analytisk funktion, med andre ord gennem potensrækker. Disse rækker er uundværlige, ikke alene ved teoretiske overvejelser, men også så snart den konforme koniske projektion skal kombineres med andre projektioner. Deres fremstilling skal ikke gennemgås her, den er principielt simpel, men kræver nogen regning. Som illustration anføres rækkerne med koefficienterne i hele meter (i praksis anvendes de med indtil 4 decimaler, hvorved der selvfølgelig også optræder flere led).

$$\begin{aligned}
 y &= \quad \quad \quad + 309229 \Delta\varphi - 58 \Delta\varphi^2 + 117 \Delta\varphi^3 + 2 \Delta\varphi^4 \\
 &\quad + \lambda^2 (+ \quad 3572 - \quad 250 \Delta\varphi) \\
 x &= \quad \lambda (-177757 + 12429 \Delta\varphi - 2 \Delta\varphi^2 + 5 \Delta\varphi^3) \\
 &\quad + \lambda^3 (+ \quad 48 - \quad 3 \Delta\varphi)
 \end{aligned}$$

hvor $\Delta\varphi = 10^{-4}(\varphi - 55^{\circ})''$ og $\lambda = 10^{-4}(L_{\text{Grw.}} - 10^{\circ}22'40'')''$.

Regning efter disse formler kan også lettes ved tabeller, idet man kan tabulere parenteserne som funktioner af bredden.

Som det fremgår af det foregående, er målestoksforholdet kun 1 på berøringsparallelens. Og den reducerede målestok — f. eks. 1:20 000 — der gælder det trykte kort, er kun helt rigtig på denne linie. Vi vil nu se, hvormeget det afviger fra 1 et tilfældigt sted i kortet. Af de tidligere afledte formler finder vi

$$\begin{aligned}
 m = \frac{z \cos p_0}{R \sin p} &= \frac{z_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}} \right)^{\cos p_0} \cdot \cos p_0}{R \sin p} = \frac{R \operatorname{tg} p_0 \cos p_0}{R \sin p} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}} \right)^{\cos p_0} \\
 &= \frac{\sin p_0}{\sin p} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}} \right)^{\cos p_0} .
 \end{aligned}$$

Vi sætter $p = p_0 + \Delta$ og udvikler m i en Taylorrække efter Δ . Går vi til 2. orden, får vi hovedleddet frem. Vi danner først

$$\ln m = \ln \sin p_0 - \ln \sin p + \cos p_0 \ln \operatorname{tg} \frac{p}{2} - \cos p_0 \ln \operatorname{tg} \frac{p_0}{2}.$$

Indsætter vi heri

$$\ln \sin p = \ln \sin p_0 + \Delta \cdot \cot p_0 - \frac{\Delta^2}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 p_0}$$

og

$$\ln \operatorname{tg} \frac{p}{2} = \ln \operatorname{tg} \frac{p_0}{2} + \Delta \cdot \frac{1}{\sin p_0} - \frac{\Delta^2}{2} \cdot \frac{\cos p_0}{\sin^2 p_0},$$

får vi $\ln m = \frac{\Delta^2}{2}$ og altså $m = 1 + \frac{\Delta^2}{2}$, hvor altså Δ er breddeforskellen i rent tal. Vil vi i stedet regne Δ i grader, får vi

$$m = 1 + \frac{1,5}{10^4} \Delta^2.$$

Inden for Danmarks område kan målestoksforholdet således afvige indtil $\frac{1}{2} \text{ ‰}$ fra enheden. Et 20 000-dels kort over Vendsyssel har altså i virkeligheden målestokken 1:19 990, hvad der naturligvis er umærkeligt i det trykte kort, men føleligt ved økonomiske opmålinger.

Storecirklerne på kuglen afbildes i kurver i planen under bibeholdelse af skæringsvinklernes størrelse. Men billedkurverne er ikke rette linier. Buen AB på kuglen afbildes i en kurve A_1B_1 , der danner en vis vinkel β med den rette linie A_1B_1 . β er kun lille — højst et par bueminutter — så det er klart, at det er muligt at fremstille et udtryk for β , som kan beregnes på grundlag af en foreløbig grov koordinatberegning, eller eventuelt grafisk efter et foreløbigt kort. Vi skal her kun anføre formelen for β .

$$\beta = \frac{\cos p_0 - \cos p}{2z \cos p_0} (x_1 - x),$$

hvor x_1 er abscissen til sigtepunktet B , medens de andre størrelser refererer sig til standpladsen A .

Vi er altså nu i stand til at korrigere de på kuglen målte vinkler til de tilsvarende plane vinkler. Med andre ord: vi ville være i stand til at bestemme triangulationspunkternes plane koordinater direkte — helt uden indførelse af geografiske koordinater. Den vej har man faktisk benyttet ved en anden projektion, der anvendes i Danmark, men da den ikke benyttes ved korttegningen, skal den ikke nærmere omtales her. Tænk man sig koordinaterne fremstillet på denne måde, ser man også klart

det tidligere nævnte faktum, at kortbilledet er uafhængigt af ellipsoidevalget. β er jo med sine få cifre ufølsom over for forskellen mellem de forskellige mulige ellipsoider.

Som vi har set, kan vi ved den overordnede triangulation — en sådan som er vist på fig. 1 — foretage vore beregninger enten sfærisk eller plant. Går vi over til at betragte udfyldningstriangulationen, der skal skaffe os koordinerede punkter med en tæthed, der er passende til topografisk brug, vil man oftest regne i planen. Her vil afstandene nemlig som regel være så korte, at man helt kan se bort fra retningskorrektionerne. De tre almindeligste metoder til punktbestemmelse er illustreret i figurene 4, 5 og 6. A , B (og M) tænkes at være kendte. P er det søgte punkt. Vinklerne α og β måles.

Ved *fremskæringen* (fig. 4) kan man direkte opskrive ligningerne for linierne AP og BP , hvorved P 's koordinater bestemmes. *Sideskæringen*

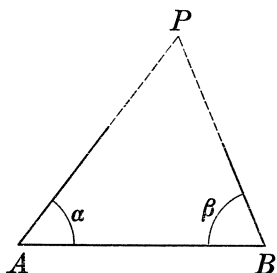


Fig. 4

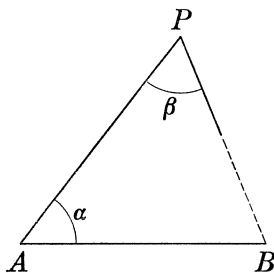


Fig. 5

(fig. 5) føres direkte tilbage til en fremskæring, idet trekantens tredje vinkel beregnes.

Tilbageskæringen (fig. 6) giver anledning til lidt flere problemer. Figu-

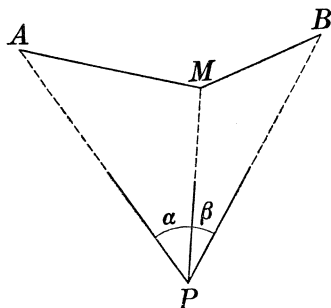


Fig. 6

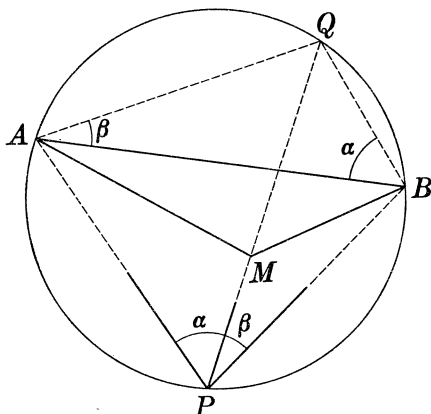


Fig. 7

ren lader sig selvfølgelig opløse trigonometrisk og dernæst beregne som en fremskæring, eventuelt kan opløsningen foretages iterativt. Men nok så morsomt er det at løse opgaven analytisk-geometrisk. Direkte er P jo skæringspunkt mellem de to cirkler, der rummer vinklerne α og β , og som står på de givne liniestykker. Men beregningsmæssigt er dette ikke nogen bekvem fremgangsmåde. Simplere er det at henføre bestemmelsen til skæring mellem en cirkel og en ret linie. Metoden er antydnet i fig. 7. Vi tænker på $\triangle ABP$'s omskrevne cirkel. PM tænkes forlænget til skæring med cirklen i Q . Så er $\angle QAB = \beta$ og $\angle QBA = \alpha$. Med andre ord: $\triangle AQB$ kan konstrueres. Dernæst kan cirklen tegnes og QM forlænges til skæring med cirklen i P .

En endnu simplere metode, hvor P fremkommer som skæringspunkt mellem to rette linier, er vist i fig. 8. Den benyttes i praksis ved maskin-

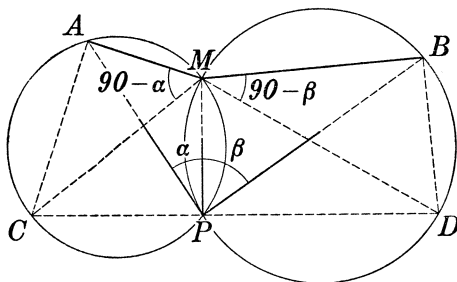


Fig. 8

regning, men kan også fra et pædagogisk-matematisk synspunkt have sin interesse. Vi tænker på de to cirkler, der går gennem A , M og P , henholdsvis B , M og P . Fra M tænkes diametrene MC og MD tegnet. Så er $\angle AMC = 90 - \alpha$ og $\angle BMD = 90 - \beta$. Endvidere ligger C , P og D på ret linie. Konstruktionen sker da således: C bestemmes ved fremskæring fra A og M , og D ved fremskæring fra B og M . Fra M fældes normalen på CD . Fodpunktet er det søgte punkt P . Som man ser, er figurens cirkler de to sædvanlige cirkler, der rummer vinklerne α og β , men cirklerne tegnes ikke; konstruktionsfiguren indeholder kun rette linier.

LITERATUR

L. BIEBERBACH: *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Bd. 13. Verlag Birkhäuser, Basel, 159 sider, innb. SFr. 18.70, heftet SFr. 15.60.

For en ikke-geometer fortøner gjerne konstruksjonsproblemer seg som en disiplin som er uten noen almen teori, og hvor mer eller mindre tilfeldige »knepe« må brukes for å komme frem til en løsning. (Det samme inntrykk har forresten en ikke-tallteoretiker om visse områder av tallteorien). Hører man til den først nevnte kategori av matematikere, vil man bli gledelig overrasket ved gjennomlesning av denne bok over hvilket solid teoretisk fundament denne gren av matematikken likevel har.

Det vil gå for langt her å gi en detaljert beskrivelse av bokens innhold. Jeg må nøye meg med å trekke frem enkelte avsnitt som særlig har trukket seg min interesse.

Forfatteren begynner med å gi en klar definisjon på hva man forstår med konstruksjon ved hjelp av visse gitte hjelpemidler, så som linjal, passer, vinkellinjal etc. Det spesielle tilfelle hvor bare passer og linjal er tillatt, og som jo er det vi vanligvis forstår ved konstruksjon, får sitt teoretiske grunnlag tilrettelagt i paragraf 6. Ellers omhandler de første paragrafer konstruksjoner ved bruk av 1) bare linjal, 2) linjal og en gitt regulær polygon i planet 3) linjal når det er gitt en sirkel og dens sentrum. I de etterfølgende paragrafer (til 6) studeres bl. a. konstruksjoner ved bare bruk av passer, ved hjelp av parallell-linjal, og ved bruk av vinkel-linjal. Paragraf 13 omhandler vinkelens tredeling og kubens fordobling. Her benytter forfatteren seg av et bevis av Edmund Landau, som man har funnet på et ark blant H. A. Schwarz's etterlatte papirer. Arket har overskriften »Edmund Landau, stud. math., Berlin, den 28. Juni 1897«. Forfatteren skriver: »Wir haben auf diesem Blatt die erste selbstständige Leistung des grossen Mathematikers vor uns«. — I boken er beviset fremstillet slik: La polynomet

$$(1) \quad x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

være irreducibelt i tallkroppen K som a_1 , a_2 og a_3 tilhører. La K_1 være den tallkropp som fremkommer av K ved å adjungere kvadratroten av et tall i K (denne kvadratroten er selvsagt forutsatt ikke å tilhøre K), videre K_2 den tallkropp som fremkommer av K_1 på samme måte etc. Man viser nå at (1) ikke kan ha noe nullpunkt som tilhører K_n uten også å ha ett som tilhører K_{n-1} . La nemlig

$$x_1 = a + b\sqrt{R}$$

være et slikt nullpunkt, (a , b og R tilhører K_{n-1} , altså $b \neq 0$), da må også

$$x_2 = a - b\sqrt{R}$$

være et nullpunkt. Betegner man nå det tredje nullpunkt i (1) med x_3 så er

$$x_3 = -a_1 - x_1 - x_2 = -a_1 - 2a$$

et tall i K_{n-1} , hvilket er i motstrid med forutsetningen. Har (1) et nullpunkt i K_n må det derfor også ha et nullpunkt i K_{n-1} , og herav ved induksjon, i K , hvilket er umulig siden (1) er forutsatt irreducibel. Herav følger lett at man ikke med passer og linjal kan konstruere en vinkel på 20° . Tallet $x = 2 \cos 20^\circ$ tilfredsstiller nemlig 3dje-gradsligningen

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Skal konstruksjonen være mulig, må denne ligning ifølge det foregående ha en rasjonal rot, hvilket man lett ser at den ikke har.

(Problemet med kubens fordobling leder til den irreducible ligning $x^3 - 2 = 0$ og lar seg derfor av samme grunn ikke løse).

Forfatteren har forøvrig på dette punkt også noen interessante innvendinger å gjøre mot et bevis av van der Waerden. Dette bygger på at

$$x^3 - 3x - 2 \cos \alpha$$

ved variabel α er et irreducibelt polynom i x , d. v. s. at det i tallkroppen $K(1, \cos \alpha)$ ikke gis noe kvadratrottuttrykk som tilfredsstiller ligningen

$$x^3 - 3x - 2 \cos \alpha = 0.$$

Herav følger, som forfatteren sier, kun at det ikke gis en bestemt konstruksjonsmåte hvoretter det er mulig å tredele en vilkårlig vinkel, men det forhindrer ikke at det i hvert enkelt tilfelle kunne eksistere en individuell løsning for tredelingen.

På noen få linjer vises videre ved en funksjonsteoretisk betraktning at det høyst gis et endelig antall vinkler som lar seg tredele ved en bestemt konstruksjonsprosess. Til slutt behandles spørsmålet om de tredelbare vinkler hører til unntagelsen eller regelen. Det blir vist at mengden av de tredelbare vinkler er avtallbar, mens mengden av de ikke tredelbare har samme mektighet som kontinuert. — Problemet om vinkelens trede-

ling har jo alltid øvet en sterk tiltrekning på ikke-matematikere (Jmfør historien om skomakeren i Grønköping som hadde løst problemet »även utan at begagna de tillåtna hjälpmedeln passare och linjal«). Matematikerne regner seg for ferdige med det. At det likevel har vært nye sider av problemet å ta opp til undersøkelse har Bieberbach tilfulle vist i sin bok. Riktignok sitter man tilbake med følelsen av at nå kan det ikke være mere igjen å gjøre her. — Om andre amatører som kan fremvise et for vitenskapen mere positivt resultat enn den før nevnte skomaker, får vi høre om i paragraf 26, hvor vi igjen vender tilbake til problemet, men nå for å finne en best mulig tilnærmet konstruksjon. Her er bl. a. gitt en metode av maleren Albrecht Dürer, og en av skreddermester Kopf i Ludwigshafen.

Paragraf 28 omhandler moderne transendentundersøkelser og tilnærmede konstruksjoner for tallet π . For at tallet π er transendent blir her gitt et bevis av Siegel, som bygger på en metode av Gelfond.

De to siste paragrafer, 29 og 30, omhandler konstruksjoner med passer og linjal på en kuleflate, og har tilknytning til arbeider av de danske matematikere T. Bonnesen og D. Fog.

Som før nevnt lar det seg vanskelig gjennomføre å gi en oversikt over alle bokens kapitler, la det derfor være sagt til slutt at boken kan anbefales på det beste.

Sigmund Selberg.

WALTER LIETZMANN: *Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie*. Verlag Oldenbourg, München 1952, 216 sider, heftet DM. 19.50.

Boken bygger på resultater etter foredrag og kollokvier holdt ved Universitetet i Göttingen. Da den er en »Einführung«, er den selvsagt ikke særlig videregående, men med sine par hundre sider tar den sin monn igjen i bredden. De siste kapitler handler f. eks. om ikke-euklidisk geometri, tid-rommet med Lorentz-gruppen, dennes invarianter m. m.

Imidlertid er den største delen viet de forskjellige slags polytooper, og her finner en slike ting som Eulers polyedersats, generalisert til flerdimensjonale rom. Videre behandles hyperkjegler, hypersylindere og hyperkuler. Til enkelte kapitler er føyet et Anhang med litt vanskeligere stoff enn det øvrige.

Anskueligheten består — som en jo kunne vente — i at en studerer figurenes projeksjoner i tredimensjonale rom.

Forfatteren har i en rekke tidligere lærebøker vist at han er en førstearangs pedagog, og den siste boken stadfester dette i høy grad.

John Olav Stubban.

DEN TOLVTE SKANDINAVISKA MATEMATIKERKONGRESSEN

kommer att äga rum i Lund den 10—15 augusti 1953. Inbjudan och övriga upplysningar kan av intresserade erhållas efter hänvändelse till kongressens sekretariat, adress från 1/6 1953: XII:e Skandinaviska Matematikerkongressen, Matematiska institutionen, Sölvegatan 14, Lund.

OPPGAVER

Den oppgave som er merket med * er forholdvis vanskelig. De som løser den, anmodes om å sende løsningen til redaksjonen innen 1. juli i år. Den beste løsning blir offentliggjort.

De andre oppgavene er lettere. De kan til dels utnyttes i undervisningen på forskjellige skoletrinn. Løsninger av dem blir ikke offentliggjort.

1. La p og q være naturlige tall. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)(n+q)} = \frac{1}{q-p} \left(\frac{s_p}{p} - \frac{s_q}{q} \right),$$

der $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

R. T. L.

*2. La $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_r$ være hele tall. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p_1)(n+p_2)\dots(n+p_r)} = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{s_{p_k}}{p_k(p_k-p_1)\dots(p_k-p_{k-1})(p_{k+1}-p_k)\dots(p_r-p_k)},$$

der $s_q = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{q}$.

R. T. L.

3. Der er forelagt en determinant af n^{te} orden, hvor samtlige elementer på hoveddiagonalen er lig med x , medens alle øvrige er lig 1. Skriv det herved bestemte polynomium i x som et produkt af faktorer af første grad.

Fra dansk landinspektørexamen 1951
(med let ændret tekst).

4. Vis at hvis $n-1$ og $n+1$ er primtall større enn 5, så må n være delelig med 6 og ha 0, 2 eller 8 som siste siffer. I. J.

5. Vis at hvis p er et primtall større enn 3, så må p^2-1 være delelig med 24. I. J.

6. Vis at mellom $n!+1$ og $n!+n+1$ fins det ikke primtall. ($n!$ betyr $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.) I. J.

7. Vis at hvis p er et primtall, og n er delelig med alle primtall mindre enn p , så er det ingen primtall mellom $n+1$ og $n+p$. I. J.

SUMMARY IN ENGLISH

A GENERALIZATION OF THE FORMULA OF SIMPSON FOR NON-EQUIDISTANT ORDINATES. VIGGO BRUN.

Written in English. See p. 10.

A DIDACTICAL REMARK TO THE INTRODUCTION OF COMPLEX NUMBERS. SVEND BUNDGAARD.

The original way of introducing complex numbers as symbols $\alpha+i\beta$, where i is a »new number«, satisfying the equation $i^2 = -1$, and the modern habit of starting by defining addition and multiplication within the set of pairs (α, β) of real numbers have each of them didactical advantages and disadvantages.

The following combined procedure is proposed: 1) Definition of R -domain (i. e. field containing the real number system as a subfield). — 2) Problem: to construct a »smallest« R -domain such that the equation $x^2+1=0$ is solvable. — 3) Analysis of the problem: properties of a hypothetical R -domain of this kind. — 4) Impossibility of essentially different solutions. — 5) Construction by aid of number pairs.

A THEOREM BY FÁRY WITH ELEMENTARY APPLICATIONS. OTTO FROSTMAN.

Let v be the angle between two straight lines in space, and let $\varphi(\vec{n})$ be the angle between the orthogonal projections of the same lines into a plane with normal $\vec{n}$. A theorem by István Fáry states that the mean value of $\varphi(\vec{n})$ over all directions $\vec{n}$ is equal to v . Fáry's proof is given, and it is shown how the following series of elementary propositions of solid geometry can be established as consequences of it:

- 1) In any three-sided polyhedral angle the sum of two face angles is greater than the third one.
- 2) In every convex polyhedral angle the sum of the face angles is less than 2π .
- 3) In an n -sided convex polyhedral angle the sum of the edge angles is greater than $(n-2)\pi$ and less than $(n-2)\pi +$ the sum of the face angles.
- 4) If O is an inner point of the tetrahedron $ABCD$, u the sum of the six angles between OA , OB , OC , and OD mutually, and v the sum of the twelve angles between these lines and the edges of the tetrahedron, then $u + v = 6\pi$, and $2\pi < v < 3\pi < u < 4\pi$.
- 5) The sum of the edge angles in a tetrahedron is greater than 2π and less than 3π .

THE TEACHING OF GEOMETRY IN HIGH SCHOOLS. P. RUBINSTEIN, VILJO O. LAINE, BJØRN RUDBERG, S. ÅSTRAND, E. LUNELL and C. E. SJÖSTEDT.

Report from a discussion at a meeting in Stockholm. In spite of different opinions in details there was on the whole a remarkable tendency towards using more heuristics, especially at the incipient stage.

COORDINATES IN DANISH MAPS. HENRY JENSEN.

In all Danish maps a conformal conic projection of an ellipsoid of revolution is employed. To illustrate in a simplified case some problems arising in this connection, a conformal mapping of a *sphere* into one of its tangent cones is considered. Using rectangular coordinates (Danish Lamberts) in the plane where the cone is evolved, formulas for the mapping are developed. The variation of the scale and the angular corrections are studied. Finally some geometric constructions in connection with triangulations are given.